

Zerlegung eines Lévy Prozesses am Infimum

Diplomarbeit am Fachbereich Mathematik
der
Johann Wolfgang Goethe-Universität
Frankfurt am Main

Kaya Memişoğlu

25. November 2001

Inhaltsverzeichnis

Notation	III
Vorwort	V
1 Laplace Transformation	1
1.1 Laplace Transformation	1
1.2 Beispiele für Laplace Transformationen	4
1.3 Tiltten einer Verteilung	8
1.4 Beispiele für Tiltten	11
2 Zerlegung einer Irrfahrt in \mathbb{R}	13
2.1 \mathbb{R} -wertige Irrfahrten	13
2.2 Laplace Transformation und Tiltten	16
2.3 Zerlegung einer \mathbb{R} -wertigen Irrfahrt	18
2.4 Beispiel: Diskreter Poisson Prozess mit Drift	23
2.5 Beispiel: Pre-Brownsche Bewegung mit Drift	25
3 Zerlegung eines Lévy Prozesses	27
3.1 Stochastische Prozesse	27
3.2 Laplace Transformation	30
3.3 Tiltten	31
3.4 Satz von Daniell-Kolmogoroff	34
3.5 Lévy Prozesse – Definition und Eigenschaften	37
3.6 Lévy Prozesse bedingt darauf, positiv zu bleiben	39
3.7 Hauptsatz: Zerlegung eines Lévy Prozesses	44
3.8 Offene Fragen und Probleme	54
3.9 Literatur	55
4 Compound Poisson Prozesse	57
4.1 Poisson Prozesse	57
4.2 Compound Poisson Prozesse	60
4.3 Laplace Transformation	63
4.4 Tiltten	64
4.5 Beispiel: Poisson Prozess mit linearem Drift	66

5 Brownsche Bewegung	69
5.1 Brownschen Bewegung	69
5.2 Laplace Transformierte und Tilten	70
5.3 Zerlegung	70
5.4 Literatur	72
6 Lévy Prozesse	73
6.1 Lévy Prozesse	73
6.2 Laplace Transformation	76
6.3 Tilten	78
6.4 Beispiele	83
6.5 Offene Fragen und Probleme	86

Notation

I. Allgemeine Notation

- (1) $:=$ bezeichnet „ist definiert als“
- (2) \sim bezeichnet „besitzt die gleiche Verteilung wie“
- (3) $x \nearrow y$ bezeichnet „x steigt auf zu y“ und $x \searrow y$ bezeichnet „x fällt ab zu y“

II. Mengen und Räume

- (1) $\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$ ist die Menge der natürlichen Zahlen ohne der Null.
- (2) $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, \dots\}$ ist die Menge der natürlichen Zahlen einschließlich der Null.
- (3) $\mathbb{Z} := \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ ist die Menge der ganzen Zahlen einschließlich der Null.
- (4) $\mathbb{Q} := \{p/q : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ ist die Menge der rationalen Zahlen.
- (5) $\mathbb{Q}_+ := \{q \in \mathbb{Q} : q \geq 0\}$ ist die Menge der positiven rationalen Zahlen einschließlich der Null.
- (6) \mathbb{R} ist die Menge der reellen Zahlen.
- (7) $\mathbb{R}_+ := \{r \in \mathbb{R} : r \geq 0\}$ ist die Menge der positiven reellen Zahlen einschließlich der Null.
- (8) $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ bezeichnet das abgeschlossene Intervall von a bis b .
- (9) $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ bezeichnet das offene Intervall von a bis b .
- (10) \mathbb{R}^d ist der d -dimensionale Euklidische Raum.
- (11) $\mathbb{R}^{[0, \infty)}$ ist die Menge der Funktionen $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$.
- (12) S_n bezeichne die Menge aller Permutationen von n Elementen.
- (13) $\mathcal{B}(U)$ bezeichnet die kleinste σ -Algebra, die alle offenen Mengen des topologischen Raumes U enthält.
- (14) M^c bezeichnet die zu M komplementäre Menge.
- (15) $\mathfrak{P}(M)$ bezeichnet die Potenzmenge von M .

III. Funktionen

$$(1) \delta_{x,y} := \begin{cases} 1 & \text{falls } x = y \\ 0 & \text{falls } x \neq y \end{cases}$$

$$(2) 1_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{falls } x \notin A \end{cases}$$

$$(3) I(A) := \begin{cases} 1 & \text{falls die Bedingung } A \text{ erfüllt ist} \\ 0 & \text{falls die Bedingung } A \text{ nicht erfüllt ist} \end{cases}$$

$$(4) \theta_t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist der Translationsoperator definiert durch } \theta_t(s) := s + t.$$

IV. Stochastische Prozesse

(1) (\tilde{Z}_t) bezeichnet den getilteten Prozess. Siehe Definition 38 in Abschnitt 3.3.

(2) (\hat{Z}_t) bezeichnet den Prozess, bedingt darauf, positiv zu bleiben. Siehe Abschnitt 3.6.

(3) $P_t^{\geq 0}(x, dy) := P_t^{[0, \infty)}(x, dy)$. Siehe Definition 46 in Abschnitt 3.6.

(4) Z_{s-} bezeichnet den linksseitigen Grenzwert des Prozesses (Z_t) an der Stelle s . Analog bezeichnet Z_{s+} den rechtsseitigen Grenzwert. Siehe Abschnitt 3.1.

Vorwort

Diese Arbeit befasst sich mit der Zerlegung von Irrfahrten und Lévy Prozessen an ihrem Minimum. Bis auf rudimentäre Vorkenntnisse der höheren Stochastik und einige wenige aber wichtige Sätze stellt die Arbeit alle notwendigen Begriffe und Sätze zur Verfügung, die für das Verständnis und die Beweise benötigt werden. Diese bewusste Entscheidung zur Ausführlichkeit auch bei grundlegenden Dingen hat zwei Hintergründe: Zum einen bleibt die Arbeit damit auch für Leser mit geringen Vorkenntnissen interessant, und zum anderen entsteht so keine lange und unübersichtliche Kette von Verweisen und Zitaten, die das Verständnis des dargestellten Themas erschwert und die logischen Schlüsse nur noch von Spezialisten vollständig nachvollzogen werden können. Ein weiterer Nebeneffekt ist die Tatsache, dass Verwirrungen aufgrund unterschiedlicher Interpretationen eines Begriffs vermieden werden.

Das weitere Vorwort teilt sich in zwei Abschnitte; zum einen in den Abschnitt der Irrfahrten und zum anderen in den Abschnitt der Lévy Prozesse. Diese Einteilung spiegelt auch die Strukturierung der Arbeit selber wieder; ein Blick in das Inhaltsverzeichnis verrät, dass zuerst Irrfahrten und danach Lévy Prozesse behandelt werden.

Irrfahrten

Betrachtet man eine in 0 startende Irrfahrt $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, die gegen $+\infty$ driftet, aber auch negative Sprünge besitzen kann, so ist es klar, dass die Irrfahrt irgendwann ihr globales Minimum annehmen wird, d.h. es gibt fast sicher einen Zeitpunkt $n \in \mathbb{N}$ so dass die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$Z_i > Z_n \quad \forall i < n \quad \text{und} \quad Z_i \geq Z_n \quad \forall i \geq n$$

Es ist natürlich auch möglich, dass die Irrfahrt, obwohl sie auch nach unten springen darf, niemals kleiner als 0 wird, dass also ihr erstes globales Minimum und der Startpunkt zusammenfallen.

Die Frage, die sich bei dieser Beobachtung nun stellt, ist, ob es eine aufschlussreiche und interessante Zerlegung einer Irrfahrt in zwei Teile existiert: In einen ersten Teil, der die Irrfahrt bis zum Minimum beschreibt, und in einen zweiten Teil, der die Irrfahrt nach dem Minimum beschreibt. Dabei interessieren wir uns auch für die Verteilung des Minimums selbst. An sich ist eine solche Zerlegung natürlich kein Problem, sofern der gesamte Pfad einer Irrfahrt bekannt ist. Die zentrale Frage ist vielmehr, ob es eine alternative Zerlegung gibt, die nur ein endliches Stück einer Irrfahrt benötigt, um das Minimum zu bestimmen. Es stellt sich heraus, dass eine solche Zerlegung in den meisten interessanten Fällen existiert; die Zerlegung wird

folgende Gestalt besitzen

$$Z'_n := \begin{cases} \tilde{Z}_n & \text{für } n < T \\ \hat{Z}_{T-n} + \tilde{Z}_T & \text{für } n \geq T \end{cases}$$

so dass (\tilde{Z}_n) die Irrfahrt bis zum Minimum beschreibt, T eine Zufallszeit ist und (\hat{Z}_n) eine Irrfahrt ist, die darauf bedingt ist nicht negativ zu werden. Wenn τ den Zeitpunkt des ersten globalen Minimums der Irrfahrt (Z_n) ist, dann wird der Zerlegungssatz 21 in Abschnitt 2.3 zeigen, dass die Irrfahrten $((Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}, \tau)$ und $((Z'_n)_{n \in \mathbb{N}_0}, T)$ identisch verteilt sind.

Von eigentlichem Interesse sind dann natürlich die Verteilungen des Kpfstückes (\tilde{Z}_t) und des Minimums selber. Wir werden dabei eine effektive Methode entwickeln, mit der in vielen Fällen die exakte Verteilung der Irrfahrt (\tilde{Z}_n) vor dem Infimum bestimmt werden kann. Bezeichnet nämlich μ die Verteilung der Sprünge der ursprünglichen Irrfahrt (Z_t) , so werden wir die Verteilung $\tilde{\mu}$ der Sprünge des Kpfstückes (\tilde{Z}_n) der Zerlegung durch eine einfache Transformation

$$\tilde{\mu}(dx) = e^{-\gamma x} \mu(dx)$$

erhalten. Das Minimum selbst werden wir zusätzlich durch eine exponentiell verteilte Schranke abschätzen können, wobei der Parameter der Exponentialverteilung mit dem γ aus der obigen Maßtransformation übereinstimmt.

Brownsche Bewegung

Die Zerlegung einer Irrfahrt wird recht einfach und direkt bewiesen; es stellt sich danach die Frage, ob auch eine zeitkontinuierliche Verallgemeinerung existiert.

Einen ersten Anhaltspunkt in ein einem speziellen Fall lieferte Williams im Jahre 1974 (siehe [Wil74]). Er konnte eine Zerlegung einer Brownschen Bewegung (B_t) mit einem positiven Drift $b > 0$ angeben; das Überraschende Ergebnis seiner Arbeit besteht darin, dass das Anfangsstück (\tilde{B}_t) bis zum Minimum wieder eine Brownsche Bewegung ist, jedoch gerade mit dem negativen Drift $-b$. Der Prozess (\tilde{B}_t) wird dann gestoppt zu dem Zeitpunkt

$$T := \inf\{t \geq 0 : \tilde{B}_t = -Y\}$$

wobei Y eine zum Parameter 2 exponentiell verteilte unabhängige Zufallsvariable ist. Die gesamte Zerlegung besitzt dann die Form

$$B'_t := \begin{cases} \tilde{B}_t & \text{für } t < T \\ \hat{B}_{T-t} + \tilde{B}_T & \text{für } t \geq T \end{cases}$$

und (\hat{B}_t) ist eine Brownsche Bewegung mit Drift d bedingt darauf, nur positive Werte anzunehmen. Bezeichnet τ den Zeitpunkt des ersten globalen Infimums von (B_t) , dann besitzen die Prozesse $((B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, \tau)$ und $((B'_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, T)$ die gleiche Verteilung.

Lévy Prozesse

Es stellt sich nun die Frage, ob dieses Resultat von Williams noch weiter verallgemeinert werden kann – damit kommen wir zu dem eigentlichen Thema dieser Arbeit. In der Tat

existiert eine allgemeine Zerlegung für eine große Klasse an Lévy Prozessen. Diese stellen das zeitkontinuierliche Analogon der Irrfahrten dar; ein Lévy Prozess $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ ist definiert als ein stochastischer Prozess, der unabhängige stationäre Zuwächse besitzt, und dessen Pfade rechtsseitig stetig sind mit linksseitigen Limiten.

Da jedoch die Lévy Prozesse von ihrer Natur her schwieriger zu handhaben sind als eine Irrfahrt oder Brownsche Bewegung, werden wesentlich mehr mathematische Werkzeuge benötigt, die im Kapitel über Lévy Prozesse bereitgestellt werden. Im Abschnitt 3.7 wird der Zerlegungssatz 58 bewiesen werden, der die folgende Form besitzt:

Hauptsatz (Zerlegung eines Lévy Prozesses) *Sei $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ ein in 0 startender Lévy Prozess, der die Bedingung (A_{FH}) erfüllt, und es seien die Zufallsvariablen definiert:*

$$M := \inf\{Z_t : t \in \mathbb{R}_+\} \\ \tau := \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : Z_t \leq M \text{ oder } Z_{t-} \leq M\}$$

Für einen zu (Z_t) mit dem Parameter γ getilteten Prozess $(\tilde{Z}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ mit dem absteigenden Leiterprozess (\tilde{Z}_t) und eine unabhängige zum Parameter γ exponentiell verteilte Zufallsvariable Y sei folgende Zufallsvariablen definiert:

$$\tilde{T} := \inf\{t \geq 0 : \tilde{Z}_t \leq -Y\}.$$

Sei $(\hat{Z}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ ein weiterer stochastisch unabhängiger Prozess, der die ursprüngliche Verteilung besitzt, allerdings darauf bedingt, nicht negativ zu werden, und sei der zusammengesetzte Prozess $(Z'_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ definiert durch

$$Z'_t := \begin{cases} \tilde{Z}_t & \text{für } t < \tilde{T} \\ \hat{Z}_{t-\tilde{T}} + \tilde{Z}_{\tilde{T}} & \text{für } t \geq \tilde{T} \end{cases}.$$

Dann besitzen $((Z_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, \tau)$ und $((Z'_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, \tilde{T})$ die gleiche Verteilung. ■

Die verschiedenen Begriffe werden und müssen natürlich noch eingeführt werden, aber wir können dieses zentralen Resultat schon zu interpretieren versuchen. Die Aussage kann nämlich vereinfacht formuliert werden wie folgt: Der Prozess (Z_t) lässt zerlegen in ein Anfangsstück und ein Endstück; die Verteilung des Anfangsstückes geht durch eine einfache Transformation aus der ursprünglichen Verteilung hervor, die Verteilung des Endstückes ist die bedingte Ursprungsverteilung. Das Minimum selbst ist ungefähr exponentiell verteilt.

Allgemeine Lösung

Das Bemerkenswerte der in dieser Arbeit vorgestellten Zerlegung sind die verwendeten Methoden im Beweis; während andere ähnliche Sätze von Williams (siehe [Wil74]), Pitman (siehe [Pit75]), Bertoin (siehe [Ber92], [Ber93] oder [Ber91]) und Chaumont (siehe [Cha96]) mittels Transformationen der Pfade bewiesen wurden, wird in dieser ein vollkommen anderer Zugang gewählt, der mit den Verteilungen der Pfade direkt arbeitet. Dabei wird jedoch keine genaue Kenntnis der Struktur der Lévy Prozesse in Form der Lévy-Khinchin-Darstellung benötigt; es werden als einzige Strukturen die rechtsseitige Stetigkeit und Existenz der linken Limiten und die Stationarität der Zuwächse verwendet. Somit ist das zentrale Resultat dieser Arbeit

der allgemeine Existenzbeweis einer konstruktiven Zerlegung; Zerlegungen konkreter Prozesse reduzieren sich demnach auf das Lösen von Gleichungen.

Schließlich wird erst in den nachfolgenden Kapiteln eine knappe Theorie der Lévy Prozesse entwickelt, die genauer auf die vorhandene Struktur der Lévy Prozesse eingeht. Das zentrale Werkzeug wird die Laplace Transformation sein – das reelles Analogon zur Lévy-Khinchin-Darstellung der charakteristischen Funktion. Mit diesem Hilfsmittel kann die Verteilung des Prozesses (\tilde{Z}_t) vor dem Infimum näher untersucht werden; dabei werden wir unter anderem auch das klassische Resultat von Williams als eine einfache Rechenaufgabe wiederfinden.

Kapitel 1

Laplace Transformation

Bevor wir uns mit Irrfahrten oder Prozessen beschäftigen, werden in diesem ersten Kapitel zwei durchgängig zentrale Hilfsmittel erarbeitet: Die Laplace Transformation einer Verteilung und das Tilten einer Verteilung. Beide stochastische Werkzeuge sind nicht spezifisch für Irrfahrten oder Prozesse, sondern können allgemein für Verteilungen verwendet werden.

1.1 Laplace Transformation

Definition 1 (Laplace Transformation) *Es sei μ ein Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Dann ist die LAPLACE TRANSFORMIERTE $\varphi_\mu : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$ definiert durch*

$$\varphi_\mu(\lambda) := \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda x} \mu(dx)$$

Die Definition der Laplace Transformation ist bewusst nicht auf Wahrscheinlichkeitsmaße beschränkt, obwohl wir sie nur in diesem Zusammenhang verwenden werden. Falls Bezug zu einer Zufallsvariablen Z anstelle zu deren Verteilung μ genommen werden soll, bezeichnet φ_Z die Laplace Transformierte φ_μ der zugehörigen Verteilung.

Bemerkung Für eine \mathbb{Z} -wertige Zufallsvariable X mit Verteilung μ vereinfacht sich die Berechnung der Laplace Transformierten φ_X einfach auf eine Summe, nämlich

$$\varphi_X(\lambda) = \sum_{x \in \mathbb{Z}} e^{-\lambda x} \mu(x) \tag{1.1}$$

□

Bemerkung Die Definition der Laplace Transformation ist mit einer anderen, in der Stochastik sehr gebräuchlichen Transformation verwandt, nämlich mit der charakteristischen Funktion, definiert durch

$$\psi_\mu(\lambda) := \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x} \mu(dx)$$

wobei i die imaginäre Einheit ist; die charakteristische Funktion entspricht einer Fourier Transformation eines Maßes. Die Laplace Transformation stellt somit ein reelles Analogon der charakteristischen Funktion.

Im Allgemeinen besitzt die charakteristische Funktion einige Eigenschaften (Beschränktheit, Konvergenz auf \mathbb{R}), die die Laplace Transformation nicht zu bieten hat – aus genau diesem Grund wird in der Literatur im Wesentlichen die charakteristische Funktion verwendet. In dieser Arbeit sind wir jedoch auf die Laplace Transformation als eine reellwertige Funktion angewiesen. \square

Satz 2 Sei φ_μ die Laplace Transformierte eines Maßes μ . Dann ist die Menge $\Lambda_\mu := \{\lambda \in \mathbb{R} : \varphi_\mu(\lambda) < \infty\}$ ein Intervall, und heißt das KONVERGENZINTERVALL DER LAPLACE TRANSFORMATION VON μ .

