

## Der diskrete mathematische Blick



John Nash wurde 1994 für seine wegweisenden Beiträge zur Spieltheorie mit dem Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften ausgezeichnet. Der mit vier Oscars ausgezeichnete Film »A Beautiful Mind« mit Russell Crowe in der Hauptrolle, rückte das Leben des genialen Mathematikers ins öffentliche Bewusstsein.

nicht nur um die Betrachtung rein diskreter Probleme, sondern auch um die Art und Weise, mit der weiträumige mathematische oder interdisziplinäre Probleme zu lösen sind. Der diskrete Blick ist häufig mit konstruktiven und algorithmischen Herangehensweisen verbunden. Exemplarisch soll der diskrete Blick auf einige ausgewählte Szenarien aus dem »täglichen Leben« (Sudokus), aus dem Internet sowie bei ökonomischen Gleichgewichten beleuchtet werden. Viele Probleme im Alltag fallen ganz oder teilweise in den Teilbereich der diskreten Mathematik, beispielsweise die Berechnung von optimalen Touren in Navigationssystemen (als kürzeste Wege in Graphen), die Fehlerkorrektursysteme in CD-Playern oder die verschlüsselte Datenübertragung im Internet.

#### Der diskrete Blick auf Sudokus

Angesichts der Tatsache, dass viele Leute mathematischen Aufgabenstellungen mit einem gewissen Respekt beziehungsweise leichtem Unbehagen gegenüber treten, ist es erfreulich, dass sich seit der hohen Popularität von Sudokus (beginnend in Japan in den 1980er Jahren) Personen aller Altersklassen in Wartezimmern, auf Bahnfahrten oder am Strand zur Unterhaltung mit dem Lösen dieser mathematisch orientierten Probleme beschäftigen. Sudokus sind zu einem Volkssport geworden.<sup>11</sup>

In der Ausgangsform eines Sudokus sind einige Einträge eines  $9 \times 9$ -Zahlenschemas vorgegeben und die verbleibenden Felder so mit Ziffern aus der Menge  $\{1, \dots, 9\}$  zu füllen, dass in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jedem der neun markierten  $3 \times 3$ -Blöcke die Ziffern  $1, \dots, 9$  jeweils genau einmal vorkommen. Die vorgegebenen Einträge sind so gewählt, dass die Lösung eines Sudokus eindeutig ist.

Für das Lösen von Sudokus entwickelt man unmittelbar einige Prinzipien, Tricks und Blickwinkel, die in der Regel schnell zum Ziel führen. Während das pure Lösen dieser Rätsel eher als eine Routineübung anzusehen ist, stellt sich dem Mathematiker die Frage nach der Struktur solcher Probleme. Hierbei sehen wir die Sudokus auch als Stellvertreter für konkrete – nicht nur zur Unterhaltung gedachte – Problemklassen, für die gleichartige Abstraktionsübergänge auszuführen sind.

Während Fragen nach der Struktur mathematischer Probleme es oft erfordern, den gesamten Sachverhalt in einem hohen, dem Laien kaum zugänglichen Maß zu abstrahieren, lassen sich gerade bei solchen diskreten Szenarien konkrete Fragen formulieren, die einen Eindruck davon vermitteln, zu welchem Grad man die

#### von Thorsten Theobald

Der Begriff »diskrete Mathematik« sorgt häufig für ein gewisses Staunen. Gemeint ist nicht ein »dezent«er, »unaufdringlicher« und »zurückhaltender« Zweig der Mathematik. »Diskret« steht vielmehr für den Gegensatz zu »kontinuierlich«. Beispiele für Probleme der diskreten Mathematik sind die Lösbarkeit von Sudokus, die Indizierung von Webseiten in Suchmaschinen wie Google oder die Charakterisierung ökonomischer Gleichgewichte.

