

Johann Wolfgang von Goethe Universität  
Frankfurt am Main

**Zur Existenz von Zwischengruppen bei  
mehrstufigen Inklusionen von  
Dreiecksgruppen**

**Diplomarbeit**

zur Erlangung des akademischen Grades  
eines Diplom-Mathematikers

am Fachbereich 12: Informatik und Mathematik  
Institut für Algebra und Geometrie  
betreut von Prof. Dr. Jürgen Wolfart

eingereicht am 26.02.2008 von:

cand. math.  
Björn Schwalb



## **Erklärung**

Hiermit erkläre ich, Björn Schwalb, dass ich diese Diplomarbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe. Inhaltlich übernommene Stellen wurden als solche gekennzeichnet.

München, den 26.02.2008

Björn Schwalb



# Inhaltsverzeichnis

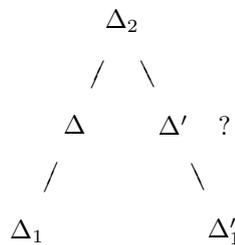
<b>I</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1	Diskontinuierliche Gruppen	1
2	Fuchssche Gruppen	3
2.1	Der Ford-Fundamentalebene . . . . .	5
2.2	Das Einheitskreisscheibenmodell . . . . .	6
2.3	Das Modell der oberen Halbebene . . . . .	8
2.3.1	Der Dirichlet-Fundamentalebene . . . . .	8
3	Riemannsche Flächen	11
<b>II</b>	<b>Untergruppen Fuchsscher Gruppen</b>	<b>15</b>
4	Der kanonische Fundamentalebene	15
5	Endliche transitive Permutationsgruppen	21
6	Untergruppen Fuchsscher Gruppen und endliche transitive Permutationsgruppen	22
7	Normalteiler Fuchsscher Gruppen	27
8	Untergruppen von Dreiecksgruppen	29
9	Inklusionen von Dreiecksgruppen	31
<b>III</b>	<b>Untergruppendiagramme von Dreiecksgruppeninklusionen</b>	<b>43</b>
10	Beispiele verschiedener signaturl gleicher Untergruppen bei Inklusionen von Dreiecksgruppen	43
11	Permutationsisomorphismen zwischen endlichen transitiven Permutationsgruppen	47
12	Die Anzahl verschiedener signaturl gleicher Untergruppen bei Inklusionen von Dreiecksgruppen	47
13	Zur Existenz von Zwischengruppen bei mehrstufigen Inklusionen von Dreiecksgruppen	57

<b>14 Verallgemeinerung</b>	<b>60</b>
<b>IV Anhang</b>	<b>62</b>
<b>15 Maple-Programm 1</b>	<b>62</b>
<b>16 Maple-Programm 2</b>	<b>63</b>
<b>17 Kalkulation zur Inklusion G</b>	<b>67</b>
<b>18 Kalkulation zur Inklusion F</b>	<b>69</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>73</b>

## Zusammenfassung

Diese Diplomarbeit behandelt eine Fragestellung aus dem Gebiet der Fuchsschen Gruppen. Das Problem, das hier geklärt werden soll, entspringt einer im Jahre 2005 erschienenen Arbeit über Konjugatoren Fuchsscher Gruppen und quasilatonische Riemannsche Flächen von Jürgen Wolfart und Ernesto Gironde [GW05]. Es ist dort ein alternativer geometrischer Weg gewählt worden, um es zu umgehen, und es soll nun hier mit den bereits 1970 bereitgestellten Methoden zur Fragestellung der Existenz von Untergruppen Fuchsscher Gruppen von David Singerman [SIN70] gelöst werden.

Betrachtet man eine Dreiecksgruppe  $\Delta_1$  als Untergruppe einer Dreiecksgruppe  $\Delta_2$ , so kann es vorkommen, dass diese Inklusion eine Verfeinerung durch eine dazwischenliegende Dreiecksgruppe  $\Delta$  gestattet. In den Fällen, in denen zu einer gegebenen Dreiecksgruppe  $\Delta_2$  voneinander verschiedene Untergruppen gleicher Signatur  $\Delta_1, \Delta'_1, \dots$  existieren, ist es nicht a priori klar, dass es eine dazwischenliegende Dreiecksgruppe  $\Delta, \Delta', \dots$  gleicher Signatur zu jeder dieser verschiedenen Untergruppen gibt. Das Ziel dieser Arbeit ist es nun, dies zu klären, d.h. zu zeigen, dass es für jedes Paar Dreiecksgruppen  $\Delta_1 \subseteq \Delta_2, \Delta'_1 \subseteq \Delta_2, \dots$  eine dazwischenliegende Dreiecksgruppe  $\Delta, \Delta', \dots$  gibt. Die nachfolgende Abbildung soll dies verdeutlichen.



Im ersten Teil dieser Arbeit wird eine grobe Einleitung in die Theorie der Diskontinuierlichen Gruppen gegeben, die sehr stark auf Fuchssche Gruppen abzielt und mit deren Verbindung zu Riemannschen Flächen abschließt. Sie orientiert sich sehr stark an einem Standardwerk über Diskontinuierliche Gruppen von Joseph Lehner [LEH64].

Im zweiten Teil dieser Arbeit widmen wir uns ganz den Untergruppen Fuchsscher Gruppen und dem von David Singerman [SIN70] bereitgestellten Apparat, der eine notwendige und hinreichende Bedingung hierfür aufzeigt. Wie David Singerman auch zeigt, lassen sich diese Methoden für Normalteiler und Dreiecksgruppen spezialisieren. Wir werden uns dem auch annehmen. Abschließend erarbeiten wir dann eine ausführliche Methode und somit auch einen Beweis zur Erlangung der kompletten Liste von Inklusionen Fuchsscher Dreiecksgruppen, wie sie sich in einer weiteren Arbeit David Singermans befindet [SIN72]. Dies geschieht mit Hilfe zweier Maple-Programme deren Quellcode und Ausgabe sich im Anhang bzw. vierten Teil dieser Arbeit zur Einsicht befindet.

Im dritten Teil dieser Arbeit wird schließlich die oben erläuterte Fragestellung geklärt werden. Sie wird zunächst anhand vieler Beispiele und Erläuterungen verdeutlicht, und im Anschluss dessen eine mögliche Verallgemeinerung auf Fuchssche Gruppen diskutiert.

### **Danksagung**

Ich möchte mich bei Herrn Alexander Hulpke (Colorado State University, USA) bedanken, der mir sehr bereitwillig bei einem Problem geholfen hat, und ganz besonders natürlich bei meinem Betreuer Prof. Dr. Jürgen Wolfart, der stets bemüht war, meine Ausführungen kritisch zu prüfen und mir immer mit hilfreichen Vorschlägen und Ideen zur Seite stand.

# Teil I

## Einleitung

Wir beginnen mit einer kurzen Einleitung in die Theorie der Diskontinuierlichen Gruppen, indem wir einige Definitionen auflisten, und wichtige Erkenntnisse und Sätze nennen, die hier allerdings nicht bewiesen werden sollen. Wir orientieren uns hierbei sehr stark an einem Buch von J. Lehner [LEH64], und stützen uns teilweise auf weitere grundlegende Literatur zu diesem Thema: Ein Buch von S. Katok [KAT92] sowie eine Vorlesung über Fuchssche Gruppen von J. Wolfart [WOL06].

### 1 Diskontinuierliche Gruppen

Zwei Gebiete der Riemannschen Zahlenkugel  $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  nennen wir *konform äquivalent*, wenn es eine konforme Abbildung  $f$  zwischen ihnen gibt.  $f$  heißt konforme Abbildung, falls sie bijektiv, reell stetig differenzierbar, winkel- und orientierungstreu ist. Es sei angemerkt, dass man dies auch biholomorph nennen könnte. Die einfach zusammenhängenden Gebiete zerfallen bezüglich dessen in drei Äquivalenzklassen:  $\widehat{\mathbb{C}}$  selbst, die komplexe Ebene  $\mathbb{C}$  und die offene Einheitskreisscheibe  $\mathbb{E}$ . Dies garantiert der Riemannsche Abbildungssatz, der besagt, dass man jedes einfach zusammenhängende Gebiet ungleich  $\widehat{\mathbb{C}}$ ,  $\mathbb{C}$  konform äquivalent auf  $\mathbb{E}$  abbilden kann. Dies gilt insbesondere für die obere Halbebene  $\mathbb{H}$ .

**THEOREM 1.0.1** *Jede konforme Abbildung von  $\widehat{\mathbb{C}}$ ,  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{E}$  bzw.  $\mathbb{H}$  auf sich selbst, ist eine gebrochen lineare Transformation*

$$\gamma(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad ad - bc \neq 0$$

mit  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ . Man nennt dies auch eine Möbiustransformation.

Die Gesamtheit dieser Transformationen bilden bezüglich Hintereinanderausführung eine Gruppe, die mit  $\text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$  etc. bezeichnet wird. Jede Möbiustransformation lässt sich einer Matrix  $A \in GL(2, \mathbb{C})$  zuordnen, und wir erhalten so einen Gruppenhomomorphismus

$$\varphi : GL(2, \mathbb{C}) \longrightarrow \text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}}), \quad A \longmapsto \gamma_A(z).$$

Dieser hat den Kern  $\lambda I$ , wobei  $\lambda \in \mathbb{C}$  und  $I \in GL(2, \mathbb{C})$  die Einheitsmatrix ist, und so erhalten wir einen Isomorphismus  $\text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}}) \cong \mathbb{P}GL(2, \mathbb{C}) \cong \mathbb{P}SL(2, \mathbb{C}) \cong SL(2, \mathbb{C}) / \{\pm I\}$ . Wir werden im weiteren Verlauf annehmen, dass alle Transformationen die Determinante 1 aufweisen, d.h. wir wählen die entsprechenden Repräsentanten. Explizit lässt sich dies erreichen, indem man jeden Koeffizienten durch  $(ad - bc)^{1/2}$  dividiert.

BEMERKUNG. Möbiustransformationen sind insbesondere Homöomorphismen.  $\mathbb{P}SL(2, \mathbb{C})$  operiert streng dreifach transitiv auf  $\widehat{\mathbb{C}}$ , und somit führen Möbiustransformationen  $\widehat{\mathbb{C}}$ -Kreise in  $\widehat{\mathbb{C}}$ -Kreise über. Unter  $\widehat{\mathbb{C}}$ -Kreisen verstehen wir Kreise in  $\mathbb{C}$  oder Geraden in  $\widehat{\mathbb{C}}$ , indem wir letztere als Kreise durch unendlich oder Kreise von unendlichem Radius interpretieren. Genauer gesagt operiert  $\mathbb{P}SL(2, \mathbb{C})$  sogar transitiv auf der Menge der  $\widehat{\mathbb{C}}$ -Kreise. Des Weiteren erhalten sie das Doppelverhältnis von vier Punkten und sind orientierungstreu.

DEFINITION 1.0.1 Sei  $\Gamma$  eine Untergruppe von  $\mathbb{P}SL(2, \mathbb{C})$ . Ein Punkt  $a \in \widehat{\mathbb{C}}$  heißt *Limespunkt* von  $\Gamma$ , falls es einen Punkt  $z \in \widehat{\mathbb{C}}$  und eine Folge  $(\gamma_n)$  paarweise verschiedener Elemente von  $\Gamma$  gibt, so dass  $\gamma_n z \rightarrow a$ . Wenn  $a$  kein Limespunkt ist, so heißt  $a$  *ordentlicher Punkt*.

Es sei hinzugefügt, dass die Bilder von  $\gamma_n z$  nicht notwendigerweise verschieden sein müssen. Dies ist zum Beispiel der Fall, wenn alle  $\gamma_n$  den Punkt  $a$  zum Fixpunkt haben.

DEFINITION 1.0.2 Sei  $\Gamma$  eine Untergruppe von  $\mathbb{P}SL(2, \mathbb{C})$ . Wir nennen  $\Gamma$  in einem Punkt  $a$  *diskontinuierlich*, wenn  $a$  ein ordentlicher Punkt von  $\Gamma$  ist. Wir nennen  $\Gamma$  auf einer Menge  $S$  *diskontinuierlich*, falls  $\Gamma$  in jedem Punkt von  $S$  diskontinuierlich ist. Eine Gruppe  $\Gamma$  heißt *diskontinuierlich*, falls sie zumindest einen ordentlichen Punkt besitzt.

Die Menge der Limespunkte der Gruppe  $\Gamma$  sei mit  $\mathbb{L} = \mathbb{L}(\Gamma)$ , und die Menge der ordentlichen Punkte mit  $\mathbb{O} = \mathbb{O}(\Gamma)$  bezeichnet. Diese sind laut Definition komplementär, und es gilt,  $\Gamma$  ist genau auf  $\mathbb{O}$  diskontinuierlich. Man sagt dann auch,  $\Gamma$  operiere diskontinuierlich auf  $\mathbb{O}$ . Weiter gilt:

$$\gamma(\mathbb{L}) = \mathbb{L} \quad \text{und} \quad \gamma(\mathbb{O}) = \mathbb{O} \quad \text{für alle} \quad \gamma \in \Gamma.$$

Die abgeschlossene Menge  $\mathbb{L}$  bildet den Rand der offenen Menge  $\mathbb{O}$ , d.h. es ist  $\mathbb{L} = \partial\mathbb{O}$ . Für eine Untergruppe  $\Lambda$  von  $\Gamma$  gilt  $\mathbb{O}(\Gamma) \subset \mathbb{O}(\Lambda)$ . Insbesondere sind also Untergruppen von diskontinuierlichen Gruppen selbst diskontinuierlich.

Das nun folgende Theorem zeigt eine Eigenschaft einer diskontinuierlichen Gruppe auf, die eine viel anschaulichere Interpretation einer solchen Gruppe erlaubt. Sie wird daher auch oft als Definition benutzt.

THEOREM 1.0.2 *Eine Gruppe  $\Gamma$  ist genau dann diskontinuierlich, wenn jeder Punkt  $a \in \mathbb{O}$  eine Umgebung  $U$  besitzt, so dass*

$$|\{\gamma \in \Gamma \mid U \cap \gamma U \neq \emptyset\}| < \infty.$$

Hieraus folgt, dass Bahnen von Punkten aus  $\mathbb{O}$  bei diskontinuierlichen Gruppen keine Häufungspunkte aufweisen. Da  $\mathbb{O}$  eine offene Menge ist, lässt sie

sich in abzählbar viele disjunkte Gebiete  $D_i$  zerlegen:

$$\mathbb{O} = \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i.$$

Man kann dies auf  $\mathbb{L} = \partial\mathbb{O}$  übertragen und erhält:

$$\partial\mathbb{O} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \partial D_i.$$

Ein solches Gebiet  $D_i$  ist also komplett durch Limespunkte berandet. Im Allgemeinen permutieren die Elemente aus  $\Gamma$  diese Gebiete. Es kann allerdings vorkommen, dass  $\Gamma$  einige der  $D_i$  in sich selbst überführt.

**DEFINITION 1.0.3** Eine diskontinuierliche Gruppe  $\Gamma$  heißt *Funktionsgruppe*, wenn es ein wie oben definiertes Gebiet  $D_i$  gibt, das von den Elementen aus  $\Gamma$  in sich selbst überführt wird, d.h. unter der Operation von  $\Gamma$  invariant bleibt. Ein solches Gebiet heißt *Existenzgebiet von  $\Gamma$* .

**BEMERKUNG.** Der Begriff Funktionsgruppe begründet sich durch die Tatsache, dass nicht-konstante automorphe Funktionen nur auf eben diesen existieren. Unter einer automorphen Funktion versteht man eine auf einem Existenzgebiet  $D$  von  $\Gamma$  meromorphe Funktion, die unter  $\Gamma$  invariant bleibt, d.h.  $f(\gamma z) = f(z)$  für alle  $\gamma \in \Gamma$  und  $z \in \mathbb{O}$  erfüllt. Genau aus diesem Grund muss  $\Gamma$  diskontinuierlich in  $D$  sein, denn somit kann  $\Gamma z$ ,  $z \in D$ , keine Häufungspunkte in  $D$  aufweisen. Wäre dies der Fall, so würde  $f$  den gleichen Wert unendlich oft in einer Umgebung eines solchen Häufungspunktes annehmen, und könnte daher nur als konstante Funktion holomorph sein.

## 2 Fuchssche Gruppen

Von nun an werden wir uns nur noch einem ganz bestimmten Typ von Funktionsgruppen widmen, den sogenannten Fuchsschen Gruppen.

**DEFINITION 2.0.4** Eine Funktionsgruppe  $\Gamma$  heißt *Fuchssche Gruppe*, wenn jedes ihrer Elemente das Innere und Äußere eines  $\widehat{C}$ -Kreises  $C$  invariant lässt, d.h. in sich überführt. Man nennt diesen Kreis den Hauptkreis.

Es sei zusätzlich angemerkt, dass  $\Gamma$  diesen Hauptkreis auch invariant lässt.  $\Gamma$  wird dann auch Hauptkreisgruppe genannt. Es gilt  $\mathbb{L} \subseteq C$ , d.h. die Menge der Limespunkte  $\mathbb{L}$  ist hierbei Teil des Hauptkreises. Es existieren somit höchstens zwei Existenzgebiete. Als Beispiel sei hier die Modulgruppe  $\Gamma(1) = \mathbb{P}SL(2, \mathbb{Z})$  genannt, die  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  als Hauptkreis besitzt. Sie hat zwei Existenzgebiete, die obere Halbebene  $\mathbb{H}$  und die untere Halbebene  $-\mathbb{H}$ .

THEOREM 2.0.3 Sei  $\Gamma$  eine Fuchssche Gruppe und sei  $\mathbb{L} = \mathbb{L}(\Gamma)$  die Menge ihrer Limespunkte, so gilt eine der drei folgenden Aussagen:

- (a)  $\mathbb{L} = C$ ,
- (b)  $\mathbb{L}$  hat keine, ein oder zwei Elemente,
- (c)  $\mathbb{L}$  ist eine perfekte, nirgends dichte Teilmenge von  $C$ .

Anhand dessen lassen sich Fuchssche Gruppen in drei Klassen unterteilen. Die Gruppen, die Aussage (a) erfüllen, heißen Fuchssche Gruppen *erster Art* oder Grenzkreisgruppen. Die Gruppen, die Aussage (b) erfüllen, heißen *elementare* Fuchssche Gruppen, und die Gruppen, die Aussage (c) erfüllen, heißen Fuchssche Gruppen *zweiter Art*. Die elementaren Gruppen werden häufig zu den Gruppen zweiter Art gezählt, da sie beide das besitzen, was wir später als „freie Seiten“ bezeichnen werden.

Sei  $\gamma \neq id$  eine Möbiustransformation, so besitzt  $\gamma$  einen oder zwei Fixpunkte. Diese Erkenntnis und die Tatsache  $\mathbb{L} \subseteq C$  erlaubt uns nun die Klassifikation der Elemente einer Fuchsschen Gruppe  $\Gamma$ :

*Elliptische* Transformationen haben einen Fixpunkt innerhalb des Hauptkreises (in einer Halbebene) und einen zweiten außerhalb des Hauptkreises (in der anderen Halbebene). Diese beiden lassen sich durch eine zur komplexen Konjugation  $\mathbb{P}SL(2, \mathbb{C})$ -konjugierte Abbildung ineinander überführen. Sie sind genau die Elemente endlicher Ordnung in  $\Gamma$ .

*Hyperbolische* Transformationen haben zwei verschiedene Fixpunkte in  $C$ .

*Parabolische* Transformationen haben einen Fixpunkt in  $C$ .

Da die Fixpunkte in den letzten beiden Fällen Limespunkte darstellen, sind sie sogar in  $\mathbb{L}$ .

DEFINITION 2.0.5 Sei  $\Gamma$  eine Fuchssche Gruppe. Eine nicht-leere offene Menge  $F \subset \mathbb{O}$  heißt *Fundamentalebene bezüglich*  $\mathbb{O}$  für  $\Gamma$ , wenn

$$F \cap \gamma F = \emptyset \quad \text{für alle} \quad \gamma \in \Gamma - \{id\}$$

und

$$\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma \bar{F} = \mathbb{O}.$$

BEMERKUNG. Schränkt man die obige Definition auf  $D$  ein, wobei  $D$  ein Existenzgebiet der Fuchsschen Gruppe  $\Gamma$  sei, so sprechen wir von einem Fundamentalebene bezüglich  $D$ . Man beachte, dass  $F$  nicht zusammenhängend sein muss.

DEFINITION 2.0.6 Für jede Möbiustransformation  $\gamma$ , die  $\infty$  nicht als Fixpunkt besitzt - d.h.  $c \neq 0$  - definieren wir einen sogenannten isometrischen Kreis  $I(\gamma)$ , vermöge der folgenden Vorschrift:

$$I(\gamma) : |cz + d| = 1.$$

Dieser hat den Mittelpunkt  $-d/c$  und Radius  $1/|c|$ .

BEMERKUNG. Es ist der geometrische Ort aller Punkte, in dem  $\gamma$  wie eine euklidische Isometrie operiert. Für Elemente, die  $\infty$  als Fixpunkt besitzen, gibt es im Allgemeinen keinen oder keinen eindeutigen Kreis mit dieser Eigenschaft.

## 2.1 Der Ford-Fundamentalebereich

Jede Fuchssche Gruppe besitzt einen Fundamentalebereich, der durch Kreisbögen berandet ist. Dieser lässt sich schematisch konstruieren: Eine Fuchssche Gruppe  $\Gamma$  kann durch eine Möbiustransformation  $\tau$  so verschoben werden, dass sie die folgenden Eigenschaften besitzt:

(i)  $\mathbb{O}$  enthält eine Umgebung von  $\infty$ , d.h.  $\infty$  ist ein ordentlicher Punkt.

(ii) Kein Element in  $\Gamma - \{id\}$  besitzt  $\infty$  als Fixpunkt.

Wenn das der Fall ist, besitzt jedes Element in  $\Gamma - \{id\}$  einen isometrischen Kreis. Das Äußere eines isometrischen Kreises  $I(\gamma)$  bezeichnen wir mit  $\text{Ext}(I(\gamma))$ .

THEOREM 2.1.1 Für jede Fuchssche Gruppe  $\Gamma$ , welche die Bedingung (i) und (ii) erfüllt, ist

$$F = \bigcap_{\gamma \in \Gamma - \{id\}} \text{Ext}(I(\gamma))$$

ein Fundamentalebereich bezüglich  $\mathbb{O}$  für  $\Gamma$ . Er heißt Ford-Fundamentalebereich.

Der Fundamentalebereich der ursprünglichen Gruppe lässt sich dann durch die Möbiustransformation  $\tau^{-1}$  aus dem Ford-Fundamentalebereich gewinnen. Wir werden dieses Verfahren im weiteren Verlauf noch einige Male stillschweigend zur Anwendung bringen. Die Bilder  $\gamma\bar{F}$ , ( $\gamma \in \Gamma$ ), parkettieren  $\mathbb{O}$ , und überlappen sich nur am Rand.  $\gamma\bar{F}$  ist im Allgemeinen nicht mehr durch isometrische Kreise berandet, da das Bild eines isometrischen Kreises nicht zwingend ein isometrischer Kreis sein muss.

Um nun einen Fundamentalebereich für  $\Gamma$  bezüglich eines Existenzgebietes  $D$  zu erhalten, bietet sich eine geradezu intuitive Lösung:

THEOREM 2.1.2 Sei  $\Gamma$  eine Fuchssche Gruppe, und sei  $D$  ein Existenzgebiet für  $\Gamma$ . So gilt

$$F_0 = F \cap D$$

ist ein Fundamentalebereich für  $\Gamma$  bezüglich  $D$ .

Wie bereits weiter oben angemerkt wurde, operiert  $PSL(2, \mathbb{C})$  transitiv auf der Menge der  $\widehat{\mathbb{C}}$ -Kreise. Der Hauptkreis einer Fuchsschen Gruppe lässt sich also immer an einen geeigneten Ort verschieben. Die Fuchssche Gruppe, die man dadurch erhält, ist zur ursprünglichen konjugiert, und somit isomorph. In diesem Sinne gibt es zwei wichtige Modelle: Das Einheitskreisscheibenmodell und das Modell der oberen Halbebene. Diese sind durch die Cayley-Transformation konjugiert. Beide Modelle haben ihre Vorteile, wir werden daher beide kurz erläutern.

## 2.2 Das Einheitskreisscheibenmodell

In diesem Modell ist  $C$  der Einheitskreis  $E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ . Man betrachtet hierbei lineare Transformationen der Form

$$\gamma(z) = \frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}} \quad \text{mit} \quad a, c \in \mathbb{C}, \quad a\bar{a} - c\bar{c} = 1.$$

Diese bilden eine Gruppe und lassen die offene Einheitskreisscheibe  $\mathbb{E}$  invariant. Sie werden daher auch mit  $\text{Aut}(\mathbb{E})$  bezeichnet.  $\Gamma$  ist hier also eine Untergruppe von  $\text{Aut}(\mathbb{E})$ .

**BEMERKUNG.** In den Fällen, in denen die Fuchssche Gruppe  $\Gamma$  die Bedingung (ii) des vorherigen Abschnitts erfüllt, kann natürlich so wie oben vorgefahren werden, um einen Fundamentalbereich zu konstruieren, da (i) ohnehin gegeben ist. Die lineare Transformation  $\tau$  kann dann hier sogar so gewählt werden, dass der Hauptkreis festbleibt. Dies ist möglich, da  $\text{Aut}(\mathbb{E})$  transitiv auf  $\mathbb{E}$  operiert. Die Fälle, in denen (ii) nicht zutrifft, stellen sich als diejenigen heraus, die unter gewissen Umständen regelrecht gesucht werden. Die Elemente mit Fixpunkt  $\infty$  - d.h. also  $c = 0$  - sind hier elliptische Transformationen  $\gamma(z) = e^{i\phi}z$ , die den Ursprung festhalten. Sie sind somit nicht nur Elemente, die alle euklidischen Längen unverändert lassen, sondern auch die, die dafür Sorge tragen, dass bei der Parkettierung der offenen Einheitskreisscheibe  $\mathbb{E}$  eine gewisse Symmetrie zu Tage tritt. Wir werden später noch etwas genauer darauf zurückkommen.

Im Folgenden werden wir für Fuchssche Gruppen erster und zweiter Art den Ford-Fundamentalbereich noch etwas genauer erörtern. Hierzu sei das Äußere von  $E$  mit  $\mathbb{V}$  bezeichnet. Ist  $\Gamma$  erster Art, so gibt es zwei Existenzgebiete  $D_1 = \mathbb{E}$  und  $D_2 = \mathbb{V}$ . Ist  $\Gamma$  zweiter Art, so gibt es nur ein Existenzgebiet  $D = \widehat{\mathbb{C}} - \mathbb{L}$ .

Sei  $F$  der Ford-Fundamentalbereich, so definieren wir

$$F^+ = F \cap \mathbb{E}$$

und

$$F^- = F \cap \mathbb{V}$$

wobei  $F^+$  ein Fundamentalbereich bezüglich  $\mathbb{E}$ , und  $F^-$  ein Fundamentalbereich bezüglich  $\mathbb{V}$  ist.