Beweis Seien $a, b \in \Lambda_\mu$ verschieden, o.B.d.A. $a < b$, und sei $\lambda \in (a, b)$. Da die Funktion $\lambda \mapsto e^{-\lambda x}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ konvex ist, folgt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$e^{-\lambda x} \leq \max(e^{-ax}, e^{-bx}) \leq e^{-ax} + e^{-bx}.$$

Daraus ergibt sich

$$\varphi_\mu(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda x} \mu(dx) \leq \int_{\mathbb{R}} e^{-ax} \mu(dx) + \int_{\mathbb{R}} e^{-bx} \mu(dx) = \varphi_\mu(a) + \varphi_\mu(b) < \infty,$$

also ist auch $\lambda \in \Lambda_\mu$ und somit ist Λ_μ konvex, und damit ein Intervall. \blacksquare

Falls das Konvergenzintervall $\Lambda_\mu = \mathbb{R}$ ist, die Laplace Transformation also in jedem Punkt konvergiert, und somit in jedem Punkt endlich ist, dann sprechen wir von einer ENDLICHEN Laplace Transformierten φ_μ . Im Allgemeinen ist Λ_μ allerdings eine echte Teilmenge von \mathbb{R} .

Satz 3 (Stetigkeitssatz) Sei φ_μ die Laplace Transformierte eines Maßes μ . Dann ist φ_μ auf dem Konvergenzintervall Λ_μ stetig.

Beweis Sei $\lambda \in \Lambda_\mu$ und (λ_i) eine Folge in Λ_μ , die gegen λ konvergiert. Da für alle i nach Konstruktion

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda_i x} \mu(dx) < \infty$$

gilt, sind die Funktionen $f_i(x) := e^{-\lambda_i x}$ alle endlich μ -integrierbar. Mit dem gleichen Argument ist auch $f(x) := e^{-\lambda x}$ messbar und es ist $\lim_{i \rightarrow \infty} f_i = f$. Da die Folge (λ_i) in Λ_μ liegt, und sogar in Λ_μ konvergiert, gilt auch

$$\underline{\lambda} := \inf_{i \in \mathbb{N}} \lambda_i \in \Lambda_\mu \quad \text{und} \quad \bar{\lambda} := \sup_{i \in \mathbb{N}} \lambda_i \in \Lambda_\mu.$$

Damit sind dann auch die Funktionen $\underline{f}(x) := e^{-\underline{\lambda}x}$ und $\bar{f}(x) := e^{-\bar{\lambda}x}$ endlich integrierbar, und somit auch die Summe $f^* := \underline{f} + \bar{f}$. Außerdem gilt nun $0 \leq f_i(x) \leq f^*(x)$ für alle i und x . Damit sind alle Kriterien für den Satz der majorisierten Konvergenz erfüllt, und es folgt

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \varphi_\mu(\lambda_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_i(x) \mu(dx) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \mu(dx) = \varphi_\mu(\lambda)$$

\blacksquare

Satz 4 Seien μ und ν zwei Maße auf \mathbb{R} und $a, b \in \mathbb{R}$. Die Laplace Transformierte φ besitzt folgende Eigenschaften:

1. $\varphi_{a\mu+b\nu}(\lambda) = a\varphi_\mu(\lambda) + b\varphi_\nu(\lambda)$
2. $\varphi_{\mu*\nu}(\lambda) = \varphi_\mu(\lambda)\varphi_\nu(\lambda)$
3. Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $\varphi_\mu^{(n)}(\lambda) = (-1)^n \int_{\mathbb{R}} x^n e^{-\lambda x} \mu(dx)$

Beweis BEHAUPTUNG 1:

$$\begin{aligned} \varphi_{a\mu}(\lambda) + \varphi_{b\nu}(\lambda) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda x} (a\mu + b\nu)(dx) \\ &= a \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda x} \mu(dx) + b \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda x} \nu(dx) \\ &= a\varphi_\mu(\lambda) + b\varphi_\nu(\lambda) \end{aligned}$$

BEHAUPTUNG 2:

$$\begin{aligned} \varphi_{\mu*\nu}(\lambda) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda x} (\mu * \nu)(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda x} \int_{\mathbb{R}} \nu(dx - y) \mu(dy) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda(x+y)} \nu(dx) \mu(dy) \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda x} \nu(dx) \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda y} \mu(dy) \\ &= \varphi_\mu(\lambda) \varphi_\nu(\lambda) \end{aligned}$$

BEHAUPTUNG 3: Für $n = 0$ stimmt offenbar die Aussage. Sei $\varphi_\mu^{(n-1)} = (-1)^{n-1} \int_{\mathbb{R}} x^{n-1} e^{-\lambda x} \mu(dx)$ bewiesen, dann folgt induktiv

$$\begin{aligned} \varphi_\mu^{(n)}(\lambda) &= \left(\varphi_\mu^{(n-1)} \right)'(\lambda) \\ &= \frac{d}{d\lambda} (-1)^{n-1} \int_{\mathbb{R}} x^{n-1} e^{-\lambda x} \mu(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{d\lambda} (-1)^{n-1} x^{n-1} e^{-\lambda x} \mu(dx) \\ &= (-1)^n \int_{\mathbb{R}} x^n e^{-\lambda x} \mu(dx) \end{aligned}$$

■

Aus dem ersten und zweiten Punkt des Lemmas folgt, dass die Abbildung $\mu \mapsto \varphi_\mu$ ein Homomorphismus vom Raum der Maße in den Raum der reellen Funktionen ist.

Einige Eigenschaften aus Satz 4 lassen sich direkt auf die Laplace Transformaten von Zufallsvariablen übertragen. Die wichtigsten Eigenschaften halten wir fest:

Folgerung 5 Im folgenden seien X und Y zwei unabhängige \mathbb{R} -wertige Zufallsvariablen und $a, b \in \mathbb{R}$. Die Laplace Transformation besitzt folgende Eigenschaften:

1. $\varphi_X(\lambda) = \mathbb{E}e^{-\lambda X}$.
2. Ist für $n \in \mathbb{N}_0$ $\mathbb{E}|X|^n < \infty$, so gilt $\varphi_X^{(n)}(0) = (-1)^n \mathbb{E}X^n$
3. $\varphi_{X+Y}(\lambda) = \varphi_X(\lambda)\varphi_Y(\lambda)$
4. $\varphi_{aX+b}(\lambda) = e^{-\lambda b}\varphi_X(a\lambda)$

Die Eigenschaft 2 besagt insbesondere, dass $\varphi_X(0) = 1$, $\varphi_X'(0) = -\mathbb{E}X$ und $\varphi_X''(0) = \mathbb{E}X^2$

Beweis 1. folgt sofort aus der Definition von φ_X . 2. ist ein Spezialfall von Satz 4. Bei 3. müssen wir uns lediglich erinnern, dass die Faltung zweier Wahrscheinlichkeitsmaße gerade die Verteilung zweier unabhängiger entsprechend verteilter Zufallsvariablen darstellt. 4. ist schnell nachgerechnet:

$$\varphi_{aX+b}(\lambda) = \mathbb{E}e^{-\lambda(aX+b)} = e^{-\lambda b}\mathbb{E}e^{-\lambda aX} = e^{-\lambda b}\varphi_X(a\lambda).$$

■

Um den ganzen Apparat der Laplace Transformation zu rechtfertigen und einen sinnvollen Umgang zu ermöglichen, fehlt noch ein enorm wichtiger Satz – nämlich der Eindeutigkeitsatz, der die Abbildung $\mu \mapsto \varphi_\mu$ zu einem Monomorphismus. Der folgende Satz ermöglicht es uns, Verteilungen vollständig mit der Laplace Transformierten zu charakterisieren und zu identifizieren.

Satz 6 (Eindeutigkeitsatz) Seien μ und ν zwei Maße auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit $\varphi_\mu = \varphi_\nu$. Dann gilt auch $\mu = \nu$.

Beweis Einen Beweis für die Eindeutigkeit der charakteristischen Funktion, der sich sofort auf die Laplace Transformation übertragen lässt, findet man in [Bau91]. ■

Ein weiterer sehr nützlicher Satz gilt für die Laplace Transformation leider nicht – nämlich ein Konvergenzsatz der Art, dass aus der schwachen Konvergenz von Maßen $\mu_n \rightarrow \mu$ auch eine wenigstens punktweise Konvergenz der Laplace Transformierten $\varphi_{\mu_n} \rightarrow \varphi_\mu$ folgt. Ein solcher Satz existiert zwar für die charakteristische Funktion (also für die Fourier Transformation), allerdings eben nicht allgemein für die Laplace Transformation.

1.2 Beispiele für Laplace Transformationen

Beispiel (Normalverteilung) Dieses Beispiel lehnt sich sehr stark an die Berechnung der charakteristischen Funktion in [Bau91] an. Sei X eine normalverteilte Zufallsvariable mit Varianz 1 und Erwartungswert 0. Es gelte also für die Verteilung μ von X

$$\mu(dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad (-\infty < x < \infty)$$

Dann erhalten wir für die Laplace Transformierte φ_μ :

$$\begin{aligned} \varphi_\mu(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda x} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda x} \psi(x) dx \end{aligned}$$

wobei $\psi(x)$ definiert ist durch

$$\psi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Die Ableitung der Funktion ψ ist dann gegeben durch

$$\psi'(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} x e^{-\frac{x^2}{2}} = -x\psi(x).$$

Also erfüllt ψ die Differentialgleichung $\psi' + x\psi = 0$. Für φ_μ suchen wir nun eine ähnliche Differentialgleichung; es gilt zunächst für die Ableitung φ'_μ :

$$\begin{aligned} \varphi'_\mu(\lambda) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda x} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda x} x \psi(x) dx \end{aligned}$$

Und wir erhalten weiter

$$\lambda \varphi_\mu(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda x} \lambda \psi(x) dx$$

Partielle Integration liefert:

$$\begin{aligned} &= \left[-e^{-\lambda x} \psi(x) \right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda x} \psi'(x) dx \\ &= \underbrace{\left[-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x(\lambda + \frac{x}{2})} \right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} + \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda x} \psi'(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda x} \psi'(x) dx \end{aligned}$$

Da $\psi'(x) + x\psi(x) = 0$ ist, folgt:

$$\begin{aligned} &= -\int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda x} x \psi(x) dx \\ &= \varphi'_\mu(\lambda) \end{aligned}$$

Also löst φ_μ die Differentialgleichung $y' - xy = 0$. Eine weitere Lösung dieser Differentialgleichung ist gegeben durch

$$f(x) := e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Dann lösen sowohl f als auch φ_μ beide das Anfangswertproblem $f(0) = 1$, da nach Satz 4 $\varphi_\mu(0) = \mu(\mathbb{R}) = 1$ gilt. Da sowohl f als auch φ_μ nun beide das gleiche Anfangswertproblem lösen, folgt aus dem klassischen Existenz- und Eindeigkeitsatz $\varphi_\mu(x) = f(x)$, also

$$\varphi_\mu(\lambda) = \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)$$

Für eine allgemeine normalverteilte Zufallsvariable X' mit Erwartungswert b und Varianz σ^2 erhalten wir mit Satz 4 sofort

$$\varphi_{X'}(\lambda) = \varphi_{\sigma X+b}(\lambda) = e^{-\lambda b} \varphi_X(\sigma\lambda) = \exp\left(-\lambda b + \frac{\sigma^2 \lambda^2}{2}\right).$$

□

Beispiel (Exponentialverteilung) Sei X eine zum Parameter α exponentiell verteilte Zufallsvariable, d.h. die Verteilung μ von X ist gegeben durch

$$\mu(dx) = \alpha e^{-\alpha x} dx \quad (0 \leq x < \infty)$$

Dann gilt für die Laplace Transformierte φ_X :

$$\begin{aligned} \varphi_X(\lambda) &= \int_0^\infty e^{-\lambda x} \alpha e^{-\alpha x} dx \\ &= \int_0^\infty \alpha e^{(-\lambda-\alpha)x} dx \end{aligned}$$

Dieses Integral konvergiert offenbar nur für $\lambda > -\alpha$, und in diesem Fall erhalten wir weiter

$$\begin{aligned} &= \left[-\frac{\alpha}{\lambda + \alpha} e^{(-\lambda-\alpha)x} \right]_0^\infty \\ &= \frac{\alpha}{\alpha + \lambda} \end{aligned}$$

□

Beispiel (Gleichverteilung) Sei X auf dem Intervall $[0, 1]$ gleichverteilt, d.h. die Verteilung μ von X ist gegeben durch

$$\mu(dx) = 1_{[0,1]}(x) dx.$$

Dann gilt für die Laplace Transformierte φ_X :

$$\begin{aligned} \varphi_X(\lambda) &= \int_0^1 e^{-\lambda x} dx \\ &= \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^1 \\ &= \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} \end{aligned}$$

Um für Gleichverteilung auf anderen Intervallen die Laplace Transformierte zu bestimmen, kommt man wieder mit Satz 4 zum Ziel. □

Beispiel (Poissonverteilung) Sei X eine zum Parameter α Poisson-verteilte Zufallsvariable, d.h.

$$\mathbb{P}(X = n) = e^{-\alpha} \frac{\alpha^n}{n!} \quad (n = 0, 1, \dots)$$

Dann folgt mit Gleichung 1.1 für die Laplace Transformierte φ_X :

$$\begin{aligned}\varphi_X(\lambda) &= \sum_{n \geq 0} e^{-\lambda n} e^{-\alpha} \frac{\alpha^n}{n!} \\ &= e^{-\alpha} \sum_{n \geq 1} \frac{(\alpha e^{-\lambda})^n}{n!} \\ &= e^{-\alpha} \exp(\alpha e^{-\lambda}) \\ &= \exp(\alpha(e^{-\lambda} - 1))\end{aligned}$$

□

Beispiel (Geometrische Verteilung) Sei X eine zum Parameter $\alpha \in (0; 1)$ geometrisch verteilte Zufallsvariable, d.h.

$$\mathbb{P}(X = n) = \alpha(1 - \alpha)^n \quad (n = 0, 1, \dots)$$

Dann folgt für die Laplace Transformierte φ_X mit $\lambda > \log(1 - \alpha)$:

$$\begin{aligned}\varphi_X(\lambda) &= \sum_{n \geq 0} e^{-\lambda n} \alpha(1 - \alpha)^n \\ &= \alpha \sum_{n \geq 0} (e^{-\lambda}(1 - \alpha))^n\end{aligned}$$

Diese Summe konvergiert nur, falls $e^{-\lambda}(1 - \alpha) < 1$ ist; dies ist äquivalent zu $\lambda > \log(1 - \alpha)$. Und wir erhalten im konvergenten Fall:

$$= \frac{\alpha}{1 - e^{-\lambda} + e^{-\lambda}\alpha}$$

□

Beispiel (Binomialverteilung) Sei X zu den Parametern $(p; n)$ binomialverteilt, d.h.

$$\mathbb{P}(X = k) = I_{\{0 \leq k \leq n\}} \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

Dann folgt für die Laplace Transformierte φ_X :

$$\begin{aligned}\varphi_X(\lambda) &= \sum_{0 \leq k \leq n} e^{-\lambda k} \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \\ &= \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k} (e^{-\lambda} p)^k (1 - p)^{n-k} \\ &= (1 + e^{-\lambda} p - p)^n\end{aligned}$$

□

1.3 Tilten einer Verteilung

Weshalb die Laplace Transformation für uns von so großem Interesse ist, zeigt die Definition 10 in diesem Abschnitt, denn dort wird aus einer gegebenen Verteilung eine neue (die GETILTETE) Verteilung konstruiert. Diese Konstruktion ist jedoch nicht mit jeder Verteilung möglich; es ist die folgende Annahme notwendig:

Annahme 7 Sei μ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ so dass die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\text{Es existiert ein } \gamma > 0 \text{ mit } \varphi_\mu(\gamma) = 1 \quad (\text{A})$$

Es stellt sich natürlich die Frage, ob und wie solche Verteilungen genauer charakterisiert werden können. Eine äquivalente Beschreibung gestaltet sich jedoch als ziemlich schwierig; wir geben nur eine hinreichende Bedingung an, die allerdings weitere ziemlich starke Forderungen an die Verteilung μ stellt:

Lemma 8 Sei μ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit

$$\varphi_\mu(\lambda) < \infty \quad \forall \lambda \in [0, \infty) \quad \text{und} \quad 0 < \int_{\mathbb{R}} x \mu(dx) < \infty \quad \text{und} \quad \mu((-\infty, 0)) > 0. \quad (\text{G})$$

Dann besitzt die zugehörige Laplace Transformierte φ_μ eine zweite Einsstelle, genauer: es existiert genau ein $\gamma > 0$ mit $\varphi_\mu(\gamma) = 1$.

Beweis EXISTENZ: Nach Satz 4 existiert die erste Ableitung der Laplace Transformierten φ_μ , und es gilt

$$\varphi'_\mu(0) = - \int_{\mathbb{R}} x e^{-0x} \mu(dx) = - \int_{\mathbb{R}} x \mu(dx) < 0$$

Die letzte Ungleichheit ist gerade die Voraussetzung. Aus dieser Abschätzung der Ableitung φ'_μ an der Stelle 0 folgt, dass es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass

$$\varphi_\mu(h) < \varphi_\mu(0) \quad \forall h \in (0, \varepsilon)$$

Da $\mu((-\infty, 0)) > 0$ vorausgesetzt wurde, gibt es ein Intervall $[a, b]$ mit $a < b < 0$ mit $\mu([a, b]) =: C > 0$. Damit folgt

$$\varphi_\mu(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda x} \mu(dx) \geq \int_{[a, b]} e^{-\lambda x} \mu(dx) \geq C e^{-\lambda b} \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} \infty$$

Insgesamt wissen wir nun über die Funktion φ_μ , dass erstens $\varphi_\mu(0) = 1$ ist, zweitens $\varphi_\mu(h) < 0$ in einer Umgebung rechts von 0 ist und drittens dass $\varphi_\mu(\lambda) \rightarrow \infty$ für $\lambda \rightarrow \infty$. Da φ_μ stetig und nach Voraussetzung endlich auf $[0, \infty)$ ist, muss es demnach eine weitere Stelle $\gamma > 0$ geben mit $\varphi_\mu(\gamma) = 1$.

EINDEUTIGKEIT: Für die erste Ableitung von φ_μ gilt nach Satz 4 für alle $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\varphi'_\mu(\lambda) = - \int_{\mathbb{R}} x e^{-\lambda x} \mu(dx)$$

Da die Funktion $\lambda \mapsto xe^{-\lambda x}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ eine streng monoton fallende Funktion ist, folgt für $\lambda' > \lambda$:

$$\varphi'_\mu(\lambda') = - \int_{\mathbb{R}} xe^{-\lambda'x} \mu(dx) > - \int_{\mathbb{R}} xe^{-\lambda x} \mu(dx) = \varphi'_\mu(\lambda)$$

Also ist die erste Ableitung der Laplace Transformierten φ_μ eine streng monoton wachsende Funktion, und φ_μ selbst ist somit strikt konvex. Deshalb kann es neben 0 und γ keinen dritten Punkt $\gamma' \in \mathbb{R}$ geben mit $\varphi_\mu(\gamma') = 1$. Denn sei o.B.d.A $0 < \gamma < \gamma'$ mit $\varphi_\mu(\gamma) = \varphi_\mu(\gamma') = \varphi_\mu(0) = 1$, dann folgt aus der strikten Konvexität

$$1 = \varphi_\mu(\gamma) < \gamma \varphi_\mu(\gamma') + (1 - \gamma) \varphi_\mu(0) = 1.$$

Also ist γ eindeutig bestimmt. ■

Die Eindeutigkeit von γ ist nicht nur in dem speziellen Fall der Voraussetzungen (G) von Lemma 8 gegeben; ganz allgemein ist die Laplace Transformierte eine auf dem Konvergenzintervall strikt konvexe Funktion, und deshalb kann es außer Null höchstens eine zweite Stelle γ geben mit $\varphi_\mu(\gamma) = 1$.