Der Begriff »diskret« geht auf die lateinische Wurzel »discernere« (»trennen«, »getrennt halten«) zurück. Mathematik wird immer dann als diskret bezeichnet, wenn die auftretenden Strukturen endlich oder »eckig« sind statt »stetig«, »glatt« oder mit Grenzprozessen verbunden. Insbesondere umfasst die diskrete Mathematik viele Aspekte, die als Grundlage der Informatik von Bedeutung sind. Typische Grundmodelle der diskreten Mathematik sind Graphen, Polytope [siehe »Graphen und Polytope«, Seite 51] oder endliche algebraische Strukturen wie endliche Körper.

Wir geben hier einen kleinen Einblick in die Sichtweise eines diskreten Mathematikers. Oft geht es dabei

Struktur des Problems bereits durchdrungen hat. Im Falle von Sudokus lautet eine solche Frage etwa: »Wie viele vollständig ausgefüllte Sudoku-Zahlenschemas gibt es überhaupt?« Die Antwort hierfür ist bekannt: 6.670.903.752.021.072.936.960. Berücksichtigt man nahe liegende Symmetrien, so erhält man jedoch nur 5.472.730.538 Äquivalenzklassen.<sup>13)</sup> Wie kommt man darauf?

Eine Formulierung eines Sudokus als ganzzahliges lineares Problem verwendet etwa die binären Unbestimmten  $x_{ijk}$ , wobei  $x_{ijk}$  genau dann den Wert 1 haben soll, falls in Zeile  $i$  und Spalte  $j$  die Zahl  $k$  steht. Andernfalls soll  $x_{ijk}$  Null sein. Die Spielregeln des Sudoku führen nun auf lineare Gleichungen, zum Beispiel

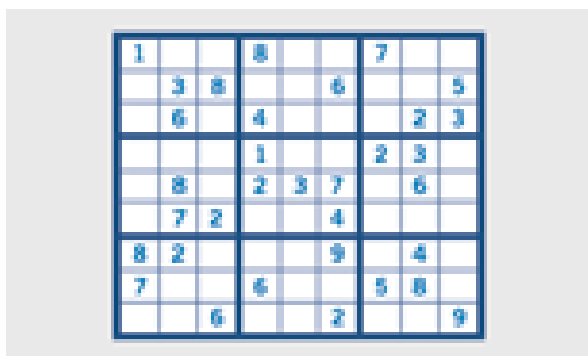
$$x_{115} + x_{125} + \dots + x_{195} = 1$$

Dies ist die Bedingung dafür, dass die Zahl 5 in der ersten Zeile nur einmal vorkommt. Die Eigenschaft, dass in jedem Feld genau eine Ziffer stehen muss, entspricht der Bedingung  $x_{i1} + \dots + x_{i9} = 1$  für alle  $i$  und  $j$ , und auch jeder vorgegebene Wert ergibt eine lineare Bedingung. Durch diese Gleichungen sowie die Einschränkung, dass jedes  $x_{ijk}$  nicht negativ sein soll, wird ein Polytop in einem Raum der Dimension  $9^3 = 729$  definiert. Jeder in dem Polytop enthaltene ganzzahlige Punkt liefert eine Lösung (welche bei einem Sudoku eindeutig sein sollte). Ohne die Vorgabe von Werten erhält man ein Polytop, dessen Anzahl ganzzahliger Punkte die vorher genannte Gesamtanzahl der Sudokus ist.

**Ist ein Sudoku mit 16 Einträgen eindeutig lösbar?**

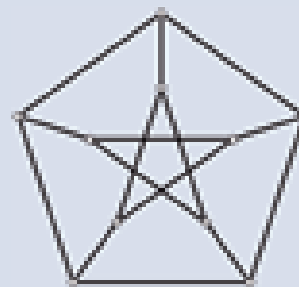
Es gibt aber auch andere Fragen im Umfeld von Sudokus, deren Beantwortung mehr Struktureinsichten erfordert, als Wissenschaftler bisher erlangt haben. Ein Beispiel für eine noch ungelöste Frage ist: »Was ist die minimale Anzahl von Positionen, die man vorgeben muss, um ein Sudoku konstruieren zu können, das eine eindeutige Lösung hat?« In dem von uns angegebenen Sudoku sind beispielsweise 32 Einträge vorgegeben; es gibt jedoch Sudokus mit viel weniger vorgegebenen Einträgen, die immer noch eindeutig lösbar sind. Tatsächlich existieren Beispiele mit 17 vorgegebenen Einträgen, die sich auf eindeutige Weise vervollständigen lassen.