Die Inversion  $\zeta : z \mapsto 1/\bar{z}$  bildet jeden isometrischen Kreis und dessen Inneres auf sich selbst ab, und zusätzlich  $\mathbb{E}$  auf  $\mathbb{V}$ .  $\zeta$  vertauscht also gerade  $F^+$  und  $F^-$ . Es reicht daher  $F^+$  zu studieren.

Sei  $D$  das Existenzgebiet von  $\Gamma$ . Ist  $\Gamma$  erster Art, so wählen wir  $D = \mathbb{E}$ . In diesem Fall ist trivialerweise

$$F_0 = F \cap D = F^+.$$

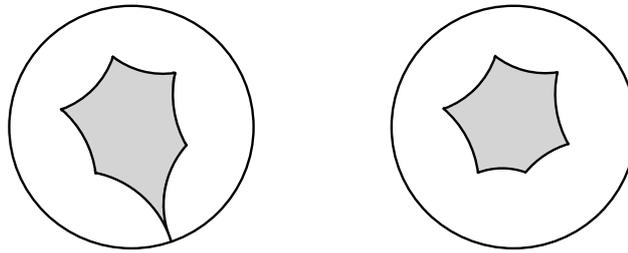


Abbildung 1:  $F^+$  im Fall Fuchsscher Gruppen erster Art

Ist  $\Gamma$  zweiter Art, so haben wir

$$F_0 = F^+ \cup F^- \cup \Phi$$

wobei

$$\Phi = F \cap E = F \cap \{E - \mathbb{L}\}.$$

Genauer gilt

$$\Phi = \bigcup_i f_i,$$

wobei die  $f_i$  offene Kreisbögen (zusammenhängend) in  $E$  sind.  $\{f_i\}$  ist abzählbar und disjunkt.  $f_i$  heißt freie Seite von  $F^+$  bzw.  $F^-$ .

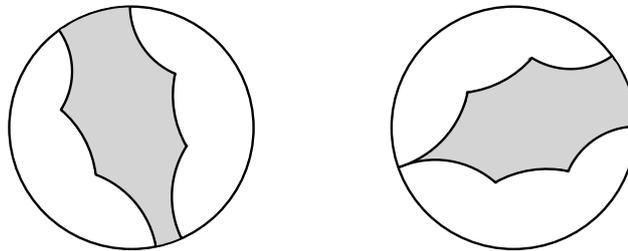


Abbildung 2:  $F^+$  im Fall Fuchsscher Gruppen zweiter Art

BEMERKUNG.  $F^+$  ist ein einfach zusammenhängendes Gebiet.

Die Vorgehensweise, die wir im Einheitskreismodell angewandt haben, lässt sich in einfacher Weise in das Modell der oberen Halbebene übertragen. Dieses werden wir im Folgenden betrachten, um die bisherigen Erkenntnisse noch zu verfeinern.

### 2.3 Das Modell der oberen Halbebene

In diesem Modell ist  $C$  die reelle Gerade  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . Die linearen Transformationen, die die reelle Gerade und die beiden Halbebenen  $\mathbb{H}$  und  $-\mathbb{H}$  invariant lassen, bilden eine Gruppe, und werden mit  $\text{Aut}(\mathbb{H})$  bezeichnet. Dies sind gerade die linearen Transformationen mit reellen Koeffizienten, d.h. also Elemente der  $\mathbb{P}SL(2, \mathbb{R})$ . Wir können hier wie oben vorgehen, um einen Fundamentalbereich zu konstruieren, und somit auch eine Parkettierung der beiden Halbebenen. Betrachtet man diese vom euklidischen Standpunkt aus, so sind die Bilder des Fundamentalbereichs in sehr unterschiedlichen Größen vertreten, und man möchte dies dann nur schwer eine Parkettierung nennen. Poincarés Idee zur Lösung dieses Problems war die Einführung einer nicht-euklidischen Geometrie derart, dass die Möbiustransformationen wie Isometrien auf den Halbebenen operieren. Das Konzept dieser *hyperbolischen Geometrie* ist Folgendes: Die Punkte sind die der oberen Halbebene  $\mathbb{H}$ , die Geraden sind  $\widehat{\mathbb{C}}$ -Kreise orthogonal zur reellen Geraden und werden  $\mathbb{H}$ -Geraden genannt. Man erhält einen Abstandsbegriff durch Einführung der sogenannten *hyperbolischen Metrik*, die unter den Transformationen invariant bleibt.

#### 2.3.1 Der Dirichlet-Fundamentalbereich

Bezeichnet man die hyperbolische Metrik des vorherigen Abschnitts mit  $d$ , so gilt:

**THEOREM 2.3.1** *Sei  $\Gamma \subseteq \mathbb{P}SL(2, \mathbb{R})$  eine Fuchssche Gruppe. Für jeden Nicht-Fixpunkt  $z_0 \in \mathbb{H}$  ist*

$$F_D := \{z \in \mathbb{H} \mid d(z, z_0) < d(z, \gamma(z_0)) \text{ für alle } \gamma \in \Gamma - \{id\}\}$$

*ein Fundamentalbereich für  $\Gamma$ . Er heißt Dirichletpolygon mit Mittelpunkt  $z_0$ .*

Unter einer Seite eines Dirichletpolygons verstehen wir die Menge aller Punkte, für die eine der definierenden Ungleichungen mit Gleichheit erfüllt ist. Genauer gesagt ist dies ein zusammenhängender Teil einer  $\mathbb{H}$ -Geraden. Es kann vorkommen, dass ein elliptischer Fixpunkt im Inneren einer solchen Seite liegt. In diesem Fall vertauscht das elliptische Element die beiden Segmente dieser Seite, die durch diesen Fixpunkt unterteilt werden. Es ist zweckmäßig, diese beiden Segmente als einzelne Seiten zu betrachten. Die Seiten von  $F_D$

treten dann immer paarweise auf. Die Transformation, die solch eine Paarung ausmacht, heißt *Nachbartransformation*. Die Seiten nennt man dann auch konjugiert. Diese sind von den freien Seiten grundlegend verschieden. Denn analog zum Einheitskreismodell können hierbei auch freie Seiten entstehen. Diese liegen dann in  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ .

Wir listen nun einige grundlegende Eigenschaften dieses Fundamentalbereichs auf:

- $F_D$  ist hyperbolisch konvex.
- Jedes Kompaktum  $K \subset \mathbb{H}$  wird von endlich vielen  $\Gamma$ -Translaten  $\gamma \overline{F_D}$  überdeckt.
- Hat die Fuchssche Gruppe  $\Gamma$  den Fundamentalbereich  $F_D$ , so hat  $\gamma \Gamma \gamma^{-1}$  den Fundamentalbereich  $\gamma F_D$  für  $\gamma \in \mathbb{P}SL(2, \mathbb{R})$ .
- $\Gamma$  wird von ihren Nachbartransformationen erzeugt.
- Hyperbolisches Winkelmaß ist euklidisches Winkelmaß.
- Punkte von Seiten in  $\mathbb{H}$ , die zu mehreren Seiten gehören, heißen zufällige Ecken erster Art oder elliptische Ecken. Worin hierbei der Unterschied besteht wird in THEOREM 2.3.2 geklärt werden.
- Punkte von Seiten in  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ , die zu mehreren Seiten gehören, heißen Spitzen, wenn sie sich zusätzlich in  $\mathbb{L}$  befinden. Im anderen Fall nennt man sie wie im Punkt zuvor zufällige Ecken erster Art. Wir werden allerdings auf Letztere nicht genauer eingehen, da sie sich durch eine geschickte Wahl des Mittelpunkts vermeiden lassen. Siehe THEOREM 2.3.4. Sämtliche Innenwinkel sind hier Null.
- Punkte von Seiten in  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ , die auch zu einer freien Seite gehören, heißen zufällige Ecken zweiter Art. Diese treten bei geschickter Wahl des Mittelpunkts (THEOREM 2.3.4) in konjugierten Paaren auf. Der Innenwinkel einer Seite und einer freien Seite ist  $\pi/2$ .

Mit diesen Bezeichnungen geben die zwei nachfolgenden Theoreme weiteren Aufschluss über  $F_D$ :

**THEOREM 2.3.2** *Sei  $F_D$  Dirichlet-Polygon einer Fuchsschen Gruppe  $\Gamma$ . Die Ecken in  $\mathbb{H}$  von  $F_D$  zerfallen in Zyklen  $\Gamma z \cap \overline{F_D}$  endlicher Länge. Für jede feste Ecke  $z$  ist die Summe der Innenwinkel für alle Ecken ihres Zyklus gleich  $2\pi/h$  mit  $h \in \mathbb{N}$ ,  $h > 1$ , wenn  $z$  elliptischer Fixpunkt der Ordnung  $h$  ist.  $z$  heißt dann elliptische Ecke.*

*Besitzt  $\Gamma$  elliptische Elemente, z.B. mit Fixpunkt  $z$ , so folgt:  $F_D$  hat am Rand Ecken aus  $\Gamma z$ . Diese bilden einen elliptischen Zyklus.*

Für  $h = 1$  heißt  $z$  zufällige Ecke erster Art. Hier ist die Summe der Innenwinkel aller Ecken dieses Zyklus somit  $2\pi$ . Im Gegensatz zu einem Zyklus einer zufälligen Ecke zweiter Art, denn hier ist die Summe der Innenwinkel genau  $\pi$ .

**THEOREM 2.3.3**  *$\Gamma$  besitze parabolische Elemente, z.B. mit Fixpunkt  $z(z \in \mathbb{R} \cup \{\infty\})$ , so folgt: Jede Spitze von  $F_D$  ist parabolischer Fixpunkt, und für jeden parabolischen Fixpunkt  $z$  ist  $\Gamma z \cap \overline{F_D}^{\bar{\mathbb{C}}}$  Spitzenzyklus von  $F_D$ , wobei mit  $\overline{F_D}^{\bar{\mathbb{C}}}$  der  $\bar{\mathbb{C}}$ -Abschluss von  $F_D$  gemeint ist.*

Analog zum elliptischen Fall schreibt man hier konventionell  $2\pi/\infty := 0$ . Die Tatsache, dass jeder Nicht-Fixpunkt  $z_0 \in \mathbb{H}$  einer Fuchsschen Gruppe  $\Gamma$  als Mittelpunkt des Dirichletpolygons dienen kann, gibt uns die Möglichkeit ihn so zu wählen, dass  $F_D$  gewisse Eigenschaften erfüllt:

**THEOREM 2.3.4** *Der Mittelpunkt  $z_0 \in \mathbb{H}$  des Dirichletpolygons  $F_D$  kann so gewählt werden, dass  $F_D$  die folgenden Eigenschaften besitzt:*

- (1) *Jeder elliptische und parabolische Zyklus besteht nur aus einem Punkt.*
- (2) *Es gibt keine zufälligen Ecken erster Art in  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ .*

Dieses Theorem bildet später die Grundlage für den sogenannten kanonischen Fundamentalbereich. Drei weitere wichtige Theoreme, die wir später benötigen werden, sind Folgende:

**THEOREM 2.3.5** *Kein hyperbolischer Fixpunkt von  $\Gamma$  gehört zum  $\bar{\mathbb{C}}$ -Abschluss  $\overline{F_D}^{\bar{\mathbb{C}}}$  von  $F_D$ .*

**THEOREM 2.3.6** *Der Zentralisator in  $\mathbb{P}SL(2, \mathbb{R})$  eines elliptischen (bzw. parabolischen, hyperbolischen) Elements der  $\mathbb{P}SL(2, \mathbb{R})$ , besteht aus allen elliptischen (bzw. parabolischen, hyperbolischen) Elementen mit gleicher Fixpunktmenge, zusammen mit der Identität.*

**THEOREM 2.3.7** *Sei  $\Gamma$  eine Fuchssche Gruppe, deren von der Identität verschiedenen Elemente alle die gleiche Fixpunktmenge besitzen, so folgt:  $\Gamma$  ist zyklisch.*

**BEMERKUNG.** Das Konzept der hyperbolischen Geometrie lässt sich ebenso in der Einheitskreisscheibe einführen. Hier kann man zeigen, dass der Ford Fundamentalbereich im Grunde nur ein spezieller Dirichlet Fundamentalbereich ist. Es gilt:  $F^+$  ist ein Dirichlet-Polygon mit Mittelpunkt 0. Dieses Ergebnis ist nicht allzu sehr überraschend, da die isometrischen Kreise, die zur Konstruktion des Ford-Fundamentalbereichs benützt wurden, im Einheitskreismodell hyperbolische Geraden darstellen.

### 3 Riemannsche Flächen

Dieser Abschnitt dient dazu, die Verbindung von Fuchsschen Gruppen und Riemannschen Flächen aufzuzeigen, um später darauf zurückgreifen zu können.

DEFINITION 3.0.1  $X$  heißt *Riemannsche Fläche*, wenn  $X$  ein zusammenhängender Hausdorffraum mit einer komplexen Struktur ist, und eine abzählbare Basis für seine Topologie besitzt.

Unter einer *komplexen Struktur* versteht man eine Äquivalenzklasse komplexer Atlanten, d.h. eine Äquivalenzklasse von Mengen paarweise verträglicher Karten, die untereinander verträglich sind.

Mit  $D$  sei weiterhin ein Existenzgebiet einer Fuchsschen Gruppe  $\Gamma$  bezeichnet. Sei  $P$  die Menge der parabolischen Spitzen von  $\Gamma$ , so definieren wir

$$D^+ = D \cup P.$$

Sei  $\Gamma$  eine Fuchssche Gruppe mit Existenzgebiet  $D$ , so entsteht:

$$S = \Gamma \backslash D^+$$

aus  $D^+$ , indem man alle Punkte miteinander identifiziert, die unter  $\Gamma$  äquivalent sind.  $S$  ist zusammenhängend und heißt Quotientenraum.

BEMERKUNG. Genau diesen Quotientenraum  $S$  erhält man auch aus dem  $\widehat{\mathbb{C}}$ -Abschluss des Fundamentalbereichs  $F_0$  in analoger Weise. Anschaulich formuliert verklebt man die unter  $\Gamma$  konjugierten Seiten miteinander.

THEOREM 3.0.8 *Sei  $\Gamma$  eine Fuchssche Gruppe mit Existenzgebiet  $D$ .  $S = \Gamma \backslash D^+$  kann eine komplexe Struktur gegeben werden, die es zu einer Riemannschen Fläche macht.*

Man kann  $D^+$  mit einer Topologie versehen, so dass  $S$  mit der von der Orbitprojektion  $\sigma : D^+ \rightarrow S = \Gamma \backslash D^+$  induzierte Quotiententopologie ein Hausdorffraum wird. Die komplexe Struktur, von der im Theorem die Rede ist, wird ebenfalls von  $\sigma$  induziert.

Eine wichtige Klasse Riemannscher Flächen sind die kompakten Riemannschen Flächen. Diese sind - topologisch gesehen - Brezelflächen mit  $g$  Löchern bzw. Kugeln mit  $g$  Henkeln, wobei  $g \in \mathbb{N}_0$  das Geschlecht der Fläche bezeichnet.

THEOREM 3.0.9 *Die Riemannsche Fläche  $S = \Gamma \backslash D^+$  ist genau dann kompakt, wenn  $\overline{F_0}$  kompakt in  $D^+$  ist.*

Der Fundamentalbereich  $F_0$  von  $\Gamma$  kann benutzt werden, um das Geschlecht der Fläche  $S$  zu bestimmen:

THEOREM 3.0.10 Sei  $\overline{F_0}$  kompakt in  $D^+$ . Genau dann hat  $F_0$  endlich viele Seiten und  $\overline{F_0}$  trifft  $\partial D$  nur in parabolischen Spitzen.  $\overline{F_0}$  hat daher endlich viele Zyklen, d.h. unter  $\Gamma$  äquivalente Ecken, und es gilt

$$g = \frac{1}{2}(k + 2 - f - e)$$

wobei  $g$  das Geschlecht von  $S$ ,  $f$  die Anzahl der Zellen,  $e$  die Anzahl der Zyklen und  $k$  die Anzahl der Seitenpaare bzw. freien Seiten von  $F_0$  ist.

BEMERKUNG. Der Beweis dieses Theorems basiert auf Eulers Polyedersatz. Dies ist auch anschaulich leicht nachzuvollziehen, da der Orbitraum mit Hilfe der identifizierten Seiten und Zyklen zu einem Polyeder - einem mit endlich vielen Polygonen berandeten drei-dimensionalen Körper - homöomorph ist. Damit hier ein Polyeder im geometrischen Sinne entsteht, lässt sich eine Triangulierung durch Einziehen zusätzlicher Seiten erreichen, die die Euler-Charakteristik nicht ändert. Im Fall einer Gruppe mit freien Seiten befindet sich  $\overline{F_0}$  auf beiden Seiten des Hauptkreises. Hat man hier nur eine freie Seite gegeben, so macht es keinen Unterschied, ob diese mitgezählt wird oder nicht, denn dieser Vorgang entspricht dem Einziehen einer Seite, und ändert die Euler-Charakteristik nicht. Hat man allerdings mehr als eine freie Seite gegeben, so müssen diese, bis auf eine im zuvor erklärten Sinne optionale, hierbei mitgezählt werden, da es sonst nur eine nicht einfach zusammenhängende Zelle gäbe. Diese würde aber dann kein Polygon darstellen, und so wäre die Formel nicht anwendbar. Zählt man alle freien Seiten mit, so ergeben sich zwei Polygone als Zellen, zählt man alle bis auf eine der freien Seiten mit, ergibt sich ein Polygon als Zelle, und die Formel ist anwendbar.

Wir haben bisher immer vorausgesetzt, dass  $D$  ein Existenzgebiet, d.h. ein maximales Gebiet ordentlicher Punkte einer Fuchs'schen Gruppe  $\Gamma$  ist, das unter dieser invariant bleibt. Betrachten wir im Einheitskreismodell eine von einem hyperbolischen Element erzeugte zyklische Gruppe  $\Omega$ , so ist  $\Omega \setminus \mathbb{E}$  sicherlich nicht kompakt. Genauer gesagt ist  $\Omega \setminus \mathbb{E}$  homöomorph zu einer Kugel, bei der zwei disjunkte Kreisscheiben entfernt wurden.

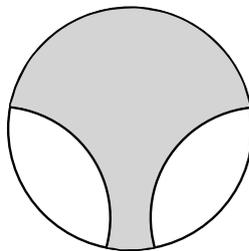


Abbildung 3:  $F^+$  für  $\Omega$  im Einheitskreis

Das Existenzgebiet dieser Gruppe ist eigentlich  $D = D^+ = \widehat{\mathbb{C}} - \{z_1, z_2\}$ , wobei  $\{z_i\}$  die Fixpunkte des hyperbolischen Elements sind. Diese liegen als Limespunkte auf dem Einheitskreis, und mit THEOREM 2.3.5 ist  $\Omega \setminus D^+$  eine kompakte Riemannsche Fläche, nämlich ein Torus.

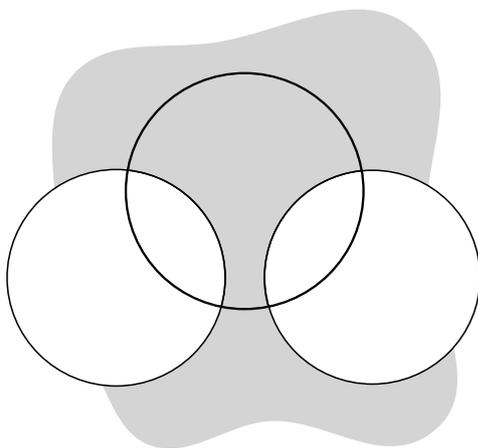


Abbildung 4:  $F_0$  für  $\Omega$  in  $\widehat{\mathbb{C}}$

Freie Seiten führen also bei der „Verdopplung“ des Fundamentalbereichs zu Henkeln. Dies funktioniert nicht für parabolische Spitzen, auch wenn dieses anschaulich wäre. Parabolische Fixpunkte müssen hierbei doppelt gezählt werden - für das Innere und Äußere des Hauptkreises jeweils einmal - aufgrund der speziellen Wahl der Umgebung, die an diesen Punkten für THEOREM 3.0.8 getroffen werden muss. Eine von einem parabolischen Element erzeugte zyklische Gruppe, führt - bei Betrachtung im eigentlichen Existenzgebiet - ebenso wie eine von einem elliptischen Element erzeugte zyklische Gruppe, zu einer Fläche von Geschlecht 0.

**BEMERKUNG.** Die automorphen Funktionen einer Fuchsschen Gruppe  $\Gamma$  auf einem Existenzgebiet  $D$ , von denen oben in einer Bemerkung kurz die Rede war, entpuppen sich gerade als die meromorphen Funktionen auf der zugehörigen Riemannschen Fläche  $S = \Gamma \setminus D^+$ . Man kann zeigen, dass diese isomorphe Körper bilden.

Diese bisherige Darstellung der Verbindung von Fuchsschen Gruppen und Riemannschen Flächen ist eher etwas außergewöhnlich. Für gewöhnlich findet man in der Literatur die folgende Darstellungsweise:

**THEOREM 3.0.11** *Sei  $\Gamma$  eine Fuchssche Gruppe mit Existenzgebiet  $D$ .  $S' = \Gamma \setminus D$  kann eine komplexe Struktur gegeben werden, die es zu einer Riemannschen Fläche macht.*

Hier wird auf die Hinzunahme der parabolischen Spitzen verzichtet. Da  $D$  dann offen ist, verwendet man hier die Relativtopologie der Sphere  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Die komplexe Struktur wird wie im obigen Fall von der Orbitprojektion induziert.

**THEOREM 3.0.12** *Die Riemannsche Fläche  $S' = \Gamma \backslash D$  ist genau dann kompakt, wenn  $\overline{F_0}$  kompakt in  $D$  ist.*

Obiges  $S$  kann durch „Kompaktifizierung“ aus  $S'$  gewonnen werden, indem man Umgebungen der Bilder parabolischer Fixpunkte unter der Orbitprojektion adjungiert.

Es kommt hier ebenso auf die Wahl des zugrunde liegenden Raumes an. Wählt man zum Beispiel im Modell der oberen Halbebene für  $D$  nur die obere Halbebene  $\mathbb{H}$ , so ist die anschauliche Interpretation hier die folgende: Die Fläche zu einer beliebigen Fuchsschen Gruppe entsteht hierbei aus einer kompakten Riemannschen Fläche entsprechenden Geschlechts, indem man für jeden parabolischen Spitzenzyklus einen Punkt, und für jede freie Seite eine Kreisscheibe entfernt.

## Teil II

# Untergruppen Fuchsscher Gruppen

Im zweiten Teil dieser Arbeit, werden wir nun eine exaktere Arbeitsweise wählen. Genauer gesagt werden wir zu allen Behauptungen Beweise liefern, oder zumindest explizite Literaturangaben dazu machen. In den nächsten beiden Kapiteln werden wir zunächst noch einige Hilfsmittel bereitstellen, um dann das Schlüsseltheorem dieser Arbeit im anschließenden Kapitel zu beweisen. Dieses wird uns eine notwendige und hinreichende Bedingung zur Existenz einer Untergruppe  $\Gamma_1$  einer Fuchsschen Gruppe  $\Gamma$  von endlichem Index mit gegebener Signatur aufzeigen.

## 4 Der kanonische Fundamentalbereich

Unter einer Fuchsschen Gruppe  $\Gamma$  verstehen wir von nun an eine *endlich erzeugte* Untergruppe der  $PSL(2, \mathbb{R})$ , die diskontinuierlich auf der oberen Halbebene  $\mathbb{H}$  operiert.  $\mathbb{H}$  ist also, soweit nichts anderes genannt wird, von nun an unser Existenzgebiet. Jede solche endlich erzeugte Fuchssche Gruppe besitzt einen Fundamentalbereich mit endlich vielen Seiten. Siehe hierzu [KAT92, Theorem 4.6.1].

Laut [LEH64, Theorem S.245] besitzt jede solche endlich erzeugte nicht-elementare Fuchssche Gruppe sogar einen *kanonischen Fundamentalbereich*  $F$ . Er entsteht aus dem in THEOREM 2.3.4 bereitgestellten Dirichletpolygon mit speziellen Eigenschaften, durch Umordnen der Seiten. Er besitzt je eine elliptische Ecke für jede  $\Gamma$ -Bahn elliptischer Fixpunkte. Je eine Spitze für jede  $\Gamma$ -Bahn parabolischer Fixpunkte. Zu jeder freien Seite gehören jeweils zwei zueinander konjugierte Ecken zweiter Art. Die restlichen Eckpunkte bilden einen Zyklus einer zufälligen Ecke erster Art. Die Seitenanordnung dieses kanonischen Fundamentalbereichs  $F$  führt zu einer sogenannten *kanonischen Präsentation*:

$\Gamma$  hat die folgenden Nachbartransformationen (Erzeugende):

$a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$	(hyperbolisch)
$x_1, \dots, x_r$	(elliptisch)
$p_1, \dots, p_s$	(parabolisch)
$h_1, \dots, h_t$	(hyperbolische Randelemente)

Die Seiten dieses kanonischen Polygons sind in folgender Weise angeordnet:

$$\alpha_1 \beta_1 \alpha'_1 \beta'_1 \dots \alpha_g \beta_g \alpha'_g \beta'_g \chi_1 \chi'_1 \dots \chi_r \chi'_r \rho_1 \rho'_1 \dots \rho_s \rho'_s \eta_1 f_1 \eta'_1 \dots \eta_t f_t \eta'_t$$

Hierbei sind die entsprechenden konjugierten Seiten mit einem Hochkomma gekennzeichnet.  $\alpha, \beta, \chi, \rho$  und  $\eta$  bezeichnen die Seiten, die jeweils durch

$a, b, x, p$  und  $h$  gepaart werden. Mit hyperbolischen Randelementen sind also genau diese hyperbolischen Elemente bezeichnet, zwischen deren konjugierten Seiten eine freie Seite  $f_l$  liegt. Da  $\Gamma$  von ihren Nachbartransformationen erzeugt wird, führt diese Seitenanordnung zu folgenden Relationen:

$$x_1^{m_1} = x_2^{m_2} = \dots = x_r^{m_r} = \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] \prod_{j=1}^r x_j \prod_{k=1}^s p_k \prod_{l=1}^t h_l = 1$$

Bei den ersten  $r$  Relationen spricht man von den sogenannten *lokalen Relationen*. Sie entstehen, wenn man einen elliptischen Eckpunkt des Fundamentalbereichs  $F$  umläuft. Die letzte Relation entsteht, wenn man den gesamten Fundamentalbereich  $F$  einmal bezüglich seiner Seitenpaarungen abläuft.

BEMERKUNG. Betrachtet man nur die Relationen, so sind parabolische und hyperbolische Randelemente in der „abstrakten Gruppe“ nicht unterscheidbar. Tatsächlich aber macht die Existenz nur eines hyperbolischen Randelements bereits den Unterschied zwischen Fuchsscher Gruppen erster und zweiter Art aus.

Wir sagen dann,  $\Gamma$  hat die Signatur

$$(g; m_1, m_2, \dots, m_r; s; t). \quad (1)$$

$m_i$  nennt man Perioden von  $\Gamma$ .