Bemerkung Falls andererseits μ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ist, und ein $\gamma > 0$ existiert, so dass $\varphi_\mu(\gamma) = 1$ ist, dann ist $\mu((-\infty, 0)) > 0$, denn angenommen es wäre $\mu((-\infty, 0)) = 0$, dann folgte für $\gamma > 0$

$$1 = \varphi_\mu(\gamma) = \int_{[0, \infty)} e^{-\gamma x} \mu(dx) < \int_{[0, \infty)} \mu(dx) = \mu([0, \infty)) = 1,$$

und dies ist ein Widerspruch. Also erfüllt das Maß μ den zweiten Teil der Bedingung (G).

Falls zusätzlich noch der Erwartungswert $\int x \mu(dx)$ existiert, dann folgt aus der Gleichheit $\varphi_\mu(0) = \varphi_\mu(\gamma)$ mit $\gamma > 0$ und aus der strikten Konvexität von φ_μ , dass die Ableitung von φ_μ an der Stelle 0 negativ sein muss. Das bedeutet

$$\int_{\mathbb{R}} x \mu(dx) = -\varphi'_\mu(0) > 0.$$

In diesem Fall ist also die Bedingung (G) vollständig erfüllt. □

Damit haben wir also eine charakteristische Eigenschaft von Maßen, die die Bedingung (A) erfüllen: Der Erwartungswert einer gemäß μ verteilten Zufallsvariable ist positiv (sofern der Erwartungswert existiert). Da dieses Ergebnis zum Verständnis der Konstruktion beiträgt, wollen wir es in dem folgenden Satz festhalten:

Satz 9 *Sei μ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ das die Bedingung (A) erfüllt, und es existiere der Erwartungswert von μ . Dann ist der Erwartungswert positiv oder unendlich.*

Die obige Überlegung gibt auch einen Hinweis auf die Frage, ob die Bedingung (G) nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig ist. Sicherlich ist die Bedingung lediglich hinreichend für die Existenz eines $\gamma > 0$; die Forderung nach der Existenz des Erwartungswertes und der Endlichkeit der Laplace Transformation kann bestimmt durch eine schwächere Bedingung ersetzt werden.

Aus diesem Grund werden wir in dieser Arbeit auf beide Bedingungen (A) und (G) Bezug nehmen. Spezialisierungen der Annahme (A) werden dabei auch weiterhin mit dem Buchstaben A bezeichnet, wohingegen Modifikationen der Bedingung (G) weiterhin mit dem Buchstaben G bezeichnet werden.

Satz und Definition 10 (Tilten) Sei μ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, die die Annahme (A) erfüllt. Dann definiert $\tilde{\mu}(dx) := e^{-\gamma x} \mu(dx)$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathbb{R} . Dieses Maß heißt GETILTETE VERTEILUNG.

Falls X eine gemäß μ verteilte Zufallsvariable ist, so bezeichnet \tilde{X} eine gemäß $\tilde{\mu}$ verteilte Zufallsvariable und sie heißt die zu X GETILTETE ZUFALLSVARIABLE.

Beweis Als einziges ist zu beweisen, dass $\tilde{\mu}$ tatsächlich ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist, d.h. dass $\int \tilde{\mu}(dx) = 1$ ist. Da γ allerdings derart definiert ist, dass $\varphi_\mu(\gamma) = 1$ ist, rechnet man sofort nach:

$$\int_{\mathbb{R}} \tilde{\mu}(dx) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\gamma x} \mu(dx) = \varphi_\mu(\gamma) = 1$$

■

Bemerkung Die Laplace Transformierte $\varphi_{\tilde{\mu}}$ der getilteten Verteilung $\tilde{\mu}$ ergibt sich aus φ_μ sehr einfach durch

$$\varphi_{\tilde{\mu}}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda x} \tilde{\mu}(dx) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda x} e^{-\gamma x} \mu(dx) = \varphi_\mu(\lambda + \gamma)$$

□

In Satz 9 haben wir gesehen, dass eine Verteilung, die die Annahme (A) erfüllt, einen positiven Erwartungswert besitzt, sofern dieser existiert. Der nächste Satz formuliert ein analoges Resultat für die getiltete Verteilung, allerdings besitzt diese eine negative Erwartung, wie wir sehen werden. Diese Beobachtung, dass die Erwartungswerte entgegengesetzte Vorzeichen besitzen, bildet später eine Grundlage für die Zerlegung einer Irrfahrt oder eines stochastischen Prozesses.

Satz 11 Sei μ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, das die Annahme (A) erfüllt und eine positive Erwartung besitzt. Für die gemäß Definition 10 getiltete Verteilung $\tilde{\mu}$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}} x \tilde{\mu}(dx) < 0$$

Beweis Wie im Beweis von Lemma 8 gezeigt wurde, ist φ_μ strikt konvex, und nach Voraussetzung existiert der Erwartungswert, der gegeben ist durch

$$0 < \int_{\mathbb{R}} x \mu(dx) = -\varphi'_\mu(0).$$

Also ist die Steigung von φ_μ an der Stelle Null negativ. Da $\gamma > 0$ ist, und $\varphi_\mu(0) = \varphi_\mu(\gamma)$ gilt, muss deshalb $\varphi'_\mu(\gamma) > 0$ sein. Daraus folgt schließlich aus der vorangegangenen Bemerkung

$$\int_{\mathbb{R}} x \tilde{\mu}(dx) = -\varphi'_{\tilde{\mu}}(0) = -\varphi'_\mu(\gamma) < 0$$

■

Bemerkung Natürlich können nicht nur Verteilungen mit einem positiven Erwartungswert getiltet werden; genauso gut können auch Verteilungen mit negativer Erwartung transformiert werden. Der einzige Unterschied hierbei ist, dass dann $\gamma < 0$ gilt. Allerdings kann nicht jede Verteilung derart getiltet werden, so dass die getiltete Verteilung tatsächlich eine andere ist. Ein klassisches Beispiel für solche Verteilungen sind symmetrische Verteilungen, denn dann ist auch die Laplace Transformierte symmetrisch (d.h. $\varphi(\lambda) = \varphi(-\lambda)$), und als strikt konvexe Funktion nimmt sie dann den Wert 1 genau einmal an – an der Stelle 0. \square

1.4 Beispiele für Tiltten

Beispiel (Normalverteilung) Wie wir weiter oben gesehen haben, besitzt die Laplace Transformierte einer Normalverteilung μ mit Erwartungswert $b > 0$ und Varianz σ^2 die Form

$$\varphi_\mu(\lambda) = \exp\left(-\lambda b + \frac{\sigma^2 \lambda^2}{2}\right)$$

Gemäß Lemma 8 existiert dann ein $\gamma > 0$ mit $\varphi_\mu(\gamma) = 1$. Dies ist offenbar äquivalent zu

$$\gamma b - \frac{\sigma^2 \gamma^2}{2} = 0 \iff \gamma(2b - \sigma^2 \gamma) = 0$$

Also ist entweder $\gamma = 0$, oder es gilt $\gamma = \frac{2b}{\sigma^2}$. Da wir aber nur Lösungen ungleich 0 suchen, kommt nur letztere in Betracht. Betrachten wir uns dann die Verteilung $\tilde{\mu}$ der getilteten Zufallsvariablen \tilde{X} , so erhalten wir

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}(dx) &= e^{-\gamma x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-b)^2}{2\sigma^2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-b)^2}{2\sigma^2} - \gamma x} dx \end{aligned}$$

Da $\gamma = \frac{2b}{\sigma^2}$ gilt, folgt:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-b)^2}{2\sigma^2} - \frac{4bx}{2\sigma^2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x+b)^2}{2\sigma^2}} dx \end{aligned}$$

Also ist die getiltete Verteilung wieder eine Normalverteilung mit der gleichen Varianz σ^2 , aber der Erwartungswert hat sich gerade von b zu $-b$ gekehrt. \square

Beispiel (Poissonverteilung) In einem der vorigen Beispiele haben wir gesehen, dass die Laplace Transformierte einer Poissonverteilung μ die Form

$$\varphi_\mu(\lambda) = \exp(\alpha(e^{-\lambda} - 1))$$

besitzt. Daraus folgt sofort eine einfache Bedingung für ein γ mit $\varphi_\mu(\gamma) = 1$, denn dann muss offenbar der Exponent der Transformierten gleich 0 sein, also

$$\alpha(e^{-\gamma} - 1) = 0 \iff e^{-\gamma} = 1 \iff \gamma = 0$$

Also nimmt die Laplace Transformierte φ_μ nur an einer einzigen Stelle den Wert 1 an – nämlich bei 0. Demnach existiert zu einer Poissonverteilung keine getilteten Verteilung. \square

Kapitel 2

Zerlegung einer Irrfahrt in \mathbb{R}

Ziel dieses Kapitels ist es, eine zeitdiskrete Irrfahrten mit unabhängigen stationären Zuwächsen am ersten globalen Minimum zu zerlegen, und somit eine alternative Darstellung zu erhalten, die die Irrfahrt in ein Kopfteil vor dem Minimum und ein Schwanzteil nach dem Minimum zerlegt, und die Verteilungen für Kopf und Schwanz angibt.

2.1 \mathbb{R} -wertige Irrfahrten

Zunächst werden die grundlegenden Definitionen und Eigenschaften für \mathbb{R} -wertige Irrfahrten dargestellt. An geeigneten Stellen werden auf Besonderheiten aufmerksam gemacht, die bei einer \mathbb{Z} -wertigen Irrfahrt auftreten.

Definition 12 (Irrfahrt in \mathbb{R}) Eine Folge \mathbb{R} -wertiger Zufallsvariablen $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ heißt \mathbb{R} -WERTIGE IRRFAHRT. Z_0 wird dabei als Startpunkt der Irrfahrt definiert. Die Verteilung von Z_0 wird als STARTVERTEILUNG bezeichnet.

Falls die Zuwächse $X_n := Z_n - Z_{n-1}$, $n \geq 1$ unabhängige Zufallsvariablen sind, so nennt man $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine IRRFAHRT MIT UNABHÄNGIGEN ZUWÄCHSEN. Und falls die Verteilungen von $Z_n - Z_{n-1}$ jeweils von n unabhängig sind, dann heißt die Irrfahrt ZEITHOMOGEN.

Falls darüber hinaus die Zuwächse $X_n := Z_n - Z_{n-1}$, $n \geq 1$ identisch verteilt sind, so nennt man $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine IRRFAHRT MIT STATIONÄREN ZUWÄCHSEN.

Noch einige Worte zur verwendeten Notation: $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ bezeichnet immer die gesamte Irrfahrt. Falls die Indexmenge eindeutig ist, schreiben wir auch einfach (Z_n) oder falls die Irrfahrt als Index verwendet wird noch einfacher nur Z . Hierzu meint im Gegensatz Z_n ohne runde Klammern den Wert der Irrfahrt zur Zeit n .

Mit der Schreibweise \mathbb{P}_z beziehen wir uns auf eine Irrfahrt, die im Punkt $Z_0 = z$ startet. Falls kein Startpunkt angegeben ist, dann ist dieser beliebig, d.h. die Verteilung des untersuchten Ereignisses ist unabhängig vom Startpunkt. Analog bezieht sich die Schreibweise \mathbb{E}_z auf den Erwartungswert einer Irrfahrt, die in $Z_0 = z$ startet.

Bemerkung Eine Irrfahrt (Z_n) mit unabhängigen, stationären Zuwächsen ist durch folgende Eigenschaften charakterisiert: Die Verteilungen von $Z_n - Z_{n-1}$ ist unabhängig sowohl von der Vergangenheit der Irrfahrt gegeben durch $(Z_i)_{1 \leq i \leq n-1}$ als auch von dem Zeitpunkt n . \square

Definition 13 Eine Abbildung $P : \mathbb{R} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1]$ heißt KERN, falls für alle x die Abbildung $P(x, \cdot) : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1]$ $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -messbar ist.

Da wir nur zeithomogene Irrfahrten mit unabhängigen Zuwächsen betrachten, können wir mit dem Kern $P(x, dy)$ die Übergangswahrscheinlichkeiten (oder Übergangskerne) bezeichnen, d.h.

$$P(x, dy) := \mathbb{P}(Z_{i+1} \in dy | Z_i = x);$$

Diese Definition ist unabhängig von i , da die Irrfahrt zeithomogen ist und zusätzlich unabhängige Zuwächse besitzt.

Bemerkung Um das Rechnen mit Maßen übersichtlicher zu gestalten, werden wir eine im strengen Sinn nicht ganz korrekte aber dennoch eindeutige und weit verbreitete Schreibweise verwenden: Für eine Irrfahrt (Z_n) mit Übergangskernen $P(x, dy)$ ist nach der Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}_{z_0}(Z_1 \in A_1, \dots, Z_n \in A_n)$ gefragt. Die strenge Übersetzung hierfür lautet:

$$\int_{A_1} \cdots \int_{A_n} P(z_{n-1}, dz_n) \cdots P(z_0, dz_1)$$

Leider sind hier die von der Irrfahrt besuchten Punkte z_1, \dots, z_n in der falschen Reihenfolge. Außerdem knäulen sich die Integrale ziemlich scheußlich. Deshalb wird oftmals eine andere Schreibweise bevorzugt, nämlich

$$\int_{A_1} P(z_0, dz_1) \int_{A_2} P(z_1, dz_2) \cdots \int_{A_n} P(z_{n-1}, dz_n)$$

Bei dieser Schreibweise werden die Integrationsvariablen dz_i nach vorne gezogen, obwohl sie noch weiter hinten verwendet werden. Aber dafür sieht man sofort, welchen Weg die Irrfahrt beschreitet.

Falls nur diskrete Maße, d.h. Maße, deren Träger die ganzen Zahlen \mathbb{Z} ist, betrachtet werden, so vereinfacht sich die Rechnung weiter, da dann das Integral durch eine einfache Summe ersetzt werden kann. Denn falls $P(x, dy)$ ein Übergangskern auf \mathbb{Z} ist, dann gilt

$$\mathbb{P}_{z_0}(Z_1 = z_1, \dots, Z_n = z_n) = P(z_0, z_1) \cdots P(z_{n-1}, z_n)$$

□

Bemerkung Falls die Irrfahrt unabhängige stationäre Zuwächse besitzt, vereinfacht sich die Rechnung weiter: Setzen wir nämlich $\mu(dx) := P(0, dx)$, dann erhalten wir $P(x, dy) = \mu(-x + dy)$. Die Zuwächse sind dann gerade gemäß μ verteilt. Damit kann die Irrfahrt (Z_n) auch als Summe dargestellt werden:

$$Z_n = Z_0 + \sum_{i=1}^n X_i$$

wobei alle X_i unabhängige gemäß μ verteilte Zufallsvariablen sind, und Z_0 der Startpunkt der Irrfahrt.

Mit der Faltung zweier Maße können wir nun die Verteilung von Z_k einer Irrfahrt (Z_n) , die in $Z_0 = 0$ startet, auch als die k -fache Faltung der Verteilung μ der Zuwächse interpretieren. Außerdem bilden die Verteilungen μ_i der Zuwächse $Z_{n+i} - Z_n$ nach i Schritten eine Halbgruppe zusammen mit der Faltung als Gruppenoperation, denn es gilt $\mu_i * \mu_j = \mu_{i+j}$. Dies ist klar, da μ_i die Verteilung von $Z_{n+i+j} - Z_{n+j}$ und μ_j die Verteilung von $Z_{n+j} - Z_n$ ist. Dann ist die Verteilung von $Z_{n+i+j} - Z_n$ gegeben durch die Faltung von μ_i und μ_j , aber natürlich ist diese Verteilung definitionsgemäß auch μ_{i+j} . Das neutrale Element dieser Halbgruppe wird definiert durch die Verteilung μ_0 mit $\mu_0(A) := I(0 \in A)$. \square

Diese Betrachtung motiviert folgende Definition:

Definition 14 (Diskrete Faltungshalbgruppe) Sei $(\mu_t)_{t \in \mathbb{Z}_+}$ eine Familie von Maßen auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Gilt dann

$$\mu_n * \mu_m = \mu_{n+m} \quad \text{für alle } n, m \in \mathbb{Z}_+$$

so heißt $(\mu_t)_{t \in \mathbb{Z}_+}$ eine FALTUNGSHALBGRUPPE auf \mathbb{R} .

Definition 15 (Drift) Sei (Z_n) eine \mathbb{R} -wertige Irrfahrt mit stationären unabhängigen Zuwächsen. Falls der Erwartungswert $b := \mathbb{E}(Z_1 - Z_0)$ existiert und ungleich Null ist, dann heißt b der DRIFT DER IRRFAHRT. Falls $b > 0$ gilt, besitzt die Irrfahrt einen POSITIVEN DRIFT und falls $b < 0$ einen NEGATIVEN DRIFT.

Von vielen Autoren wird auch der Wert $b = 0$ als Drift bezeichnet; wir geben uns etwas strenger, und sprechen nur von einem Drift, falls b tatsächlich ungleich Null ist. Der folgende Hilfssatz unterstreicht diese Sichtweise und macht die Bezeichnung DRIFT plausibel, denn er besagt, dass eine Irrfahrt mit nicht verschwindendem Drift fast sicher gegen ∞ (bei positivem Drift) bzw. $-\infty$ (bei negativem Drift) strebt.

Lemma 16 Es sei (Z_n) eine \mathbb{R} -wertige Irrfahrt mit unabhängigen stationären Zuwächsen. Falls (Z_n) einen positiven Drift hat, so gilt für alle $c > 0$

$$\mathbb{P}(Z_n > c \text{ für unendlich viele } n) = 1.$$

Analog gilt für den Fall, dass (Z_n) einen negativen Drift hat, für alle $c < 0$

$$\mathbb{P}(Z_n < c \text{ für unendlich viele } n) = 1.$$

Beweis Wir beweisen nur die erste Aussage, die zweite ergibt sich aus dem Übergang der Irrfahrt (Z_n) (mit negativem Drift) zur Irrfahrt $(-Z_n)$ (mit positivem Drift).

Sei also (Z_n) eine Irrfahrt mit unabhängigen stationären Zuwächsen und Drift $b := \mathbb{E}(Z_1 - Z_0) > 0$. Die Irrfahrt ist dann als Summe unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen (X_i) darstellbar

$$Z_n = Z_0 + \sum_{i=1}^n X_i$$

wobei alle X_i gemäß $Z_1 - Z_0$ verteilt sind, und es gilt natürlich $\mathbb{E}X_i = \mathbb{E}(Z_1 - Z_0) = b > 0$. Aus dem starken Gesetz der großen Zahlen folgt sofort

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Z_n - Z_0}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = b > 0 \quad \text{fast sicher} \quad (2.1)$$

Für das Ereignis $\{Z_n > c \text{ für höchstens endlich viele } n\}$ gilt aber

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Z_n - Z_0}{n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c - Z_0}{n} = 0$$

im Widerspruch zum Gesetz der großen Zahlen. Damit ist dieses Ereignis ein Nullereignis und die Irrfahrt (Z_n) überschreitet jede Schranke $c > 0$ fast sicher unendlich oft. ■

Aus der Gleichung 2.1 folgt sogar noch mehr: Diese Gleichung kann dann und nur dann erfüllt sein, falls gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = \infty.$$

Damit haben wir eine zweite Charakterisierung des Begriffs „positiven Drift“, ohne allerdings den Erwartungswert $\mathbb{E}(Z_1 - Z_0)$ zu benötigen. Aus eben diesem Grund wird auch häufig die Grenzwertbetrachtung als Definition verwendet. Falls der Erwartungswert jedoch existiert, sind beide Definitionen äquivalent.