Darüber hinaus wird (unter anderem aufgrund zahlreicher Experimente) von Fachleuten vermutet, dass es keine Sudokus mit 16 vorgegebenen Einträgen gibt, die sich eindeutig vervollständigen lassen, doch beweisen kann dies derzeit niemand. Zwar kann man mit dem Computer viele Sudokus mit 16 vorgegebenen



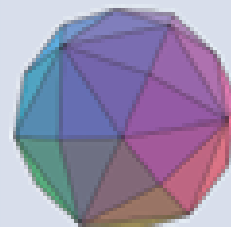
**Graphen**

Ein Graph ist eine aus Knoten und Kanten bestehende Struktur. Graphen dienen zur Modellierung von Netzwerken, etwa von Verkehrsnetzwerken; die Knoten symbolisieren beispielsweise Städte und die Kanten Straßen beziehungsweise Flugverbindungen zwischen den Städten.



**Polytope**

Unter einem Polytop versteht man die Verallgemeinerung eines Polygons (also eines Vielecks in der Ebene) auf den dreidimensionalen Raum. Jedes dreidimensionale Polytop kann wahlweise durch Angabe seiner Ecken oder seiner zweidimensionalen Seitenflächen beschrieben werden. Die berühmten platonischen Körper Tetraeder, Würfel, Okta-



eder, Dodekaeder, Ikosaeder, welche bereits die Griechen fasziniert haben, sind besonders regelmäßige Polytope.<sup>12)</sup>

Einträgen lösen und auf diesem Weg ausprobieren, ob sie eindeutig lösbar sind, aufgrund der extrem hohen Anzahl der Sudokus übersteigt ein Versuch des vollständigen Durchprobierens jedoch die Möglichkeiten heutiger Computertechnologie. Grundsätzlich liegen zwischen einer Vermutung und einer bewiesenen Aussage für den Mathematiker Welten.

Die Herausforderung, die Gültigkeit einer aufgestellten Hypothese zu beweisen, kann es unter Umständen erfordern, neue Methoden oder sogar eine gänzlich neue Theorie zu entwickeln. Ob diese dann schlagkräftig genug ist, um die Ausgangsfrage tatsächlich vollständig beantworten zu können, kann man häufig nicht vorhersehen. Nicht selten ist das Vorhaben, ein konkretes offenes mathematisches Problem zu beweisen, der Ausgangspunkt für ein breiteres mathematisches Forschungsprojekt.

**Vom Sudoku zur diskreten Geometrie**

Ein erster Schritt eines solchen Unterfangens ist oft die Klassifikation und Einordnung in existierende Theorien. Sudoku kann man als Spezialfälle diophantischer Gleichungen mit nichtnegativen Lösungen auffassen. Diese nach dem griechischen Mathematiker Diophantus (3. Jahrhundert n. Chr.) benannten Gleichungen betrachten nur ganzzahlige Lösungen. In dem Kasten mit dem Sudoku-Beispiel ist eine Modellierung durch ein ganzzahliges Gleichungssystem mit Nichtnegativitätsbedingungen beschrieben.

Es ist hilfreich, das Problem vom Standpunkt der diskreten Geometrie zu untersuchen. Die Lösungen des Gleichungssystems sind hierbei die ganzzahligen Punkte in einem Polytop hoher Dimension. Der Blick-