BEMERKUNG. Jede Fuchssche Gruppe besitzt solch eine eindeutige „kanonische“ Signatur. Diese ist allerdings nicht invariant bzgl. aller möglichen Dirichletpolygone, da die Anzahl der freien Seiten hierbei variieren kann. Lehner [LEH64] benützt in seiner Signatur keinen Platzhalter für hyperbolische Randelemente  $t$ , da er bei Gruppen zweiter Art immer  $\mathbb{O}$  als Existenzgebiet verwendet. Daher kommt es bei einem „am Hauptkreis gelegenen“ hyperbolischen Element bereits zu einem weiteren Geschlecht  $g$ . Seine Signatur stellt daher eine Invariante der Gruppe  $\Gamma$  dar, die sich bereits an allen  $F_D$  ablesen lässt. Der Korrektheit halber sei angemerkt, dass Lehner [LEH64] die Signatur zunächst als Invariante einer Fuchsschen Gruppe einführt, deren Fundamentalbereich endlich viele Seiten besitzt, um daraus später die Existenz eines kanonischen Polygons bei endlicher Signatur zu zeigen. Unsere Signatur hingegen ist speziell auf das kanonische Polygon zugeschnitten.

In einigen Fällen wird es zweckmäßig sein, ein parabolisches Erzeugendes als ein elliptisches Erzeugendes unendlicher Ordnung anzusehen. Wir schreiben Signatur (1) in solchen Fällen, in folgender Weise

$$(g; m_1, \dots, m_u; t). \quad (2)$$

$u$  ergibt sich hier aus  $r + s$  und

$$m_{r+1} = \dots = m_u = \infty.$$

**THEOREM 4.0.13** *Jedes elliptische Element von  $\Gamma$  ist zu einer Potenz eines der  $x_j$  ( $1 \leq j \leq r$ ) konjugiert.*

*Beweis.* Sei  $y$  ein beliebiges elliptisches Element aus  $\Gamma$ , so besitzt  $y$  einen Fixpunkt in  $\mathbb{H}$ . Mit THEOREM 2.3.2 folgt, dieser ist ein Eckpunkt einer Kopie von  $\overline{F}$ . Es existiert also ein  $\gamma \in \Gamma$  mit  $y \in \gamma\overline{F}$ . Das mit  $\gamma$  konjugierte elliptische Element  $\gamma y \gamma^{-1}$  besitzt seinen Fix- bzw. Eckpunkt in  $\overline{F}$ . Dies ist ein Fixpunkt eines der  $x_j$ , und da alle  $x_j$  Nachbartransformationen von  $F$  sind, folgt  $\gamma y \gamma^{-1} \in \langle x_j \rangle$  für geeignetes  $j$ , wobei  $\langle x_j \rangle$  die von  $x_j$  erzeugte zyklische Untergruppe von  $\Gamma$  ist, d.h. die Untergruppe aller Elemente von  $\Gamma$ , die den gleichen Fixpunkt besitzen. Siehe hierzu THEOREM 2.3.7. Daraus folgt die Behauptung.  $\square$

**THEOREM 4.0.14** *Jedes parabolische Element von  $\Gamma$  ist zu einer Potenz eines der  $p_k$  ( $1 \leq k \leq s$ ) konjugiert.*

*Beweis.* Sei  $y$  ein beliebiges parabolisches Element aus  $\Gamma$ , so besitzt  $y$  einen Fixpunkt in  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . Mit THEOREM 2.3.3 folgt, dieser ist eine Spitze einer Kopie von  $\overline{F}^c$ . Es existiert also ein  $\gamma \in \Gamma$  mit  $y \in \gamma\overline{F}^c$ . Das mit  $\gamma$  konjugierte parabolische Element  $\gamma y \gamma^{-1}$  besitzt seinen Fixpunkt bzw. Spitze in  $\overline{F}^c$ . Dies ist ein Fixpunkt eines der  $p_k$ , und da alle  $p_k$  Nachbartransformationen von  $F$  sind, folgt  $\gamma y \gamma^{-1} \in \langle p_k \rangle$  für geeignetes  $k$ , wobei  $\langle p_k \rangle$  die von  $p_k$  erzeugte zyklische Untergruppe von  $\Gamma$  ist. Siehe hierzu THEOREM 2.3.7. Daraus folgt die Behauptung.  $\square$

**THEOREM 4.0.15** *Jedes hyperbolische Randelement von  $\Gamma$  ist zu einer Potenz eines der  $h_l$  ( $1 \leq l \leq t$ ) konjugiert.*

*Beweis.* Der Beweis zu diesem Theorem folgt einer Arbeit von C. Maclachlan [MAC71]. Die Operation von  $\Gamma$  - hier zweiter Art - unterteilt  $\mathbb{O} \cap (\mathbb{R} \cup \{\infty\})$  in Einklang mit THEOREM 2.0.3 in disjunkte Komponenten, genauer gesagt Intervalle. Eine solche Komponente wird von einem entsprechenden Randelement in sich übergeführt.

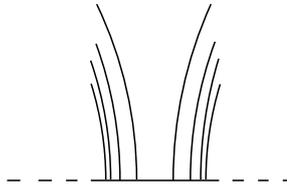


Abbildung 5: Darstellung einer Komponente

Die Operation von  $\Gamma$  unterteilt die Menge der Komponenten in disjunkte Äquivalenzklassen.

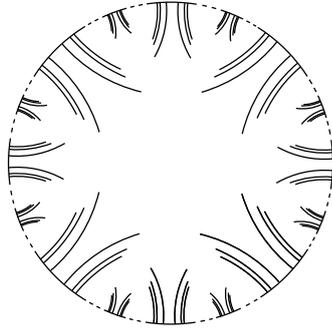


Abbildung 6: Darstellung im Einheitskreismodell

Sei mit  $C_l$  die Äquivalenzklasse bezeichnet, die die Komponente  $c_l$  enthält, in der sich die freie Seite  $f_l$  befindet. Sei  $h$  ein beliebiges hyperbolisches Randelement und  $hc = c$ , wobei  $c$  eine Komponente eines der  $C_l$  ist. Letzteres folgt unmittelbar aus den Eigenschaften eines Fundamentalbereichs. Genauer gesagt existiert ein  $\gamma \in \Gamma$  mit  $c = \gamma c_l$  für geeignetes  $l$ . Es folgt  $\gamma^{-1}h\gamma c_l = c_l$ , und somit  $\gamma^{-1}h\gamma(f_l) \in c_l$ . Da  $c_l$  keine Limespunkte enthält, gibt es eine endliche Anzahl, an  $c_l$  angrenzende Nachbarfundamentalbereiche, derart, dass  $F = \tau_0(F), \tau_1(F), \dots, \tau_n(F) = \gamma^{-1}h\gamma(F)$ .  $\tau_i(F)$  ist hierbei ein Nachbarfundamentalbereich von  $\tau_{i+1}(F)$ , so dass gilt  $\tau_1 = h_l^{\pm 1}$  und gleichermaßen  $\tau_{i+1} = h_l^{\pm 1}\tau_i$ . Insgesamt folgt daher die Behauptung  $\gamma^{-1}h\gamma = h_l^{\pm n}$ .  $\square$

Zudem ist es so, dass keines der Erzeugenden zu einer Potenz eines der anderen Erzeugenden konjugiert ist. Dass nur Elemente des gleichen Typs zueinander konjugiert sein können, folgt leicht durch ihr Fixpunktverhalten. Für elliptische und parabolische Elemente folgt dies dann aus der speziellen Wahl des Fundamentalbereichs  $F$ , da diese konjugierte Fixpunkte haben müssten. Für hyperbolische Randelemente würde sich aus der gegenteiligen Aussage ein Widerspruch zu den Eigenschaften eines Fundamentalbereichs ergeben.

Mit den bisher bereitgestellten Erkenntnissen sind wir nun in der Lage Fuchssche Gruppen anhand ihrer Signatur zu kategorisieren. Diese Sichtweise wird uns später von Nutzen sein, wenn von Inklusionen bestimmter Fuchsscher Gruppen die Rede ist, denn hierbei spielt im Wesentlichen die Signatur eine Rolle.

**DEFINITION 4.0.2** Ein *geometrischer Isomorphismus* einer Fuchsschen Gruppe  $\Gamma$  ist ein Isomorphismus  $r : \Gamma \longrightarrow \mathbb{P}SL(2, \mathbb{R})$ , der die folgenden Eigenschaften erfüllt:

- (1)  $r(\Gamma)$  ist eine Fuchssche Gruppe.
- (2)  $r$  führt parabolische (hyperbolische) Randelemente in parabolische (hyperbolische) Randelemente über.

Da  $r$  offensichtlich elliptische Elemente auf ebensolche gleicher Ordnung abbildet, ersieht man aus der obigen Definition leicht, dass  $r$  die Signatur erhält. Einen solchen geometrischen Isomorphismus gibt es zwischen jeglichen Fuchsschen Gruppen der selben Signatur, indem man die kanonischen Erzeugenden in entsprechender Weise aufeinander abbildet. Dass der Typ eines beliebigen Elements hierbei erhalten bleibt, liegt nun daran, dass dieses - mit Ausnahme der hyperbolischen Elemente - zu einer Potenz eines der Erzeugenden konjugiert ist. Mit Hilfe der Isomorphieeigenschaft überträgt sich dies in einfacher Weise. Wir bezeichnen mit  $R(\Gamma)$  die Menge aller geometrischen Isomorphismen der Fuchsschen Gruppe  $\Gamma$  und erhalten somit eine vollständige Isomorphieklasse bzgl. einer Signatur  $\sigma$  mit  $\Gamma$  als Repräsentanten.

DEFINITION 4.0.3 Für eine Fuchssche Gruppe  $\Gamma$  mit Signatur (1) führen wir die folgende Größe ein:

$$M(\Gamma) = 2g - 2 + \sum_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) + s + t. \quad (3)$$

Eine Fuchssche Gruppe erster Art existiert genau dann mit gegebener Signatur, wenn  $M(\Gamma) > 0$  ist. Diese Behauptung folgt mit Poincarés Theorem [KAT92, S.92-99]. Hierbei ist immer  $t = 0$  und  $2\pi M(\Gamma)$  das hyperbolische Volumen des Fundamentalbereichs. Für Fuchssche Gruppen zweiter Art gilt ebenfalls  $M(\Gamma) > 0$ . Hierbei ist immer  $t > 0$  und das hyperbolische Volumen des Fundamentalbereichs unendlich. Die einzigen Gruppen, für die  $M(\Gamma) \leq 0$  gilt, sind die elementaren Fuchsschen Gruppen.

BEMERKUNG. Dass bei Fuchsschen Gruppen zweiter Art tatsächlich auch  $M(\Gamma) > 0$  ist, verifiziert man leicht durch Ausschließen endlich vieler Signaturen mit  $M(\Gamma) \leq 0$ . Diese sind entweder als kanonische Präsentationen nicht sinnvoll oder repräsentieren elementare Fuchssche Gruppen. Also zyklische Gruppen, die von einem elliptischen, parabolischen oder hyperbolischen Element erzeugt werden oder eine von einem hyperbolischen Element und einer elliptischen Involution erzeugte Gruppe isomorph zur unendlichen Diedergruppe  $D_\infty$ . Diese hat die Signatur  $(0; 2, 2; 0; 1)$ . Hierbei werden die Fixpunkte des hyperbolischen Elements durch die elliptische Involution vertauscht.

Mit der Größe  $M(\Gamma)$  lässt sich die sogenannte *Riemann-Hurwitz-Formel* beschreiben. Für nicht elementare Fuchssche Gruppen  $\Gamma_1$  und  $\Gamma$  mit  $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$  gilt:

$$[\Gamma : \Gamma_1] = \frac{M(\Gamma_1)}{M(\Gamma)}. \quad (4)$$

Diese lässt sich in voller Allgemeinheit nur beweisen, wenn sowohl  $M(\Gamma_1) > 0$ , als auch  $M(\Gamma) > 0$  ist. Denn mit einer von einem elliptischen Element

erzeugten zyklischen Gruppe als Untergruppe lassen sich hierfür leicht Gegenbeispiele konstruieren. Aus diesem Grund werden wir elementare Fuchsische Gruppen von nun an aus unseren Betrachtungen ausschließen. Es wird also im weiteren Verlauf, soweit nicht anders genannt, immer von nicht elementaren Fuchsschen Gruppen die Rede sein, auch wenn dies nicht explizit angegeben wird. Zudem ist es so, dass Fuchssche Gruppen erster Art (zweiter Art) nur Gruppen erster Art (zweiter Art) enthalten können. Dies wird später in THEOREM 6.0.18 noch etwas klarer werden.

Im Fall Fuchsscher Gruppen erster Art - also  $t = 0$  - folgt (4) aus der Betrachtung der Fundamentalbereiche und dessen hyperbolischen Volumina. Siehe hierzu [WOL06, §9].

Im Fall Fuchsscher Gruppen zweiter Art - also  $t > 0$  - folgt die Formel mit zwei Theoremen aus einer Arbeit von C. Maclachlan [MAC71, S.107]: Auch wenn wir uns weiter oben auf  $\mathbb{H}$  als Existenzgebiet geeinigt haben, müssen wir hierfür nun doch eine Ausnahme machen. Für die nun folgende Beweisskizze sei also wieder  $\mathbb{O}$  das Existenzgebiet einer Fuchsschen Gruppe zweiter Art  $\Gamma$ . Sei  $\psi : \mathbb{O} \rightarrow \Gamma \backslash \mathbb{O}$  die Orbitprojektion, so dass  $\Gamma \backslash \mathbb{O}$  eine Riemannsche Fläche bildet, und sei  $d_\Gamma : \Gamma \backslash \mathbb{O} \rightarrow \mathbb{N}_0, [z] \mapsto \text{mult}_z(\psi)$  der sogenannte Verzweigungsindex, der jedem kritischen Wert der Orbitprojektion die Multiplizität eines seiner Urbilder (Verzweigungspunkte) zuordnet.  $d_\Gamma$  ist wohldefiniert, da  $\psi$  als Orbitprojektion normal und somit gleichverzweigt ist. Siehe hierzu [LAM05]. Genauer gesagt nimmt  $d_\Gamma$  für jeden elliptischen Fixpunkt die Ordnung des entsprechenden elliptischen Elements, für jeden parabolische Fixpunkt den Wert  $\infty$  und sonst den Wert 1 an. Da  $\Gamma$  endlich erzeugt ist, folgt mit [HEI64, Theorem 4.3 und Theorem 10.1], dass  $\psi(\mathbb{O}) = \Gamma \backslash \mathbb{O}$  konform äquivalent zu einer kompakten Riemannschen Fläche ist, bei der endlich viele Punkte entfernt wurden und  $\{d_\Gamma(z) > 1\}$  endlich ist. C. Maclachlan macht sich die Uniformisierung von  $\mathbb{O}$  durch  $\mathbb{H}$  zu Nutze, um die Fuchssche Gruppe zweiter Art  $\Gamma$  mit einer Fuchsschen Gruppe erster Art  $\bar{\Gamma}$  in Verbindung zu bringen.

BEMERKUNG. Man nennt jede unverzweigte Überlagerung einer Riemannschen Fläche  $X$  durch  $\widehat{\mathbb{C}}, \mathbb{C}$  oder  $\mathbb{H}$  eine Uniformisierung von  $X$ . Der Uniformisierungssatz garantiert eine solche Überlagerung für jede Riemannsche Fläche. Sie ist als universelle Überlagerung normal und bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Eine Riemannsche Fläche heißt *hyperbolisch*, wenn sie durch  $\mathbb{H}$  uniformisiert wird, und somit nicht zu  $\widehat{\mathbb{C}}, \mathbb{C}$ , zur punktierten Ebene  $\mathbb{C}^x := \mathbb{C} - \{0\}$  oder zu einem Torus isomorph ist. Siehe hierzu [LAM05, S.222-223].

Sei  $U : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{O}$  die besagte Uniformisierung, und sei  $\psi : \mathbb{O} \rightarrow \Gamma \backslash \mathbb{O}$  die Orbitprojektion. Maclachlan definiert nun  $\bar{\Gamma}$  als die Gruppe der konformen Automorphismen von  $\mathbb{H}$ , die  $\psi \circ U$  invariant lassen. Dazu sei  $\varphi : \mathbb{H} \rightarrow \bar{\Gamma} \backslash \mathbb{H}$  die Orbitprojektion. Mit [HEI64, Theorem 8.1] folgt:  $\bar{\Gamma} \backslash \mathbb{H} = \varphi(\mathbb{H})$  ist konform äquivalent zu  $\Gamma \backslash \mathbb{O} = \psi \circ U(\mathbb{H})$ , so dass  $\tau \circ \varphi = \psi \circ U$ , wobei  $\tau$

die konforme Abbildung sei.  $\bar{\Gamma}$  ist erster Art und es gilt:  $d_{\Gamma} = \tau \circ d_{\bar{\Gamma}}$ . D.h. der Verzweigungsindex stimmt an entsprechenden Punkten überein.  $\Gamma \backslash \mathbb{O}$  ist die „Verdopplung“ von  $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ , und es ist daher auch sehr anschaulich, dass  $\bar{\Gamma} \backslash \mathbb{H}$  - konform äquivalent zu  $\Gamma \backslash \mathbb{O}$  - das Geschlecht  $2g + (t - 1)$  besitzt. Dass freie Seiten zu Henkeln führen, hatten wir bereits am Beispiel der von einem hyperbolischen Element erzeugten zyklischen Gruppe gesehen. Seine Überlegungen münden in folgendem Theorem:

**THEOREM 4.0.16** *Hat  $\Gamma$  die Signatur  $(g; m_1, \dots, m_r; s; t)$  mit  $t > 0$ , so hat  $\bar{\Gamma}$  die Signatur  $(2g + (t - 1); m_1, \dots, m_r, m_r; 2s; 0)$ .*

**BEMERKUNG.** Das Geschlecht der „verdoppelten“ Fläche  $\Gamma \backslash \mathbb{O}$  lässt sich auch mittels THEOREM 3.0.10 ermitteln. Es ist hierbei darauf zu achten, dass man entsprechend der BEMERKUNG zu THEOREM 3.0.10 mindestens  $t - 1$  freien Seiten in die Kalkulation miteinbezieht.

**THEOREM 4.0.17** *Sei  $\Gamma$  mit Signatur  $(g; m_1, \dots, m_r; s; t)$  mit  $t > 0$  gegeben. Für jede Untergruppe  $\Gamma_1$  von  $\Gamma$  vom Index  $N$  folgt,  $\bar{\Gamma}_1$  ist eine Untergruppe von  $\bar{\Gamma}$  vom Index  $N$ .*

Der Fall  $t > 0$  lässt sich also auf den Fall  $t = 0$  zurückspielen. Die obige Behauptung ergibt sich nun durch eine einfache Rechnung:

$$[\Gamma : \Gamma_1] = [\bar{\Gamma} : \bar{\Gamma}_1] = \frac{M(\bar{\Gamma}_1)}{M(\bar{\Gamma})} = \frac{2M(\Gamma_1)}{2M(\Gamma)} = \frac{M(\Gamma_1)}{M(\Gamma)}$$

## 5 Endliche transitive Permutationsgruppen

Wir unternehmen nun einen kleinen Ausflug in die Theorie der Permutationsgruppen, der sich über zwei Lemmata erstreckt, die wir später brauchen werden.

Unter einer Permutationsgruppe  $G$  verstehen wir eine Untergruppe der  $S_N$ . Wir werden daher darauf verzichten, immer explizit anzugeben, dass diese endlich ist, da nur von solchen die Rede ist. Besteht  $\{1, \dots, N\}$  bzgl. der Operation von  $G$  nur aus einer einzigen Bahn, so sagen wir  $G$  operiert transitiv auf  $N$  Elementen.

**LEMMA 5.0.1** *Sei  $G$  eine Permutationsgruppe, die transitiv auf  $N$  Elementen operiert, und sei  $G_i$  der Stabilisator von  $i \in \{1, \dots, N\}$  in  $G$ . Für jedes  $j \in \{1, \dots, N\}$  existiert genau eine Rechtsnebenklasse von  $G_i$  in  $G$ . Diese besteht genau aus den Elementen, die  $i$  auf  $j$  abbilden. Es folgt:  $[G : G_i] = N$ .*

*Beweis.* Für jedes  $j$  existiert ein  $\pi \in G$  mit  $j = i\pi$ , da  $G$  transitiv auf  $N$  Elementen operiert. Die Existenz einer solchen Nebenklasse für  $j \in \{1, \dots, N\}$  folgt dann aus

$$G_i\pi : i \longmapsto i\pi.$$

Die Eindeutigkeit folgt aus:

$$\begin{aligned}
iG_i\pi_1 = iG_i\pi_2 &\iff iG_i\pi_1\pi_2^{-1} = iG_i = i \\
&\iff \pi_1\pi_2^{-1} \in G_i \\
&\iff G_i\pi_1\pi_2^{-1} = G_i \\
&\iff G_i\pi_1 = G_i\pi_2
\end{aligned}$$

Zwei Nebenklassen sind daher genau dann gleich, wenn sie das gleiche Bild unter  $i$  haben.  $\square$

LEMMA 5.0.2 *Sei  $G$  eine Permutationsgruppe, die transitiv auf  $N$  Elementen operiert, und sei  $G_i$  der Stabilisator von  $i \in \{1, \dots, N\}$  in  $G$ . Weiter sei  $G_{(i \rightarrow j)}$  die Rechtsnebenklasse bestehend aus den Elementen, die  $i$  auf  $j$  abbilden, so gilt*

$$G_{(i \rightarrow j)}\pi = G_{(i \rightarrow j\pi)}$$

für alle  $j \in \{1, \dots, N\}$  und  $\pi \in G$ . Man sagt auch, die Operation von  $G$  auf  $\{1, \dots, N\}$  und auf der Menge der Rechtsnebenklassen  $\{G_{(i \rightarrow 1)}, \dots, G_{(i \rightarrow N)}\}$  ist isomorph.

*Beweis.* Dies folgt unmittelbar aus LEMMA 5.0.1 und

$$G_{(i \rightarrow j)}\pi : i \longmapsto j \longmapsto j\pi.$$

$\square$

## 6 Untergruppen Fuchsscher Gruppen und endliche transitive Permutationsgruppen

Wir kommen nun zum Schlüsseltheorem dieser Arbeit. In diesem gesamten Kapitel folgen wir einer Arbeit von D. Singerman [SIN70], und führen deshalb auch folgende Sprechweise ein. Sei  $n$  eine Periode von  $\Gamma_1$ , wobei  $\Gamma_1$  Untergruppe einer Fuchsschen Gruppe  $\Gamma$  sei, so ist  $n$  die Ordnung einer Nachbartransformation  $y \in \Gamma_1$ . Als ein elliptisches Element ist diese konjugiert zu einer Potenz eines der elliptischen Erzeugenden  $x_j \in \Gamma$  der Ordnung  $m_j$ . Wir sagen dann,  $n$  wird von  $m_j$  induziert.  $n$  ist somit ein Teiler von  $m_j$ .

THEOREM 6.0.18 *Sei  $\Gamma$  eine Fuchssche Gruppe mit Signatur (1).  $\Gamma$  enthält eine Untergruppe  $\Gamma_1$  vom Index  $N$  mit Signatur*

$$(g'; n_{11}, n_{12}, \dots, n_{1\rho_1}, \dots, n_{r1}, n_{r2}, \dots, n_{r\rho_r}; s'; t')$$

genau dann, wenn

(a) Es existiert eine Permutationsgruppe  $G$  transitiv auf  $N$  Elementen, und ein Epimorphismus  $\theta : \Gamma \twoheadrightarrow G$  mit den folgenden Eigenschaften:

(i) Die Permutation  $\theta(x_j)$  hat genau  $\rho_j$  Zyklen der Längen

$$\frac{m_j}{n_{j1}}, \dots, \frac{m_j}{n_{j\rho_j}} < m_j$$

(ii) Sei  $\delta(y)$  die Anzahl der Zyklen in der Permutation  $\theta(y)$ , so gilt

$$s' = \sum_{k=1}^s \delta(p_k), \quad t' = \sum_{l=1}^t \delta(h_l)$$

(b)  $M(\Gamma_1)/M(\Gamma) = N$

BEMERKUNG. Die etwas weiter oben im Text gelegene Behauptung, dass Fuchssche Gruppen erster Art (zweiter Art) nur Gruppen erster Art (zweiter Art) enthalten können, lässt sich hier nun sehr leicht einsehen: Wie man dem vorangegangenen Theorem leicht entnehmen kann, enthält die Untergruppe genau dann hyperbolische Randelemente, wenn die Gruppe selbst solche aufweist. Dies begründet sich mitunter in den speziellen Eigenschaften der kanonischen Signatur, die sowohl der Gruppe als auch der Untergruppe zuteil sind, denn eine Fuchssche Gruppe ist, wie wir bereits im Abschnitt über den kanonischen Fundamentalbereich festgestellt haben, genau dann zweiter Art, wenn  $t > 0$  ist.

*Beweis.* Um zu zeigen, dass die Existenz einer solchen Permutationsgruppe hinreichend für die Existenz einer Untergruppe  $\Gamma_1$  von  $\Gamma$  mit angegebener Signatur ist, sei nun  $G$  mit den obigen Bedingungen gegeben, und sei  $G_1$  der Stabilisator von  $1 \in \{1, \dots, N\}$  in  $G$ . Mit LEMMA 5.0.1 folgt,  $G_1$  hat Index  $N$  in  $G$ . Definiere

$$\Gamma_1 := \theta^{-1}(G_1)$$

Da  $\theta$  ein Homomorphismus ist, folgt  $\Gamma_1$  ist eine Untergruppe von  $\Gamma$ .  $\Gamma_1$  hat auch den Index  $N$  in  $\Gamma$ , da  $\theta$  laut Voraussetzung epimorph ist. Siehe dazu [ART98, S.65 Satz 7.4].

Sei nun  $\gamma \in \Gamma$ , so induziert  $\gamma$  in natürlicher Weise eine Permutation auf den rechten  $\Gamma_1$ -Nebenklassen  $\Gamma_1\gamma_1, \dots, \Gamma_1\gamma_N$ , wobei  $\gamma_1, \dots, \gamma_N$  ein vollständiges Repräsentantensystem sei, in folgender Weise:

$$(\Gamma_1\gamma_1, \dots, \Gamma_1\gamma_N) \longmapsto (\Gamma_1\gamma_1\gamma, \dots, \Gamma_1\gamma_N\gamma)$$

Setzt man  $\theta(\gamma) =: \pi$  und  $\theta(\gamma_i) =: \pi_i$ , so induziert  $\pi$  die gleiche Permutation auf den rechten  $G_1$ -Nebenklassen  $G_1\pi_1, \dots, G_1\pi_N$ , wobei  $\pi_1, \dots, \pi_N$  hier ebenfalls ein vollständiges Repräsentantensystem ist, da  $\theta$  ein Epimorphismus ist:

$$(G_1\pi_1, \dots, G_1\pi_N) \longmapsto (G_1\pi_1\pi, \dots, G_1\pi_N\pi)$$

Denn es gilt

$$\Gamma_1 \gamma_i \gamma = \Gamma_1 \gamma_r \iff G_1 \pi_i \pi = G_1 \pi_r$$

Dies folgt zum einen aus der Homomorphieeigenschaft, und zum anderen aus

$$\pi_i \pi \pi_r^{-1} \in G_1 \implies \theta^{-1}(\pi_i \pi \pi_r^{-1}) \in \Gamma_1$$

und somit gilt  $\gamma_i \gamma \gamma_r^{-1} \in \Gamma_1$  als ein Urbild von  $\pi_i \pi \pi_r^{-1}$ , woraus sich dann die Behauptung ergibt.