2.2 Laplace Transformation und Tilten

Um mit der Laplace Transformation auch bei Irrfahrten arbeiten zu können, muss diese natürlich erst einmal für Irrfahrten definiert werden. Eine sinnvolle Definition lässt sich schnell für die für uns interessante Klasse von Irrfahrten mit unabhängigen stationären Zuwächsen angeben.

Definition 17 (Laplace Transformation) Sei $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Irrfahrt mit unabhängigen stationären Zuwächsen mit Verteilung μ . Dann ist die Laplace Transformierte φ_Z der Irrfahrt gegeben durch

$$\varphi_Z(\lambda) := \varphi_\mu(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda x} \mu(dx)$$

Da die Zuwächse von (Z_n) unabhängig sind, beschreibt φ_Z die Irrfahrt (Z_n) bis auf den Startpunkt vollständig. Falls die Irrfahrt in $Z_0 = 0$ startet, gilt überdies $\varphi_Z = \varphi_{Z_1}$, wobei φ_{Z_1} die Laplace Transformierte der Verteilung der Irrfahrt an der Stelle 1 ist.

Bemerkung Mit dieser Definition der Laplace Transformation für Irrfahrten übertragen sich die Eigenschaften aus Satz 4 sofort auf Irrfahrten. Seien nämlich (X_n) und (Y_n) zwei unabhängige Irrfahrten mit Startpunkt 0 dann lässt sich der Satz wie folgt umformulieren:

1. $\varphi_X(\lambda) = \mathbb{E}e^{-\lambda X_1}$
2. Ist $\mathbb{E}|X_1|^n < \infty$, so gilt $\varphi_X^{(n)}(0) = (-1)^n \mathbb{E}X_1^n$

$$3. \varphi_{X+Y}(\lambda) = \varphi_X(\lambda)\varphi_Y(\lambda)$$

$$4. \varphi_{aX+b}(\lambda) = e^{-\lambda b}\varphi_X(a\lambda)$$

wobei φ_{X+Y} die Laplace Transformierte der Summe $(X_n + Y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ der Irrfahrten und φ_{aX+b} die Laplace Transformierte der Irrfahrt $(aX_n + b)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist. \square

Weshalb die Laplace Transformation und das Tiltten für uns von so großem Interesse ist, zeigt die folgende Definition, mit Hilfe derer aus einer Irrfahrt (Z_n) eine neue Irrfahrt (\tilde{Z}_n) gewonnen wird, die dann genau das Kopfstück der am Minimum zerlegten Irrfahrt beschreibt.

Satz und Definition 18 (Getiltete Irrfahrt) Sei $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine \mathbb{R} -wertige Irrfahrt mit unabhängigen stationären μ -verteilten Zuwächsen und das Maß μ erfülle die Annahme

$$\text{Es existiert ein } \gamma > 0 \text{ mit } \varphi_\mu(\gamma) = 1 \quad (\text{A}_{\text{IF}})$$

Dann existiert das getiltete Maß $\tilde{\mu}$, und eine Irrfahrt (\tilde{Z}_n) mit unabhängigen stationären Zuwächsen, die gemäß $\tilde{\mu}$ verteilt sind, heißt die zu (Z_n) GETILTETE IRRFABRT.

Beweis Als einziges ist die Existenz des getilteten Maßes $\tilde{\mu}$ zu zeigen. Dessen Existenz ist jedoch klar, da die Annahme (A_{IF}) gerade den Voraussetzungen von Definition 10 genügt. Man beachte, dass γ und damit das getiltete Maß μ eindeutig bestimmt sind. Siehe hierzu den Nachsatz zu Lemma 8. \blacksquare

Bemerkung Offenbar können wir wieder analog Lemma 8 sehr leicht eine hinreichende Bedingung für die Existenz einer getilteten Irrfahrt angeben. Sei nämlich μ die Verteilung der unabhängigen stationären Zuwächse. Falls die Bedingung

$$\varphi_\mu(\lambda) < \infty \quad \forall \lambda \in [0, \infty) \quad \text{und} \quad 0 < \int x\mu(dx) < \infty \quad \text{und} \quad \mu((-\infty, 0)) > 0. \quad (\text{G}_{\text{IF}})$$

erfüllt ist, so existiert eine getiltete Irrfahrt. Denn diese Bedingung entspricht gerade der Bedingung (G). \square

Bemerkung Die Übergangskerne $\tilde{P}(x, dy)$ einer getilteten Irrfahrt ergeben sich einfach aus den ursprünglichen Übergangskernen durch

$$\tilde{P}(x, dy) := \tilde{\mu}(-x + dy) = e^{-\gamma(y-x)}\mu(-x + dy) = e^{-\gamma(y-x)}P(x, dy)$$

Für die Übergangswahrscheinlichkeiten nach n Schritten einer getilteten Irrfahrt (\tilde{Z}_n) gilt für $A_1, \dots, A_n \subset \mathbb{R}$ ergibt sich so

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_{z_0}(\tilde{Z}_1 \in A_1, \dots, \tilde{Z}_n \in A_n, \tilde{Z}_{n+1} \in dz_{n+1}) \\ &= \int_{A_1} \tilde{P}(z_0, dz_1) \dots \int_{A_n} \tilde{P}(z_{n-1}, dz_n) \tilde{P}(z_n, dz_{n+1}) \\ &= \int_{A_1} e^{-\gamma(z_1-z_0)} P(z_0, dz_1) \dots \int_{A_n} e^{-\gamma(z_n-z_{n-1})} P(z_{n-1}, dz_n) e^{-\gamma(z_{n+1}-z_n)} P(z_n, dz_{n+1}) \\ &= e^{-\gamma(z_{n+1}-z_0)} \int_{A_1} P(z_0, dz_1) \dots \int_{A_n} P(z_{n-1}, dz_n) P(z_n, dz_{n+1}) \\ &= e^{-\gamma(z_{n+1}-z_0)} \mathbb{P}_{z_0}(Z_1 \in A_1, \dots, Z_n \in A_n, Z_{n+1} \in dz_{n+1}) \end{aligned}$$

Dies ist eine erstaunliche Beobachtung, denn offenbar verändert das Tilten die Verteilung eines endlichen zusammenhängenden Stückes einer Irrfahrt nur in Abhängigkeit des Anfangs- und Endwertes des Ausschnittes der Irrfahrt. Für die Umgewichtung spielen die Werte zwischen dem Anfangs- und Endstück keine Rolle. \square

Wie oben schon erwähnt, soll die getiltete Irrfahrt (\tilde{Z}_n) das Anfangsstück der am Minimum zerlegten Irrfahrt (Z_n) werden. Die ursprüngliche Irrfahrt (Z_n) hat einen positiven Drift; das folgende Lemma zeigt, dass die getiltete Irrfahrt (\tilde{Z}_n) einen negativen Drift hat. Später wird die getiltete Irrfahrt wie das Anfangsstück von (Z_n) bis zum Minimum verteilt sein. Innerhalb dieses Anfangsstückes ist auch ein negativer Drift zu erwarten, denn bis zum Minimum der Irrfahrt ist die Summe der Sprünge nach unten insgesamt größer als derer nach oben.

Lemma 19 *Sei (Z_n) eine in 0 startende \mathbb{R} -wertige Irrfahrt mit unabhängigen stationären μ -verteilten Zuwächsen und das Maß μ besitze eine positive Erwartung und erfülle die Annahme (A_{IF}) . Dann besitzt die gemäß Definition 18 getiltete Irrfahrt (\tilde{Z}_n) einen negativen Drift.*

Beweis Da $EZ_1 > 0$ ist, und die Verteilung von \tilde{Z}_1 zu der von Z_1 getiltet ist, folgt die Behauptung unmittelbar aus Satz 11. \blacksquare

2.3 Zerlegung einer \mathbb{R} -wertigen Irrfahrt

Nun haben wir alle Zutaten beisammen, und wir können die Verteilungen des Anfangs- und des Endstückes einer am Minimum zerlegten \mathbb{R} -wertigen Irrfahrt bestimmen.

Betrachten wir uns als erstes das Endstück der Irrfahrt, d.h. das Stück, dass am Minimum ansetzt. Die Intuition verrät uns schon, dass es sich hierbei nicht mehr um eine einfache Irrfahrt mit stationären Zuwächsen handeln kann, da dieses Stück das Minimum niemals unterschreiten darf. Also ist jeder Zuwachs von der momentanen Position der Irrfahrt abhängig. Diese Vermutung bestätigt das folgende Lemma:

Lemma 20 *Sei (Z_n) eine \mathbb{R} -wertige Irrfahrt mit unabhängigen gemäß $P(x, dy)$ verteilten Zuwächsen mit Startpunkt z_0 und positiven Drift. Dann bezeichne $(\tilde{Z}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine identisch verteilte Irrfahrt, bedingt darauf, nicht negativ zu werden und besitzt folgende Übergangskerne $Q(x, dy)$:*

$$Q(x, dy) := \frac{q(y)}{q(x)} P(x, dy) \quad \text{mit}$$

$$q(x) := \begin{cases} \mathbb{P}_x(Z_i \geq 0 \forall i \geq 0) & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

ist. Insbesondere gilt $q(0) = \mathbb{P}(Z_i \geq 0 \forall i \geq 0)$.

Beweis Die zugrundeliegende Idee ist folgende Überlegung:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x(Z_1 \in dy \mid Z_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}) &= \frac{\mathbb{P}_x(Z_1 \in dy, Z_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N})}{\mathbb{P}_x(Z_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N})} \\ &= \frac{P(x, dy) \cdot \mathbb{P}_y(Z_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N})}{\mathbb{P}_x(Z_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N})} \\ &= \frac{q(y)}{q(x)} P(x, dy) \end{aligned}$$

Betrachte nun für $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$:

$$\mathbb{P}_{z_0}(\hat{Z}_1 \in A_1, \dots, \hat{Z}_n \in A_n)$$

Die Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit führt sofort zu

$$= \frac{\mathbb{P}_{z_0}(Z_1 \in A_1, \dots, Z_n \in A_n, Z_i \geq z_0 \forall i \geq 1)}{\mathbb{P}_{z_0}(Z_i \geq 0 \forall i \geq 1)}$$

Es ist $\mathbb{P}_{z_0}(Z_i \geq 0 \forall i \geq 1) = q(z_0)$, also folgt:

$$= \frac{1}{q(z_0)} \int_{A_1} P(z_0, dz_1) \cdots \int_{A_n} P(z_{n-1}, dz_n) \cdot q(z_n)$$

Aus der Definition der Kerne $Q(x, dy)$ erhalten wir

$$= \frac{1}{q(z_0)} \int_{A_1} \frac{q(z_0)}{q(z_1)} Q(z_0, dz_1) \cdots \int_{A_n} \frac{q(z_{n-1})}{q(z_n)} Q(z_{n-1}, dz_n) \cdot q(z_n)$$

Und Kürzen führt schließlich zu

$$= \int_{A_1} Q(z_0, dz_1) \cdots \int_{A_n} Q(z_{n-1}, dz_n)$$

■

Hauptsatz 21 Sei (Z_n) eine in 0 startende \mathbb{R} -wertige Irrfahrt mit unabhängigen stationären μ -verteilten Zuwächsen, und das Maß μ erfülle die Annahme (A_{IF}) , und es seien die folgenden Zufallsvariablen definiert:

$$\begin{aligned} M &:= \inf\{Z_n : n \in \mathbb{N}_0\} \\ \tau &:= \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : Z_n = M\} \end{aligned}$$

Desweiteren seien für eine unabhängige zum Parameter γ exponentiell verteilte Zufallsvariable Y und die getiltete Irrfahrt (\tilde{Z}_n) folgende Zufallsvariablen definiert:

$$\begin{aligned} \tilde{L}_n &:= \inf\{m > n : \tilde{Z}_m < \tilde{Z}_n\} \\ \tilde{H}_n &:= \tilde{Z}_{\tilde{L}_n} \\ T &:= \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : \tilde{H}_n < -Y\} \end{aligned} \tag{2.2}$$

mit der Konvention $\tilde{L}_n = \infty$ und $\tilde{H}_n = \infty$, falls $\tilde{Z}_m \geq \tilde{Z}_n$ für alle $m > n$. Sei $(\tilde{Z}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine gemäß $Q(x, dy)$ verteilter in 0 startende Irrfahrt, und sei $(Z'_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ definiert durch

$$Z'_n := \begin{cases} \tilde{Z}_n & \text{für } n < T \\ \tilde{Z}_{n-T} + \tilde{Z}_T & \text{für } n \geq T \end{cases}.$$

Dann besitzen $((Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}, \tau)$ und $((Z'_n)_{n \in \mathbb{N}_0}, T)$ die gleiche Verteilung.

Beweis In dem Beweis seien $P(x, dy)$ die Übergangswahrscheinlichkeiten der Irrfahrt (Z_n) , und $Q(x, dy)$ seien die Übergangswahrscheinlichkeiten gemäß Lemma 20. Der Beweis teilt sich in zwei Teile: Zuerst untersuchen wir den Prozess nach dem das Minimum von (Z_n) das erste Mal angenommen wurde. Danach wird die Verteilung des Prozesses vor dem ersten Minimum mit Hilfe der getilteten Irrfahrt (\tilde{Z}_n) bestimmt.

TEIL 1: Für $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+m})$ erhalten wir

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_0((Z_1, \dots, Z_n, \dots, Z_{n+m}) \in A, \tau = n) \\ &= \int_{(z_1, \dots, z_n, \dots, z_{n+m}) \in A} I(z_1, \dots, z_{n-1} > z_n \text{ und } z_{n+1}, \dots, z_{n+m} \geq z_n) \cdot \\ & \quad P(0, dz_1) \dots P(z_{n+m-1}, dz_{n+m}) \cdot \mathbb{P}(Z_i \geq z_n \forall i \geq n+m \mid Z_{n+m} = z_{n+m}) \\ &= \int_A I(\dots) P(0, dz_1) \dots P(dz_{n-1}, dz_n) \cdot P(z_n - z_n, dz_{n+1} - z_n) \dots \\ & \quad \dots P(z_{n+m-1} - z_n, dz_{n+m} - z_n) \cdot q(z_{n+m} - z_n) \end{aligned}$$

Da die Indikatorfunktion $I(\dots)$ für alle z_i mit $z_i < z_n$ für $i = n+1, \dots, n+m$ gleich Null ist, wird tatsächlich nur über eine Teilmenge der Tupel (z_1, \dots, z_{n+m}) mit $z_i - z_n \geq 0$ für $i > n$ integriert. Da für diese Tupel $q(z_i - z_n) > 0$ für $i > n$ gilt, folgt mittels der Definition der Kerne $Q(x, dy)$:

$$\begin{aligned} &= \int_A I(\dots) P(0, dz_1) \dots P(z_{n-1}, dz_n) \cdot \frac{q(0)}{q(z_{n+1} - z_n)} Q(0, dz_{n+1} - z_n) \dots \\ & \quad \dots \frac{q(z_{n+m-1} - z_n)}{q(z_{n+m} - z_n)} Q(z_{n+m-1} - z_n, dz_{n+m} - z_n) \cdot q(z_{n+m} - z_n) \\ &= \int_A I(\dots) P(0, dz_1) \dots P(z_{n-1}, dz_n) \cdot q(0) \cdot \\ & \quad Q(0, dz_{n+1} - z_n) \dots Q(z_{n+m-1} - z_n, dz_{n+m} - z_n) \end{aligned}$$

Der hintere Teil des Ausdrucks hat schon die gewünschte Form, denn dies stellt ja gerade die Verteilung der bedingten Irrfahrt (\tilde{Z}_n) dar.

TEIL 2: Für die Irrfahrt (Z_n) seien die Irrfahrten $(L_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $(H_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ analog zu 2.2 definiert. Da die getiltete Irrfahrt (\tilde{Z}_n) nach Lemma 19 einen negativen Drift besitzt, folgt mit Lemma 16 sofort

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_0(\tilde{H}_0 < 0) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}_0(\tilde{Z}_1 \geq 0, \dots, \tilde{Z}_{n-1} \geq 0, \tilde{Z}_n < 0) \\ &= \mathbb{P}_0(\tilde{Z}_n < 0 \text{ für ein } n \in \mathbb{N}) \\ &= 1. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Analog gilt für die Irrfahrt (H_n)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_0(H_0 < 0) &= \mathbb{P}_0(Z_n < 0 \text{ für ein } n \in \mathbb{N}) \\ &= 1 - \mathbb{P}_0(Z_n \geq 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}) \\ &= 1 - q(0).\end{aligned}\tag{2.4}$$

Und schließlich gilt für $h < 0$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_0(\tilde{H}_0 \in dh) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}_0(\tilde{Z}_1 \geq 0, \dots, \tilde{Z}_{n-1} \geq 0, \tilde{Z}_n \in dh) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} e^{-\gamma h} \mathbb{P}_0(Z_1 \geq 0, \dots, Z_{n-1} \geq 0, Z_n \in dh) \\ &= e^{-\gamma h} \mathbb{P}_0(H_0 \in dh)\end{aligned}\tag{2.5}$$

Für den vorderen Teil genügt es für das Produkt der Maße $P(0, dz_1) \dots P(dz_{n-1}, dz_n) \cdot q(0)$ zu zeigen, dass

$$\mathbb{P}_0(\tilde{Z}_1 \in dz_1, \dots, \tilde{Z}_n \in dz_n, T = n) = P(0, dz_1) \dots P(z_{n-1}, dz_n) \cdot q(0)$$

gilt. Hierbei können wir ohne Einschränkung davon ausgehen, dass $z_1, \dots, z_{n-1} > z_n$ und $z_n < 0$ gilt. Für die getiltete Irrfahrt gilt nun

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_0(\tilde{Z}_1 \in dz_1, \dots, \tilde{Z}_n \in dz_n, T = n) \\ &= \mathbb{P}_0(\tilde{Z}_1 \in dz_1, \dots, \tilde{Z}_n \in dz_n, \tilde{Z}_n \geq -Y, \tilde{H}_n < -Y) \\ &= \tilde{P}(0, dz_1) \dots \tilde{P}(z_{n-1}, dz_n) \int_{-z_n}^{\infty} \gamma e^{-\gamma y} \mathbb{P}_0(\tilde{H}_n < -y \mid \tilde{Z}_1 = z_1, \dots, \tilde{Z}_n = z_n) dy\end{aligned}$$

Da die Sprünge der Irrfahrt \tilde{Z}_n stationär und unabhängig sind, folgt

$$\begin{aligned}&= \tilde{P}(0, dz_1) \dots \tilde{P}(z_{n-1}, dz_n) \int_{-z_n}^{\infty} \gamma e^{-\gamma y} \mathbb{P}_{z_n}(\tilde{H}_0 < -y) dy \\ &= \tilde{P}(0, dz_1) \dots \tilde{P}(z_{n-1}, dz_n) \int_{-z_n}^{\infty} \gamma e^{-\gamma y} \mathbb{P}_0(\tilde{H}_0 < -y - z_n) dy \\ &= \tilde{P}(0, dz_1) \dots \tilde{P}(z_{n-1}, dz_n) \int_{-z_n}^{\infty} \int_{-\infty}^{-y-z_n} \gamma e^{-\gamma y} \mathbb{P}_0(\tilde{H}_0 \in dh) dy \\ &= \tilde{P}(0, dz_1) \dots \tilde{P}(z_{n-1}, dz_n) e^{\gamma z_n} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{-y} \gamma e^{-\gamma y} \mathbb{P}_0(\tilde{H}_0 \in dh) dy\end{aligned}$$