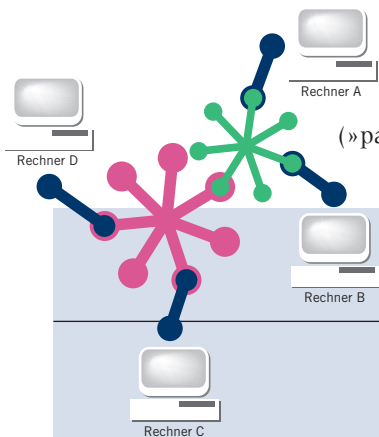
winkel der diskreten Geometrie ist nicht nur zweckmäßig für Sudokus (die nicht unser eigentlicher Forschungsgegenstand sind), sondern in ähnlicher Weise auch für viele andere anwendungsorientierte Optimierungsprobleme. So haben die mathematischen Modellierungen wichtiger praktischer Probleme natürliche Formulierungen als ganzzahlige lineare Probleme, die konzeptionell mit der angegebenen Formulierung von Sudokus eng verwandt sind. Beispiele sind etwa die Verkehrsplanung bei der Bahn oder die Erstellung von Zeitablaufplänen für die optimale Nutzung von Maschinen (Scheduling).

Der diskrete Mathematiker fragt weiterhin nach den Grenzen der algorithmischen Lösbarkeit diskreter Probleme. Viele interessante ganzzahlige Probleme gehören im Sinne der theoretischen Informatik zu algorithmisch schwierigen Problemen (»NP-schwer«). Sudokus können vom praktischen Standpunkt mit dem Computer jedoch in verschwindend geringer Zeit gelöst werden.

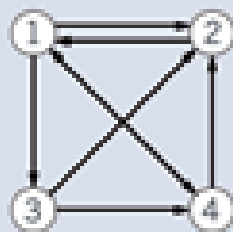
### Der diskrete Blick auf das Internet

Eine der Erfolgsgeschichten neuartiger mathematischer Anwendungen ist seit dem Start der Internet-Suchmaschine Google zu beobachten. Ein Hauptgrund für den Erfolg von Google im Vergleich zu anderen Suchmaschinen war die Ermittlung der »besten« Suchergebnisse. Während viele Suchmaschinen daran krankten, dass sich Benutzer erst seitenweise durch die Suchergebnisse klicken mussten, bestach Google dadurch, dass die führenden Suchergebnisse meist diejenige Seite enthielten, nach der man suchte.

Grundidee des dabei verwendeten Algorithmus ist es, jeder beim automatischen Durchsuchen des Internets gefundenen WWW-Seite eine Bewertungspunktzahl (»page rank«) zuzuordnen, die die »Wichtig-



### Berechnung des »page ranks« in Suchmaschinen



Wir betrachten eine Situation mit den vier WWW-Seiten »1« bis »4«, und  $x_i$  bezeichne den »page rank« von Seite  $i$ . Da Seite 1 von den Seiten 2 (als einziger ausgehender Link) und Seite 4 (als einer von zwei Links) referenziert wird, gilt  $x_1 = x_2 + x_4/2$ , und entsprechende Gleichungen lassen sich für alle Seiten aufstellen. Der »page rank«-Vektor ist ein Eigenvektor der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

zum Eigenwert 1, dessen Komponenten sich zu 1 aufsummieren. Eine Lösung ist hier  $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0.387, 0.290, 0.129, 0.194)$ . Interessanterweise hat die Seite 2 nicht den größten »page rank«, obwohl alle Seiten auf sie verweisen. Grund hierfür ist, dass sie ihre gesamte Wähleinheit an Seite 1 weitergibt, welche darüber hinaus noch von einer anderen Seite referenziert wird.

keit« der Seite bestimmt und bei der die Ausgabe der Suchergebnisse unter allen Seiten, die die eingegebenen Suchbegriffe enthalten, die wichtigsten zuerst anführt.

Für die Ermittlung des »page ranks« kommen Methoden aus der diskreten Mathematik, der Stochastik und der numerischen Analysis zum Einsatz. Zunächst wird das Internet als Graph modelliert. Jede WWW-Seite entspricht einem Knoten und jeder Link einer Kante; hierbei lassen wir Selbstreferenzen außer Acht. Die Idee ist es nun, einer Seite einen hohen »page rank« zuzuordnen, wenn eine hohe Anzahl wichtiger Seiten auf sie verweist; diese Definition ist natürlich rekursiv. Bei der Präzisierung stellen wir uns vor, dass jede Seite in einer Wahl eine Wähleinheit zu vergeben hat, die sie anteilig auf die von ihr referenzierten Seiten verteilt. Die »Wichtigkeit«, die eine Seite  $S_1$  auf eine Seite  $S_2$  so weitergibt, ist der entsprechende Anteil der Wähleinheit multipliziert mit dem »page rank« von  $S_1$ .