Mit (i) gilt:  $\theta(x_j)$  hat einen Zykel der Länge  $m_j/n_{j\nu} =: k$ , und so folgt mit LEMMA 5.0.2, dass die Operation von  $\theta(x_j)$  auf den rechten  $G_1$ -Nebenklassen ebenso einen Zykel der Länge  $k$  hervorruft. Mit den obigen Erkenntnissen ergibt sich daraus ein Zykel der Länge  $k$  aus der Operation von  $x_j$  auf den rechten  $\Gamma_1$ -Nebenklassen.

Mit etwaiger Umnummerierung gibt es also  $k$  Nebenklassen  $\Gamma_1 \gamma_1, \dots, \Gamma_1 \gamma_k$  mit der Eigenschaft:

$$\Gamma_1 \gamma_1 x_j = \Gamma_1 \gamma_2, \Gamma_1 \gamma_2 x_j = \Gamma_1 \gamma_3, \dots, \Gamma_1 \gamma_k x_j = \Gamma_1 \gamma_1$$

Daher folgt

$$\Gamma_1 \gamma_1 = \Gamma_1 \gamma_k x_j = \Gamma_1 \gamma_{k-1} x_j^2 = \dots = \Gamma_1 \gamma_1 x_j^k$$

und somit

$$\gamma_1 x_j^k \gamma_1^{-1} \in \Gamma_1$$

Wir haben somit ein elliptisches Element der Ordnung  $m_j/k$  in  $\Gamma_1$  gefunden. Dieses ist ein Repräsentant einer Konjugationsklasse elliptischer Elemente dieser Ordnung, denn konjugierte Elemente besitzen bekanntlich die gleiche Ordnung. Aufgrund der Herleitung ergibt sich, dass  $k$  die kleinste Potenz ist mit der  $\gamma_1 x_j^k \gamma_1^{-1} \in \Gamma_1$  und so folgt, dass  $\gamma_1 x_j^k \gamma_1^{-1}$  eine Nachbartransformation darstellt,  $m_j/k = n_{j\nu}$  ist also eine Periode von  $\Gamma_1$ .

Es ist noch zu zeigen, dass es eine eindeutige Beziehung zwischen den Zyklen der rechten  $\Gamma_1$ -Nebenklassen und den davon induzierten Perioden von  $\Gamma_1$  gibt.

Dies ist leicht einzusehen, wenn alle Zykel verschiedene Längen aufweisen. Ist dies nicht der Fall, so ergeben sich bei der Operation von  $x_j$  auf den rechten  $\Gamma_1$ -Nebenklassen mindestens zwei Zyklen gleicher Länge, o.B.d.A. sei dies  $k$ , und wir müssen nun zeigen, dass dieser eine andere Periode von  $\Gamma_1$  induziert. Dazu sei nun  $\Gamma_1 h_1, \dots, \Gamma_1 h_k$  ein anderer Zykel der Länge  $k$ , so ergibt sich  $\Gamma_1 h_1 x_j^k = \Gamma_1 h_1$ , und wir erhalten folglich das elliptische Element  $h_1 x_j^k h_1^{-1} \in \Gamma_1$ . Induziert dieses nun die selbe Periode wie  $\gamma_1 x_j^k \gamma_1^{-1}$ , so sind diese beiden elliptischen Elemente in  $\Gamma_1$  zueinander konjugiert, denn jede Periode repräsentiert eine Konjugationsklasse elliptischer Elemente in  $\Gamma_1$ . Es existiert also ein  $\lambda \in \Gamma_1$  mit

$$\lambda h_1 x_j^k h_1^{-1} \lambda^{-1} = \gamma_1 x_j^k \gamma_1^{-1} = \tilde{x}_j^k$$

wobei wir  $\gamma_1 x_j \gamma_1^{-1} = \tilde{x}_j$  setzen. Daraus folgt

$$\lambda h_1 \gamma_1^{-1} \tilde{x}_j^k \gamma_1 h_1^{-1} \lambda^{-1} = \tilde{x}_j^k$$

und somit zeigt sich, dass  $\lambda h_1 \gamma_1^{-1}$  im Zentralisator von  $\tilde{x}_j^k$  liegt. Dieses ist die von  $\tilde{x}_j$  erzeugte zyklische Untergruppe der Elemente mit gleicher Fixpunktmenge. Siehe hierzu THEOREM 2.3.6 und THEOREM 2.3.7. Es folgt also

$$\lambda h_1 \gamma_1^{-1} = \tilde{x}_j^p \quad \text{wobei} \quad 1 \leq p \leq \text{ord}(\tilde{x}_j)$$

und damit

$$\Gamma_1 h_1 = \Gamma_1 \lambda^{-1} \tilde{x}_j^p \gamma_1 = \Gamma_1 \tilde{x}_j^p \gamma_1 = \Gamma_1 \gamma_1 x_j^p \gamma_1^{-1} \gamma_1 = \Gamma_1 \gamma_1 x_j^p$$

$\Gamma_1 h_1$  liegt also im selben Zykel wie  $\Gamma_1 \gamma_1$ , im Widerspruch zur obigen Annahme. Insgesamt folgt, zwei verschiedene Zyklen können nicht die selbe Periode induzieren.

In umgekehrter Weise können wir zeigen, dass zwei verschiedene Perioden nicht von ein und demselben Zykel induziert werden können. Wäre dies der Fall, so hätten wir zwei elliptische Elemente  $\gamma_1 x_j^k \gamma_1^{-1} \in \Gamma_1$  und  $h_1 x_j^k h_1^{-1} \in \Gamma_1$ , und da  $\Gamma_1 h_1$  und  $\Gamma_1 \gamma_1$  laut Annahme im selben Zykel liegen, würde gelten  $\Gamma_1 \gamma_1 x_j^p = \Gamma_1 h_1$ . Verfolgt man die obigen Äquivalenzen nun in umgekehrter Reihenfolge, so ergibt sich, dass  $\gamma_1 x_j^k \gamma_1^{-1}$  und  $h_1 x_j^k h_1^{-1}$  in  $\Gamma_1$  zueinander konjugiert sind. Dies kann aber nicht der Fall sein, wenn beide Elemente verschiedene Konjugationsklassen repräsentieren.

Insgesamt kommen wir nun zu dem folgenden Ergebnis, dass es für jeden Zyklus einer Länge  $< m_j$  in der Permutation  $\theta(x_j)$  genau eine von  $m_j$  induzierte Periode für  $\Gamma_1$  existiert. Wenn also  $m_j$  auch die Periode  $n_{j\mu}$  induziert, so erhalten wir in der Permutation  $\theta(x_j)$  einen Zykel der Länge  $m_j/n_{j\mu} =: l$ , und somit einen Zykel  $\Gamma_1 \gamma x_j, \Gamma_1 \gamma x_j^2, \dots, \Gamma_1 \gamma x_j^l$  für ein geeignetes  $\gamma \in \Gamma_1$ . Der Fall eines Zyklus der Länge  $m_j$  ist stillschweigend ausgelassen worden, da dieser ohnehin nur die Ordnung 1, also die Identität induziert.

Bei den parabolischen Elementen kommt man in gleicher Weise zu einem ähnlichen Ergebnis. Weist die Operation von  $p_j$  auf den rechten  $\Gamma_1$ -Nebenklassen einen Zykel der Länge  $k$  auf, so existiert in  $\Gamma_1$  ein zu  $p_j^k$  konjugiertes Erzeugendes. Wie zuvor kann man zeigen, dass eine bijektive Beziehung zwischen der Zyklenanzahl in der Permutation  $\theta(p_j)$  und der Anzahl von  $p_j$  induzierter parabolischer Konjugationsklassen in  $\Gamma_1$  existiert. Daher gilt

$$s' = \sum_{j=1}^s \delta(p_j).$$

Analog

$$t' = \sum_{j=1}^t \delta(h_j).$$

Die Aussage (b), welche sich aus (4) ergibt, garantiert die richtige Wahl des Geschlechts  $g'$ .

Um zu zeigen, dass die Existenz einer Untergruppe  $\Gamma_1$  in  $\Gamma$  auch hinreichend für die Existenz einer den obigen Bedingungen entsprechenden Permutationsgruppe ist, nehmen wir nun an, dass  $n_{i_1}, \dots, n_{i_{\rho_i}}$  von  $m_i$  induziert werden. Wenn also  $n_{i\nu}$  eine Periode von  $\Gamma_1$  ist, so gilt wie oben bereits angemerkt, dass  $n_{i\nu}$  die Ordnung einer Nachbartransformation  $\gamma \in \Gamma_1$ , und als elliptisches Element zu einer Potenz  $k$  eines der  $x_i$  konjugiert ist. Siehe THEOREM 4.0.13. Dass dieses aus einem Zykel der Länge  $k$  resultieren muss, sieht man wie folgt:

$$\gamma_1 x_j^k \gamma_1^{-1} \in \Gamma_1 \implies \Gamma_1 \gamma_1 = \Gamma_1 \gamma_1 x_i^k$$

Zum einen kann der Zykel der  $\Gamma_1$ -Nebenklassen nicht länger sein als  $k$ , wie man an der vorhergehenden Folgerung unschwer erkennen kann, zum anderen kann er aber auch nicht kürzer sein, da sonst  $\gamma_1 x_j^l \gamma_1^{-1}$  mit  $l \mid k$  bereits in  $\Gamma_1$  enthalten sein müsste.  $\gamma_1 x_j^k \gamma_1^{-1}$  würde sich dann als

$$\left( \gamma_1 x_j^l \gamma_1^{-1} \right)^{k/l}$$

darstellen lassen und wäre somit keine Nachbartransformation, im Widerspruch zur Voraussetzung.

Als unendliche Gruppe kann  $\Gamma$  nicht treu auf den endlich vielen Nebenklassen von  $\Gamma_1$  operieren, allerdings kann man durch Übergang zu einem geeigneten Quotienten eine treue Operation erzeugen: Dazu definiere man  $K$  als die Untergruppe aller Elemente, die die Nebenklassen von  $\Gamma_1$  festlassen. Dass dies tatsächlich eine Untergruppe bildet ist leicht nachzuweisen und soll hier nicht vorgeführt werden. Ferner ist  $K$  Normalteiler, wie sich aus

$$(\Gamma_1 h) \gamma K \gamma^{-1} = (\Gamma_1 h \gamma) K \gamma^{-1} = (\Gamma_1 h \gamma) \gamma^{-1} = \Gamma_1 h$$

für alle  $\gamma \in \Gamma$  und geeignetes  $h$  ergibt, denn so folgt

$$\gamma K \gamma^{-1} \subseteq K.$$

Da alle Elemente aus  $K$  auch  $\Gamma_1$  festlassen müssen, gilt mit den obigen Erkenntnissen sogar  $K \triangleleft \Gamma_1$ .

$\Gamma/K$  operiert infolgedessen treu auf den  $\Gamma_1$ -Nebenklassen, da  $K$  der Kern des Homomorphismus  $\varphi : \Gamma \longrightarrow \text{Sym}(\{\Gamma_1 \gamma_1, \dots, \Gamma_1 \gamma_N\}) \cong S_N$  ist, und  $\Gamma/K$  somit injektiv in  $S_N$  eingebettet werden kann. Dass diese Operation wohldefiniert ist, folgt aus der Tatsache, dass sich zwei Elemente genau dann in der gleichen Äquivalenzklasse befinden, wenn sie sich um ein  $\kappa \in K$  unterscheiden. Zu diesem Abschnitt siehe [ART98].

Wir wählen nun  $\Gamma/K =: G$  als die Permutationsgruppe und setzen  $G_1 :=$

$\Gamma_1/K$ . Dass  $G$  transitiv auf den  $N$  Nebenklassen operiert, folgt bei der Operation von  $\Gamma$  auf den Nebenklassen aus der Gruppeneigenschaft, und wird in kanonischer Weise auf die Faktorgruppe  $\Gamma/K$  übertragen. Der kanonische Homomorphismus von  $\Gamma$  in die Faktorgruppe bzgl.  $K$  ist der gesuchte Epimorphismus  $\theta : \Gamma \rightarrow G$ . Er erfüllt  $\theta(\Gamma_1) = G_1$  und somit induziert die Operation von  $\Gamma$  auf den rechten  $\Gamma_1$ -Nebenklassen die gleiche Operation wie  $G$  auf den  $G_1$ -Nebenklassen, und mit LEMMA 5.0.2 folgt, dass  $\theta$  die gewünschten Eigenschaften hat.

(b) folgt in trivialer Weise aus (4). □

BEMERKUNG. Betrachtet man den Beweis dieses Theorems und die Aussage von LEMMA 5.0.2, so stellt man fest, dass es unerheblich ist, welchen Stabilisator der Permutationsgruppe man wählt. Man erhält für jeden Stabilisator eine Untergruppe der gleichen Signatur im Urbild des Epimorphismus  $\theta$ . Sind die Stabilisatoren verschieden, so sind dies auch die Untergruppen der Fuchsschen Gruppe. Wir werden auf diese Erkenntnis später noch einmal zurückgreifen, wenn wir das Problem der Anzahl verschiedener signaturl gleicher Untergruppen bei Dreiecksgruppeninklusionen angehen.

## 7 Normalteiler Fuchsscher Gruppen

In diesem Abschnitt werden wir feststellen, dass sich für einen Normalteiler einer Fuchsschen Gruppe  $\Gamma_1 \triangleleft \Gamma$  aus der Normalteilereigenschaft auch viel strengere Bedingungen für die Gestalt des Epimorphismus und die Signatur der Untergruppe ergeben. Die nun folgenden Ergebnisse entstammen einer Arbeit von D. Singerman [SIN72]. Singerman zeigt diese allerdings nur für Fuchssche Gruppen erster Art. Wir werden sein Konzept auf einfache Art und Weise um Fuchssche Gruppen zweiter Art erweitern. Was das genau bedeutet, wird im Folgenden erläutert. Wir schreiben die Signaturen von  $\Gamma_1$  und  $\Gamma$  in der Schreibweise (2), bei der parabolische Elemente als elliptische Elemente unendlicher Ordnung aufgefasst werden. Da sich parabolische und hyperbolische Randelemente in der abstrakten Gruppe nicht unterscheiden, lassen sich hyperbolische Randelemente ebenfalls als elliptische Elemente unendlicher Ordnung auffassen. Alle nun folgenden Deduktionen gehen ausschließlich auf THEOREM 6.0.18 oder die Normalteilereigenschaft zurück, und stehen somit einer solchen Erweiterung nicht im Weg. Sei nun  $\Gamma_1 \triangleleft \Gamma$  vom Index  $N$ ,  $x_1, \dots, x_u$  die erzeugenden elliptischen, parabolischen und hyperbolischen Randelemente von  $\Gamma$  mit  $m_{r+1} = \dots = m_u = \infty$  und sei  $\nu_i$  - in Einklang mit THEOREM 6.0.18 - die kleinste natürliche Zahl mit  $\gamma x_i^{\nu_i} \gamma^{-1} \in \Gamma_1$ . Aufgrund der Normalteilereigenschaft ergibt sich hier sogar  $x_i^{\nu_i} \in \Gamma_1$ . Es gilt  $\nu_i < \infty$  und  $\nu_i \mid m_i$ , wenn  $m_i < \infty$ . Wir nummerieren die Perioden von  $\Gamma$  nun so um, dass  $x_i$  den Exponenten  $m_i$  für  $0 \leq i \leq p$  und

dass  $x_{p+i}$  den Exponenten  $\nu_i$  ( $< m_{p+i}$  für  $p+i \leq u$ ) „modulo  $\Gamma_1$ “ besitzt.  $\Gamma$  hat dann die Signatur:

$$(g; m_1, \dots, m_p, \nu_1 n_1, \dots, \nu_q n_q) \quad (5)$$

mit  $p+q = u$  und  $1 < n_i \leq \infty$ .

BEMERKUNG. Da  $m_i$  einen festen Wert hat für  $0 \leq i \leq p$  befinden sich keine parabolischen oder hyperbolischen Randelemente unter den ersten  $p$  Perioden. Wie wir gleich feststellen werden sind die ersten  $p$  Perioden genau diese, die die Identität induzieren.

THEOREM 7.0.19 *Mit den obigen Bezeichnungen gilt:  $\Gamma_1$  hat Signatur*

$$(g'; n_1^{N/\nu_1}, \dots, n_q^{N/\nu_q}) \quad (6)$$

wobei  $n_i^{N/\nu_i}$  bedeutet, dass die Periode  $n_i$   $N/\nu_i$ -mal in der Signatur auf-taucht.

*Beweis.* Dieses Theorem ist eine Konsequenz von THEOREM 6.0.18 oder genauer gesagt ein Spezialfall dessen. Da sich aufgrund der Normalteilereigenschaft  $x_i^{\nu_i} \in \Gamma_1$  ergibt, kann eine Periode von  $\Gamma$  nur Perioden gleichen Werts induzieren, wenn  $\nu_i$  tatsächlich die kleinste Potenz mit dieser Eigenschaft ist. Gäbe es noch eine kleinere Potenz, so ergäbe sich ein Widerspruch zur Minimalität. Im Falle höherer Potenzen wären dies Vielfache und somit keine Ordnungen oder es ergäbe sich ebenfalls ein Widerspruch. D.h. die Signatur von  $\Gamma_1$  kann nur solch eine Form aufweisen. Man beachte allerdings, dass  $\gamma x_i^{\nu_i} \gamma^{-1}$  das induzierte Element ist und nicht  $x_i^{\nu_i}$ .

Alternativ kann man sich überlegen, dass  $K$  - die Untergruppe aller Elemente, die die Nebenklassen von  $\Gamma_1$  festlassen - im Falle eines Normalteilers  $\Gamma_1 \triangleleft \Gamma$  gerade  $\Gamma_1$  ist. Wählt man daher  $\Gamma/\Gamma_1$  als die Permutationsgruppe  $G$  aus THEOREM 6.0.18 und die kanonische Abbildung  $\theta : \Gamma \rightarrow G$  als den Epimorphismus, so ergibt sich folgendes:

Die Operation von  $\Gamma$  auf den  $\Gamma_1$ -Nebenklassen überträgt sich auf Operation von  $\Gamma/\Gamma_1$  auf den  $\Gamma_1/\Gamma_1$ -Nebenklassen.  $\Gamma/\Gamma_1$  operiert daher auf sich selbst und es ergibt sich:

$$\gamma \Gamma_1 = \Gamma_1 \gamma = \Gamma_1 \gamma \Gamma_1 x_i^{\nu_i} = \gamma \Gamma_1 x_i^{\nu_i} = \Gamma_1 \gamma x_i^{\nu_i}$$

und somit ebenfalls:

$$x_i^{\nu_i} \in \Gamma_1$$

Mit obiger Argumentation und LEMMA 5.0.2 gilt: Wenn  $i \leq p$  ist, so hat  $\theta(x_i)$   $N/m_i$  Zyklen der Länge  $m_i$  und für  $p+i \leq u$  hat  $\theta(x_{p+i})$   $N/n_i$  Zyklen der Länge  $n_i$ . Mit THEOREM 6.0.18 folgt die Behauptung. Hierbei gilt  $\nu_i = m_{p+i}/n_i$  ( $p+i \leq u$ ) nur für die elliptischen Perioden.  $\square$

Schreiben wir  $\Gamma$  in Signatur (5) und  $\Gamma_1$  in Signatur (6), so lautet die Riemann-Hurwitz-Formel nun:

$$2g' - 2 + \sum_{i=1}^q \frac{N}{\nu_i} \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) = N \left[ 2g - 2 + \sum_{i=1}^p \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) \sum_{i=1}^q \left(1 - \frac{1}{\nu_i n_i}\right) \right]$$

## 8 Untergruppen von Dreiecksgruppen

DEFINITION 8.0.4 Unter einer *Dreiecksgruppe* verstehen wir eine Fuchssche Gruppe mit Signatur

$$(0; m_1, m_2, m_3; -; -)$$

Man schreibt auch kürzer

$$(m_1, m_2, m_3).$$

Die drei in der Signatur gegebenen Perioden  $m_1, m_2, m_3$  müssen die folgende Ungleichung erfüllen

$$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} < 1,$$

denn genau dann gibt es ein hyperbolisches Dreieck  $\Delta$  mit Innenwinkeln  $\pi/m_1, \pi/m_2, \pi/m_3$ . Es sei hier angemerkt, dass diese Ungleichung auch aus  $M(\Gamma) > 0$  folgt. Jedes Doppeldreieck  $D_\nu = \Delta \cup \sigma(\Delta)$  ist ein (nicht kanonischer) Fundamentalbereich, wobei  $\sigma$  eine hyperbolische Spiegelung an einer der drei Seiten sei. Die drei Eckpunkte von  $\Delta$  bilden die Fixpunkte der elliptischen Erzeugenden  $x_1, x_2, x_3$  mit Drehwinkeln  $2\pi/m_1, 2\pi/m_2, 2\pi/m_3$ . Wir haben also folgende Präsentation

$$\langle x_1, x_2, x_3 \mid x_1^{m_1} = x_2^{m_2} = x_3^{m_3} = x_1 x_2 x_3 = 1 \rangle.$$

Zu diesem Abschnitt siehe [LAM05].

BEMERKUNG. Man kann hier im Sinne von (2) ohne weiteres  $m_i = \infty$  zulassen. Der zugehörige Winkel beträgt dann 0 und es handelt sich hierbei um eine parabolische Spitze. Man spricht auch hier von einer Dreiecksgruppe.

Wir werden von nun an Dreiecksgruppen mit  $\Delta$  bezeichnen, da dies häufig so gemacht wird und eine vorteilhafte Bezeichnungsweise darstellt. Es besteht dabei nicht die Gefahr der Verwechslung mit einem hyperbolischen Dreieck, da die obige Bezeichnung eines solchen in dieser Arbeit einmalig ist.  $G$  sei nach wie vor eine Permutationsgruppe, welche transitiv auf  $N$  Elementen operiert. Wir betrachten eine solche Gruppe  $G$  nun als ein epimorphes Bild einer Dreiecksgruppe  $\Delta = (l, m, n)$ . THEOREM 6.0.18 garantiert einen solchen Epimorphismus für jede Untergruppe dieser Dreiecksgruppe. Im trivialen Fall für  $N = 1$  und  $G = \{id\}$  ist dies die Gruppe selbst und existiert immer.  $G$

wird also von drei - nicht zwingend verschiedenen - Elementen  $a, b, c$  erzeugt, welche die folgenden Relationen eingehen müssen:

$$a^l = b^m = c^n = abc = 1$$

$l, m$  und  $n$  sind unter gewissen Umständen Vielfache der Ordnungen von  $a, b$  und  $c$ . Die Permutation  $a$  habe  $\lambda_u$   $u$ -Zyklen ( $u = 1, \dots, l-1$ ),  $b$  habe  $\mu_v$   $v$ -Zyklen ( $v = 1, \dots, m-1$ ), und  $c$  habe  $\nu_w$   $w$ -Zyklen ( $w = 1, \dots, n-1$ ). Es sei bemerkt, dass die Anzahlen der jeweiligen Zyklen zum Teil 0 aufweisen können bzw. müssen. Dies ist zum Beispiel der Fall, wenn  $u \nmid l$ . Die Zyklen voller Länge sind hier mit Absicht nicht aufgeführt, da sie die Signatur nicht beeinflussen. Mit diesen Bezeichnungen gilt ein ebenfalls von D. Singerman [SIN70] stammendes Theorem:

**THEOREM 8.0.20** *Eine Untergruppe  $\Gamma_1$  einer Dreiecksgruppe  $\Delta$  mit Signatur  $(l, m, n)$  muss die folgende Gleichung erfüllen. Es gibt eine ganze Zahl  $g \geq 0$ , so dass*

$$\begin{aligned} 2g + 2 + \sum_{u=1}^{l-1} \lambda_u \left(1 - \frac{u}{l}\right) + \sum_{v=1}^{m-1} \mu_v \left(1 - \frac{v}{m}\right) + \sum_{w=1}^{n-1} \nu_w \left(1 - \frac{w}{n}\right) \\ = N \left(1 - \frac{1}{l} - \frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

**BEMERKUNG.** Dreiecksgruppen rein elliptischer Erzeugender enthalten keine parabolischen und erst recht keine hyperbolischen Randelemente. Sie enthalten allerdings hyperbolische Elemente, und zwar zwingend. Wäre dies nicht der Fall, so würden sie ausschließlich aus elliptischen Elementen bestehen, und wären daher endlich und elementar. Siehe [KAT92]. Für nicht elementare Untergruppen von Dreiecksgruppen gilt dies natürlich gleichermaßen. Wie nun aber das obige Theorem zeigt, können sie ausschließlich aus hyperbolischen Elementen bestehen. Man spricht hier von torsionsfreien Untergruppen oder sogenannten Flächengruppen. Man erhält solche zum Beispiel als Kerne von Homomorphismen einer Dreiecksgruppe in eine endliche Gruppe, welche von den Bildern der drei elliptischen Erzeugenden gleicher Ordnungen erzeugt wird. Siehe hierzu [WOL06]. Diese sind sogar Normalteiler und stehen in engem Zusammenhang mit regulären Dessins und quasiplatonischen Riemannschen Flächen. Wir werden im Rahmen dieser Arbeit noch einmal genauer darauf zu sprechen kommen. Die Riemann-Hurwitz-Formel lautet hierbei  $2g + 2 = NM(\Delta)$ .

*Beweis.* Mit THEOREM 6.0.18 hat  $\Gamma_1$  als Untergruppe in  $\Delta$  vom Index  $N$  die Signatur

$$\left(g; l^{(\lambda_1)}, \frac{l^{(\lambda_2)}}{2}, \dots, m^{(\mu_1)}, \frac{m^{(\mu_2)}}{2}, \dots, n^{(\nu_1)}, \frac{n^{(\nu_2)}}{2}; -; -\right).$$

Der Ausdruck  $l^{(\lambda_1)}$  ist so zu lesen, dass die Periode  $l$   $\lambda_1$ -mal in der Signatur auftaucht. Mit der Riemann-Hurwitz-Formel (4) folgt nun die Behauptung durch einsetzen.  $\square$

**FOLGERUNG 8.0.1** *Betrachtet man eine Dreiecksgruppe  $\Delta_1 = (m'_1, m'_2, m'_3)$  als Untergruppe einer Dreiecksgruppe  $\Delta = (m_1, m_2, m_3)$  so vereinfacht sich die Riemann-Hurwitz-Formel zu:*

$$\left(1 - \frac{1}{m'_1} - \frac{1}{m'_2} - \frac{1}{m'_3}\right) = N \left(1 - \frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2} - \frac{1}{m_3}\right),$$

wobei jede der Perioden  $m'_1, m'_2, m'_3$  zumindest eine der Perioden  $m_1, m_2, m_3$  teilen muss.