Fubini erlaubt es, die Integrale geschickt zu vertauschen:

$$= \tilde{P}(0, dz_1) \dots \tilde{P}(z_{n-1}, dz_n) e^{\gamma z_n} \int_{-\infty}^0 \int_0^{-h} \gamma e^{-\gamma y} dy \mathbb{P}_0(\tilde{H}_0 \in dh)$$

Mit Hilfe von $\int_0^{-h} \gamma e^{-\gamma y} dy = 1 - e^{\gamma h}$ folgt sofort

$$= \tilde{P}(0, dz_1) \dots \tilde{P}(z_{n-1}, dz_n) e^{\gamma z_n} \int_{-\infty}^0 (1 - e^{\gamma h}) \mathbb{P}_0(\tilde{H}_0 \in dh)$$

Mit der Gleichung 2.5 folgt sofort

$$\begin{aligned} &= \tilde{P}(0, dz_1) \dots \tilde{P}(z_{n-1}, dz_n) e^{\gamma z_n} \left(\int_{-\infty}^0 \mathbb{P}_0(\tilde{H}_0 \in dh) - \int_{-\infty}^0 \mathbb{P}_0(H_0 \in dh) \right) \\ &= \tilde{P}(0, dz_1) \dots \tilde{P}(z_{n-1}, dz_n) e^{\gamma z_n} \left(\mathbb{P}_0(\tilde{H}_0 < 0) - \mathbb{P}_0(H_0 < 0) \right) \end{aligned}$$

Und schließlich führen die Gleichungen 2.3 und 2.4 zu

$$\begin{aligned} &= \tilde{P}(0, dz_1) \dots \tilde{P}(z_{n-1}, dz_n) e^{\gamma z_n} q(0) \\ &= P(0, dz_1) \dots P(z_{n-1}, dz_n) \cdot q(0) \end{aligned}$$

was zu zeigen war. ■

Der Beweis selber war etwas technisch – aber die Aussage des Hauptsatzes ist um so lehrreicher. Zunächst gibt der Hauptsatz uns eine Möglichkeit an die Hand, mit der wir das erste Stück der Irrfahrt (Z_n) konstruieren können, ohne dass wir die gesamte Irrfahrt (Z_n) simulieren müssen. Und das wäre ja eigentlich nötig, um das Minimum zu bestimmen. Die genaue Konstruktion halten wir fest:

Folgerung 22 (Konstruktion einer Irrfahrt bis zum Minimum) *Sei $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine in 0 startende \mathbb{R} -wertige Irrfahrt mit unabhängigen stationären μ -verteilten Zuwächsen, und μ erfülle die Annahme (A_{IF}) . Dann kann das Anfangsstück von (Z_n) bis zum globalen Minimum wie folgt konstruiert werden:*

1. *Bestimme den Wert einer unabhängigen exponentiell zum Parameter γ verteilten Zufallsvariable Y .*
2. *Simuliere die getiltete Irrfahrt (\tilde{Z}_n) solange, bis sie nach unten die Grenze $-Y$ unterschreitet. Dies passiere zum Zeitpunkt $\tilde{\pi}$.*
3. *Bestimme den Zeitpunkt $\tilde{\tau} < \tilde{\pi}$ zu dem die Irrfahrt (\tilde{Z}_n) das erste mal ihr Minimum bis zum Zeitpunkt $\tilde{\pi} - 1$ angenommen hat.*

Dann ist $(\tilde{Z}_1, \dots, \tilde{Z}_{\tilde{\tau}}, \tilde{\tau})$ zu $(Z_1, \dots, Z_{\tau}, \tau)$ identisch verteilt, wobei τ das erste globale Minimum der Irrfahrt (Z_n) ist.

Der Hauptsatz verrät uns zusätzlich noch eine Eigenschaft des Minimums: Es ist annähernd exponentiell verteilt. Diese Tatsache verwundert auch nicht, bedenkt man, dass die Exponentialverteilung gedächtnislos ist. Denn zu jedem Zeitpunkt der Irrfahrt kennt man zwar schon das Minimum bis zu dem momentanen Zeitpunkt, besitzt aber keinerlei Information über die Zukunft. Sobald man also ein neues Minimum Z_τ zum Zeitpunkt τ erreicht hat, muss man wieder eine neue unabhängige Irrfahrt (Z'_n) simulieren, die im Punkt Z_τ startet, und findet unter Umständen ein weiteres noch tiefer gelegenes Minimum $Z'_{\tau'}$, welches bezüglich Z_τ die gleiche Verteilung besitzt, wie Z_τ bezüglich dem Startpunkt. Dies spiegelt gerade die Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung wieder.

Bemerkung Falls es sich bei (Z_n) um eine \mathbb{Z} -wertige Irrfahrt handelt, dann kann in Hauptsatz 21 bzw. in der Folgerung die zum Parameter γ verteilte Zufallsvariable Y durch eine zum

Parameter $e^{-\gamma}$ geometrisch verteilte Zufallsvariable Y' ersetzt werden. Denn das Minimum der Irrfahrt kann dann ja schließlich auch nur ganzzahlig sein, und damit ist für die Zufallsvariable Y , die in der Zerlegung ja eine Schranke darstellt, nur entscheidend, in welches Intervall der Form $[i, i+1)$ mit $i \in \mathbb{N}_0$ sie fällt. Und es gilt für die exponentiell verteilte Zufallsvariable Y und die geometrisch verteilte Zufallsvariable Y'

$$\mathbb{P}(Y \in [i, i+1)) = \int_{[i, i+1)} \gamma e^{-\gamma x} dx = e^{-\gamma i} (1 - e^{-\gamma}) = \mathbb{P}(Y' = i)$$

Diese Tatsache ist auch nicht verwunderlich, denn die geometrische Verteilung ist ebenfalls gedächtnislos – also das diskrete Pendant zur Exponentialverteilung. \square

2.4 Beispiel: Diskreter Poisson Prozess mit Drift

Wir mussten zwar schon feststellen, dass ein sinnvolles Tilten einer Poissonverteilung nicht möglich ist, aber dennoch stellt ein diskreter Poisson Prozess, versehen mit einem zusätzlichen linearen Drift, ein wichtiges Beispiel dar.

Definition 23 (Diskreter Poisson Prozess) *Eine Irrfahrt (Z_n) mit unabhängigen stationären Zuwächsen heiße DISKRETER POISSON PROZESS, falls die Zuwche poissonverteilt zu einem Parameter α sind. Es gilt dann*

$$\mathbb{P}(Z_{n+1} = z_{n+1} | Z_n = z_n) = e^{-\alpha} \frac{\alpha^{(z_{n+1} - z_n)}}{(z_{n+1} - z_n)!}$$

Der Parameter α eines diskreten Poisson Prozesses wird oft als RATE bezeichnet, da er kontrolliert, wie häufig und stark die Irrfahrt springt. Sobald man den Poisson Prozess geeignet auf eine kontinuierliche Zeitachse verallgemeinert, gibt dieser Parameter an, wie häufig der Poisson Prozess springt.

Der diskrete Poisson Prozess zeichnet sich durch eine sehr schöne Eigenschaft aus, denn die Verteilungen ν_m der Zuwche $Z_{n+m} - Z_n$ ist wieder poissonverteilt zum Parameter $m\alpha$, wie das nächste Lemma zeigt.

Lemma 24 *Seien X und Y zwei unabhängige zu den Parametern α bzw. β poissonverteilte Zufallsvariablen. Dann ist die Summe $X + Y$ wieder poissonverteilt zum Parameter $\alpha + \beta$.*

Beweis Die Laplace Transformierte von X und Y sind gegeben durch

$$\varphi_X(\lambda) = \exp(\alpha(e^{-\lambda} - 1)) \quad \text{bzw.} \quad \varphi_Y(\lambda) = \exp(\beta(e^{-\lambda} - 1)).$$

Für die Summe $X + Y$ erhalten wir (da X und Y unabhängig sind) mit Satz 4

$$\begin{aligned} \varphi_{X+Y}(\lambda) &= \varphi_X(\lambda)\varphi_Y(\lambda) \\ &= \exp(\alpha(e^{-\lambda} - 1)) \exp(\beta(e^{-\lambda} - 1)) \\ &= \exp((\alpha + \beta)(e^{-\lambda} - 1)) \end{aligned}$$

Also hat die Laplace Transformierte der Summe wieder die Form einer poissonverteilten Zufallsvariable. Mit Hilfe des Eindeutigkeitsatzes 6 können wir nun in der Tat darauf schließen, dass die Summe poissonverteilt zum Parameter $\alpha + \beta$ ist. \blacksquare

Der diskrete Poisson Prozess an sich ist eine monoton wachsende Irrfahrt, also macht es zunächst keinen Sinn, diese Irrfahrt am Minimum zu zerlegen, da das Minimum mit dem Startpunkt identisch ist. Was aber passiert, wenn der Poisson Prozess einen leichten negativen Drift erhält, indem wir die Verteilung der Zuwächse verschieben? Dieser Frage wollen wir nun nachgehen. Hierfür müssen wir zunächst eine neue Irrfahrt konstruieren.

Definition 25 (Diskreter Poisson Prozess mit Drift) Sei (Z_n) ein diskreter Poisson Prozess gemäß Definition 23 und $b \in \mathbb{Z}$. Dann ist durch $Z'_n := Z_n + n \cdot b$ eine neue Irrfahrt (Z'_n) definiert, die DISKRETER POISSON PROZESS MIT LINEAREM DRIFT heißt.

Dass es sich bei dem neu konstruierten Gebilde tatsächlich um eine Irrfahrt mit unabhängigen und stationären Zuwächsen handelt, sieht man leicht: Betrachtet man die Differenzen $Z'_{n+1} - Z'_n = Z_{n+1} - Z_n + b$, so sind diese wieder unabhängig und stationär, da die Zuwächse $Z_{n+1} - Z_n$ der ursprünglichen Irrfahrt als unabhängig und stationär vorausgesetzt wurden. Die Verteilung μ' der Zuwächse ergibt sich aus μ einfach durch $\mu'(x) = \mu(x - b)$, da für eine gemäß μ' verteilte Zufallsvariable X' dann $X - b$ gemäß μ verteilt ist. Es gilt also

$$\mu'(x) = e^{-\alpha} \frac{\alpha^{x-b}}{(x-b)!}$$

Wir betrachten nun einen solchen diskreten Poisson Prozess (Z_n) zum Parameter $\alpha > 0$ mit einem negativen linearen Drift b mit $0 > b > -\alpha$. Dann gilt für den gesamten Drift $\mathbb{E}_0 Z_1 = b + \alpha > 0$. Für die Laplace Transformierte gilt dann

$$\varphi_Z(\lambda) = \exp\left(-\lambda b + \alpha(e^{-\lambda} - 1)\right)$$

Für diese Irrfahrt existiert dann gemäß Lemma 8 ein $\gamma > 0$ mit $\varphi_Z(\gamma) = 1$. Dies ist äquivalent zu

$$-\gamma b + \alpha(e^{-\gamma} - 1) = 0$$

Die Laplace Transformierte der getiltete Irrfahrt (\tilde{Z}_n) ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \varphi_{\tilde{Z}}(\lambda) &= \varphi_Z(\lambda + \gamma) \\ &= \sum_{z \in \mathbb{Z}} e^{-(\lambda+\gamma)z} \mu(z) \\ &= \sum_{z \geq b} e^{-(\lambda+\gamma)z} e^{-\alpha} \frac{\alpha^{z-b}}{(z-b)!} \\ &= e^{-b(\lambda+\gamma)-\alpha} \sum_{z \geq 0} \frac{(\alpha e^{-(\lambda+\gamma)})^z}{z!} \\ &= e^{-b(\lambda+\gamma)-\alpha} e^{\alpha e^{-(\lambda+\gamma)}} \\ &= \exp\left(\underbrace{-\gamma b + \alpha(e^{-\gamma} - 1)}_{=0} - \lambda b + \alpha e^{-\gamma}(e^{-\lambda} - 1)\right) \\ &= \exp(-\lambda b + \alpha e^{-\gamma}(e^{-\lambda} - 1)) \end{aligned}$$

Die Laplace Transformierte $\varphi_{\tilde{Z}}$ hat wieder die Form einer Poissonverteilung mit Parameter $\alpha e^{-\gamma}$ und Drift b . Dies bedeutet für die Zerlegung gemäß Hauptsatz 21, dass das erste Stück

des diskreten Poisson Prozesses mit negativem Drift wieder ein diskreter Poisson Prozess ist, der den gleichen Drift (im Sinne von b - nicht im Sinne des Erwartungswertes!) hat, allerdings hat sich die Sprungrate verkleinert, denn da $\gamma > 0$ ist, wird die Rate des getilteten Prozesses $\alpha e^{-\gamma} < \alpha$.

2.5 Beispiel: Pre-Brownsche Bewegung mit Drift

Wir haben uns schon für eine normalverteilte Zufallsvariable X mit Erwartungswert $b > 0$ und Varianz σ^2 die getiltete Verteilung $\tilde{\mu}$ betrachtet, die durch

$$\tilde{\mu}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x+b)^2}{2\sigma^2}} dx$$

gegeben ist.

Die Normalverteilung besitzt analog zur Poissonverteilung die Eigenschaft, dass die Summe zweier normalverteilter unabhängiger Zufallsvariablen wieder normalverteilt ist, wie das folgende Lemma zeigt.

Lemma 26 *Seien X und Y zwei normalverteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswerten b_X bzw. b_Y und mit Varianz σ_X^2 bzw. σ_Y^2 . Dann ist die Summe $X + Y$ wieder normalverteilt und hat Erwartungswert $b_X + b_Y$ und Varianz $\sigma_X^2 + \sigma_Y^2$.*

Beweis Die Laplace Transformationen von X und Y sind gegeben durch

$$\varphi_X(\lambda) = \exp\left(-\lambda b_X + \frac{\sigma_X^2 \lambda^2}{2}\right) \quad \text{bzw.} \quad \varphi_Y(\lambda) = \exp\left(-\lambda b_Y + \frac{\sigma_Y^2 \lambda^2}{2}\right)$$

Dann hat die Laplace Transformation der Summe $X + Y$ gemäß Lemma 4 die Gestalt

$$\begin{aligned} \varphi_{X+Y}(\lambda) &= \varphi_X(\lambda)\varphi_Y(\lambda) \\ &= \exp\left(-\lambda b_X + \frac{\sigma_X^2 \lambda^2}{2} - \lambda b_Y + \frac{\sigma_Y^2 \lambda^2}{2}\right) \\ &= \exp\left(-\lambda(b_X + b_Y) + \frac{(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)\lambda^2}{2}\right) \end{aligned}$$

Dies ist gerade die Laplace Transformierte einer Zufallsvariable, die die behauptete Verteilung besitzt. ■

Betrachten wir nun eine Irrfahrt (Z_n) , deren Zuwächse normalverteilt mit Erwartungswert $b < 0$ und Varianz σ^2 verteilt sind. Dann sind laut Lemma 26 die Zuwächse $Z_{n+m} - Z_n$ über m Schritte hinweg ebenfalls wieder normalverteilt mit Erwartungswert mb und Varianz $m\sigma^2$. Dies entspricht einer diskretisierter Brownschen Bewegung mit Drift b und Varianz σ^2 und rechtfertigt somit folgende Definition:

Definition 27 (Pre-Brownsche Bewegung) *Eine Irrfahrt (Z_n) mit unabhängigen stationären Zuwächsen heiße PRE-BROWNSCHE BEWEGUNG, falls die Zuwächse $Z_{n+1} - Z_n$ normalverteilt sind. Falls der Erwartungswert der Zuwächse $b := \mathbb{E}(Z_{n+1} - Z_n)$ ungleich 0 ist, so heiße b DRIFT. Falls der Drift gleich 0 und die Varianz der Zuwächse gleich 1 ist, so heiße die Irrfahrt STANDARD PRE-BROWNSCHE BEWEGUNG.*

Die Verteilung der Zuwächse $Z_{n+1} - Z_n$ der Pre-Brownschen Bewegung bezeichnen wir mit μ ; es gilt demnach

$$\mu(dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-b)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Die getiltete Irrfahrt (\tilde{Z}_n) besitzt dann Zuwächse, die gemäß $\tilde{\mu}$ verteilt sind, wobei $\tilde{\mu}$ durch

$$\tilde{\mu}(dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x+b)^2}{2\sigma^2}} dx$$

gegeben ist. Eine Zerlegung der Pre-Brownschen Bewegung (Z_n) mit Drift $b > 0$ und Varianz σ^2 gemäß dem Hauptsatz 21 zeigt nun, dass das Anfangsstück von (Z_n) bis zum globalen Minimum wiederum normalverteilte Zuwächse mit der gleichen Varianz σ^2 jedoch negativen Drift $-b$ besitzt. Dies lässt sich einfach von der Verteilung $\tilde{\mu}$ der Zuwächse $\tilde{Z}_{n+1} - \tilde{Z}_n$ ablesen.

Insgesamt sehen wir einen grundsätzlichen Unterschied zwischen dem Verhalten der Pre-Brownschen Bewegung und dem Verhalten des diskreten Poisson Prozesses aus Abschnitt 2.4: Während das Anfangsstück des diskreten Poisson Prozesses bis zum Minimum den Drift des gesamten Prozesses jedoch eine kleinere Rate besitzt, verhält es sich mit der Pre-Brownschen Bewegung gerade umgekehrt: Die Varianz (also der Verteilungsparameter) bleibt im Anfangsstück erhalten, jedoch wechselt der Drift sein Vorzeichen.

Kapitel 3

Zerlegung eines Lévy Prozesses

In diesem Kapitel wird das Konzept der zeitdiskreten Irrfahrt auf einen zeitkontinuierlichen Prozess ausgeweitet. Es bildet sozusagen mit dem Hauptsatz 58 in Abschnitt 3.7 den zentralen Kern dieser Arbeit. Bis dahin wird dieses Kapitel alle für den Beweis benötigten Hilfsmittel zur Verfügung stellen.

3.1 Stochastische Prozesse

Definition 28 (Stochastischer Prozess) Eine Familie $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ von Zufallsvariablen mit Werten in \mathbb{R}^d heißt STOCHASTISCHER PROZESS. Die Verteilung von Z_0 wird als STARTVERTEILUNG bezeichnet.

Falls für je endlich viele $t_0, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}_+$ mit $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ die Zufallsvariablen

$$Z_{t_0}, Z_{t_1} - Z_{t_0}, \dots, Z_{t_n} - Z_{t_{n-1}}$$

unabhängig sind, so heißt (Z_t) ein PROZESS MIT UNABHÄNGIGEN ZUWÄCHSEN. Falls die Verteilung von $Z_{t+h} - Z_t$ nur von h , nicht aber von t abhängt, heißt der Prozess ZEITHOMOGEN.

Falls darüber hinaus eine Familie $(\mu_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen existiert, so dass für beliebige $s, t \in \mathbb{R}_+$ mit $t \geq s$ gilt

$$Z_t - Z_s \sim \mu_{t-s},$$

dann heißt (Z_t) ein PROZESS MIT STATIONÄREN ZUWÄCHSEN.