Bezeichnet  $x_i$  den »page rank« der  $i$ -ten Seite im System ( $i = 1, \dots, n$ ), dann ergibt sich ein lineares Gleichungssystem der Form

$$x_i = \sum_j a_{ij} x_j, \quad 1 \leq i \leq n,$$

wobei der Koeffizient  $a_{ij}$  das Gewicht ist, mit dem Seite  $i$  von Seite  $j$  referenziert wird [siehe »Berechnung des »page ranks« in Suchmaschinen«]. Die Lösungen dieses Eigenvektorproblems erfüllen die Eigenschaften des »page ranks«.

Besitzt jede WWW-Seite eine ausgehende Kante, dann ist das Gleichungssystem lösbar; die Lösung muss jedoch nicht unbedingt eindeutig sein. Für den Fall, dass einige der Seiten keine ausgehenden Links haben, ergibt sich darüber hinaus ein allgemeines Eigenwertproblem mit a priori unbekanntem Eigenwert, das numerisch effizient auch in sehr großen Größenordnungen (wie es für den realen WWW-Graphen erforderlich ist) gelöst werden kann.

### Der diskrete Blick auf ökonomische Gleichgewichte

Durch den mit vier Oscars ausgezeichneten Film »A Beautiful Mind« im Jahr 2001 sind Nash-Gleichgewichte zur Charakterisierung ökonomischer Gleichgewichte auch dem allgemeinen Wissenschaftspublikum wieder ins Bewusstsein gerückt. Für seine wegweisenden Beiträge zur Spieltheorie aus den 1950er Jahren wurde John Nash (gemeinsam mit John Harsanyi und Reinhard Selten) im Jahr 1994 mit dem Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften ausgezeichnet. Seit einigen Jahren werden spieltheoretische Modelle auch verstärkt untersucht, um Gleichgewichtssituationen in großen Netzwerken (etwa dem Internet) zu analysieren.

Nashs Resultate garantieren die Existenz von Gleichgewichten in endlichen  $n$ -Personen-Spielen. Erstaunlicherweise sind über diese Existenzaussagen hinaus bereits sehr grundlegende Fragen zu diesen Spielen (wie etwa der maximalen Anzahl von Nash-Gleichgewichten im Endlichkeitsfall) immer noch ungeklärt, und der »state-of-the-art« wird mit Methoden der diskreten Geometrie erzielt.<sup>14)</sup>

Um diesen Zusammenhang zu erläutern, betrachten wir eines der elementarsten Modelle der Spieltheorie, sogenannte Bimatrixspiele wie das bekannte Spiel »Schere, Stein, Papier«. Hierbei besitzen zwei Spieler jeweils eine endliche Menge reiner Strategien (der

Kardinalität  $m$  beziehungsweise  $n$ ). Für jedes Strategienpaar ist ein Paar von Auszahlungen an die beiden Spieler festgelegt; diese Auszahlungen quantifizieren die Güte der gewählten Strategien für die Spieler und können auch negativ sein. In diesem Beispiel: Stein zerschlägt Schere (+1, -1), Schere schneidet Papier (+1, -1), Papier wickelt Stein ein (+1, -1). Die Auszahlungswerte können durch zwei Matrizen  $A$  und  $B$  beschrieben werden. Hierbei bezeichnet der Eintrag  $(i, j)$  in der Matrix  $A$  die Auszahlung an den ersten Spieler für das Strategienpaar  $(i, j)$ , und entsprechend bezieht sich die Matrix  $B$  auf den zweiten Spieler. Die Zeilen geben die Strategie des ersten Spielers an, die Spalten die Strategie des zweiten Spielers.