*Beweis.* Die Behauptung ergibt sich in einfacher Weise aus THEOREM 8.0.20, wobei man man dennoch darauf achten sollte, dass eine Periode durchaus mehrere Perioden induzieren kann, und im Zuge dessen eine andere auch keine, genauer gesagt dann nur die Identität.  $\square$

## 9 Inklusionen von Dreiecksgruppen

Wir hatten im Rahmen der Signatur auch den Begriff einer Isomorphieklasse  $R(\Gamma)$  bzgl. einer Signatur  $\sigma$  einer Fuchsschen Gruppe  $\Gamma$  eingeführt. Wir werden dies nun nutzen, um das folgende Theorem zu formulieren. Dieses stammt wie viele andere Theoreme dieser Arbeit ebenfalls von D. Singerman [SIN72]. Er gibt in seiner Arbeit allerdings nur eine Beweisskizze hierfür. Im Folgenden wird der Beweis für dieses Theorem dennoch bis ins Detail notiert werden, damit seine Aussage für jeden ohne große Mühe nachvollziehbar wird. Wie uns THEOREM 6.0.18 lehrt, hängt die Existenz einer Dreiecksgruppe  $\Delta_1$  als Untergruppe einer vorgegebenen Dreiecksgruppe  $\Delta$  lediglich von der Signatur dieser ab, und so führen wir folgende Sprechweise ein: Seien  $\sigma_1$  und  $\sigma$  die Signaturen dieser Dreiecksgruppen, so schreiben wir  $\sigma_1 \subseteq \sigma$ , wenn  $\Delta_1 \subseteq \Delta$  und  $\sigma_1 \triangleleft \sigma$ , wenn  $\Delta_1 \triangleleft \Delta$ .

**THEOREM 9.0.21** *Die nun folgenden Tabellen beinhalten die komplette Liste von Dreiecksgruppensignaturen  $\sigma_1, \sigma$  mit  $\sigma_1 \subseteq \sigma$ .*

*Normale Inklusionen  $\sigma_1 \triangleleft \sigma$ :*

Typ	$\sigma_1$	$\sigma$	Index
$N_1$	$(n, n, n)$	$(3, 3, n)$	3
$N_2$	$(n, n, n)$	$(2, 3, 2n)$	6
$N_3$	$(n_1, n_1, n_2)$	$(2, n_1, 2n_2)$	2

Nicht-normale Inklusionen  $\sigma_1 \subseteq \sigma$ :

Typ	$\sigma_1$	$\sigma$	Index
A	(7, 7, 7)	(2, 3, 7)	24
B	(2, 7, 7)	(2, 3, 7)	9
C	(3, 3, 7)	(2, 3, 7)	8
D	(4, 8, 8)	(2, 3, 8)	12
E	(3, 8, 8)	(2, 3, 8)	10
F	(9, 9, 9)	(2, 3, 9)	12
G	(4, 4, 5)	(2, 4, 5)	6
H	(n, 4n, 4n)	(2, 3, 4n)	6
I	(n, 2n, 2n)	(2, 4, 2n)	4
J	(3, n, 3n)	(2, 3, 3n)	4
K	(2, n, 2n)	(2, 3, 2n)	3

Die Parameter  $n, n_1$  und  $n_2$  müssen so gewählt werden, dass  $M(\Delta) > 0$  und  $M(\Delta_1) > 0$  ist.

*Beweis.* Wir zeigen zunächst die Behauptung für die normalen Inklusionen: Es seien  $\Delta_1, \Delta$  Dreiecksgruppen mit  $\Delta_1 \triangleleft \Delta$  vom Index  $N$ . Wir schreiben  $\Delta$  in Signatur (5) und  $\Delta_1$  in Signatur (6). Die Riemann-Hurwitz-Formel gibt uns nun folgendes vor:

$$-2 + \sum_{i=1}^q \frac{N}{\nu_i} \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) = N \left[ -2 + \sum_{i=1}^p \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) \sum_{i=1}^q \left(1 - \frac{1}{\nu_i n_i}\right) \right]$$

Wir setzen

$$P := \sum_{i=1}^p \frac{1}{m_i}, Q := \sum_{i=1}^q \frac{1}{\nu_i}$$

und schreiben die obige Gleichung wie folgt:

$$-2 = N(-2 + p + q - P - Q) \quad (7)$$

Da  $\Delta$  eine Dreiecksgruppe ist, muss gelten:

$$p + q = 3 \quad (8)$$

und da auch  $\Delta_1$  eine Dreiecksgruppe ist, muss weiter gelten:

$$NQ = 3 \quad (9)$$

Sind die letzten beiden Gleichungen erfüllt, so bleibt nur zu zeigen, ob der in THEOREM 6.0.18 verlangte Epimorphismus konstruiert werden kann. Hierbei ist darauf zu achten, dass die Bilder der Erzeugenden einerseits die Relationen der kanonischen Präsentation erfüllt und andererseits die zur Induzierung der Perioden der Untergruppe nötigen Zyklenlängen aufweist. Es gibt

genau 4  $(p, q)$ -Tupel die Gleichung (8) erfüllen. Wir werden diese nun nacheinander abarbeiten.

$p = 3$  und  $q = 0$  kann ausgeschlossen werden, da sich hier ein Widerspruch zu (9) ergibt.

Sei nun  $p = 2$  und  $q = 1$ , so ergibt Gleichung (7):

$$-2 = N(1 - P - Q)$$

Mit  $Q = 3/N$  folgt hieraus

$$P = (N - 1)/N$$

Also gilt

$$\frac{1}{2} \leq P < 1$$

Weiter gilt

$$Q = \frac{1}{\nu} = \frac{3}{N}$$

und daher  $3 \mid N$ .

Für  $N = 3$  folgt  $P = 2/3$  und  $Q = 1$ . Wir haben also  $\nu = 1$  und  $m_1 = m_2 = 3$ . Es ist zwar auch  $1/2 + 1/6 = 2/3$ , dies ist aber nicht möglich, da  $m_i \leq N$  sein muss. Siehe hierzu THEOREM 6.0.18. Wir haben also insgesamt:

$$(n, n, n) \triangleleft (3, 3, n) \quad \text{vom Index} \quad 3$$

Diese Inklusion ist Typ  $N_1$  und lässt sich mit folgender Abbildung realisieren:

$$\begin{aligned} x_1 &\longmapsto (1, 2, 3) \\ x_2 &\longmapsto (1, 3, 2) \\ x_3 &\longmapsto (1)(2)(3) \end{aligned}$$

Diese Abbildung wird nun stellvertretend für alle folgenden Abbildungen genau erläutert werden, denn alle erfüllen analoge Bedingungen, die nicht jedes Mal genannt werden sollen: Die erste Periode 3 der Gruppe  $(3, 3, n)$  induziert die Identität mit einem Zykel der Länge 3. Bei der zweiten Periode 3 verhält es sich ebenso. Die dritte Periode  $n$  induziert dreimal sich selbst mit 3 Zykeln der Länge 1. Es gilt

$$(1, 2, 3)^3 = (1, 3, 2)^3 = (1)(2)(3)^n = (1, 2, 3)(1, 3, 2)(1)(2)(3) = id,$$

und daher sind die nötigen Bedingungen erfüllt.

Für  $N = 6$  folgt  $P = 5/6$  und  $Q = 1/2$ . Wir haben also  $\nu = 2$  und  $m_1 = 2, m_2 = 3$ . D.h.

$$(n, n, n) \triangleleft (2, 3, 2n) \quad \text{vom Index} \quad 6$$

Diese Inklusion ist Typ  $N_2$  und lässt sich mit folgender Abbildung realisieren:

$$\begin{aligned}x_1 &\longmapsto (1, 2)(3, 4)(5, 6) \\x_2 &\longmapsto (3, 2, 5)(1, 4, 6) \\x_3 &\longmapsto (1, 5)(2, 4)(3, 6)\end{aligned}$$

Wie man sich leicht überlegt, kann  $N \geq 9$  ( $P \geq 8/9$ ) nicht vorkommen, da  $1/m_1 + 1/m_2 \leq 5/6$  ist.

Sei nun  $p = 1$  und  $q = 2$ , so ergibt Gleichung (7):

$$-2 = N(1 - P - Q)$$

Mit  $Q = 3/N$  folgt hieraus wieder

$$P = (N - 1)/N$$

Also gilt

$$\frac{1}{2} \leq P < 1$$

Da hier  $P \leq \frac{1}{2}$  sein muss, folgt

$$P = \frac{1}{2}$$

und daher

$$N = 2 \quad \text{und} \quad Q = \frac{3}{2}$$

Wir haben also  $m = 1$  und  $\nu_1 = 1, \nu_2 = 2$ . Wir haben also insgesamt:

$$(n_1, n_1, n_2) \triangleleft (2, n_1, 2n_2) \quad \text{vom Index} \quad 2$$

Diese Inklusion ist Typ  $N_3$  und lässt sich mit folgender Abbildung realisieren:

$$\begin{aligned}x_1 &\longmapsto (1, 2) \\x_2 &\longmapsto (1)(2) \\x_3 &\longmapsto (1, 2)\end{aligned}$$

Sei nun  $p = 0$  und  $q = 3$ , so ergibt Gleichung (7):

$$-2 = N(1 - Q)$$

Daher folgt

$$N = 1$$

mit Gleichung (9).

Bei allen bisher konstruierten Epimorphismen ist der Stabilisator eines Elements trivialerweise die Identität, und somit Normalteiler. Laut [ART98, S.65 Satz 7.4] gilt dies dann auch für dessen Urbild, sprich  $\Delta_1$ . Damit ist die

erste Tabelle vollständig bewiesen.

Es bleiben nunmehr die nicht-normalen Inklusionen. Schreiben wir  $\sigma = (m_1, m_2, m_3)$  und  $\sigma_1 = (m'_1, m'_2, m'_3)$ , so ergibt sich der Index  $N$  mit Hilfe der vereinfachten Riemann-Hurwitz-Formel aus FOLGERUNG 8.0.1:

$$N = \frac{1 - \frac{1}{m'_1} - \frac{1}{m'_2} - \frac{1}{m'_3}}{1 - \frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2} - \frac{1}{m_3}} \quad (10)$$

Die Vorgehensweise ist nun folgende: Zunächst sollte  $N > 2$  sein, denn  $N \geq 2$  ist generell der Fall und bei Gleichheit läge ein Normalteiler vor. Zudem müssen die Perioden von  $\sigma_1$  die entsprechenden Perioden von  $\sigma$  teilen. Sind die letzten beiden Kriterien erfüllt, so bleibt nur zu zeigen, ob der in THEOREM 6.0.18 verlangte Epimorphismus konstruiert werden kann.

Einigen wir uns auf die Konvention, dass die Perioden der Signatur in aufsteigender Reihenfolge angegeben werden, so sind die einzigen Kandidaten für  $\sigma$  die Signaturen  $(2, 3, m)$  mit  $m \geq 7$  oder  $(2, 4, m)$  mit  $m \geq 5$ .

Man sieht dies durch Ausschließen der anderen Möglichkeiten: Alle Signaturen, die kleinere Perioden aufweisen, lassen sich als Dreiecksgruppe nicht realisieren, da hierbei  $M(\Delta) \leq 0$  wäre.

Um alle Signaturen mit größeren Perioden auszuschließen benötigen wir mehrere Betrachtungen: Sei zunächst  $\sigma = (2, 5, m)$  mit  $m \geq 5$ . In Einklang mit (10) ist die Untergruppe mit maximalem Index  $\sigma_1 = (m, m, m)$ . Der Index errechnet sich wie folgt:

$$N = \frac{10(m-3)}{3m-10} \leq 4$$

Die einzige Lösung hierbei mit ganzen Zahlen  $m, N$  ist  $m = 5, N = 4$ , da  $N > 2$ .  $(5, 5, 5)$  kann aber nicht als Untergruppe von  $(2, 5, 5)$  existieren, denn das Bild eines Elements der Ordnung 5 unter einem Epimorphismus in eine Permutationsgruppe transitiv auf 4 Punkten kann nur die Identität sein, und diese würde 4 mal Periode 5 induzieren. Für alle restlichen Möglichkeiten für Untergruppen kommt nur Index 3 in Frage. Wie man sich leicht überlegt wird in diesem Fall mindestens eine Periode 2 induziert. Für die hierbei verbleibenden Möglichkeiten ist allerdings  $(10) < 3$ .

Weiter sei  $\sigma = (2, 6, m)$  mit  $m \geq 6$ . Betrachtet man wieder die Untergruppe von maximalem Index  $\sigma_1 = (m, m, m)$ , so ergibt sich  $N = 3$ . Wie in einer der obigen Überlegungen müsste hier mindestens eine Periode 2 induziert werden. Es ist also nicht möglich. Für die verbleibenden Möglichkeiten für Untergruppen gilt wieder  $(10) < 3$ .

Ab  $\sigma = (2, l, m)$  mit  $m \geq l \geq 7$  ist selbst der maximale Index  $< 3$ .

Für  $\sigma = (3, 3, m)$  und  $\sigma_1 = (m, m, m)$  ist  $N = 3$  und  $\sigma_1 \triangleleft \sigma$ . Diese Inklusion ist uns also schon einmal begegnet. Für die verbleibenden Möglichkeiten für

Untergruppen der  $(3, 3, m)$  folgt der Widerspruch analog zur bisherigen Vorgehensweise.

Für  $\sigma = (3, 4, m)$  und sämtliche Signaturen mit höheren Perioden gilt für den maximalen Index  $N < 3$ . Diese Relationen sind alle nicht möglich.

Wir können uns nun also der Auffindung aller geeigneten Untergruppensignaturen bzgl. der Signaturen  $(2, 3, m)$  mit  $m \geq 7$  oder  $(2, 4, m)$  mit  $m \geq 5$  widmen. Wir werden dies mit Hilfe zweier Maple-Programme [MAP] bewältigen, deren Funktionsweise hier kurz erläutert werden soll, und deren Quellcode sich zur Einsicht im Anhang befindet.

Zunächst einmal werden wir alle Untergruppen der  $(2, 3, \infty)$  und  $(2, 4, \infty)$  bestimmen. Die einzigen Perioden die hier induziert werden können sind  $2, 3, \infty$  bzw.  $2, 4, \infty$ , und wie man THEOREM 6.0.18 entnehmen kann, muss  $\infty$  mindestens einmal induziert werden. Das sich im Anhang befindliche „Maple-Programm 1“ berechnet unter Beachtung dieser Erkenntnisse alle Lösungen der Riemann-Hurwitz-Formel (10) mit ganzzahligem  $N \geq 2$ , die wir nun Schritt für Schritt abarbeiten werden. Wie wir im Zuge dessen erkennen werden, erschließen sich uns hierbei sämtliche Inklusionen, die damit stark zusammenhängen:

$$(2, \infty, \infty) \subseteq (2, 3, \infty) \quad \text{vom Index} \quad 3$$

lässt sich nur mit einer Abbildung folgender Struktur realisieren:

$$\begin{aligned} x_1 &\longmapsto (1, 3)(2) \\ x_2 &\longmapsto (1, 3, 2) \\ x_3 &\longmapsto (1, 2)(3) \end{aligned}$$

hieraus resultiert Typ  $K$ , also  $(2, n, 2n) \subseteq (2, 3, 2n)$ .

$$(3, 3, \infty) \subseteq (2, 3, \infty) \quad \text{vom Index} \quad 2$$

lässt sich nur als Normalteiler realisieren. Siehe oben.

$$(3, \infty, \infty) \subseteq (2, 3, \infty) \quad \text{vom Index} \quad 4$$

lässt sich nur mit einer Abbildung folgender Struktur realisieren:

$$\begin{aligned} x_1 &\longmapsto (1, 4)(2, 3) \\ x_2 &\longmapsto (1, 4, 2)(3) \\ x_3 &\longmapsto (1, 3, 2)(4) \end{aligned}$$

hieraus resultiert Typ  $J$ , also  $(3, n, 3n) \subseteq (2, 3, 3n)$ .

$$(\infty, \infty, \infty) \subseteq (2, 3, \infty) \quad \text{vom Index} \quad 6$$

lässt sich außer als Normalteiler - siehe oben - nur mit einer Abbildung folgender Struktur realisieren:

$$\begin{aligned} x_1 &\longmapsto (1, 3)(4, 5)(2, 6) \\ x_2 &\longmapsto (1, 4, 5)(2, 6, 3) \\ x_3 &\longmapsto (1, 4, 3, 2)(5)(6) \end{aligned}$$

hieraus resultiert Typ  $H$ , also  $(n, 4n, 4n) \subseteq (2, 3, 4n)$ .

$$(2, \infty, \infty) \subseteq (2, 4, \infty) \quad \text{vom Index} \quad 2$$

lässt sich nicht realisieren, da Periode 2 bei geradem Index nicht induziert werden kann.

$$(4, 4, \infty) \subseteq (2, 4, \infty) \quad \text{vom Index} \quad 2$$

lässt sich nur als Normalteiler realisieren. Siehe oben.

$$(4, \infty, \infty) \subseteq (2, 4, \infty) \quad \text{vom Index} \quad 3$$

lässt sich nicht realisieren, da Periode 2 bei ungeradem Index einmal induziert werden muss.

$$(\infty, \infty, \infty) \subseteq (2, 4, \infty) \quad \text{vom Index} \quad 4$$

lässt sich nur mit einer Abbildung folgender Struktur realisieren:

$$\begin{aligned} x_1 &\longmapsto (1, 3)(2, 4) \\ x_2 &\longmapsto (1, 3, 2, 4) \\ x_3 &\longmapsto (1, 2)(3)(4) \end{aligned}$$

hieraus resultiert Typ  $I$ , also  $(n, 2n, 2n) \subseteq (2, 4, 2n)$ .

Weitere Inklusionen, die  $\infty$  als Periode enthalten, und somit auch Inklusionen, die die Variable  $n$  in der Signatur zulassen, gibt es nicht.

Alle restlichen Inklusionen können mit dem sich im Anhang befindlichen „Maple-Programm 2“ ermittelt werden. Es wird kurz dessen Funktionsweise erklärt, damit ersichtlich wird, dass dieses Programm tatsächlich alle möglichen Inklusionen errechnet.

Zunächst kann man sich überlegen, dass die einzigen Perioden, die hierbei induziert werden können, 2, 3 bzw. 2, 4 und in beiden Fällen Teiler von  $m$  sind. Betrachtet man die Riemann-Hurwitz-Formel (10) für die Untergruppe  $(m, m, m) \subseteq (2, 3, m)$  von maximalem Index, so gilt  $(10) \leq 24$ . In Einklang mit THEOREM 6.0.18 kann also kleinstenfalls  $m/24$  als Periode induziert werden. Analog gilt für die Untergruppe  $(m, m, m)$  von maximalem Index in  $(2, 4, m)$ :  $(10) \leq 8$ . Kleinstenfalls kann hierbei also  $m/8$  induziert werden.

Dieses gibt uns eine endliche Anzahl von Möglichkeiten für die Gestalt der Signatur der Untergruppe an die Hand. Die rechte Seite der Riemann-Hurwitz-Formel (10) kann nun für jede mögliche Kombination als eine von  $m$  abhängige gebrochen-rationale Funktion aufgefasst werden. Diese ist für  $(2, 3, m)$  bzw.  $(2, 4, m)$  auf dem Intervall  $[7, \infty)$  bzw.  $[5, \infty)$  eine stetige Funktion, deren Bildbereich - in dem für uns relevanten Bereich - im Intervall  $[0, 24]$  bzw.  $[0, 8]$  beschränkt ist. Mit dem für uns relevanten Bereich sei hier das Intervall bezeichnet, in dem die Funktion nur noch positive Werte annimmt, also genau dieser Bereich, in dem sowohl die Gruppe als auch die Untergruppe existieren, sprich  $M(\Delta) > 0$  ist. Es kann durchaus vorkommen, dass dieses erst ab einer größeren ganzen Zahl - später mit  $k$  bezeichnet - als 7 bzw. 5 der Fall ist. Zudem besitzt die Funktion einen festen Grenzwert für  $m \rightarrow \infty$ . Ist dieser ganzzahlig, so ergibt sich eine der Inklusionen, bei denen  $\infty$  als Periode auftaucht. Da wir diese bereits weiter oben diskutiert haben, werden sie nicht ausgegeben. Das Programm ermittelt zunächst die kleinste ganze Zahl  $k$ , mit der sowohl Nenner als auch Zähler größer Null sind, und liest anschließend mit Hilfe einer Schleife beginnend mit  $k$  alle ganzzahligen Bilder der Funktion aus, indem es sich am Grenzwert orientiert, der im Falle einer nicht konstanten Funktion entweder das Infimum oder das Supremum bildet. Das folgende Beispiel wird dies verdeutlichen:

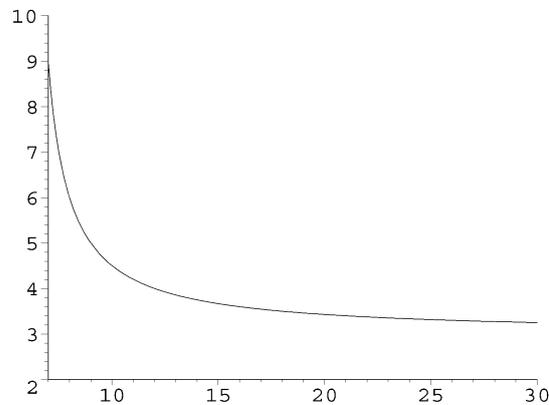


Abbildung 7: Funktion zur Inklusion  $(2, m, m) \subseteq (2, 3, m)$

Die oben abgebildete Funktion ist also

$$\frac{1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{m} - \frac{1}{m}}{1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{m}}$$

Wie man sich leicht überlegt, muss bei ungeradem Index genau eine Periode 2 induziert werden. Das Programm verhindert die Ausgabe von Inklusionen,

die dies nicht erfüllen. Zusätzlich wird die Ausgabe sämtlicher bereits weiter oben diskutierter Inklusionen verhindert, um den Aufwand zu verringern. Zu obiger Funktion erhält man daher folgende Ausgabe:

$$\begin{array}{lll} 9 & (2, 7, 7) & (2, 3, 7) \\ 5 & (2, 9, 9) & (2, 3, 9) \\ 4 & (2, 12, 12) & (2, 3, 12) \end{array}$$

Wir werden nun wie bereits zuvor Schritt für Schritt alle in der Ausgabe des Programms vorgegebenen Möglichkeiten abarbeiten:

$$(4, 4, 5) \subseteq (2, 4, 5) \quad \text{vom Index} \quad 6$$

lässt sich mit folgender Abbildung realisieren:

$$\begin{array}{ll} x_1 & \mapsto (1, 6)(2, 3)(4, 5) \\ x_2 & \mapsto (1, 6, 2, 4)(3)(5) \\ x_3 & \mapsto (1, 5, 4, 3, 2)(6) \end{array}$$

Diese Inklusion ist Typ  $G$ .

$$(4, 4, 6) \subseteq (2, 4, 6) \quad \text{vom Index} \quad 4$$

lässt sich nicht realisieren, da Periode 4 nicht zweimal sich selbst induzieren kann ohne eine weitere 2 oder zweimal Periode 4 zu induzieren.

$$(5, 5, 5) \subseteq (2, 4, 5) \quad \text{vom Index} \quad 8$$

lässt sich nicht realisieren, da man hier zwar die nötigen Zyklenlängen wählen könnte, allerdings kein epimorphes Bild in eine Permutationsgruppe findet.

$$(6, 6, 6) \subseteq (2, 4, 6) \quad \text{vom Index} \quad 6$$

lässt sich nicht realisieren, da Periode 4 hierbei außer sich selbst entweder Periode 2 oder zweimal sich selbst induzieren müsste.

$$(3, 3, 7) \subseteq (2, 3, 7) \quad \text{vom Index} \quad 8$$

lässt sich mit folgender Abbildung realisieren:

$$\begin{array}{ll} x_1 & \mapsto (1, 8)(2, 7)(3, 4)(5, 6) \\ x_2 & \mapsto (1, 8, 2)(3, 5, 7)(4)(6) \\ x_3 & \mapsto (1, 7, 6, 5, 4, 3, 2)(8) \end{array}$$

Diese Inklusion ist Typ  $C$ .

$$(2, 7, 7) \subseteq (2, 3, 7) \quad \text{vom Index} \quad 9$$

lässt sich mit folgender Abbildung realisieren:

$$\begin{aligned} x_1 &\longmapsto (1, 3)(2, 8)(7, 5)(6, 9)(4) \\ x_2 &\longmapsto (1, 4, 5)(2, 8, 3)(7, 6, 9) \\ x_3 &\longmapsto (1, 7, 6, 5, 4, 3, 2)(8)(9) \end{aligned}$$

Diese Inklusion ist Typ *B*.

$$(2, 9, 9) \subseteq (2, 3, 9) \quad \text{vom Index} \quad 5$$

lässt sich nicht realisieren, da sich Periode 3 hierbei mindestens zweimal selbst induzieren müsste.

$$(2, 12, 12) \subseteq (2, 3, 12) \quad \text{vom Index} \quad 4$$

lässt sich nicht realisieren, da sich Periode 3 hierbei mindestens einmal selbst induzieren müsste.

$$(3, 7, 7) \subseteq (2, 3, 7) \quad \text{vom Index} \quad 16$$

lässt sich nicht realisieren, da man hier zwar die nötigen Zyklenlängen wählen könnte, allerdings kein epimorphes Bild in eine Permutationsgruppe findet.

$$(3, 8, 8) \subseteq (2, 3, 8) \quad \text{vom Index} \quad 10$$

lässt sich mit folgender Abbildung realisieren:

$$\begin{aligned} x_1 &\longmapsto (7, 9)(10, 4)(8, 6)(3, 5)(1, 2) \\ x_2 &\longmapsto (8, 7, 9)(5, 4, 10)(1, 3, 6)(2) \\ x_3 &\longmapsto (1, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2)(9)(10) \end{aligned}$$

Diese Inklusion ist Typ *E*.

$$(3, 9, 9) \subseteq (2, 3, 9) \quad \text{vom Index} \quad 8$$

lässt sich nicht realisieren, da sich Periode 3 hierbei mindestens zweimal selbst induzieren müsste.

$$(7, 7, 7) \subseteq (2, 3, 7) \quad \text{vom Index} \quad 24$$

lässt sich mit folgender Abbildung realisieren:

$$\begin{aligned} x_1 &\longmapsto (1, 22)(2, 7)(3, 11)(4, 17)(5, 20)(6, 12) \\ &\quad (9, 14)(13, 19)(10, 18)(8, 23)(15, 14)(16, 21) \\ x_2 &\longmapsto (1, 22, 2)(3, 12, 7)(4, 18, 11)(8, 23, 9) \\ &\quad (5, 21, 17)(6, 13, 20)(10, 19, 14)(15, 24, 16) \\ x_3 &\longmapsto (1, 7, 6, 5, 4, 3, 2)(8, 14, 13, 12, 11, 10, 9) \\ &\quad (15, 21, 20, 19, 18, 17, 16)(22)(23)(24) \end{aligned}$$

Diese Inklusion ist Typ *A*.

$$(9, 9, 9) \subseteq (2, 3, 9) \quad \text{vom Index} \quad 12$$

lässt sich mit folgender Abbildung realisieren:

$$x_1 \mapsto (1, 10)(6, 8)(11, 4)(3, 5)(12, 7)(2, 9)$$

$$x_2 \mapsto (1, 10, 2)(4, 11, 5)(7, 12, 8)(9, 3, 6)$$

$$x_3 \mapsto (1, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2)(10)(11)(12)$$

Diese Inklusion ist Typ *F*.

$$(15, 15, 15) \subseteq (2, 3, 15) \quad \text{vom Index} \quad 8$$

lässt sich nicht realisieren, da sich Periode 3 hierbei mindestens zweimal selbst induzieren müsste.

$$(4, 8, 8) \subseteq (2, 3, 8) \quad \text{vom Index} \quad 12$$

lässt sich mit folgender Abbildung realisieren:

$$x_1 \mapsto (12, 5)(4, 6)(3, 9)(2, 8)(1, 11)(10, 7)$$

$$x_2 \mapsto (12, 6, 5)(11, 2, 1)(9, 4, 7)(10, 8, 3)$$

$$x_3 \mapsto (1, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2)(9, 10)(11)(12)$$

Diese Inklusion ist Typ *D*.

$$(6, 12, 12) \subseteq (2, 3, 12) \quad \text{vom Index} \quad 8$$

lässt sich nicht realisieren, da sich Periode 3 hierbei mindestens zweimal selbst induzieren müsste.

$$(3, 9, 9) \subseteq (2, 3, 9) \quad \text{vom Index} \quad 8$$

lässt sich nicht realisieren, da sich Periode 3 hierbei mindestens zweimal selbst induzieren müsste.

$$(2, 12, 12) \subseteq (2, 3, 12) \quad \text{vom Index} \quad 4$$

lässt sich nicht realisieren, da sich Periode 3 hierbei mindestens einmal selbst induzieren müsste.

$$(4, 4, 6) \subseteq (2, 3, 12) \quad \text{vom Index} \quad 4$$

lässt sich nicht realisieren, da sich Periode 3 hierbei mindestens einmal selbst induzieren müsste.

$$(5, 5, 5) \subseteq (2, 3, 15) \quad \text{vom Index} \quad 4$$

lässt sich nicht realisieren, da sich Periode 3 hierbei mindestens einmal selbst induzieren müsste.

$$(6, 6, 6) \subseteq (2, 3, 24) \quad \text{vom Index} \quad 4$$

lässt sich nicht realisieren, da sich Periode 3 hierbei mindestens einmal selbst induzieren müsste.