Notation Wir bezeichnen die Verteilung eines Prozesses (Z_t) auf dem Raum der Pfade naiv mit \mathbb{P} – fest daran glaubend, dass eine solche Wahrscheinlichkeitsverteilung existiert. Im Abschnitt 3.4 werden wir dieser Schreibweise eine tiefsinnigere Bedeutung beimessen. Bis dahin treffen wir folgende Vereinbarung: \mathbb{P}_x bezeichnet die Verteilung eines Prozesses, der in x startet, wohingegen \mathbb{P} die Verteilung eines Prozesses mit nicht näher festgelegtem Startpunkt bezeichnet.

Eine weitere wichtige Notation betrifft linksseitige und rechtsseitige Limiten eines Prozesses. Da ein Prozess im allgemeinen nicht stetig ist, vereinbaren wir für t folgende Notation:

$$Z_{t-} := \lim_{s \nearrow t} Z_s \quad \text{und} \quad Z_{t+} := \lim_{s \searrow t} Z_s$$

□

In der Definition 28 implizieren stationäre Zuwächse Zeithomogenität, d.h. die Verteilung der Zuwächse ist nicht vom Zeitpunkt abhängig. In der gesamten Arbeit werden ausschließlich zeithomogene Prozesse mit unabhängigen Zuwächsen untersucht. Die Verteilung der Zuwächse eines solchen Prozesses lässt sich, analog zur Irrfahrt, mit Übergangswahrscheinlichkeiten $(P_t(x, dy))_{t \in \mathbb{R}_+}$ beschreiben, so dass dann für beliebige $s, t \in \mathbb{R}_+$ mit $t \geq s$ und $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ gilt

$$\mathbb{P}(Z_t \in A | Z_s = x) = P_{t-s}(x, A)$$

Definition 29 (Halbgruppe von Kernen) *Es sei $(P_t(x, dy))_{t \in \mathbb{R}_+}$ eine Familie von Kernen auf dem Raum $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Gilt dann*

$$P_{s+t} = P_s * P_t$$

wobei die Verknüpfung $*$ definiert ist durch

$$(P_s * P_t)(x, B) := \int_{\mathbb{R}^d} P_t(y, B) P_s(x, dy),$$

so heißt die Familie $(P_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ eine HALBGRUPPE VON KERNEN.

Falls der betrachtete stochastische Prozess (Z_t) mit Wertebereich \mathbb{R}^d unabhängige stationäre Zuwächse besitzt, dann existiert eine Familie (μ_t) von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf \mathbb{R}^d , so dass

$$Z_t - Z_s \sim \mu_{t-s}$$

gilt. Die Kerne $P_t(x, dy)$ sind dann aufgrund der Stationarität translationsinvariant, d.h. es gilt für $B \subset \mathbb{R}^d$ und $x \in \mathbb{R}^d$

$$P_t(0, B) = P_t(x, B + x)$$

Offenbar gelten dann folgende Beziehungen zwischen den Übergangskernen (P_t) und der Familie (μ_t) :

$$\mu_t(B) = P_t(0, B) \quad \text{und} \quad P_t(x, B) = \mu_t(B - x)$$

Da die Zuwächse zusätzlich als unabhängig angenommen wurden, gilt darüber hinaus für $s, t \geq 0$

$$\begin{aligned} \mu_{s+t}(B) &= P_{s+t}(0, B) \\ &= (P_s * P_t)(0, B) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} P_t(y, B) P_s(0, dy) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \mu_t(B - y) \mu_s(dy) \\ &= \mu_s * \mu_t(B). \end{aligned}$$

Setzen wir $\mu_0(A) := I(0 \in A)$, so ist die Familie der Maße (μ_t) zusammen mit der Faltung eine Halbgruppe mit μ_0 als neutrales Element. Diese Tatsache motiviert die folgende Definition:

Definition 30 (Faltungshalbgruppe) Sei $(\mu_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ eine Familie von Maßen auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. Gilt dann für $s, t \geq 0$

$$\mu_t * \mu_s = \mu_{s+t}$$

so heißt $(\mu_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ eine FALTUNGSHALBGRUPPE auf \mathbb{R}^d . Die Faltungshalbgruppe heißt STETIG, falls die Abbildung $t \mapsto \mu_t$ stetig ist.

Die Stetigkeit einer Faltungshalbgruppe ist eine für uns wichtige Forderung – der folgende Satz sichert einerseits die Existenz einer stetigen Faltungshalbgruppe, und andererseits deren Eindeutigkeit. Insbesondere die Eindeutigkeit werden wir sehr oft direkt oder indirekt benötigen, um die Verteilung eines Prozesses nur mit der Verteilung an einem festen Zeitpunkt zu identifizieren.

Satz 31 Zu jeder Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ und $t_0 > 0$ existiert genau eine stetige Faltungshalbgruppe $(\nu_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ mit $\nu_{t_0} = \mu_{t_0}$.

Beweis Siehe Satz 29.6 in [Bau91]. ■

Falls die Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ selbst schon stetig ist, folgt aus dem Satz insbesondere deren Eindeutigkeit, falls nur für ein $t_0 > 0$ das Maß μ_{t_0} bekannt ist:

Folgerung 32 Seien $(\mu_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ und $(\nu_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ zwei stetige Faltungshalbgruppen und $t_0 > 0$ mit $\mu_{t_0} = \nu_{t_0}$. Dann sind beide Faltungshalbgruppen identisch.

Definition 33 (Drift) Sei $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ eine \mathbb{R} -wertiger stochastischer Prozess. Der Prozess besitzt dann einen POSITIVEN DRIFT, falls

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Z_t = +\infty \quad \text{fast sicher}$$

und einen NEGATIVEN DRIFT, falls

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Z_t = -\infty \quad \text{fast sicher}$$

Und schließlich OSZILLIERT der Prozess, falls gilt

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} Z_t = -\infty \quad \text{und} \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} Z_t = +\infty \quad \text{fast sicher}$$

Falls der Prozess $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ unabhängige stationäre Zuwächse besitzt und außerdem der Erwartungswert $\mathbb{E}(Z_1 - Z_0)$ existiert, dann können wir den Drift eines Prozesses auch wie folgt charakterisieren. Allerdings ist diese Charakterisierung nicht mehr ganz so allgemein, da die Existenz des Erwartungswertes vorausgesetzt wird.

Lemma 34 Sei $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ Prozess mit unabhängigen stationären Zuwächse, und es existiere der Erwartungswert $b := \mathbb{E}(Z_1 - Z_0)$. Der Prozess besitzt genau dann einen positiven Drift, falls $b > 0$ bzw. einen negativen Drift, falls $b < 0$ ist.

Beweis Für $\alpha > 0$ sei die Folge $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert durch $t_n^\alpha := n\alpha$, also gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n^\alpha = \infty$. Zusätzlich seien die Zufallsvariablen $(X_n^\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert durch

$$X_n^\alpha := Z_{n\alpha} - Z_{(n-1)\alpha} = Z_{t_n^\alpha} - Z_{t_{n-1}^\alpha}.$$

Da der Prozess (Z_t) unabhängige stationäre Zuwächse besitzt, sind für festes α die Zufallsvariablen $(X_n^\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$ unabhängig und identisch verteilt. Damit folgt aus dem starken Gesetz der großen Zahlen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Z_{\alpha n} - Z_0}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_n^\alpha = \mathbb{E}X_1^\alpha = \mathbb{E}Z_{t_1^\alpha} = \mathbb{E}(Z_\alpha - Z_0) = b\alpha \quad \text{fast sicher}$$

Daraus folgt durch Division durch α

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Z_{\alpha n} - Z_0}{\alpha n} = b \quad \text{fast sicher}$$

Da dies unabhängig von α gilt, folgt somit insgesamt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{Z_t - Z_0}{t} = b \quad \text{fast sicher}$$

Aus $b > 0$ folgt dann

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Z_t - Z_0 = \infty \quad \text{fast sicher,}$$

also besitzt der Prozess (Z_t) einen positiven Drift.

Falls umgekehrt der Prozess (Z_t) einen positiven Drift besitzt, gilt auch für den Erwartungswert

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}Z_t = +\infty.$$

Da $Z_0 < \infty$ fast sicher gilt, gibt es somit ein $t > 0$ mit $\mathbb{E}(Z_t - Z_0) > 0$. Da der Prozess unabhängige stationäre Zuwächse besitzt, gilt $b := \mathbb{E}(Z_1 - Z_0) = t\mathbb{E}(Z_t - Z_0) > 0$. ■

3.2 Laplace Transformation

Definition 35 (Laplace Transformation) Sei $(\mu_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ eine stetigen Faltungshalbgruppe auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Dann ist die LAPLACE TRANSFORMIERTE von (μ_t) definiert durch

$$\varphi_\mu(\lambda) := \varphi_{\mu_1}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda x} \mu_1(dx)$$

Bei dieser Definition der Laplace Transformierten von (μ_t) wird nur das Maß μ_1 in der Definition verwendet. Da jedoch Stetigkeit der Faltungshalbgruppe gefordert ist, ist nach Folgerung 32 die gesamte Familie (μ_t) schon eindeutig bestimmt.

Die Laplace Transformierte eines stochastischen Prozesses (Z_t) mit stetiger Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ ist definiert als

$$\varphi_Z(\lambda) := \varphi_\mu(\lambda) = \varphi_{\mu_1}(\lambda)$$

Mit dieser Definition erhalten wir auch sofort den folgenden Satz:

Satz 36 (Eindeutigkeitsatz) Seien (Z_t) und (Z'_t) zwei in 0 startende reelle Prozesse mit unabhängigen und stationären Zuwächsen mit stetiger Faltungshalbgruppe. Falls $\varphi_Z = \varphi_{Z'}$ gilt, dann besitzen beide Prozesse die gleiche Faltungshalbgruppe und damit die gleiche Verteilung.

Beweis Nach Satz 6 ist die Laplace Transformation eindeutig, d.h. die Verteilungen von Z_1 und Z'_1 sind identisch. Da die Faltungshalbgruppen als stetig vorausgesetzt sind, sind diese nach Folgerung 32 ebenfalls identisch. Damit besitzen die Prozesse schließlich die gleichen Verteilungen. ■

Analog Satz 4 gelten wieder die gleichen Regeln für das Rechnen mit Laplace Transformierten stochastischer Prozesse mit stetigen Faltungshalbgruppen: Seien $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ und $(Y_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ zwei unabhängige stochastische Prozesse mit Startpunkt 0 dann gilt

1. $\varphi_X(\lambda) = \mathbb{E}e^{-\lambda X_1}$
2. Ist $\mathbb{E}|X_1|^n < \infty$, so gilt $\varphi_X^{(n)}(0) = (-1)^n \mathbb{E}X_1^n$
3. $\varphi_{X+Y}(\lambda) = \varphi_X(\lambda)\varphi_Y(\lambda)$
4. $\varphi_{aX+b}(\lambda) = e^{-\lambda b}\varphi_X(a\lambda)$

wobei φ_{X+Y} die Laplace Transformierte der Summe $(X_n + Y_t)_{t \geq 0}$ der Prozesse und φ_{aX+b} die Laplace Transformierte des Prozesses $(aX_t + b)_{t \in \mathbb{R}_+}$ ist.

3.3 Tiltten

Lemma 37 Sei $(\mu_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ eine stetige Faltungshalbgruppe auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit

$$\text{Es existiert ein } \gamma > 0 \text{ mit } \varphi_{\mu_1}(\gamma) = 1 \quad (\text{AFH})$$

Dann ist $\varphi_{\mu_t}(\gamma) = \varphi_{\mu_t}(\gamma) = 1$ für alle $t \geq 0$ ist.

Beweis Da jedes Maß μ_t die Bedingungen von Satz 10 genügt, folgt aus eben diesem Satz für jedes $t > 0$ die Existenz genau eines $\gamma_t > 0$, mit dem die Verteilung μ_t getiltet zu μ_t wird.

Zusätzlich gilt es nun zu zeigen, dass für alle $t > 0$ die Maße μ_t mit dem gleichen Parameter γ getiltet werden. Es gilt

$$\begin{aligned} \varphi_{\mu_{s+t}}(\gamma) &= \int e^{-\gamma x} \mu_{s+t}(dx) \\ &= \int \int e^{-\gamma x} \mu_t(-y + dx) \mu_s(dy) \\ &= \int \int e^{-\gamma(x-y)} \mu_t(-y + dx) e^{-\gamma y} \mu_s(dy) \end{aligned}$$

Aus der Definition von γ_t folgt nun $\int e^{-\gamma_t x} \mu_t(dx) = 1$, und wir erhalten:

$$\begin{aligned} &= \int e^{-\gamma y} \mu_s(dy) \\ &= \varphi_{\mu_s}(\gamma) \end{aligned}$$

Insbesondere folgt daraus

$$\varphi_{\mu_{s+s}}(\gamma_s) = \varphi_{\mu_s}(\gamma_s) = 1 \quad \implies \quad \gamma_{s+s} = \gamma_s$$

Induktiv folgt nun, dass für festes $s > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\gamma_{ns} = \gamma_s$. Und daraus folgt für alle $m \in \mathbb{N}$ weiter $\gamma_s = \gamma_{m/m \cdot s} = \gamma_{1/m \cdot s}$. Induktiv erhalten wir dann für alle rationalen Zahlen p/q die Gleichheit $\gamma_s = \gamma_{p/q \cdot s}$. Als gilt zunächst für alle rationalen Zahlen p/q : $\gamma_{p/q} = \gamma_1 =: \gamma$.

Betrachten wir uns nun ein allgemeines $t > 0$. Zunächst für alle $m \in \mathbb{N}$ die Funktion $e^{-\gamma x}$ auf $[-m, m]$ positiv, stetig und beschränkt, daher folgt aus der schwachen Stetigkeit der Faltungshalbgruppe

$$\int_{(-m, m)} e^{-\gamma x} \mu_t(dx) = \lim_{\substack{r \rightarrow t \\ r \in \mathbb{Q}}} \int_{(-m, m)} e^{-\gamma x} \mu_r(dx) \leq 1$$

Im Grenzübergang $m \rightarrow \infty$ erhalten wir dann

$$\varphi_{\mu_t}(\gamma) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\gamma x} \mu_t(dx) \leq 1$$

Um nun für ein irrationales $t > 0$ Gleichheit zu erhalten sei $n \in \mathbb{N}$ derart gewählt, dass $n > t$ ist. Dann gilt nach den Rechenregeln für die Laplace Transformation

$$\varphi_{\mu_t}(\gamma) \cdot \varphi_{\mu_{n-t}}(\gamma) = \varphi_{\mu_t * \mu_{n-t}}(\gamma) = \varphi_{\mu_n}(\gamma) = 1.$$

Da beide Faktoren auf der linken Seite kleiner oder gleich Eins sind, für das Produkt allerdings $\varphi_{\mu_t}(\gamma) \cdot \varphi_{\mu_{n-t}}(\gamma) = 1$ gilt, müssen auch beide Faktoren schon Eins sein. Also gilt $\varphi_{\mu_t}(\gamma) = 1$ für alle $t > 0$. ■

Bemerkung Analog zu den Bedingungen (G) und (G_{IF}) können wir auch für einen allgemeinen stochastischen Prozess eine hinreichende Bedingung für die Existenz eines γ angeben. Für einen Prozess $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ mit stetiger Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ sind nämlich die Bedingungen

$$\begin{aligned} & 1. \quad \varphi_{\mu}(\lambda) < \infty \quad \forall \lambda \in [0, \infty) \\ \text{und } & 2. \quad 0 < \int x \mu_t(dx) < \infty \quad \forall t > 0 \\ & \text{und } 3. \quad \mu_t((-\infty, 0)) > 0 \quad \forall t > 0. \end{aligned} \quad (\text{GFH})$$

hinreichend für die Annahme (A_{FH}) aus dem vorigen Lemma. Dies liefert gerade Lemma 8. In Bezug auf einen Prozess (Z_t) mit unabhängigen stationären Zuwächsen sind diese Bedingungen offenbar wiederum äquivalent zu

$$\varphi_Z(\lambda) < \infty \quad \forall \lambda \in [0, \infty) \quad \text{und} \quad 0 < \mathbb{E}(Z_1 - Z_0) < \infty \quad \text{und} \quad \mathbb{P}(Z_1 < Z_0) > 0 \quad (\text{GFH}') \quad \square$$

Satz und Definition 38 (Tilten) Sei $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ ein \mathbb{R} -wertiger stochastischer Prozess mit unabhängigen stationären Zuwächsen mit stetiger Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$, die die Bedingung (A_{FH}) erfüllt.

Dann existiert ein $\gamma > 0$, so dass die Maßfamilie $(\tilde{\mu}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ definiert durch $\tilde{\mu}_t(dx) := e^{-\gamma x} \mu_t(dx)$ eine stetige Faltungshalbgruppe von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf \mathbb{R} ist. Ein stochastischer Prozess $(\tilde{Z}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$, dessen Zuwächse gemäß $(\tilde{\mu}_t)$ verteilt sind, heißt der zu (Z_t) GETILTETE PROZESS.

Beweis Da die gegebenen Voraussetzungen Lemma 37 genügen, existiert ein $\gamma > 0$, so dass $\varphi_\mu(\gamma) = 1$ ist. In Satz 10 wurde gezeigt, dass die oben definierten Maße $(\tilde{\mu}_t)$ wieder Wahrscheinlichkeitsmaße sind, d.h. dass $\tilde{\mu}(\mathbb{R}) = 1$ ist. Es bleibt zu zeigen, dass $(\tilde{\mu}_t)$ wieder eine stetige Faltungshalbgruppe ist.

HALBGRUPPENEIGENSCHAFT: Für $s, t \in \mathbb{R}_+$ und $B \subset \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_{s+t}(B) &= \int_B e^{-\gamma x} \mu_{s+t}(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_B e^{-\gamma x} \mu_t(-y + dx) \mu_s(dy) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{B-y} e^{-\gamma x} \mu_t(dx) e^{-\gamma y} \mu_s(dy) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{B-y} \tilde{\mu}_t(dx) \tilde{\mu}_s(dy) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \tilde{\mu}_t(B-y) \tilde{\mu}_s(dy) \\ &= (\tilde{\mu}_s * \tilde{\mu}_t)(B) \end{aligned}$$

Somit ist die Halbgruppeneigenschaft erhalten.