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{(Sch)} & \text{(St)} & \text{(P)} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{(Sch)} \\ \text{(St)} \\ \text{(P)} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$B = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{(Sch)} & \text{(St)} & \text{(P)} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{(Sch)} \\ \text{(St)} \\ \text{(P)} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Aufgrund der Eigenschaft  $A = -B$  spricht man von einem Nullsummenspiel. Das heißt, die Summe der Gewinne und Verluste ist immer gleich null, oder: Was der eine Spieler gewinnt, verliert der andere. Solche Spiele sind besonders einfach zu analysieren.

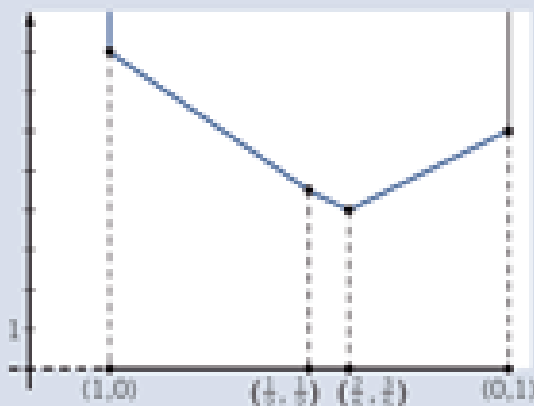
Neben den reinen Strategien betrachtet man gemischte Strategien; das sind Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf den reinen Strategien. Die Auszahlungen werden dann entsprechend durch die erwarteten Auszahlungen ersetzt. Jeder Spieler möchte nun eine solche gemischte Strategie spielen, bei der seine eigene erwartete Auszahlung maximiert wird, aber diese erwartete Auszahlung hängt natürlich auch von der gewählten Strategie des Kontrahenten ab. Ein Paar gemischter Strategien heißt ein Nash-Gleichgewicht, wenn jeder der beiden Spieler lokal zufrieden ist; das heißt, wenn keiner der beiden Spieler seine eigene Auszahlung durch Wahl einer anderen Strategie verbessern kann, solange der jeweilige Kontrahent seine Strategie beibehält. Das Spiel »Schere, Stein, Papier« hat genau ein Nash-Gleichgewicht:  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ .

**Wie viele Nash-Gleichgewichte kann es höchstens geben?**

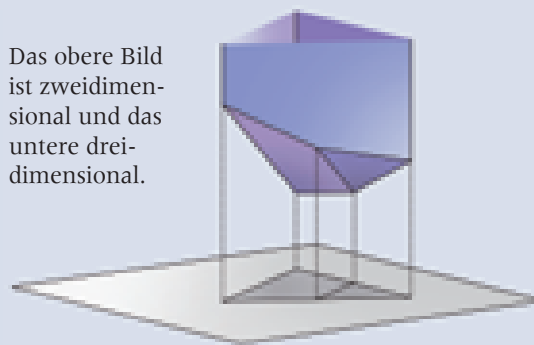
Auch hier stellt der diskrete Mathematiker wieder konkrete diskrete Fragen, die eng mit der Struktur des Problems verzahnt sind. Der Einfachheit halber betrachten wir Bimatrixspiele, bei denen die Matrizen quadratisch sind, mit  $d$  Zeilen und  $d$  Spalten. In der Regel hat ein Bimatrixspiel endlich viele Gleichgewichte. Beispielsweise hat ein  $2 \times 2$ -Spiel im Endlichkeitsfall höchstens drei Gleichgewichte, ein  $3 \times 3$ -Spiel hat dann höchstens sieben Gleichgewichte und ein  $4 \times 4$ -Spiel höchstens 15. Für Bimatrixspiele stellt sich daher die Frage: Wie viele Nash-Gleichgewichte kann ein  $d \times d$ -Spiel höchstens haben?

Diese Frage ist erstaunlicherweise immer noch ungelöst, und es sind lediglich Teilresultate bekannt. Zunächst ist die Anzahl der Nash-Gleichgewichte in nichtdegenerierten Bimatrixspielen immer ungerade.