Damit ist der Beweis nun vollständig. □

## Teil III

# Untergruppendiagramme von Dreiecksgruppeninklusionen

Bevor wir in diesem Teil der Arbeit zu unserem zentralen Problem gelangen, muss mit Hilfe von THEOREM 6.0.18 noch geklärt werden, wie verschiedene Untergruppen der selben Signatur entstehen können, und im Zuge dessen, wie viele verschiedene Untergruppen insgesamt vorkommen können. Da der Beweis von THEOREM 6.0.18 so konstruktiver Natur ist und die Induzierungsstruktur hier bis ins Detail nachvollzogen werden kann, gibt uns dieses Theorem eine sehr gute Basis zur Ergründung dieses Problems. Wir werden dann feststellen können, dass die Anzahlen verschiedener signaturgleicher Untergruppen mit denen übereinstimmen, die J. Wolfart und E. Gironde in ihrer Arbeit [GW05] durch eine geometrische Betrachtung gewinnen. Bevor wir allerdings mit diesem Problem vorlieb nehmen wollen, werden wir zunächst mit zwei Beispielen über Dreiecksgruppen beginnen, damit der Leser diese Problematik Schritt für Schritt nachvollziehen kann. Es kann vorkommen, dass bei Inklusionen von Fuchsschen Gruppen mehrere verschiedene Perioden gleicher Größe in der Obergruppe existieren. Wir werden solche Inklusionen im Folgenden als Ausnahme-Inklusionen bezeichnen, da es bei unserem Hauptgegenstand, den Dreiecksgruppen, nur eine Inklusion dieser Art gibt. Das folgende erste Beispiel zeigt diese in einem Zahlenbeispiel.

## 10 Beispiele verschiedener signaturgleicher Untergruppen bei Inklusionen von Dreiecksgruppen

Als erstes betrachten wir zwei mögliche Inklusionen  $(n_1, n_1, n_2) \triangleleft (2, n_1, 2n_2)$  vom Index 2 im Fall  $n_1 = 2n_2 = 6$ . Wie wir später feststellen werden, sind diese bereits die zwei einzig Möglichen. Der zugehörige Epimorphismus war im Abschnitt zuvor folgendermaßen gewählt worden:

$$\begin{aligned}x_1 &\longmapsto (1, 2) \\x_2 &\longmapsto (1)(2) \\x_3 &\longmapsto (1, 2)\end{aligned}$$

Man erhält hierbei also  $(3, 6, 6) \triangleleft (2, 6, 6)$ .

Die erste Periode 6 der Gruppe  $(2, 6, 6)$  induziert zweimal sich selbst mit 2 Zykeln der Länge 1. Die zweite Periode 6 induziert einmal Periode 3 mit einem Zykel der Länge 2. Man kann diese Induzierungsstruktur der beiden Perioden 6 allerdings vertauschen ohne die Signatur der Untergruppe zu

ändern oder den Epimorphismus zu gefährden. Explizit bedeutet das:

$$\begin{aligned} x_1 &\longmapsto (1, 2) \\ x_2 &\longmapsto (1, 2) \\ x_3 &\longmapsto (1)(2) \end{aligned}$$

Wie sich diese Änderung geometrisch darstellt, und ob man hier tatsächlich zwei verschiedene Untergruppen erhält, lässt sich sehr gut an der folgenden Abbildung erkennen:

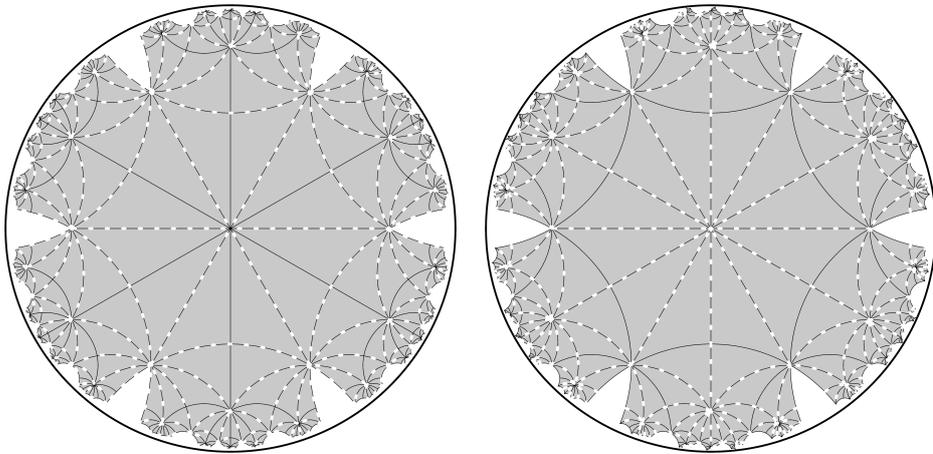


Abbildung 8: Alle Inklusionen einer  $(3, 6, 6)$  in einer gegebenen  $(2, 6, 6)$

**BEMERKUNG.** Die mit einer durchgezogenen und durchbrochenen schwarzen Linie dargestellte Parkettierung der Einheitskreisscheibe ist die der  $(2, 6, 6)$ . Die nur mit einer durchbrochenen schwarzen Linie dargestellte Parkettierung ist die der  $(3, 6, 6)$ . Beide sind so gewählt, dass einer der elliptischen Fixpunkte des Fundamentalbereichs den Ursprung fixiert. Wir hatten dies bereits weiter oben in einer Bemerkung diskutiert. Man kann hier nun sehr schön sehen, wie diese Parkettierungen einer gewissen Drehsymmetrie unterliegen, da das entsprechende elliptische Element alle euklidischen Längen unverändert lässt. Die Abbildungen stammen von einer Internetseite E.Girondos [HP], auf der sich noch viele weitere schöne Beispiele befinden.

Die Art und Weise, wie im obigen Beispiel verschiedene Untergruppen entstehen können, bildet bei den Dreiecksgruppeninklusionen tatsächlich eine Ausnahme. Wie dies in allen anderen Fällen geschieht, werden wir nun sehr gut an dem folgenden Beispiel erkennen können:

Hierzu betrachten wir vier mögliche Inklusionen  $(3, n, 3n) \subseteq (2, 3, 3n)$  vom Index 4 im Fall  $n = 4$ . Wie wir auch hier feststellen werden, sind dies bereits

die vier einzig Möglichen. Der zugehörige Epimorphismus war im Abschnitt zuvor folgendermaßen gewählt worden:

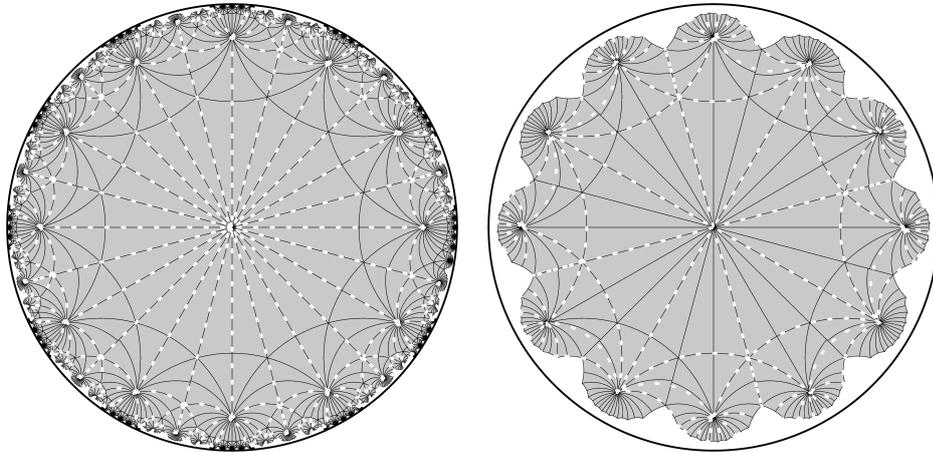
$$\begin{aligned} x_1 &\longmapsto (1, 4)(2, 3) \\ x_2 &\longmapsto (1, 4, 2)(3) \\ x_3 &\longmapsto (1, 3, 2)(4) \end{aligned}$$

Man erhält hierbei also  $(3, 4, 12) \subseteq (2, 3, 12)$ .

Die hierbei entstehende Permutationsgruppe hat Ordnung 12 und ist daher sehr überschaubar. Sie besteht aus den Elementen

$$\begin{aligned} &id, (1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4), (1, 4)(2, 3), (1, 3, 4), (1, 4, 3), \\ &(2, 3, 4), (2, 4, 3), (1, 2, 4), (1, 4, 2), (1, 3, 2), (1, 2, 3). \end{aligned}$$

Betrachtet man den Beweis von THEOREM 6.0.18, so stellt man fest, dass es unerheblich ist, welchen Stabilisator der Permutationsgruppe man wählt. Wie man hier nun leicht erkennen kann sind alle vier Stabilisatoren der Elemente  $\{1, 2, 3, 4\}$  verschieden und rufen somit auch vier verschiedene Untergruppen der selben Signatur hervor. Die folgende Abbildung zeigt dies, wie im letzten Beispiel, anhand einer gegebenen Parkettierung der Einheitskreisscheibe:



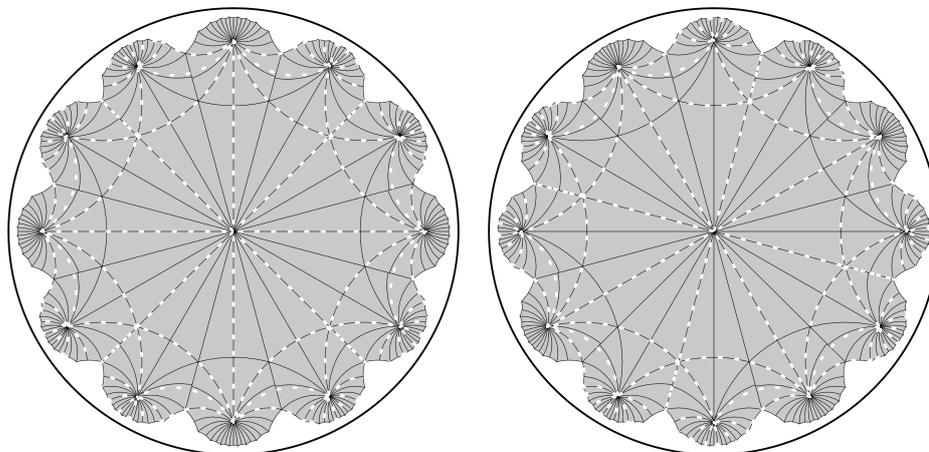


Abbildung 9: Alle Inklusionen einer  $(3, 4, 12)$  in einer gegebenen  $(2, 3, 12)$

Die Abbildungen stammen ebenfalls von E.Girondos Internetseite [HP].

Wie bereits zuvor angemerkt wurde, gibt das obige Beispiel die Begebenheiten für Untergruppen gleicher Signatur sehr gut wieder. Aber genügt es stellvertretend einen Epimorphismus zu studieren? Abgesehen von den Möglichkeiten, die das erste Beispiel bietet, gibt es im Rahmen des zweiten Beispiels dennoch eine Vielzahl von Möglichkeiten zur Wahl des Epimorphismus, um eine Untergruppe der gleichen Signatur hervorzurufen. Hierzu zwei Beispiele:

$$\begin{aligned} x_1 &\longmapsto (1, 4)(2, 3) \\ x_2 &\longmapsto (1, 4, 2)(3) \\ x_3 &\longmapsto (1, 3, 2)(4) \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} x_1 &\longmapsto (1, 3)(2, 4) \\ x_2 &\longmapsto (4, 3, 2)(1) \\ x_3 &\longmapsto (1, 3, 2)(4). \end{aligned}$$

Auch wenn es noch viele weitere Beispiele gibt diesen Epimorphismus zu gestalten, werden wir feststellen, dass es zumindest für alle Dreiecksgruppeninklusionen ausreicht, stellvertretend einen Epimorphismus zu studieren.

## 11 Permutationsisomorphismen zwischen endlichen transitiven Permutationsgruppen

Um das zuvor erklärte Problem lösen zu können, müssen wir erneut einen kleinen Ausflug in die Theorie der Permutationsgruppen unternehmen.

DEFINITION 11.0.5 Zwei Permutationsgruppen  $G, G' \subseteq S_N$  heißen *permutationsisomorph*, wenn sie in  $S_N$  konjugiert sind.

Permutationsisomorphismen sind daher auch zykelstrukturerhaltend. Damit dieser Begriff etwas handlicher wird, betrachten wir nun ein Kriterium hierfür. Siehe hierzu [HUL96].

LEMMA 11.0.3 *Es seien  $G, G' \subseteq S_N$  transitive Permutationsgruppen,  $G_i$  und  $G'_i$  die jeweiligen Stabilisatoren des Elements  $i \in \{1, \dots, N\}$  sowie  $\varphi : G \rightarrow G'$  ein Isomorphismus.  $\varphi$  ist genau dann durch Konjugation in  $S_N$  realisiert, wenn  $\varphi(G_i)$  in  $G'$  zu  $G'_i$  konjugiert ist.*

Man kann dies auch etwas allgemeiner formulieren:

LEMMA 11.0.4 *Es seien  $G, G' \subseteq S_N$  transitive Permutationsgruppen, sowie  $\varphi : G \rightarrow G'$  ein Permutationsisomorphismus, so führt  $\varphi$  Stabilisatoren in Stabilisatoren über.*

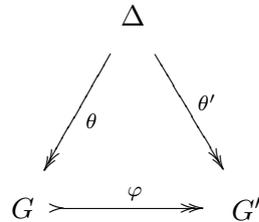
*Beweis.* Dies folgt unmittelbar aus LEMMA 11.0.3 und der Isomorphieeigenschaft, da die Stabilisatoren einer transitiven Permutationsgruppe alle zueinander konjugiert sind.  $\square$

## 12 Die Anzahl verschiedener signaturgleicher Untergruppen bei Inklusionen von Dreiecksgruppen

Um die Frage zu beantworten, ob man stellvertretend einen Epimorphismus untersuchen kann, um alle verschiedenen signaturgleichen Untergruppen bei Inklusionen von Dreiecksgruppen zu erlangen, werden wir nun den Begriff der Permutationsisomorphie auf dieses Problem anwenden, und werden feststellen, dass dieser gerade die Antwort liefert. Wir definieren zunächst die folgende Begrifflichkeit:

DEFINITION 12.0.6 Sei  $\Delta$  eine Dreiecksgruppe, und seien  $G, G' \subseteq S_N$  zwei transitive Permutationsgruppen, die in Einklang mit THEOREM 6.0.18 jeweils eine Untergruppe gleicher Signatur vom Index  $N$  in  $\Delta$  hervorrufen. Wir sagen zwei Epimorphismen  $\theta : \Delta \rightarrow G$  und  $\theta' : \Delta \rightarrow G'$  besitzen die *gleiche Induzierungsstruktur*, wenn die Bilder der Erzeugenden  $x_1, x_2, x_3$  unter beiden Epimorphismen jeweils die gleichen Zyklenlängen aufweisen, d.h.  $\theta(x_i)$  und  $\theta'(x_i)$  haben die gleiche Zyklenstruktur für  $i = 1, 2, 3$ .

Seien  $\Delta, G$  und  $G'$  wie in der obigen Definition, und seien  $\theta$  und  $\theta'$  zwei beliebige Epimorphismen gleicher Induzierungsstruktur in die Permutationsgruppen  $G$  und  $G'$ . Betrachte folgendes Diagramm:



Dieses Diagramm ist immer kommutativ, da die Permutationsgruppen  $G$  und  $G'$  als abstrakte Gruppen immer isomorph sind, wenn man die Bilder der Erzeugenden  $x_1, x_2, x_3$  jeweils aufeinander abbildet. Dies liegt einfach daran, dass beide die entsprechenden Relationen  $a^l = b^m = c^n = abc = 1$  erfüllen. Lässt sich  $\varphi$  aber durch Konjugation in  $S_N$  realisieren, so vertauscht sich im Grunde nur die Nummerierung in den Elementen, daher auch die der Nebenklassen des Stabilisators bzgl. der isomorphen Operation wie sie LEMMA 5.0.2 beschreibt, und damit unter Umständen auch die des Stabilisators selbst als die triviale Nebenklasse. Alle Nebenklassen des Stabilisators und damit auch die der Untergruppe der Dreiecksgruppe im Urbild des in THEOREM 6.0.18 verlangten Epimorphismus  $\theta$ , die durch die Operation eines der Erzeugenden von rechts zu Zyklen zusammengefasst werden, bleiben hierbei als Zyklen erhalten und werden bei  $\theta'$  lediglich durch andere Zahlen aus  $\{1, \dots, N\}$  repräsentiert. Die selbe Untergruppe kann also bei diesen beiden Epimorphismen lediglich das Urbild verschiedener Stabilisatoren sein. Dies wird nun an einem Beispiel verdeutlicht werden. Betrachte:

$$\begin{array}{ccccc}
 \Delta & \xrightarrow{\theta} & G & \xrightarrow{\varphi} & G' \\
 \\
 x_1 & \mapsto & (1, 4)(2, 3) & \mapsto & (1, 3)(2, 4) \\
 x_2 & \mapsto & (1, 4, 2)(3) & \mapsto & (4, 3, 2)(1) \\
 x_3 & \mapsto & (1, 3, 2)(4) & \mapsto & (1, 3, 2)(4).
 \end{array}$$

Hierbei ist der Isomorphismus  $\varphi$  zwischen den Permutationsgruppen durch das Element  $(132)$  als Permutationsisomorphismus realisierbar. Dass hierbei die selbe Permutationsgruppe entsteht, ist nicht bei allen Inklusionen so. Dies liegt in diesem Fall einfach daran, dass in ihr bereits alle Dreierzyklen und die zweier disjunkter Transpositionen enthalten sind, die sich in  $S_4$  finden lassen. Die Untergruppe, die sich beim Epimorphismus  $\theta$  als Urbild des Stabilisators  $G_3$  ergibt, ist im zusammengesetzten Epimorphismus  $\theta' = \varphi \circ \theta$  das Urbild des Stabilisators  $G_1$ .

Wäre dies im Allgemeinen gegeben, so würde es ausreichen, hier nur stellvertretend einen beliebig gewählten Epimorphismus zu untersuchen, um die Frage der Anzahl verschiedener Untergruppen gleicher Signatur einer gegebenen Gruppe zu klären.

DEFINITION 12.0.7 Lässt sich  $\varphi$  im obigen Diagramm für beliebige Permutationsgruppen gleicher Induzierungsstruktur immer durch Konjugation in  $S_N$  realisieren, so sagen wir, die Wahl des Epimorphismus sei *eindeutig bis auf Permutationsisomorphie*.

Eine solche eindeutige Wahl eines Epimorphismus bis auf Permutationsisomorphie ist zwar für alle Inklusionen von Dreiecksgruppen gegeben, wie wir anschließend feststellen werden, lässt sich aber im Allgemeinen nicht so einfach behaupten. Alexander Hulpke war so nett mir hierfür zwei Gegenbeispiele zu nennen. Zum Einen sind Isomorphismen zwischen Permutationsgruppen, die beide die gewünschten Relationen  $a^l = b^m = c^n = abc = 1$  erfüllen, nicht automatisch zykelstrukturertretend, wie folgendes Beispiel zeigt:

$$\begin{aligned} (1, 2, 3, 4, 5) &\longmapsto (1, 2, 3, 4, 5) \\ (1, 5, 3, 6, 2) &\longmapsto (2, 5, 4, 3, 6) \\ (2, 6)(3, 4) &\longmapsto (1, 5)(2, 6) \end{aligned}$$

Der durch die obige Vorschrift definierte Automorphismus der  $A_6$  bildet  $(1, 2, 3)$  auf  $(1, 4, 3)(2, 6, 5)$  ab.

Zum Anderen sind zykelstrukturertretende Isomorphismen nicht automatisch Permutationsisomorphismen. Ein Gegenbeispiel hierzu werden wir später in Abschnitt 14 betrachten.

THEOREM 12.0.22 *Bei allen Dreiecksgruppeninklusionen ist die Wahl des Epimorphismus eindeutig bis auf Permutationsisomorphie. Es gilt:*

Typ	Index	$ G $	$ G_1 $	$G_1 \cong$
$N_1$	3	3	1	$C_1$
$N_2$	6	6	1	$C_1$
$N_3$	2	2	1	$C_1$
$A$	24	168	7	$C_7$
$B$	9	504	56	$C_7 \times (C_2 \times C_2 \times C_2)$
$C$	8	168	21	$C_7 \rtimes C_3$
$D$	12	96	8	$C_8$
$E$	10	720	72	$C_8 \times (C_3 \times C_3)$
$F$	12	324	27	$C_3 \times C_9$
$G$	6	120	20	$C_5 \rtimes C_4$
$H$	6	24	4	$C_4$
$I$	4	8	2	$C_2$
$J$	4	12	3	$C_3$
$K$	3	6	2	$C_2$

*Beweis.* Die in der Tabelle gegebenen Ergebnisse lassen sich sehr einfach mit Hilfe von dem in Maple [MAP] bereitgestellten Paket für Gruppen und den darin enthaltenen Anwendungen für Permutationsgruppen errechnen. Für die Struktur des Stabilisators in den Fällen, in denen ein semidirektes Produkt vorliegt, bietet Maple einen Normalteiltertest und eine Liste von Nebenklassenrepräsentanten, die dies sehr leicht erkennen lässt. Hierzu wurden die Gruppen untersucht, die bereits im Beweis zu THEOREM 9.0.21 gewählt wurden. Dass dies für alle möglichen Gruppen so ist, ergibt sich später durch die Eigenschaft der Permutationsisomorphie.

Um nun zu zeigen, dass bei allen genannten Inklusionen Eindeutigkeit bis auf Permutationsisomorphie vorliegt, werden wir zeigen, dass hierbei Stabilisatoren immer in Stabilisatoren überführt werden.

Bei allen normalen Inklusionen ist dies sehr einfach einzusehen, da der Stabilisator hierbei die triviale Untergruppe  $\{id\}$  bildet, und daher durch einen beliebigen Isomorphismus nur in sich überführt werden kann.

In den Fällen, bei denen der Stabilisator eine zyklische Untergruppe bildet, kommt man mit den folgenden Überlegungen zum Ziel: Die Idee hierfür stammt aus einer Arbeit von Alexander Hulpke, in der er zykelstrukturertehaltende Automorphismen von Permutationsgruppen betrachtet. Sie lässt sich aber auch auf unser Problem anwenden, auch wenn wir noch nicht wissen, dass unsere Isomorphismen zykelstrukturertehaltend sind. Aufgrund von LEMMA 11.0.3 genügt es, nur für einen Stabilisator zu zeigen, dass dieser in einen Stabilisator überführt wird. Da sich des Weiteren ein Erzeugendes eines Stabilisators in allen solchen Fällen bereits unter den Erzeugenden der Permutationsgruppe finden lässt, genügt die Tatsache, dass die Erzeu-

genden zykelstrukturertend abgebildet werden. Diese Eigenschaft müssen allerdings alle unsere Isomorphismen erfüllen, damit sie die gleiche Induzierungsstruktur besitzen. Ist der entsprechende Stabilisator von einem Element zyklisch erzeugt, so besitzt dessen Bild unter dem jeweiligen Isomorphismus ebensoviele Fixpunkte, wie das Element selbst. Durch die zyklische Erzeugung besitzen alle Elemente der Bildgruppe des Stabilisators die selben Fixpunkte. Dass hierbei auch ein Stabilisator vorliegt, liegt dann einfach an der Isomorphieeigenschaft.