STETIGKEIT: Aufgrund der Stetigkeit der Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ gilt für alle stetigen Funktionen mit kompakten Träger $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $s > 0$

$$\lim_{t \rightarrow s} \int_{\mathbb{R}} f(x) \mu_s(dx) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \mu_t(dx)$$

Da mit f auch die Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) := e^{-\gamma x} f(x)$ als Produkt zweier stetiger Funktionen stetig ist, und außerdem den kompakten Träger von f erbt, folgt

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow s} \int_{\mathbb{R}} f(x) \tilde{\mu}_s(dx) &= \lim_{t \rightarrow s} \int_{\mathbb{R}} e^{-\gamma x} f(x) \mu_s(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\gamma x} f(x) \mu_t(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x) \tilde{\mu}_t(dx) \end{aligned}$$

Also konvergiert $\tilde{\mu}_s$ für $s \rightarrow t$ schwach gegen $\tilde{\mu}_t$ – das heißt nichts anderes, als dass die Abbildung $t \mapsto \tilde{\mu}_t$ stetig ist, und somit die Faltungshalbgruppe $(\tilde{\mu}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ stetig ist. ■

Bemerkung 1. Die Laplace Transformierte $\varphi_{\tilde{Z}}$ von (\tilde{Z}_n) ergibt sich aus φ_Z sehr einfach durch

$$\varphi_{\tilde{Z}}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda x} \tilde{\mu}(dx) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda x} e^{-\gamma x} \mu(dx) = \varphi_Z(\lambda + \gamma) \quad (3.1)$$

2. Für die Übergangskerne $P_t(x, dy)$ bedeutet das Tiltten

$$\tilde{P}_t(x, dy) := \tilde{\mu}_t(-x + dy) = e^{-\gamma(y-x)} \mu_t(-x + dy) = e^{-\gamma(y-x)} P_t(x, dy) \quad (3.2)$$

3. Betrachten wir uns für $t > 0$ den Erwartungswert $\int x \mu_t(dx)$, so gilt nach Satz 11

$$\mathbb{E}(Z_t - Z_0) = \int x \mu_t(dx) < 0,$$

also besitzt der getiltete Prozess einen negativen Drift. \square

3.4 Satz von Daniell-Kolmogoroff

Wie schon in der Einleitung dieses Kapitels angekündigt, wird in diesem Abschnitt eine Verteilung auf dem Raum der reellwertigen Funktionen entwickelt. Ausgehend von gegebenen Marginalverteilungen oder insbesondere von gegebenen Übergangskernen wird sichergestellt, dass tatsächlich eine Verteilung auf dem Raum der Pfade existiert. Denn erst dann können wir ruhigen Gewissens den Bezeichner \mathbb{P} für eben ein solches Maß verwenden.

Aber als erstes gehen wir den (einfacheren) Weg anders herum: Wir betrachten und zunächst zu einer existierenden Verteilung eines Prozesses $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ die Marginalverteilungen, d.h. die Verteilung von $(Z_{t_1}, \dots, Z_{t_n})$ an festen Zeitpunkten t_1, \dots, t_n zu betrachten. Der Weg dahin führt über die Interpretation von (Z_t) als eine Abbildung, die nur an diskreten Zeitpunkten ausgewertet wird.

Definition 39 (Marginalverteilung) Sei $T := \{(t_1, \dots, t_n) : t_i \in \mathbb{R}_+, t_i \neq t_j \forall i < j \leq n \text{ und } n \in \mathbb{N}\}$ die Menge aller endlichen Folgen $\tilde{t} = (t_1, \dots, t_n)$ von unterschiedlichen positiven Zahlen. Falls zu jedem $\tilde{t} \in T$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß $Q_{\tilde{t}}$ auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ zugeordnet ist, so heißt die Menge $(Q_{\tilde{t}})_{\tilde{t} \in T}$ eine FAMILIE VON MARGINALVERTEILUNGEN.

Aus einer Wahrscheinlichkeitsverteilung μ auf dem Raum der reellwertigen Funktionen $(\mathbb{R}^{[0, \infty)}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0, \infty)}))$ können wir sofort eine Familie von Marginalverteilungen gewinnen. Denn setzen wir für $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ und $\tilde{t} = (t_1, \dots, t_n) \in T$

$$Q_{\tilde{t}}(A) := \mu(\{f \in \mathbb{R}^{[0, \infty)} : (f(t_1), \dots, f(t_n)) \in A\}),$$

so ist $(Q_{\tilde{t}})_{\tilde{t} \in T}$ offenbar eine Familie von Marginalverteilungen. Allerdings handelt es sich hierbei um eine besondere Familie, denn sie entstammt aus einer Verteilung, und besitzt somit die Eigenschaften der folgenden Definition:

Definition 40 (Konsistente Marginalverteilung) Eine Familie $(Q_{\tilde{t}})_{\tilde{t} \in T}$ von Marginalverteilungen heißt KONSISTENT, falls folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

1. Falls $\tilde{s} = (t_{i_1}, \dots, t_{i_n})$ eine Permutation von $\tilde{t} = (t_1, \dots, t_n)$, dann gilt für alle $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), i = 1, \dots, n$

$$Q_{\tilde{t}}(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) = Q_{\tilde{s}}(A_{i_1} \times A_{i_2} \times \dots \times A_{i_n})$$

2. Falls $\tilde{t} = (t_1, \dots, t_n)$ und $\tilde{s} = (t_1, \dots, t_{n-1})$ und $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1})$ ist, dann gilt

$$Q_{\tilde{t}}(A \times \mathbb{R}) = Q_{\tilde{s}}(A)$$

Bemerkung Falls ν die Startverteilung und $(P_t(x, dy))_{t \in \mathbb{R}_+}$ die Halbgruppe von Kernen eines reellen stochastischen Prozesses mit unabhängigen Zuwächsen ist, dann kann wie folgt eine Familie von konsistenten Marginalverteilungen gewonnen werden. Seien hierzu $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ und $\tilde{t} = (t_1, \dots, t_n)$ mit $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$. Setze

$$Q_{\tilde{t}}(A) := \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} 1_A(x_1, \dots, x_n) P_{t_n - t_{n-1}}(x_{n-1}, dx_n) \cdots P_{t_1}(x_0, dx_1) \nu(dx_0)$$

Für allgemeines $\tilde{s} = (s_1, \dots, s_n)$ sei $\pi \in S_n$ mit $0 < s_{\pi(1)} < s_{\pi(2)} < \dots < s_{\pi(n)}$ und setze

$$Q_{\tilde{s}}(A) := Q_{(s_{\pi(1)}, s_{\pi(2)}, \dots, s_{\pi(n)})}(A)$$

Die so definierte Marginalverteilungen sind dann offenbar konsistent im Sinne der Definition 40. \square

Oben haben wir aus einer gegebenen Verteilung eine Familie von konsistenten Marginalverteilungen gewonnen. Die spannende Frage ist nun natürlich ob und unter welchen Bedingungen man aus einer Familie von Marginalverteilungen wieder eine Verteilung auf $(\mathbb{R}^{[0, \infty)}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0, \infty)}))$ konstruieren kann. Die Antwort auf diese Frage gibt der nächste Satz:

Satz 41 (Daniell-Kolmogoroff) *Sei $(Q_{\tilde{t}})_{\tilde{t} \in T}$ eine Familie konsistenter Marginalverteilungen. Dann existiert genau eine Wahrscheinlichkeitsverteilung μ_Q auf $(\mathbb{R}^{[0, \infty)}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0, \infty)}))$, so dass für alle $\tilde{T} \in T$ gilt*

$$Q_{\tilde{t}}(A) = \mu_Q(\{f \in \mathbb{R}^{[0, \infty)} : (f(t_1), \dots, f(t_n)) \in A\}).$$

Beweis Siehe Abschnitt 2.2 in [KS91] oder Paragraph 35 in [Bau91]. \blacksquare

Da eine Verteilung eines reellen Stochastischen Prozesses automatisch eindeutig eine Familie konsistenter Marginalverteilungen induziert, und diese wiederum laut obigem Satz in eindeutiger Weise eine Verteilung auf $(\mathbb{R}^{[0, \infty)}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0, \infty)}))$ induziert, erhalten wir aus dem Satz von Daniell-Kolmogoroff sofort diese wichtige Folgerung:

Folgerung 42 *Sind μ und ν zwei Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf $(\mathbb{R}^{[0, \infty)}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0, \infty)}))$, so ist $\mu = \nu$ genau dann, wenn die endlichen Marginalverteilungen von μ und ν übereinstimmen.*

Bemerkung Im Beweis des Satzes 41 wird zunächst ein Maß μ_Q auf den Zylindermengen von $(\mathbb{R}^{[0, \infty)}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0, \infty)}))$ definiert. Eine Zylindermenge $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0, \infty)})$ ist gegeben durch

$$C = \{f \in \mathbb{R}^{[0, \infty)} : (f(t_1), \dots, f(t_n)) \in A\}$$

mit $t_i \in [0, \infty)$, $i = 1, \dots, n$ und $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Die Menge aller Borelschen Zylinder bezeichnen wir mit \mathcal{Z} . Für einen solchen Zylinder C ist dann das Maß μ_Q definiert als

$$\mu_Q(C) = Q_{\tilde{t}}(A)$$

mit $\tilde{t} = (t_1, \dots, t_n)$. Dieses Maß lässt sich dann eindeutig auf $\sigma(\mathcal{Z})$ fortsetzen, und da $\sigma(\mathcal{Z}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0, \infty)})$ ist, ist dieses dann gerade die gesuchte Fortsetzung.

Damit wird nun auch klar, wie das mit der Familie $(Q_{\tilde{t}})_{\tilde{t} \in T}$ assoziierte Maß μ_Q aussieht. Für $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0, \infty)})$ ist das Maß $\mu_Q(A)$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \mu_Q(A) &= \inf \{ \mu_Q(C) : A \subset C, C \in \mathcal{Z} \} \\ &= \inf \{ Q_{\tilde{t}}(A) : \tilde{t} = (t_1, \dots, t_n) \in T, n \in \mathbb{N} \} \end{aligned}$$

wobei $Q_{\tilde{t}}(A)$ definiert ist durch

$$Q_{\tilde{t}}(A) := Q_{\tilde{t}}(\{(f(t_1), \dots, f(t_n)) : f \in A\}).$$

□

Bemerkung Betrachten wir insbesondere die Marginalverteilung eines reellen stochastischen Prozesses mit unabhängigen gemäß der Halbgruppe $(P_t(x, dy))_{t \in \mathbb{R}_+}$ verteilten Zuwächsen und Startverteilung ν , dann gilt für die Verteilung der Pfade des Prozesses für $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0, \infty)})$:

$$\begin{aligned} \mu_{P, \nu}(A) &:= \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} 1_{\tilde{A}}(x_0, x_1, \dots, x_n) P_{t_n - t_{n-1}}(x_{n-1}, dx_n) \cdots P_{t_1}(x_0, dx_1) \nu(dx_0) : \right. \\ &\quad \left. \tilde{A} = \{(f(0), f(t_1), \dots, f(t_n)) : f \in A\}, 0 < t_1 < \dots < t_n, n \in \mathbb{N} \right\}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Das so definierte Maß $\mu_{P, \nu}$ nennen wir die durch $(P_t(x, dy))_{t \in \mathbb{R}_+}$ und ν INDUZIERTE VERTEILUNG auf dem Raum der Pfade.

Falls die Startverteilung ν ihr gesamtes Gewicht auf einen einzelnen Punkt x_0 legt, dann setzen wir $\mu_{P, x_0} := \mu_{P, 1_{x_0}}$. Aus einer gegebenen Halbgruppe $(P_t(x, dy))$ erhalten wir so eine ganze Familie $(\mu_{P, x_0})_{x_0 \in \mathbb{R}}$ von Verteilungen auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0, \infty)})$, indem wir setzen

$$\begin{aligned} \mu_{P, x_0}(A) &:= \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} 1_{\tilde{A}}(x_1, \dots, x_n) P_{t_n - t_{n-1}}(x_{n-1}, dx_n) \cdots P_{t_1}(x_0, dx_1) : \right. \\ &\quad \left. \tilde{A} = \{(f(t_1), \dots, f(t_n)) : f \in A\}, 0 < t_1 < \dots < t_n, n \in \mathbb{N} \right\}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Dabei ist dann für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ die Verteilung μ_{P, x_0} entweder ein Wahrscheinlichkeitsmaß oder das Nullmaß. Die Familie $(\mu_{P, x_0})_{x_0 \in \mathbb{R}}$ nennen wir die durch $(P_t(x, dy))_{t \in \mathbb{R}_+}$ INDUZIERTE FAMILIE VON VERTEILUNGEN.

Falls umgekehrt ein Maß μ_Q auf $(\mathbb{R}^{[0, \infty)}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0, \infty)}))$ einen \mathbb{R} -wertigen stochastischen Prozess mit unabhängigen Zuwächsen beschreibt, dann können wir mit dieser Betrachtung die Übergangskerne $(P_t(x, dy))_{t \in \mathbb{R}_+}$ und die Startverteilung ν bestimmen. Sei hierfür für $x \in \mathbb{R}$ die Menge \mathcal{T}_x definiert durch

$$\mathcal{T}_x := \left\{ s \in \mathbb{R}_+ : \mu_Q \left(\{ f \in \mathbb{R}^{[0, \infty)} : f(s) \in dx \} \right) > 0 \right\}$$

Mit dieser Definition enthält die Menge \mathcal{T}_x alle Zeitpunkte t , zu denen es mögliche Pfade f gibt mit $f(t) = x$. Falls $\mathcal{T}_x \neq \emptyset$, dann gilt für $t_x \in \mathcal{T}_x$ und $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$:

$$\int_{\mathbb{R}} P_{t_x}(x, A) \nu(dx) = \mu_Q \left(\{ f \in \mathbb{R}^{[0, \infty)} : f(t_x) \in A \} \right)$$

Damit ist $\rho_{t_x}(A) := \int P_{t_x}(x, A)\nu(dx)$ wieder ein Maß, das die Verteilung des Prozesses zum Zeitpunkt t_x angibt. Damit folgt für $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$:

$$\int_B P_t(x, A)\rho_{t_x}(dx) = \mu_Q \left(\{f \in \mathbb{R}^{[0, \infty)} : f(t_x) \in B, f(t_x + t) \in A\} \right)$$

Durch Maß-Differentiation nach x erhalten wir

$$P_t(x, A) = \frac{\mu_Q \left(\{f \in \mathbb{R}^{[0, \infty)} : f(t_x) \in dx, f(t_x + t) \in A\} \right)}{\mu_Q \left(\{f \in \mathbb{R}^{[0, \infty)} : f(t_x) \in dx\} \right)}$$

Falls $T_x = \emptyset$ ist, dann existiert kein Pfad, der in endlicher Zeit x trifft – somit enthält μ_Q auch keine Information über die Verteilung der Zuwächse von x aus. Und die Startverteilung ν erhalten wir offenbar einfach durch

$$\nu(dx) := \mu_Q \left(\{f \in \mathbb{R}^{[0, \infty)} : f(0) \in dx\} \right)$$

□

Bemerkung Ist $(P_t(x, dy))_{t \in \mathbb{R}_+}$ eine Halbgruppe von Kernen auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ und ist $(\mu_{P,x})_{x \in \mathbb{R}}$ die durch $(P(x, dy))$ induzierte Familie von Verteilungen, so können aus dieser Familie die Kerne sofort wieder zurückgewonnen werden durch

$$P_t(x, A) = \mu_{P,x} \left(\{f \in \mathbb{R}^{[0, \infty)} : f(t) \in A\} \right).$$

Da die Kerne $(P_t(x, dy))$ eine Halbgruppe bilden, folgt mit dieser Notation sofort

$$\begin{aligned} & \mu_{P,x} \left(\{f \in \mathbb{R}^{[0, \infty)} : f(s+t) \in A\} \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{[0, \infty)}} \mu_{P,\omega(s)} \left(\{f \in \mathbb{R}^{[0, \infty)} : f(t) \in A\} \right) \mu_{P,x}(d\omega) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mu_{P,y} \left(\{f \in \mathbb{R}^{[0, \infty)} : f(t) \in A\} \right) \mu_{P,x} \left(\{f \in \mathbb{R}^{[0, \infty)} : f(s) \in dy\} \right) \end{aligned}$$

□

3.5 Lévy Prozesse – Definition und Eigenschaften

Definition 43 (Lévy Prozess) Ein zeithomogener Prozess $(Z_t)_{t \geq 0}$ mit Werten in \mathbb{R}^d mit unabhängigen stationären Zuwächsen und Pfaden, die fast sicher rechtsseitig stetig sind und linksseitige Limiten besitzen heiße LÉVY PROZESS.

Diese Definition umfasst offenbar genau die Prozesse, für die wir uns besonders interessieren. An dieser Stelle gehen wir noch nicht weiter auf die Theorie der Lévy Prozesse ein, die genau klärt, wie denn Lévy Prozesse aufgebaut sind. Das zentrale Ergebnis können wir vielmehr mit dieser allgemeinen Definition darstellen. In den nachfolgenden Kapiteln wird dann die Theorie der Lévy Prozesse entwickelt, um die Eigenschaften des zerlegten Prozesses herauszuarbeiten.

Da ein Lévy Prozess nach Definition rechtsseitig stetig ist, und die linksseitigen Limiten existieren, besitzt er höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen, wie das folgende Lemma zeigt. Diese Tatsache impliziert insbesondere, dass das Ereignis, dass ein Lévy Prozess zu einem festen Zeitpunkt springt, ein Nullereignis ist.

Lemma 44 *Sei $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ eine rechtsseitig stetige Funktion mit linken Limiten. Dann besitzt f höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen.*

Beweis Sei $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ rechtsseitig stetig mit linken Limiten. Betrachten wir uns für $n \in \mathbb{N}$ die Menge

$$U_n := \left\{ x \in \mathbb{R}_+ : \left| \lim_{y \nearrow x} f(y) - f(x) \right| \geq \frac{1}{n} \right\}$$

der Stellen von f , an denen f einen Sprung der Größe mindestens $1/n$ macht. Da f rechtsseitig stetig ist, existiert zu $u \in U_n$ ein $\delta > 0$ mit

$$|f(u) - f(x)| < \frac{1}{2n} \quad \text{für alle } x \in (u, u + \delta)$$

Dieses Intervall bezeichnen wir mit $I_{n,u} := (u, u + \delta)$. Dann gilt für $x, y \in I_{n,u}$

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(u)| + |f(u) - f(y)| < \frac{1}{n}$$

Das heißt, in dem Intervall $I_{n,u}$ besitzt f höchstens Sprünge kleiner als $1/n$. Da hingegen in der Menge U_n nur Sprünge enthält, die größer oder gleich $1/n$ sind, bedeutet das nichts anderes, als dass

$$U_n \cap I_{n,u} = \emptyset \quad \text{für alle } u \in U_n$$

Außerdem sind für festes n die Intervalle $I_{n,u}$ paarweise disjunkt; es existiert somit eine eins-zu-eins Beziehung zwischen den Intervallen $I_{n,u}$ und den Sprungstellen u . Da für festes n die Intervalle abzählbar sind, enthält U_n somit auch nur abzählbar viele Punkte. Und

$$U := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$$

ist dann als abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen wiederum abzählbar, und enthält alle Unstetigkeitsstellen. Also besitzt f höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen. ■

Eine wichtige Voraussetzung für die Zerlegung eines Lévy Prozesses ist die Stetigkeit der Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ des Prozesses; denn sonst können wir keine sinnvolle Laplace Transformation durchführen und damit existiert dann auch kein getilteter Prozess. Dieser ist jedoch ein zentraler Baustein der Zerlegung. Also:

Satz 45 *Sei $(\mu_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ die Faltungshalbgruppe eines Lévy Prozesses. Dann ist diese stetig.*

Beweis Sei $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}}$ ein in 0 startender gemäß (μ_t) verteilter Lévy Prozess. Dann ist dieser fast sicher rechtsseitig stetig mit linksseitigen Limiten und besitzt laut Lemma 44 fast sicher höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen. Also ist (Z_t) in einem beliebigen Punkt t_0 fast sicher stetig. Es gilt also

$$\lim_{t \rightarrow t_0} Z_t = Z_{t_0} \quad \text{fast sicher}$$

Da der Prozess in 0 startet, ist für alle $t > 0$ die Verteilung von Z_t gerade μ_t . Und da aus fast sicherer Konvergenz die Verteilungskonvergenz folgt, erhalten wir somit

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mu_t = \mu_{t_0}$$

■

3.6 Lévy Prozesse bedingt darauf, positiv zu bleiben

In diesem Abschnitt werden wir aus gegebenen Übergangskernen $(P_t(x, dy))$ neue Kerne konstruieren, mit denen sich die Verteilung eines Prozesses auf dem Teilraum K beschränken lässt. Insbesondere lässt sich damit die Verteilung eines Prozesses bestimmen, der darauf bedingt ist, dass sein Pfad nur positive Werte annimmt. Der erste Schritt hierzu wird im der folgenden Satz beschrieben:

Satz und Definition 46 Sei $(P_t(x, dy))_{t \in \mathbb{R}_+}$ eine Halbgruppe von Kernen auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ und $(\mathbb{P}_x)_{x \in \mathbb{R}}$ die induzierte Familie von Verteilung auf $\mathbb{R}^{[0, \infty)}$. Dann ist für $K \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ durch die Festsetzung

$$\begin{aligned} P_t^K(x, A) &:= \mathbb{P}_x \left(\left\{ f \in K^{[0; t]} \times \mathbb{R}^{[0; \infty)} : f(t) \in A \right\} \right) \\ &= \mathbb{P}_x \left(\left\{ f \in \mathbb{R}^{[0; \infty)} : f(u) \in K \forall u \in [0, t), f(t) \in A \right\} \right) \\ &= \int_{K^{[0, t]} \times \mathbb{R}^{[0, \infty)}} 1_A(\omega(t)) \mathbb{P}_x(d\omega) \end{aligned}$$

eine Halbgruppe von sub-markoffschen Kernen $(P_t^K(x, dy))_{t \in \mathbb{R}_+}$ definiert.