**Polyeder P und Q zur geometrischen Repräsentation von Nash-Gleichgewichten für ein  $2 \times 3$ -Spiel**



Das obere Bild ist zweidimensional und das untere dreidimensional.



Darüber hinaus ist  $2^d - 1$  für den Fall  $A = B$  die scharfe obere Schranke. Die Vermutung, dass  $2^d - 1$  auch für beliebiges  $A$  und  $B$  scharfe obere Schranke ist, hat sich jedoch als falsch herausgestellt. Da man den genauen Wert nun einmal nicht kennt, versucht man ihn durch Konstruktionen sowie durch komplementierende obere Schranken so gut wie möglich einzukreisen.

Den aktuellen Weltrekord für eine Konstruktion hält Bernhard von Stengel von der London School of Economics. Speziell für den  $6 \times 6$ -Fall liefert die Konstruktion ein Spiel mit 75 Gleichgewichten. Es ist nicht bekannt, ob in dieser Dimension ein Spiel mit mehr als 75 Gleichgewichten existiert. Die beste bekannte obere Schranke ist 111.

Die Methoden zur Gewinnung dieser und verwandter Ergebnisse stammen aus der diskreten Geometrie. Der diskrete Geometer übersetzt das spieltheoretische Problem in die Sprache der Polytope, wo die Nash-Gleichgewichte dann sogenannten komplementären Eckenpaaren entsprechen. Nach der Übersetzung in die Welt der Polytope kann die Anzahl der Nash-Gleichgewichte durch Strukturaussagen zu Polytopen näher charakterisiert werden. Für die Anzahl der Ecken eines einzelnen durch lineare Ungleichungen gegebenen Polytops gibt es sehr präzise Aussagen (»Upper bound Theorem«, Maximalitätseigenschaft der zyklischen Polytope), die dann als Hilfsmittel zur Gewinnung der Schranken für die komplementären Eckenpaare dienen.

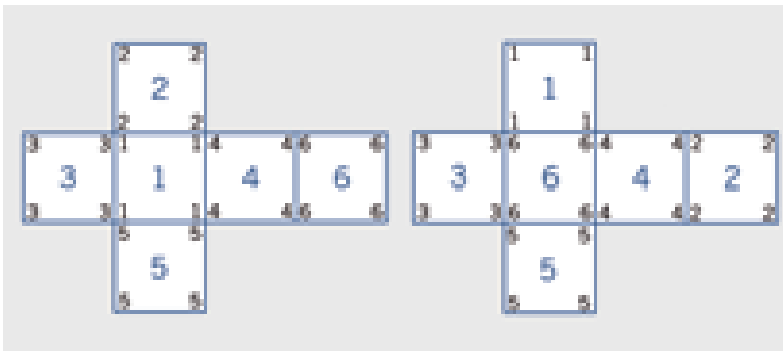
**Literatur**

<sup>11/</sup> V. Kaibel, T. Koch: Mathematik für den Volkssport, Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 2/06, 93–96, 2006.

<sup>12/</sup> Für eine Einführung in Polytope siehe etwa das Lehrbuch M. Joswig, T. Theobald: Algorithmische Geometrie, Vieweg-Verlag, 2008.

<sup>13/</sup> B. Felgenhauer, F. Jarvis: Mathematics of Sudoku I, Mathematics Spectrum 39:1, 15–22, 2006.

<sup>14/</sup> T. Theobald. Geometrie und Kombinatorik von Nash-Gleichgewichten. Math. Semesterberichte 52:221–239, 2005.



Faltvorlagen zweier Würfel. Die beiden Ecken (1,2,4), (3,5,6) bilden ein komplementäres Paar.

Zur Untersuchung der Anzahl der Nash-Gleichgewichte betrachtet man zweckmäßigerweise ein Paar von Polyedern: ein  $m$ -dimensionales Polyeder im  $(m+1)$ -dimensionalen Raum und ein  $n$ -dimensionales Polyeder im  $(n+1)$ -dimensionalen Raum. Mittels dieser – hier nicht im Detail beschriebenen – Polyeder lassen sich die Nash-Gleichgewichte als komplementäre Eckenpaare charakterisieren. Jede Ecke des Polyeders wird hierbei mit der Menge der Nummerierungen der sie enthaltenden Facetten beschriftet. Ein komplementäres Eckenpaar ist nun eines, dessen Vereinigungsmenge der zugeordneten Nummerierungen  $m+n$  Elemente enthält.