In allen restlichen Fällen lässt sich nicht allgemein zeigen, dass Stabilisatoren in Stabilisatoren überführt werden. Wir werden in Abschnitt 14 ein Gegenbeispiel hierfür kennen lernen. Die Gruppe, von der dort die Rede sein wird, ist isomorph zur  $\mathbb{P}SL(3, 2)$  und besitzt Stabilisatoren isomorph zu  $C_2 \times (C_3 \times (C_2 \times C_2))$ , deren Gestalt den oben genannten sehr ähnlich ist. Wir haben hier also keine andere Wahl, als die Gruppen einzeln zu betrachten. In allen diesen Fällen - mit Ausnahme der Inklusion  $F$  - kann man zeigen, dass die Stabilisatoren die einzigen zueinander konjugierten Untergruppen ihrer Ordnung sind, die eine spezielle zyklische Untergruppe aufweisen. Was das genauer bedeutet, wird im Laufe der Argumentation klarer werden. Sie können daher durch einen beliebigen Isomorphismus ausschließlich ineinander überführt werden. Wir werden dieses nun exemplarisch an der Inklusion von Typ  $G$  einsehen können: Dazu werden wir mit Ergebnissen einer Maple-Kalkulation arbeiten, die sich zur Einsicht im Anhang befindet. Wir wählen hierzu die Permutationsgruppe  $G$ , die schon im Beweis zu THEOREM 9.0.21 gewählt worden war. Diese hat Ordnung 120, und wird erzeugt von den Elementen  $(1, 6)(2, 3)(4, 5)$ ,  $(1, 6, 2, 4)$  und  $(1, 5, 4, 3, 2)$ . Sie besitzt 6 Stabilisatoren  $G_i$  der Ordnung 20, die alle eine zyklische Untergruppe der Ordnung 5 besitzen. Dies lässt sich an dem Erzeugenden  $(1, 5, 4, 3, 2)$  sehr einfach ablesen, da die Stabilisatoren der Gruppe alle zueinander konjugiert sind. Und da sich dies durch die Isomorphieeigenschaft auf die Bildgruppe überträgt, besitzt die Bildgruppe 6 zueinander konjugierte Untergruppen der Ordnung 20, die alle eine zyklische Untergruppe der Ordnung 5 besitzen. Ist der Isomorphismus durch Konjugation in  $S_N$  realisierbar, so sind dies gerade die Stabilisatoren. Ist dies nicht der Fall, besitzt auch die Gruppe  $G$  selbst 6 weitere zueinander konjugierte Untergruppen der Ordnung 20, die alle eine zyklische Untergruppe der Ordnung 5 besitzen. Die obige Begründung zur Existenz der speziellen zyklischen Untergruppe ist hier mit Absicht in Bezug auf die Erzeugenden gewählt, da es bei den anderen Inklusionen vorkommen kann, dass die zyklische Gruppe nicht von Primzahlordnung ist. Wir hätten hier sonst auch den Satz von Cauchy benutzen können. Die einzigen Elemente in  $G$ , die solch eine zyklische Gruppe der Ordnung 5 erzeugen können, sind Zyklen der Länge 5.  $G$  besitzt 24 solcher Zyklen, in jedem Stabilisator 4, die jeweils solch eine Gruppe bilden. Aufgrund der bisherigen Argumentation wählen wir nun o.B.d.A. die von  $(2, 3, 6, 4, 5)$  erzeugte zyklische Gruppe, und zeigen mit Hilfe von Maple, dass sich mit  $(2, 3, 6, 4, 5)$  und sämtlichen

Elementen der Ordnung 2 und 4 in  $G$ , nur der Stabilisator der 1 oder Gruppen anderer Ordnungen als 20 erzeugen lassen. Elemente der Ordnungen 3 und 6 kommen nicht in Frage, da deren Ordnung 20 nicht teilt. Alle Elemente der Ordnung 4 in  $G$  sind von gleicher Struktur wie  $(2, 4, 6, 5)$ .  $G_1$  enthält 10 dieser Elemente,  $G$  enthält 20 weitere. Alle Elemente der Ordnung 2 in  $G$  sind von gleicher Struktur wie  $(2, 6)(4, 5)$  oder  $(1, 6)(2, 4)(3, 5)$ .  $G_1$  enthält 5 bzw. keine dieser Elemente,  $G$  enthält jeweils 10 weitere. Die 10 Elemente der Ordnung 4 aus  $G_1$  erzeugen zusammen mit  $(2, 3, 6, 4, 5)$  Gruppen der Ordnung 20, und daher immer den Stabilisator. Alle restlichen Elemente der Ordnung 4 erzeugen zusammen mit  $(2, 3, 6, 4, 5)$  bereits die ganze Gruppe. Die 5 Elemente der Ordnung 2 aus  $G_1$  erzeugen zusammen mit  $(2, 3, 6, 4, 5)$  Gruppen der Ordnung 10, und daher immer eine Untergruppe des Stabilisators. Alle restlichen Elemente der Ordnung 2 erzeugen zusammen mit  $(2, 3, 6, 4, 5)$  Gruppen der Ordnung 60. Damit wäre das Gewünschte nun für diese Inklusion gezeigt.

Bei den Inklusionen  $B, C$  und  $E$  lässt es sich in sehr ähnlicher Weise vorgehen, soll hier aber nicht für jede Inklusion explizit gezeigt werden.

Inklusion  $F$  bildet hierzu eine Ausnahme. Wir wählen auch hier die Permutationsgruppe  $G$ , die schon im Beweis zu THEOREM 9.0.21 gewählt worden war. Diese hat Ordnung 324, und wird erzeugt von den Elementen  $(1, 10)(6, 8)(11, 4)(3, 5)(12, 7)(2, 9)$ ,  $(1, 10, 2)(4, 11, 5)(7, 12, 8)(9, 3, 6)$  und  $(1, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2)$ . Sie besitzt die 4 zueinander konjugierten Stabilisatoren  $G_{1,4,7}$ ,  $G_{2,5,8}$ ,  $G_{3,6,9}$  und  $G_{10,11,12}$  der Ordnung 27, die alle eine zyklische Untergruppe der Ordnung 9 besitzen. Die Indizes der Stabilisatoren geben hier wie üblich genau die Elemente aus  $\{1, \dots, N\}$  an, die von ihnen festgelassen werden. Man kann hier zwar auch wie oben vorgehen, erhält aber 4 weitere zueinander konjugierte Untergruppen der Ordnung 27, die alle eine zyklische Untergruppe der Ordnung 9 enthalten. Diese sind alle in der Maple-Kalkulation aufgelistet, die sich ebenfalls zur Einsicht im Anhang befindet. Die Elemente der Ordnung 9, die sich in den Stabilisatoren finden lassen, sind alle von gleicher Struktur wie  $(1, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2)$ . Alle Elemente dieser Ordnung, die sich in den weiteren 4 Gruppen finden lassen, sind alle von gleicher Struktur wie  $(1, 2, 3, 7, 8, 9, 4, 5, 6)(10, 12, 11)$ , und daher nicht in den Stabilisatoren enthalten. Die 4 weiteren Gruppen kommen als Bilder der Stabilisatoren also nicht in Frage, da die Erzeugenden zykelstrukturertend abgebildet werden müssen, wie wir weiter oben bereits festgestellt haben. Damit wäre das Gewünschte nun also auch für diese Inklusion gezeigt.  $\square$

Bevor wir nun das Problem der Anzahl verschiedener signaturl gleicher Untergruppen klären, schränken wir die möglichen Inklusionen auf ein „Erzeugendensystem“ ein. Die nun folgende Tabelle beinhaltet die komplette Liste von Dreiecksgruppensignaturen  $\sigma_1, \sigma$  mit  $\sigma_1 \subseteq \sigma$ , die keine weitere Inklusionsverfeinerung durch eine dazwischenliegende Dreiecksgruppe gestatten. Sie

bilden ein Erzeugendensystem in dem Sinne, dass jede der Inklusionen aus THEOREM 9.0.21 durch eine Verkettung geeigneter Erzeugender dargestellt werden kann:

Typ	$\sigma_1$	$\sigma$	Index
$N_1$	$(n, n, n)$	$(3, 3, n)$	3
$N_3$	$(n_1, n_1, n_2)$	$(2, n_1, 2n_2)$	2
$B$	$(2, 7, 7)$	$(2, 3, 7)$	9
$C$	$(3, 3, 7)$	$(2, 3, 7)$	8
$E$	$(3, 8, 8)$	$(2, 3, 8)$	10
$G$	$(4, 4, 5)$	$(2, 4, 5)$	6
$J$	$(3, n, 3n)$	$(2, 3, 3n)$	4
$K$	$(2, n, 2n)$	$(2, 3, 2n)$	3

Es gibt also die folgenden mehrstufigen Inklusionen:

$$\begin{aligned}
N_2 : & \quad (n, n, n) \triangleleft_3 (3, 3, n) \triangleleft_2 (2, 3, 2n) \\
N_2 : & \quad (n, n, n) \triangleleft_2 (2, n, 2n) \subseteq_3 (2, 3, 2n) \\
A : & \quad (7, 7, 7) \triangleleft_3 (3, 3, 7) \subseteq_8 (2, 3, 7) \\
D : & \quad (4, 8, 8) \triangleleft_2 (2, 8, 8) \triangleleft_2 (2, 4, 8) \subseteq_3 (2, 3, 8) \\
F : & \quad (9, 9, 9) \triangleleft_3 (3, 3, 9) \subseteq_4 (2, 3, 9) \\
H : & \quad (n, 4n, 4n) \triangleleft_2 (2, 2n, 4n) \subseteq_3 (2, 3, 4n) \\
I : & \quad (n, 2n, 2n) \triangleleft_2 (2, 2n, 2n) \triangleleft_2 (2, 4, 2n)
\end{aligned}$$

DEFINITION 12.0.8 Seien  $\Delta_1, \Delta$  Dreiecksgruppen,  $\Delta_1 \subseteq \Delta$ , dann schreiben wir

$$\text{sb}(\Delta \supseteq \Delta_1) = \# \{ \Delta'_1 | \Delta'_1 \subseteq \Delta, \exists \gamma \in \mathbb{P}SL(2, \mathbb{R}), \text{ so dass } \Delta'_1 = \gamma \Delta_1 \gamma^{-1} \subseteq \Delta \}$$

BEMERKUNG. Die obige Definition gibt gerade die gesamte Anzahl verschiedener Untergruppen gleicher Signatur an, denn diese sind als Dreiecksgruppen immer  $\mathbb{P}SL(2, \mathbb{R})$ -konjugiert, sobald sie die gleiche Signatur aufweisen.

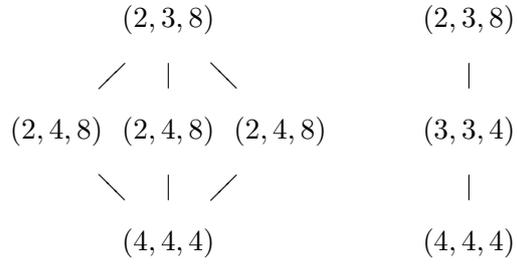
Aufgrund von THEOREM 12.0.22 können wir nun die Anzahl verschiedener signaturgleicher Untergruppen bei allen Dreiecksgruppeninklusionen mit Hilfe eines beliebigen Epimorphismus angeben, wobei wir bei Typ  $N_3$  eine weitere Unterscheidung machen müssen:  $N_{3,2}$  steht für alle Situationen, in denen  $n_1 = 2n_2$ . Dies ist die bereits weiter oben angesprochene einzige Ausnahme-Inklusion der Dreiecksgruppen.  $N_{3,1}$  steht für alle übrigen Situationen.

THEOREM 12.0.23 *Die folgende Tabelle gibt die Anzahl verschiedener signaturlgleicher Untergruppen zu jeder Inklusion an, die keine weitere Inklusionsverfeinerung durch eine dazwischenliegende Dreiecksgruppe gestattet:*

<i>Typ</i>	$\sigma_1$	$\sigma$	$\text{sb}(\Delta \supseteq \Delta_1)$
$N_1$	$(n, n, n)$	$(3, 3, n)$	1
$N_{3,1}$	$(n_1, n_1, n_2)$	$(2, n_1, 2n_2)$	1
$N_{3,2}$	$(n, 2n, 2n)$	$(2, 2n, 2n)$	2
$B$	$(2, 7, 7)$	$(2, 3, 7)$	9
$C$	$(3, 3, 7)$	$(2, 3, 7)$	8
$E$	$(3, 8, 8)$	$(2, 3, 8)$	10
$G$	$(4, 4, 5)$	$(2, 4, 5)$	6
$J$	$(3, n, 3n)$	$(2, 3, 3n)$	4
$K$	$(2, n, 2n)$	$(2, 3, 2n)$	3

*Beweis.* Hierzu ist es wieder sehr hilfreich, sich die entsprechenden transitiven Permutationsgruppen mit Hilfe von dem in Maple [MAP] bereitgestellten Paket für Gruppen und den darin enthaltenen Anwendungen für Permutationsgruppen errechnen zu lassen. Man kann hier leicht erkennen, dass im Falle von allen normalen Inklusionen obiger Tabelle der Stabilisator immer die triviale Untergruppe  $\{id\}$  ist. Die zwei Möglichkeiten, die Typ  $N_{3,2}$  bietet, ergeben sich wie im ersten Beispiel am Anfang dieses Teils der Arbeit beschrieben, d.h. durch zwei verschiedene Wahlmöglichkeiten der Induzierungsstruktur im Falle zweier Perioden von gleichem Betrag. Im Falle aller nicht-normalen Inklusionen in der obigen Tabelle kann man feststellen, dass alle möglichen Stabilisatoren tatsächlich verschieden sind. Aufgrund der Transitivität benötigt man hierzu nur ein Element mit genau einem Fixpunkt. Dieses lässt sich in diesen Fällen bereits unter den Erzeugenden finden.  $\square$

Kommen wir nun zu den mehrstufigen Inklusionen: Im ersten Fall der Inklusion vom Typ  $N_2$ , bei der sie durch  $N_{3,1}$  und  $N_1$  realisiert wird, bietet jede dieser Inklusionen nur eine Möglichkeit zur Untergruppe. Dieses steht natürlich im Einklang zur Tatsache, dass der Stabilisator hierbei die triviale Untergruppe  $\{id\}$  ist. Betrachtet man nun die alternative Zusammensetzung der Inklusion durch  $K$  und  $N_{3,1}$ , so müssen also jede der möglichen  $(2, n, 2n)$  die gleiche  $(n, n, n)$  zur Untergruppe haben. Wir werden dies für den Fall  $n = 4$  etwas genauer betrachten. Das folgende Diagramm zeigt die Situation sehr anschaulich:



Man kann dies zudem auch geometrisch sehr gut einsehen. Die folgende Abbildung zeigt die obige Situation ebenfalls für den Fall  $n = 4$  an einer gegebenen Parkettierung der Einheitskreisscheibe einer  $(2, 3, 8)$ :

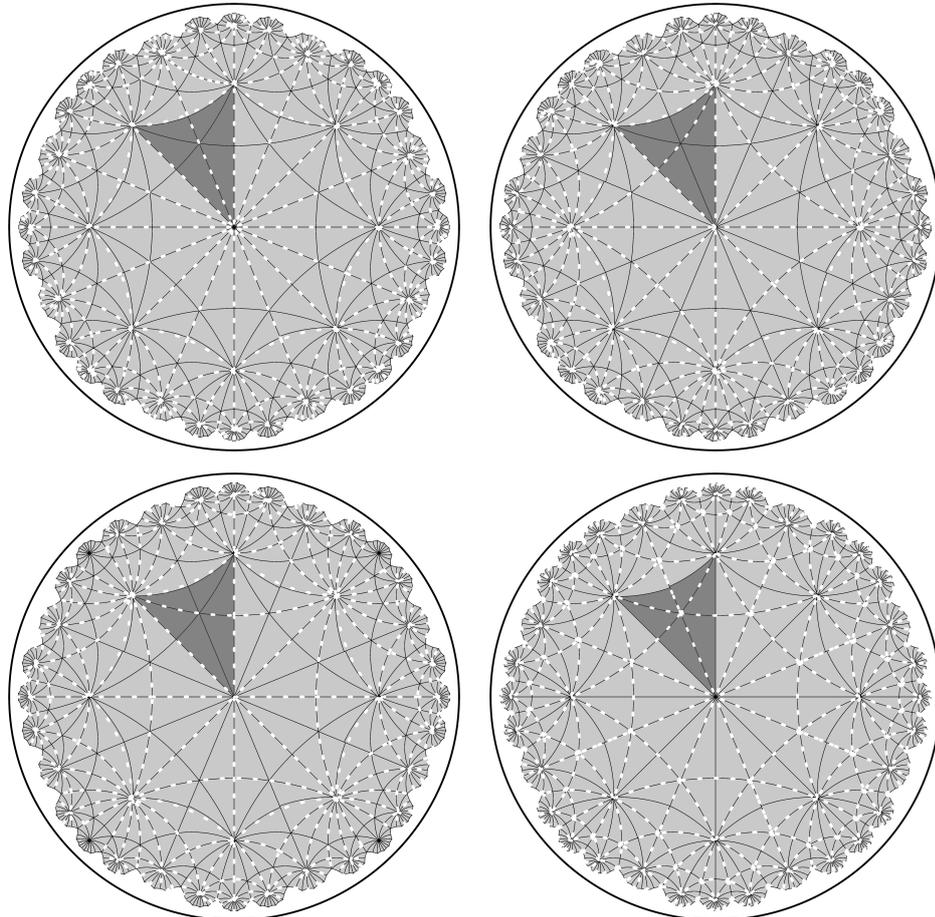


Abbildung 10: Alle Inklusionen einer  $(2, 4, 8)$  und die alternative  $(3, 3, 4)$  in einer gegebenen  $(2, 3, 8)$

BEMERKUNG. Ein Teildreieck der Parkettierung der  $(4, 4, 4)$  ist hierbei jeweils dunkelgrau gekennzeichnet. Bei der alternativen Inklusion rechts unten ist dieses etwas umgeformt, damit hier die Gleichheit deutlich wird.

Betrachtet man alle restlichen mehrstufigen Inklusionen, so multiplizieren sich die Anzahlen der möglichen Untergruppen entsprechend der Zusammensetzung:

THEOREM 12.0.24 *Die folgende Tabelle gibt die Anzahl verschiedener signaturgleicher Untergruppen zu jeder mehrstufigen Inklusion an:*

Typ	$\sigma_1$	$\sigma$	$\text{sb}(\Delta \supseteq \Delta_1)$
$N_2$	$(n, n, n)$	$(2, 3, 2n)$	1
$A$	$(7, 7, 7)$	$(2, 3, 7)$	8
$D$	$(4, 8, 8)$	$(2, 3, 8)$	6
$F$	$(9, 9, 9)$	$(2, 3, 9)$	4
$H$	$(n, 4n, 4n)$	$(2, 3, 4n)$	3
$I$	$(n, 2n, 2n)$	$(2, 4, 2n)$	2

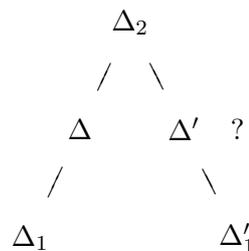
*Beweis.*  $N_2$  bedarf keinen weiteren Argumenten, da es ja zuvor schon sehr genau beleuchtet wurde. Die anderen Anzahlen möglicher verschiedener Untergruppen stehen auch hier in Einklang mit den Begebenheiten der Permutationsgruppen und deren voneinander verschiedenen Stabilisatoren. So weist zum Beispiel die Permutationsgruppe zur Inklusion  $I$  die Stabilisatoren  $\{id, (1, 2)\}$  und  $\{id, (3, 4)\}$  auf. Es ist also bei allen obigen Inklusionen so, dass die Stabilisatoren verschiedener Elemente aus  $\{1, \dots, N\}$  zum Teil zusammenfallen.  $\square$

J. Wolfart und E. Gironde [GW05] klären die Frage der Anzahl verschiedener Untergruppen gleicher Signatur einer gegebenen Gruppe für alle Inklusionen von Dreiecksgruppen auf einem geometrischen Weg: Sie betrachten hierzu die Parkettierung einer gegebenen Gruppe und argumentieren mit den darin gegebenen Möglichkeiten zur Wahl verschiedener Fixpunkte für Untergruppen gleicher Signatur. Die Tatsache, dass die geometrischen Begebenheiten bzgl. der Anzahl möglicher verschiedener Untergruppen gleicher Signatur aus den Untersuchungen von J. Wolfart und E. Gironde mit denen der Permutationsgruppe und deren voneinander verschiedenen Stabilisatoren übereinstimmen, bestätigt das Vorliegen einer Eindeutigkeit bis auf Permutationsisomorphie bei allen Dreiecksgruppeninklusionen: Jede beliebige Permutationsgruppe zur gleichen Inklusion muss daher permutationsisomorph zu einer Festgewählten sein, da die Stabilisatoren sonst nicht immer ineinander überführt würden, und man deshalb ein Vielfaches der oben genannten Anzahl verschiedener Untergruppen der selben Signatur hätte.

BEMERKUNG. Es wurde bereits in einer der vielen Bemerkungen zuvor erwähnt, dass es einen engen Zusammenhang zwischen torsionsfreien Untergruppen  $K$  von Dreiecksgruppen  $\Delta$  und regulären Dessins gibt, welche auf quasisiplatonischen Riemannschen Flächen existieren. J. Wolfart und E. Girondo [GW05] haben hierzu gezeigt, dass  $\text{sb}(\tilde{\Delta} \supseteq \Delta)$  mit  $\tilde{\Delta} = N(K)$ , wobei  $N(K)$  der Normalisator von  $K$  sei, eine Obergrenze für die Anzahl verschiedener regulärer Dessins des selben Typs auf der durch  $K$  uniformisierten quasisiplatonischen Riemannschen Flächen darstellt.

### 13 Zur Existenz von Zwischengruppen bei mehrstufigen Inklusionen von Dreiecksgruppen

Bevor wir nun endlich zur Lösung unseres zentralen Problems gelangen, wird es erneut erläutert. Betrachtet man eine Dreiecksgruppe  $\Delta_1$  als Untergruppe einer Dreiecksgruppe  $\Delta_2$ , so kann es vorkommen, dass diese Inklusion eine Verfeinerung durch eine dazwischenliegende Dreiecksgruppe  $\Delta$  gestattet. Die Rede ist hier natürlich von den mehrstufigen Inklusionen, welche oben bereits aufgelistet wurden. In den Fällen, in denen zu einer gegebenen Dreiecksgruppe  $\Delta_2$  voneinander verschiedene Untergruppen gleicher Signatur  $\Delta_1, \Delta'_1, \dots$  existieren, ist es nicht a priori klar, dass es eine dazwischenliegende Dreiecksgruppe  $\Delta, \Delta', \dots$  gleicher Signatur zu jeder dieser verschiedenen Untergruppen gibt. Dies wollen wir nun klären, d.h. wir zeigen, dass es für jedes Paar Dreiecksgruppen  $\Delta_1 \subseteq \Delta_2, \Delta'_1 \subseteq \Delta_2, \dots$  eine dazwischenliegende Dreiecksgruppe  $\Delta, \Delta', \dots$  gibt. Die nachfolgende Abbildung soll dies verdeutlichen.



THEOREM 13.0.25 *Seien  $\Delta_1, \Delta$  und  $\Delta_2$  Dreiecksgruppen mit  $\Delta_1 \subseteq \Delta \subseteq \Delta_2$ , so gilt: Für jedes Paar Dreiecksgruppen  $\Delta_1^*, \Delta_2^*$  der selben Signatur wie  $\Delta_1, \Delta_2$  existiert eine Dreiecksgruppe  $\Delta^*$  der selben Signatur wie  $\Delta$  mit  $\Delta_1^* \subseteq \Delta^* \subseteq \Delta_2^*$ .*

*Beweis.* Das Theorem, das hier bewiesen werden soll, reduziert sich durch eine einfache Überlegung auf das zuvor erläuterte zentrale Problem dieser Arbeit: Hat man eine Dreiecksgruppe  $\Delta_2^*$  gegeben, so findet man mit D. Singermans THEOREM 6.0.18 eine Untergruppe der selben Signatur wie  $\Delta^*$ , und darin eine Untergruppe der selben Signatur wie  $\Delta_1^*$ . Wir betrachten nun

o.B.d.A. die mehrstufige Inklusion  $\Delta_1 \subseteq \Delta \subseteq \Delta_2$ , um die Verhältnisse in einer gegebenen Dreiecksgruppe zu klären:

Aufgrund unserer geometrischen Analyse oben ist dies für die Inklusion vom Typ  $N_2$  hinfällig. Es bleibt dies also nur für die Inklusionen vom Typ  $A, D, F, H$  und  $I$  zu zeigen.

Betrachtet man den Epimorphismus zur Inklusion  $\Delta_1 \subseteq \Delta_2$  und schränkt diesen auf  $\Delta$  ein, so erhält man als epimorphes Bild eine entsprechende Permutationsgruppe  $H$ . Siehe hierzu [ART98]. Das folgende Diagramm zeigt dies anschaulich:

$$\begin{array}{ccc} \Delta_2 & \longrightarrow & G \\ | & & | \\ \Delta & \longrightarrow & H \\ | & & | \\ \Delta_1 & \longrightarrow & G_i \end{array}$$

Da sich nun die verschiedenen Untergruppen  $\Delta_1, \Delta'_1, \dots$  nur anhand der Wahl der verschiedenen Stabilisatoren unterscheiden, und diese in der transitiven Permutationsgruppe alle zueinander konjugiert sind, ergibt sich die folgende Möglichkeit: Man wähle das konjugierende Element  $\tau \in G$ , welches die entsprechenden Stabilisatoren  $G_i$  und  $G_j$  zueinander konjugiert. Bildet man nun  $H' := \tau^{-1}H\tau$ , so erhält man hiermit eine Permutationsgruppe vom selben Index wie  $H$  in  $G$  mit  $\tau^{-1}G_i\tau \subseteq \tau^{-1}H\tau \subseteq G$ :

$$\begin{array}{ccc} \Delta_2 & \longrightarrow & G \\ | & & | \\ \Delta' & \longrightarrow & H' \\ | & & | \\ \Delta_1 & \longrightarrow & G_j \end{array}$$

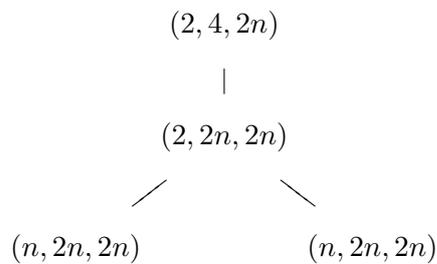
Es muss nun nur noch klargestellt werden, dass  $\Delta'$  die gewünschte Signatur besitzt: Hierzu wähle man einen Repräsentanten aus dem Urbild des konjugierenden Elements unter dem Epimorphismus  $\theta^{-1}(\tau)$ . Dieses konjugiert die Gruppen  $\Delta$  und  $\Delta'$  zueinander und garantiert somit, dass sie die selbe Signatur besitzen.