Eine gute Vorstellung für dieses formale Konzept erhält man, wenn man sich einen einfachen Fall als Beispiel vor Augen hält. Hierzu betrachten wir das im Bild dargestellte dreidimensionale Würfelpaar, dessen be-

grenzende Seitenflächen nummeriert sind. Wie zuvor beschrieben, ist jede der acht Ecken jedes Würfels daher mit einer dreielementigen Teilmenge aus  $\{1, \dots, 6\}$  versehen, deren Elemente angeben, in welcher Seitenfläche die Ecke enthalten ist. Im Bild sind die Ecken mit den Beschriftungen (1,2,4) und (3,5,6) komplementäre Eckenpaare. Zusammen geben die beiden Tripel die Menge aller Nummerierungen von 1, ..., 6. Das Tripel (2,4,6) des ersten Würfels findet keinen Partner im zweiten Würfel, denn die Ecke mit der Beschriftung (1,3,5) existiert in der Faltvorlage des zweiten Würfels nicht.

Ein gegenwärtiges Forschungsthema unserer Arbeitsgruppe ist die Untersuchung von Spielen mit kleinem Rang, das heißt von solchen Spielen, bei denen die Matrix  $A+B$  einen kleinen Rang hat. Für den festen Rang  $k$  bildet diese Klasse eine Hierarchie, die von den einfach zu analysierenden Nullsummenspielen zu den allgemeinen Bimatrixspielen führt.

**Eine diskrete Bemerkung zum Schluss**

Der diskrete mathematische Blickwinkel ist – bezogen auf die lange kulturgeschichtliche Entwicklung der Mathematik – immer noch ein recht junger. Dieser Beitrag illustriert nur einige Aspekte dieser Sichtweise. Wenn Sie aufmerksam durch das tägliche Leben gehen, finden Sie sicher noch mehr Beispiele, die es lohnt, einmal unter die diskrete mathematische Lupe zu nehmen, vielleicht auch in der eigenen Wissenschaftsdisziplin. Das Mathematikjahr 2008 bietet hierzu sicherlich einen guten Anlass. ♦

**Der Autor**

**Prof. Dr. Thorsten Theobald**, 37, wurde 2006 für das Fachgebiet Diskrete Mathematik am Institut für Mathematik im Fachbereich Informatik und Mathematik der Goethe-Universität berufen. Seine Schwerpunkte liegen in den Gebieten diskrete Geometrie, diskrete Optimierung sowie der Beziehung der diskreten Mathematik zur angewandten algebraischen Geometrie. Der wissenschaftliche Werdegang von Prof. Theo-

bald begann ebenfalls an der Goethe-Universität, wo er von 1990 bis 1995 Informatik und Mathematik studierte. Weitere Stationen waren die Universität Trier (Promotion 1997 im DFG-Graduiertenkolleg Mathematische Optimierung), die Technische Universität München (Habilitation 2003) sowie die Technische Universität Berlin. Längere Forschungsaufenthalte führten ihn mehrfach in die USA, an die Uni-

versity of California of Berkeley, das Mathematical Sciences Research Institute, Berkeley, sowie im Rahmen eines Feodor-Lynen-Forschungsstipendiums der Alexander von Humboldt-Stiftung für ein Jahr an die Yale University. Im Jahr 2000 wurde Theobald mit dem Walther-von-Dyck-Preis und im Jahr 2003 mit dem Felix-Klein-Lehrpreis der TU München ausgezeichnet.

<http://www.math.uni-frankfurt.de/~theobald>

**Anzeige**

www.plan-deutschland.de

**Öffne deine Augen für meine Welt. Werde Pate!**

Nähere Infos:  
**040-611 400**

Plan International  
Deutschland e.V. · Bromfelder Str. 70 · 22305 Hamburg