Die gesamte Vorgehensweise lässt sich in einfacher Weise auch auf die dreistufige Inklusion übertragen.  $\square$

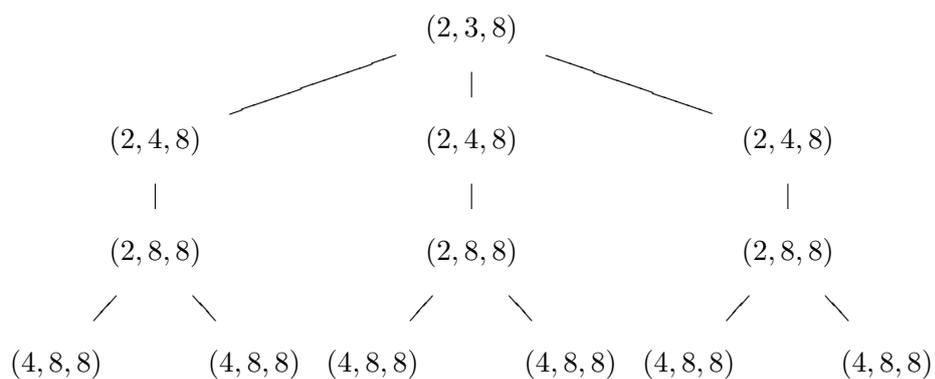
Bei den Inklusionen, die mit der Ausnahme-Inklusion  $N_{3,2}$  realisiert werden, kann es zum Teil vorkommen, dass  $H$  und  $H'$  zusammenfallen. Dies kann

man unschwer an den folgenden Untergruppendiagrammen erkennen:

*I:*

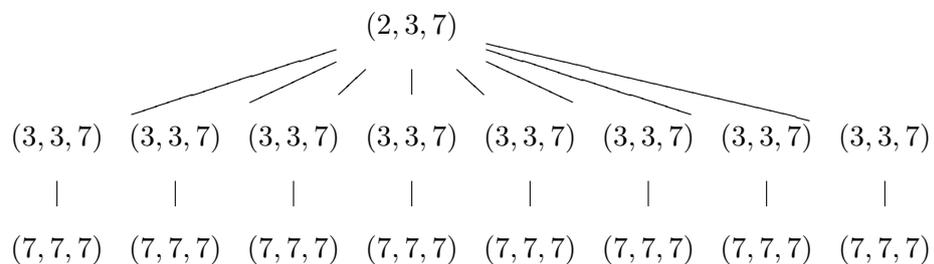


*D:*

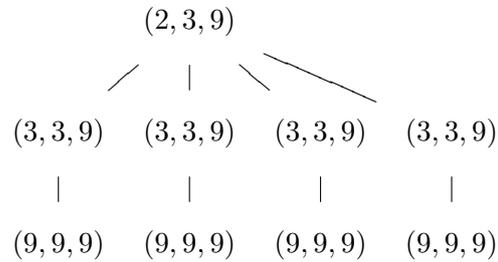


Der Vollständigkeit halber werden im Folgenden alle restlichen mehrstufigen Inklusionen in Diagrammen dargestellt:

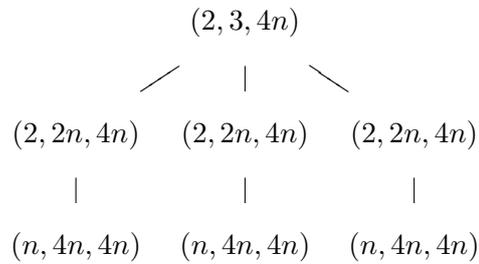
*A:*



*F*:



*H*:



## 14 Verallgemeinerung

Der Grund, aus dem die Argumentation des vorherigen Abschnitts so gut funktioniert, ist der, dass die Ausnahme-Inklusion  $N_{3,2}$ , sofern sie denn auftaucht, nicht die oberste Inklusion bildet. Sie besitzt in ihrer Obergruppe zwei Perioden der gleichen Größe, und man kann daher zwei Epimorphismen verschiedener Induzierungsstruktur wählen, diese jeweils eindeutig bis auf Permutationsisomorphie. Bildet solch eine Ausnahme-Inklusion, d.h. mit mehreren verschiedenen Perioden gleicher Größe in der Obergruppe, den Kopf eines Untergruppendiagrammes, so lässt sich die Induzierungsstruktur unter Umständen auch für die unterste Gruppe nicht eindeutig wählen. Dieses tritt dann ein, wenn verschiedene Perioden gleicher Größe verschiedene Perioden verschiedener Größe induzieren. In solch einem Fall ließe sich die Argumentation des vorherigen Abschnitts nicht mehr anwenden.

Ein weiteres Problem bildet der Begriff der Permutationsisomorphie. Wie etwas weiter oben bereits erwähnt, war Alexander Hulpke so nett mir hierfür ein Gegenbeispiel zu nennen. Betrachte die Inklusion

$$(2, 2, 2, 3, \infty) \subseteq (2, 3, \infty).$$

Sie lässt sich durch folgende Abbildung realisieren:

$$\begin{aligned}x_1 &\longmapsto (1)(2, 3)(4, 7)(5)(6) \\x_2 &\longmapsto (1, 7, 3)(6, 5, 4)(2) \\x_3 &\longmapsto (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)\end{aligned}$$

Die Untergruppe der  $S_7$ , die hierbei entsteht, ist isomorph zur  $\mathbb{P}SL(3, 2)$ . Sie ist 2-fach transitiv auf 7 Punkten und besitzt einen äußeren Automorphismus, der die Zykelstruktur erhält, aber nicht von  $S_7$  induziert ist, und somit kein Permutationsisomorphismus ist.

D.h. selbst wenn man zykelstrukturertreuende Isomorphismen gegeben hat, stellt sich dennoch die Hürde der Permutationsisomorphie. Und somit ist es nicht allgemein gegeben, dass man zu einer eindeutigen Wahl eines Epimorphismus bis auf Permutationsisomorphie gelangt. Wäre dies gegeben, so kann man wie in der Argumentation des vorherigen Abschnitts, o.B.d.A. beliebige Epimorphismen wählen, um so zur gewünschten mehrstufigen Inklusion zu gelangen, die die Verhältnisse für alle diese mehrstufigen Inklusionen der selben Obergruppe anhand von Konjugation klärt. Ist solch eine Eindeutigkeit bis auf Permutationsisomorphie nicht gegeben, so wird man aufgrund des endlichen Indexes, und somit endlichen Permutationsgruppen, zu endlich vielen Permutationsisomorphieklassen gelangen. Man hat hier zwar die Möglichkeit, für jede Permutationsisomorphieklass Repräsentanten zu wählen, es ist aber nicht ohne weiteres gegeben, dass man zu solch einem Repräsentanten die gewünschte mehrstufige Inklusion findet, um die Argumentation des vorherigen Abschnitts aufrecht zu erhalten. Dies ginge hier natürlich auch nur, sofern keine Ausnahme-Inklusion hinderlich involviert ist.

# Teil IV

## Anhang

### 15 Maple-Programm 1

```
> restart;
> suche:=proc(p,q,r,u,v,f)
> local N,gw;
> global m;
> N:=(1-1/p-1/q-1/r)/(1-1/u-1/v-1/m);
> gw:=eval(N,m=infinity);
> if type(gw,integer)=true then
> m:=un:
> printf("%30d      (%2a,%2a,%2a)
> (%2a,%2a,%2a)\n",gw,eval(p),eval(q),eval(r),u,v,un);
> end if:
> m:='m':
> printf("\n");
> end proc:
> suche(2,m,m,2,3,m);

          3      ( 2,un,un)   ( 2, 3,un)

> suche(3,3,m,2,3,m);

          2      ( 3, 3,un)   ( 2, 3,un)

> suche(3,m,m,2,3,m);

          4      ( 3,un,un)   ( 2, 3,un)

> suche(m,m,m,2,3,m);

          6      (un,un,un)   ( 2, 3,un)

> suche(2,m,m,2,4,m);

          2      ( 2,un,un)   ( 2, 4,un)

> suche(4,4,m,2,4,m);

          2      ( 4, 4,un)   ( 2, 4,un)

> suche(4,m,m,2,4,m);

          3      ( 4,un,un)   ( 2, 4,un)
```

```
> suche(m,m,m,2,4,m);
```

```
4      (un,un,un)   ( 2, 4,un)
```

## 16 Maple-Programm 2

```
> restart;
> suche:=proc(p,q,r,u,v,w)
> local N,gr,ugr,j,k,gw,st,g,i,t,a,b,c,tr,z,test;
> global m;
> N:=(1-1/p-1/q-1/r)/(1-1/u-1/v-1/w);
> gw:=eval(N,m=infinity);
> gr:=(1/u+1/v+1/w);
> ugr:=(1/p+1/q+1/r);
> z:=0:test:=0:
> if eval(gr,w=infinity)<1 then
> for j from 1 while eval((1-1/u-1/v-1/w),m=j)<=0 or
> eval((1-1/p-1/q-1/r),m=j)<=0 do
> k:=j+1;end do;
> st:=eval(diff(N,m),m=k):
> if st<0 then
> if type(gw,integer)=true then g:=ceil(gw)+1:
> else g:=ceil(gw):end if:
> for i from k while (eval(N,m=i))>=g do
> if type((eval(N,m=i)),integer)=true then
> t:=eval(N,m=i);m:=i;
> if t>2 then
> a:=eval(p):b:=eval(q):c:=eval(r):
> if type(a,integer)=true and
> type(b,integer)=true and
> type(c,integer)=true then
> if b>c then tr:=b:b:=c;c:=tr; end if:
> if a>b then tr:=a:a:=b;b:=tr; end if:
> if b>c then tr:=b:b:=c;c:=tr; end if:
> if v=3 and a>3 then test:=a:
> elif v=4 and a>4 then test:=a:
> elif v=3 and b>3 and test=0 then test:=b:
> elif v=4 and b>4 and test=0 then test:=b:
> else test:=c: end if:
> if i/test>t then ; else
> if type(t,odd)=true and a=2 then
> if (t=3 and u=2 and v=3 and a=2 and i/b=2 and c=i) then;
> else printf("%30a      (%2a,%2a,%2a)   (%2a,%2a,%2a)\n",
> eval(t),eval(a),eval(b),eval(c),u,v,i);z:=1:end if:
> elif type(t,even)=true then
> if (t=4 and u=2 and v=3 and a=3 and i/b=3 and i=c) or
> (t=4 and u=2 and v=4 and i/a=2 and i=b and i=c) or
> (t=4 and u=2 and v=3 and a=3 and i/b=2 and i/c=2) or
```

```

> (t=6 and u=2 and v=3 and i/a=4 and i=b and i=c) or
> (t=6 and u=2 and v=3 and i/a=3 and i/b=2 and i=c) then;

> else printf("%30a    (%2a,%2a,%2a)    (%2a,%2a,%2a)\n",
> eval(t),eval(a),eval(b),eval(c),u,v,i);z:=1:
> end if:end if:end if:end if:end if:end if:
> m:='m';end do:
> end if:

> if st>0 then
> if type(gw,integer)=true then g:=ceil(gw)-1:
> else g:=ceil(gw):end if:
> for i from k while (eval(N,m=i))<=g do
> if type((eval(N,m=i)),integer)=true then
> t:=eval(N,m=i);m:=i;
> if t>2 then
> a:=eval(p):b:=eval(q):c:=eval(r):
> if type(a,integer)=true and
> type(b,integer)=true and
> type(c,integer)=true then
> if b>c then tr:=b:b:=c;c:=tr; end if:
> if a>b then tr:=a:a:=b;b:=tr; end if:
> if b>c then tr:=b:b:=c;c:=tr; end if:
> if v=3 and a>3 then test:=a:
> elif v=4 and a>4 then test:=a:
> elif v=3 and b>3 and test=0 then test:=b:
> elif v=4 and b>4 and test=0 then test:=b:
> else test:=c: end if:

> if i/test>t then ; else
> if type(t,odd)=true and a=2 then
> if (t=3 and u=2 and v=3 and a=2 and i/b=2 and c=i) then;
> else printf("%30a    (%2a,%2a,%2a)    (%2a,%2a,%2a)\n",
> eval(t),eval(a),eval(b),eval(c),u,v,i);z:=1:end if:
> elif type(t,even)=true then

> if (t=4 and u=2 and v=3 and a=3 and i/b=3 and i=c) or
> (t=4 and u=2 and v=4 and i/a=2 and i=b and i=c) or
> (t=4 and u=2 and v=3 and a=3 and i/b=2 and i/c=2) or
> (t=6 and u=2 and v=3 and i/a=4 and i=b and i=c) or
> (t=6 and u=2 and v=3 and i/a=3 and i/b=2 and i=c) then;
> else printf("%30a    (%2a,%2a,%2a)    (%2a,%2a,%2a)\n",
> eval(t),eval(a),eval(b),eval(c),u,v,i);z:=1:
> end if:end if:end if:end if:end if:end if:
> m:='m';end do:
> end if:
> end if:
> if z=1 then printf("\n"): end if:
> print():
> end proc:

```

```

> for i from 1 to 8 do
> h[i]:=m/i:
> end do:
> suche(4,4,4,2,4,m);
> for i from 1 to 8 do
> suche(4,4,h[i],2,4,m);
> end do:
> for j from 1 to 8 do
> for k from j to 8 do
> suche(2,h[j],h[k],2,4,m);
> suche(4,h[j],h[k],2,4,m);
> end do:
> end do:
> for i from 1 to 8 do
> for j from i to 8 do
> for k from j to 8 do
> suche(h[i],h[j],h[k],2,4,m);
> end do:
> end do:
> end do:

```

6	( 4, 4, 5)	( 2, 4, 5)
4	( 4, 4, 6)	( 2, 4, 6)
8	( 5, 5, 5)	( 2, 4, 5)
6	( 6, 6, 6)	( 2, 4, 6)

```

> for i from 1 to 24 do
> h[i]:=m/i:
> end do:
> for i from 1 to 24 do
> suche(3,3,h[i],2,3,m);
> end do:
> for j from 1 to 24 do
> for k from j to 24 do
> suche(2,h[j],h[k],2,3,m);
> suche(3,h[j],h[k],2,3,m);
> end do:
> end do:
> for i from 1 to 24 do
> for j from i to 24 do
> for k from j to 24 do
> suche(h[i],h[j],h[k],2,3,m);
> end do:
> end do:
> end do:

```

8	( 3, 3, 7)	( 2, 3, 7)
9	( 2, 7, 7)	( 2, 3, 7)

5	( 2, 9, 9)	( 2, 3, 9)
4	( 2,12,12)	( 2, 3,12)
16	( 3, 7, 7)	( 2, 3, 7)
10	( 3, 8, 8)	( 2, 3, 8)
8	( 3, 9, 9)	( 2, 3, 9)
24	( 7, 7, 7)	( 2, 3, 7)
12	( 9, 9, 9)	( 2, 3, 9)
8	(15,15,15)	( 2, 3,15)
12	( 4, 8, 8)	( 2, 3, 8)
8	( 6,12,12)	( 2, 3,12)
8	( 3, 9, 9)	( 2, 3, 9)
4	( 2,12,12)	( 2, 3,12)
4	( 4, 4, 6)	( 2, 3,12)
4	( 5, 5, 5)	( 2, 3,15)
4	( 6, 6, 6)	( 2, 3,24)

## 17 Kalkulation zur Inklusion G

```

> restart;
> with(group):
> g:=permgrou(6, {[[1,6], [2,3], [4,5]], [[1,6,2,4]], [[1,5,4,3,2]]});
      g:=permgrou(6, {[[1,5,4,3,2]], [[1,6], [2,3], [4,5]], [[1,6,2,4]]});

> elements(g);

{[[2,3], [5,6]], [[1,3,4], [2,5,6]], [[1,5,4], [2,3,6]],
 [[1,6,2,5,4,3]], [[1,2,3,6]], [[1,5,2,4,3,6]], [[1,6,4,2,3]],
 [[1,6,3], [2,4,5]], [[1,2], [3,4], [5,6]], [[1,6,2,3,5]],
 [[1,5,6,2]], [[2,3,5,4]], [[2,6,5,3,4]], [[1,4,6], [2,3,5]],
 [[1,5], [2,3], [4,6]], [[1,4,2,3,6,5]], [], [[1,4,5,2]],
 [[1,6,3,4,2,5]], [[2,4,5,3]], [[2,4,3,5,6]], [[1,2,3,4,5]],
 [[1,5,3], [2,4,6]], [[1,4], [2,6], [3,5]], [[1,4,5,3,6]],
 [[1,3,4,5,2,6]], [[1,6], [3,4]], [[1,2,5,6,3]], [[1,5], [3,6]],
 [[1,3], [2,4], [5,6]], [[2,4], [3,6]], [[1,6,3,2]], [[1,3], [2,6]],
 [[1,2,6,5]], [[1,5,4,2,6,3]], [[1,5,3,4]], [[1,3,6], [2,5,4]],
 [[1,2,4,5,6]], [[2,5,4,6,3]], [[1,2,4,6,3,5]],
 [[1,2,3], [4,6,5]], [[1,5], [2,6], [3,4]], [[1,2], [3,6], [4,5]],
 [[1,5,4,3,2]], [[1,6], [2,3], [4,5]], [[1,6,2,4]], [[1,3,4,6,5]],
 [[1,6], [2,5]], [[1,2,3,5,6,4]], [[1,3,2,4,6]], [[2,5,3,6]],
 [[1,4,5,6,2,3]], [[1,6,4], [2,5,3]], [[1,3,2], [4,5,6]],
 [[1,5,6], [2,3,4]], [[2,6,3,5]], [[1,3,5], [2,6,4]],
 [[1,2,6,4,5,3]], [[2,5], [3,4]], [[2,4,6,5]], [[1,5,6,3,2,4]],
 [[1,3,5,2,4]], [[1,4,5], [2,6,3]], [[1,4,3], [2,6,5]],
 [[1,3,5,4,6,2]], [[1,6,3,5,4]], [[1,5,6,4,3]], [[1,6,5,4,2]],
 [[2,6], [4,5]], [[1,5], [2,4]], [[2,3,4,6]], [[2,6,4,3]],
 [[1,2,4,3]], [[1,2,6,3,4]], [[2,3,6,4,5]], [[1,3,6,2,4,5]],
 [[1,2], [3,5]], [[1,3,6,4]], [[1,2,5,3,4,6]], [[1,2,5,4]],
 [[1,4,2,6]], [[1,6,2], [3,4,5]], [[1,2,6], [3,5,4]],
 [[3,4,5,6]], [[1,3], [4,5]], [[1,3,2,5]], [[1,4,3,2,5,6]],
 [[1,5,4,6]], [[3,6,5,4]], [[1,4,2], [3,5,6]],
 [[1,3], [2,5], [4,6]], [[1,3,6,5,2]], [[1,2], [4,6]],
 [[1,4,3,6,2]], [[1,4,6,5,3,2]], [[1,3,2,6,5,4]],
 [[1,2,4], [3,6,5]], [[1,4,6,3]], [[1,5,3,6,4,2]],
 [[1,6,4,5]], [[1,2,5], [3,6,4]], [[1,6,5], [2,4,3]],
 [[1,5,2], [3,4,6]], [[1,6,5,3]], [[1,3,5,6]],
 [[1,4,2,5,3]], [[1,5,2,6,4]], [[1,6,5,2,3,4]],
 [[1,6,4,3,5,2]], [[1,6], [2,4], [3,5]], [[1,5,2,3]],
 [[3,5], [4,6]], [[1,4], [5,6]], [[1,4,3,5]],
 [[1,5,3,2,6]], [[1,4,6,2,5]], [[1,4], [2,3]],
 [[2,5,6,4]], [[1,4], [2,5], [3,6]], [[1,3,4,2]]};

> grouporder(g);

```

```

> elements(g1);
  {[[2,3],[5,6]],[[2,3,5,4]],[[2,6,5,3,4]],[[2,4,5,3]],[[2,4,3,5,6]],[[2,4],[3,6]],[[2,5,4,6,3]],[[2,5,3,6]],[[2,6,3,5]],[[2,5],[3,4]],[[2,4,6,5]],[[2,6],[4,5]],[[2,3,4,6]],[[2,6,4,3]],[[2,3,6,4,5]],[[3,4,5,6]],[[3,6,5,4]],[[3,5],[4,6]],[[2,5,6,4]]};

> grouporder(g1);
  20

> t:=permgrou(6,{[[2,3,6,4,5]]});
  t:=permgrou(6,{[[2,3,6,4,5]]});

> s:=permgrou(6,{[[3,6,5,4]]});
  s:=permgrou(6,{[[3,6,5,4]]});

> isnormal(g1,t);
  true

> isnormal(g1,s);
  false

> cosets(g1,t);
  {[],[[3,4,5,6]],[[3,5],[4,6]],[[3,6,5,4]]}

> elements(s);
  {[],[[3,4,5,6]],[[3,5],[4,6]],[[3,6,5,4]]}

> SnConjugates(g,[])
> +SnConjugates(g,[[2,3,6,4,5]])
> +SnConjugates(g,[[1,4,5,6,2,3]])
> +SnConjugates(g,[[1,6],[2,4],[3,5]])
> +SnConjugates(g,[[1,5,2],[3,4,6]])
> +SnConjugates(g,[[1,2],[4,6]])
> +SnConjugates(g,[[2,3,5,4]]);
  120

> SnConjugates(g,[[2,3,5,4]]);
  30

> SnConjugates(g,[[2,6],[4,5]]);

```

15

```
> SnConjugates(g, [[1,6], [2,4], [3,5]]);
10

> SnConjugates(g1, [[2,3,5,4]]);
10

> SnConjugates(g1, [[2,6], [4,5]]);
5

> SnConjugates(g1, [[1,6], [2,4], [3,5]]);
0

> s6:=permgroupp(6, {[[1,2]], [[1,2,3,4,5,6]]}):
> L:=elements(g):
> anzahl:=0:rest1:=0:rest2:=0:rest3:=0:
> for i from 1 to 120 do
>   if areconjugate(s6, L[i], [[2,4,6,5]])=true or
>   areconjugate(s6, L[i], [[2,6], [4,5]])=true or
>   areconjugate(s6, L[i], [[1,6], [2,4], [3,5]])=true then
>     o:=grouporder(permgroupp(6, {[[2,3,6,4,5], L[i]}));
>     if o=20 then anzahl:=anzahl+1;
>     end if;
>     if o=10 then rest1:=rest1+1;
>     end if;
>     if o=60 then rest2:=rest2+1;
>     end if;
>     if o=120 then rest3:=rest3+1;
>     end if;
>     end if;
> end do; print(anzahl);print(rest1);print(rest2);print(rest3);
10
5
10
30
```

## 18 Kalkulation zur Inklusion F

```
> restart;
> with(group):
```

```

> g:=permgrou(12,{{[1,10],[6,8],[11,4],[3,5],[12,7],[2,9]],
> [[1,10,2],[4,11,5],[7,12,8],[9,3,6]],
> [[1,9,8,7,6,5,4,3,2]]});
      g:=permgrou(12,{{[1,10],[6,8],[11,4],[3,5],[12,7],[2,9]],
                        [[1,10,2],[4,11,5],[7,12,8],[9,3,6]],
                        [[1,9,8,7,6,5,4,3,2]]});

> grouporder(g);
      324

> g147:=permgrou(12,{{[2,10,9,5,11,3,8,12,6]],
> [[3,6,9],[10,12,11]]});
      g147:=permgrou(12,{{[2,10,9,5,11,3,8,12,6]],
                        [[3,6,9],[10,12,11]]});

> grouporder(g147);
      27

> g258:=permgrou(12,{{[1,9,12,4,3,10,7,6,11]],
> [[3,6,9],[10,12,11]]});
      g258:=permgrou(12,{{[[3,6,9],[10,12,11]],
                        [[1,9,12,4,3,10,7,6,11]]});

> grouporder(g258);
      27

> g369:=permgrou(12,{{[1,12,5,4,10,8,7,11,2]],
> [[1,4,7],[2,8,5]]});
      g369:=permgrou(12,{{[[1,12,5,4,10,8,7,11,2]],
                        [[1,4,7],[2,8,5]]});

> grouporder(g369);
      27

> g101112:=permgrou(12,{{[1,8,3,4,2,6,7,5,9]],
> [[1,7,4],[2,5,8]]});
      g101112:=permgrou(12,{{[[1,8,3,4,2,6,7,5,9]],
                        [[1,7,4],[2,5,8]]});

> grouporder(g101112);
      27

> t:=permgrou(12,{{[2,10,9,5,11,3,8,12,6]]});
      t:=permgrou(12,{{[2,10,9,5,11,3,8,12,6]]});

```

```

> s:=permgrou(12, {[[3,6,9],[10,12,11]]});
s:=permgrou(12, {[[3,6,9],[10,12,11]]});

> isnormal(g147,t);
> isnormal(g147,s);
> cosets(g147,t);
true
false

{[], [[3,9,6],[10,11,12]], [[3,6,9],[10,12,11]]}

> elements(s);
{[], [[3,9,6],[10,11,12]], [[3,6,9],[10,12,11]]}

> a147:=permgrou(12, {[[1,7,4],[2,10,6,8,12,3,5,11,9]],
> [[3,6,9],[10,12,11]]});
a147:=permgrou(12, {[[1,7,4],[2,10,6,8,12,3,5,11,9]],
[[3,6,9],[10,12,11]]});

> grouporder(a147);
27

> a258:=permgrou(12, {[[1,6,10,7,3,12,4,9,11],[2,8,5]],
> [[3,9,6],[10,11,12]]});
a258:=permgrou(12, {[[3,9,6],[10,11,12]],
[[1,6,10,7,3,12,4,9,11],[2,8,5]]});

> grouporder(a258);
27

> a369:=permgrou(12, {[[1,12,2,7,11,8,4,10,5],[3,9,6]],
> [[1,4,7],[2,8,5]]});
a369:=permgrou(12, {[[1,12,2,7,11,8,4,10,5],[3,9,6]],
[[1,4,7],[2,8,5]]});

> grouporder(a369);
27

> a101112:=permgrou(12, {[[1,2,3,7,8,9,4,5,6],[10,12,11]],
> [[1,7,4],[2,5,8]]});
a101112:=permgrou(12, {[[1,7,4],[2,5,8]],
[[1,2,3,7,8,9,4,5,6],[10,12,11]]});

```

```
> grouporder(a101112);
```

27

```
> t:=permgrou(12,{{[1,7,4],[2,10,6,8,12,3,5,11,9]}});
```

```
t:=permgrou(12,{{[1,7,4],[2,10,6,8,12,3,5,11,9]}});
```

```
> s:=permgrou(12,{{[3,6,9],[10,12,11]}});
```

```
s:=permgrou(12,{{[3,6,9],[10,12,11]}});
```

```
> isnormal(a147,t);
```

```
> isnormal(a147,s);
```

```
> cosets(a147,t);
```

*true*

*false*

```
{[],[[3,9,6],[10,11,12]],[[3,6,9],[10,12,11]}}
```

```
> elements(s);
```

```
{[],[[3,9,6],[10,11,12]],[[3,6,9],[10,12,11]}}
```

## Literatur

- [ART98] ARTIN, M.: *Algebra*, Birkhäuser Verlag Basel 1998
- [GW05] GIRONDO, E., WOLFART, J.: *Conjugators of Fuchsian groups and quasiplatonic surfaces*, Quart. J. Math. 56 (2005), 525-540
- [HEI64] HEINS, M.: *Fundamental polygons of Fuchsian and Fuchsoid groups*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I., vol. A337 pp.1-30, 1964
- [HP] GIRONDO, E.: Internetseite, <http://www.uam.es/ernesto.girondo>
- [HUL96] HULPKE, A.: *Konstruktion transitiver Permutationsgruppen*, D 82 Dissertation RWTH Aachen 1996
- [KAT92] KATOK, S.: *Fuchsian groups*, The University of Chicago Press 1992
- [LAM05] LAMOTKE, K.: *Riemannsche Flächen*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2005
- [LEH64] LEHNER, J.: *Discontinuous groups and automorphic functions*, Rhode Island: Mathematical surveys of the Amer. Math. Soc. (1964)
- [MAC71] MACLACHLAN, C.: *Maximal normal Fuchsian groups*, Illinois J. Math., 15 (1971)
- [MAP] Maple®, ©Waterloo Maple Inc., offizielle Internetseite, <http://www.maplesoft.com/>
- [SIN70] SINGERMAN, D.: *Subgroups of Fuchsian groups and finite permutation groups*, Bull. London Math. Soc., 2 (1970), 319-323
- [SIN72] SINGERMAN, D.: *Finitely maximal Fuchsian groups*, J. London Math. Soc. (2), 6 (1972), 29-38
- [WOL06] WOLFART, J.: *Vorlesung Riemannsche Flächen II: Fuchssche Gruppen* (WS 06/07), Universität Frankfurt am Main