Beweis Die Gleichheit der drei Zeilen ist offensichtlich. Als einziges ist die Halbgruppeneigenschaft der so definierten Kerne zu beweisen.

Hierfür approximieren wir die Kerne $(P_t^K(x, dy))$ mit Hilfe von Zylindermengen. Es sei $T_t := \{(t_1, \dots, t_n) : 0 < t_1 < \dots < t_n < t, n \in \mathbb{N}\}$ die Menge aller endlichen Zerlegungen des Intervalls $[0, t]$. Für $\tilde{t} = (t_1, \dots, t_n) \in T_t$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und $x \in \mathbb{R}$ sei $P_{\tilde{t}}^{\tilde{t}}(x, A)$ definiert durch

$$P_{\tilde{t}}^{\tilde{t}}(x, A) := \mathbb{P}_x \left(\left\{ f \in \mathbb{R}^{[0; \infty)} : f(t_i) \in K, 1 \leq i \leq n, f(t) \in A \right\} \right)$$

Da dies gerade das Maß einer Zylindermenge ist, können wir dieses auch exakt bestimmen:

$$= \int_K \cdots \int_K \int_A 1_K(x) P_{t-t_n}(x_n, dy) P_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1}, dx_n) \cdots P_{t_1}(x, dx_1)$$

Für $\tilde{t} = (t_1, \dots, t_n) \in T_t$ und $\tilde{s} = (s_1, \dots, s_m) \in T_s$ erhalten wir somit für die Faltung

$$\begin{aligned} (P_{\tilde{s}}^{\tilde{s}} * P_{\tilde{t}}^{\tilde{t}})(x, A) &= \int_{\mathbb{R}} P_{\tilde{s}}^{\tilde{s}}(y, A) P_{\tilde{t}}^{\tilde{t}}(x, dy) \\ &= \int_K \cdots \int_K \int_A 1_K(y) P_{s-s_m}(y_n, dz) P_{s_m-s_{m-1}}(y_{m-1}, dy_m) \cdots P_{s_1}(y, dy_1) \\ &\quad \int_K \cdots \int_K \int_{\mathbb{R}} 1_K(x) P_{t-t_n}(x_n, dy) P_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1}, dx_n) \cdots P_{t_1}(x, dx_1) \\ &= P_{\tilde{s}+\tilde{t}}^{(\tilde{t}_1, \dots, \tilde{t}_n, \tilde{s}_1+t, \dots, \tilde{s}_m+t)}(x, A) \end{aligned}$$

Wenn die Zerlegungen \tilde{s} und \tilde{t} immer feiner werden, konvergieren

$$P_s^{\tilde{s}} \rightarrow P_s^K \quad P_t^{\tilde{t}} \rightarrow P_t^K$$

und natürlich konvergiert auch das Faltungsprodukt

$$P_{s+t}^{(t_1, \dots, t_n, t, s_1+t, \dots, s_m+t)} \rightarrow P_{s+t}^K.$$

Insgesamt erhalten wir also

$$(P_s^K * P_t^K)(x, A) = P_{s+t}^K(x, A)$$

■

Bemerkung Diese Definition der Kerne $(P_t^K(x, dy))_{t \in \mathbb{R}_+}$ stellt eine Alternative zu der sonst üblichen Konstruktion eines Maßes \mathbb{P}^K dar, bei der ein Prozess $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}}$ bei seinem ersten Austritt aus der Menge K ausgelöscht wird, und danach in einem zusätzlichen Punkt $\partial \notin \mathbb{R}$ („Cemetery Point“) verbleibt. Siehe zum Beispiel [Ber96].

Es ist allerdings ein Leichtes, die Kernhalbgruppe $(P_t^K(x, dy))_{t \in \mathbb{R}_+}$ auf $\mathbb{R}^\circ := \mathbb{R} \cup \{\partial\}$ derart zu erweitern, so dass die Halbgruppe wieder markoffsch auf \mathbb{R}° ist, indem wir für alle $x \in \mathbb{R}$ und $t \in \mathbb{R}_+$

$$P_t^K(x, \partial) := 1 - P_t^K(x, \mathbb{R}) \quad \text{und} \quad P_t^K(\partial, \partial) := 1$$

setzen. Damit gilt dann wieder

$$P_t^K(x, \mathbb{R}^\circ) = 1.$$

□

Satz 47 Sei $(P_t(x, dy))_{t \in \mathbb{R}_+}$ eine Kernhalbgruppe eines stochastischen Prozesses mit unabhängigen stationären Zuwächsen, deren Faltungshalbgruppe die Bedingung (A_{FH}) erfüllt. Dann gilt für die mit γ getiltete Halbgruppe $(\tilde{P}_t(x, dy))$ und für $t > 0$ und $K \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$:

$$\tilde{P}_t^K(x, dy) = e^{-\gamma(y-x)} P_t^K(x, dy) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Beweis Der Beweis erfolgt wieder mittels Zylindermengen; wir übernehmen deshalb auch die Notation aus dem Beweis von Satz 46. Damit haben wir zunächst für $\tilde{t} = (t_1, \dots, t_n) \in T_t$ und $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_t^{\tilde{t}}(x, dy) &= \int_K \cdots \int_K 1_K(x) \tilde{P}_{t-t_n}(x_n, dy) \tilde{P}_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1}, dx_n) \cdots \tilde{P}_{t_1}(x, dx_1) \\ &= \int_K \cdots \int_K 1_K(x) e^{-\gamma(y-x_n)} P_{t-t_n}(x_n, dy) \cdots e^{-\gamma(x_1-x)} P_{t_1}(x, dx_1) \\ &= e^{-\gamma(y-x)} \int_K \cdots \int_K 1_K(x) P_{t-t_n}(x_n, dy) \cdots P_{t_1}(x, dx_1) \\ &= e^{-\gamma(y-x)} P_t^{\tilde{t}}(x, dy) \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_t^K(x, dy) &= \inf \left\{ \tilde{P}_t^{\tilde{t}}(x, dy) : \tilde{t} \in T_t \right\} \\
&= \inf \left\{ e^{-\gamma(y-x)} P_t^{\tilde{t}}(x, dy) : \tilde{t} \in T_t \right\} \\
&= e^{-\gamma(y-x)} \inf \left\{ P_t^{\tilde{t}}(x, dy) : \tilde{t} \in T_t \right\} \\
&= e^{-\gamma(y-x)} P_t^K(x, dy)
\end{aligned}$$

■

Bevor nun die Kerne $(Q_t(x, dy))$ eines Prozesses angegeben werden, der darauf bedingt ist, die negative Halbebene nicht zu treffen, benötigen wir eine Hilfsfunktion q , mit denen wir die Kerne $(P_t(x, dy))$ des unbedingten Prozesses transformieren können. Das nachfolgende Lemma definiert diese Funktion q , und gibt uns zusätzlich noch zwei nützliche Eigenschaften dieser Funktion an die Hand.

Lemma 48 *Es sei (Z_t) ein Lévy Prozess mit positivem Drift, und es sei die Funktion $q : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ definiert durch*

$$q(x) := \mathbb{P}_x(Z_t \geq 0 \forall t \geq 0)$$

Dann ist q rechtsseitig stetig auf $(0, \infty)$ und es gilt $q(x) > 0$ für alle $x > 0$.

Beweis 1. q IST RECHTSSEITIG STETIG: Es sei im folgenden (Z_t) ein in 0 startender Lévy Prozess und sei $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge positiver reeller Zahlen mit $\lim x_i =: x$. Zu jedem i sei die Stoppzeit $T_i := \inf\{t > 0 : Z_t < -x_i\}$ definiert, und für x sei $T := \inf\{t > 0 : Z_t < -x\}$. Dann ist die Folge (T_i) der Stoppzeiten monoton fallend und nach unten durch T beschränkt. Also existiert der Grenzwert $T_\infty := \lim T_i$, und es gilt $T_\infty \geq T$. Da der Prozess rechtsseitig stetig ist, folgt $T_\infty = \inf\{t > 0 : Z_t \leq -x\}$, also ist $T \geq T_\infty$, und insgesamt besteht fast sichere Gleichheit.

Nun gilt für alle i offenbar

$$q(x_i) = \mathbb{P}_0(Z_t \geq -x_i \forall t \geq 0) = \mathbb{P}_0(T_i = \infty) = 1 - \mathbb{P}_0(T_i < \infty),$$

und analog gilt $q(x) = 1 - \mathbb{P}_0(T < \infty)$. Außerdem ist $\mathbb{P}_0(T < \infty) = \mathbb{P}_0(T_\infty < \infty)$. Also gilt für die Funktion q :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} q(x_i) = 1 - \lim_{i \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0(T_i < \infty) = 1 - \mathbb{P}_0(T < \infty) = q(x)$$

2. q IST STRIKT POSITIV: Aus der Definition von $q(\cdot)$ folgt sofort $q(x) \geq q(y)$ für alle $x > y > 0$; die Funktion q ist also isoton. Angenommen, es gäbe ein $z > 0$, so dass $q(z) = 0$ ist, dann ist auch $q(x) = 0$ für alle $x < z$.

Betrachten wir einen in 0 startenden Prozess (Z_t) . Dieser wird aufgrund der Annahme $q(z) = 0$ fast sicher die Schranke $-z$ unterschreiten. Dieser Zeitpunkt sei mit T_1 bezeichnet:

$$T_1 := \inf\{t > 0 : Z_t < -z\}$$

Damit ist T_1 eine Stoppzeit, und es ist $\mathbb{P}_0(T_1 < \infty) = 1$. Da der Prozess allerdings unabhängige Zuwächse besitzt, gilt für $i > 1$ und die Stoppzeit

$$T_i := \inf\{t > T_{i-1} : Z_t < Z_{T_{i-1}} - z\}$$

wiederum $\mathbb{P}(T_i < \infty) = 1$. Und durch die Konstruktion gilt $Z_{T_i} \leq -iz$ für alle i , also wird der Prozess (Z_t) jede untere Schranke fast sicher unterschreiten. Dies widerspricht aber dem positiven Drift von (Z_t) . ■

Bemerkung Betrachten wir die Kerne $P_t^{\geq 0}(x, dy) := P_t^{[0, \infty)}(x, dy)$, so gilt für $t > 0$ und $x > 0$ aufgrund der Definition von q offenbar

$$q(x) = \int_{[0, \infty)} q(y) P_t^{\geq 0}(x, dy)$$

Eine Funktion, die eine solche Gleichung erfüllt, wird HARMONISCH genannt. Eine harmonische Funktion einer Kernhalbgruppe ist nicht eindeutig bestimmt; man sieht sofort, dass man aus q durch simple Skalierung mit einem Faktor c beliebige weitere harmonische Funktionen $c \cdot q$ gewinnen kann. □

Für einen reellen Lévy Prozess $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ bezeichne $(\hat{Z}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ einen identisch verteilten Prozess, der darauf bedingt ist, nicht negativ zu werden. Mit Hilfe der harmonischen Funktion q aus Lemma 48 lässt sich nun die Kernhalbgruppe von (\hat{Z}_t) bestimmen:

Satz 49 (Nichtnegativer Prozess) Sei $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ ein reeller Lévy Prozess mit Kernhalbgruppe $(P_t(x, dy))_{t \in \mathbb{R}_+}$. Dann ist die Kernhalbgruppe $(Q_t(x, dy))_{t \in \mathbb{R}_+}$ von (\hat{Z}_t) gegeben durch:

$$Q_t(x, dy) := \frac{q(y)}{q(x)} P_t^{\geq 0}(x, dy) \quad x, y > 0$$

Beweis Da für $x > 0$ nach Lemma 48 die Funktion $q(x) > 0$ ist, sind die Kerne $(Q_t(x, y))$ auch wohldefiniert. Und für die endliche Marginalverteilung zu den Zeiten $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ des Prozesses gilt für $A \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^n)$:

$$\mathbb{P}_{z_0}((Z_{t_1}, \dots, Z_{t_n}) \in A \mid Z_t \geq 0 \forall t \geq 0)$$

Die Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit führt sofort zu

$$= \frac{\mathbb{P}_{z_0}((Z_{t_1}, \dots, Z_{t_n}) \in A, Z_t \geq 0 \forall t \geq 0)}{\mathbb{P}_{z_0}(Z_t \geq 0 \forall t \geq 0)}$$

Es ist $\mathbb{P}_{z_0}(Z_t \geq 0 \forall t \geq 0) = q(z_0)$, also folgt:

$$= \frac{1}{q(z_0)} \int_{(z_1, \dots, z_n) \in A} P_{t_1}^{\geq 0}(z_0, dz_1) \cdots P_{t_n - t_{n-1}}^{\geq 0}(z_{n-1}, dz_n) \cdot q(z_n)$$

Aus der Definition der Kerne $Q(x, dy)$ erhalten wir

$$= \frac{1}{q(z_0)} \int_{(z_1, \dots, z_n) \in A} \frac{q(z_0)}{q(z_1)} Q_{t_1}(z_0, dz_1) \cdots \frac{q(z_{n-1})}{q(z_n)} Q_{t_n - t_{n-1}}(z_{n-1}, dz_n) \cdot q(z_n)$$

Und Kürzen führt schließlich zu

$$= \int_{(z_1, \dots, z_n) \in A} Q_{t_1}(z_0, dz_1) \cdots Q_{t_n - t_{n-1}}(z_{n-1}, dz_n)$$

Also besitzen die endlich-dimensionalen Zylindermengen des bedingten Prozesses die gewünschte Verteilung. Da die endlichen Verteilungen durch die Konstruktion konsistent sind, hat nach dem Satz 41 von Daniell-Kolmogoroff der gesamte Prozess ebenfalls die behauptete Verteilung. ■

Bemerkung Um die Verteilung des bedingten Prozesses (\hat{Z}_t) wie im Satz 49 oben zu bestimmen, gibt es in vielen Fällen wesentlich gehaltvollere Methoden, mit denen sich die Kerne ($Q_t(x, dy)$) exakt bestimmen lassen; wie schon angedeutet ist die von uns gewählte Funktion q nicht die einzige harmonische Funktion der Kernhalbgruppe ($P_t^{\geq 0}(x, dy)$).

Insbesondere für die Brownsche Bewegung haben zuerst Williams in [Wil74] und kurz darauf Pitman in [Pit75] die Verteilung einer bedingten Brownschen Bewegung bestimmt; es handelt sich dabei um einen Bessel Prozess.

Für Lévy Prozesse ohne positive Sprünge (also auch für die Brownsche Bewegung) wird häufig eine SKALIERUNGSFUNKTION W anstelle von q verwendet (Siehe Bertoin in [Ber92] oder in Kapitel VII Abschnitt 2 in [Ber96]). Die Skalierungsfunktion $W : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ist definiert als die eindeutige stetige wachsende Funktion, deren Laplace Transformation die folgende Gestalt besitzt:

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x} W(x) dx = 1/\Psi(\lambda)$$

wobei $\psi(\lambda) := \log \varphi_Z(\lambda)$ der charakteristische Laplace Exponent von (Z_t) ist. Mit dieser Funktion W gilt dann

$$Q_t(x, dy) = \frac{W(y)}{W(x)} P^{\geq 0}(x, dy)$$

Einen ähnlichen Weg gehen Bertoin in [Ber93] und Chaumont in [Cha96] mit der harmonischen Funktion h , definiert durch

$$h(x) := \mathbb{E} \left(\int_0^\infty I(\underline{Z}_t \geq -x) d\underline{L}_t \right)$$

wobei $\underline{Z}_t := \inf\{Z_s : 0 \leq s \leq t\}$ ist und (\underline{L}_t) die Lokalzeit in 0 von (\underline{Z}_t) ist. Die Funktion h erfüllt dann ebenfalls die Gleichung

$$Q_t(x, dy) = \frac{h(y)}{h(x)} P^{\geq 0}(x, dy)$$

□

3.7 Hauptsatz: Zerlegung eines Lévy Prozesses

In diesem ganzen Abschnitt wollen wir endlich einen Lévy Prozess zerlegen. Im zeitkontinuierlichen gestaltet sich dieses Vorhaben als ein ganzes Stück schwieriger als der Beweis des zeitdiskreten Satzes 21. Das Hauptproblem liegt darin, dass bei Lévy Prozessen in vielen Fällen für die Zerlegung relevante Ereignisse Nullereignisse sind. Man denke einfach allein schon an die Wahrscheinlichkeit, dass ein in 0 startender Lévy Prozess nicht negativ wird – dieses wichtige Ereignis kann schon ein Nullereignis sein. Um diese Probleme zu umgehen, werden wir die gewünschte Zerlegung approximieren, und der Hauptsatz 58 stellt dann den Grenzübergang dar.

Definition 50 (Leiterprozess) Für einen Lévy Prozess $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ und $\varepsilon \geq 0$ seien die beiden folgende Prozesse definiert:

$$\begin{aligned} L_t^\varepsilon &:= \inf\{s > t : Z_s < Z_t - \varepsilon\} \\ \underline{Z}_t^\varepsilon &:= \inf\{Z_s : 0 \leq s \leq L_t^\varepsilon\} \end{aligned}$$

mit der Konvention, dass $L_t^\varepsilon = \infty$ und $\underline{Z}_t^\varepsilon = \infty$ ist, falls $Z_s \geq Z_t - \varepsilon$ für alle $s > t$. Der Prozess $(\underline{Z}_t^\varepsilon)$ heißt (ABSTEIGENDER) ε -LEITERPROZESS.

Diese Definition eines Leiterprozesses entspricht nicht der üblichen Definition, vergleiche zum Beispiel [Ber96]. Außerdem besitzt der so definierte Prozess $(\underline{Z}_t^\varepsilon)$ eine unangenehme Eigenschaft: Für einen festen Zeitpunkt t ist $\underline{Z}_t^\varepsilon$ mit den Ereignissen der t -Vergangenheit von (Z_s) nicht messbar, da der ε -Leiterprozess Informationen über die Zukunft enthält.

Bemerkung In dieser Definition stellt der Prozess (L_t^ε) nur ein Hilfsmittel für die Konstruktion dar – wir werden ihn weiter nicht benötigen. Falls $\varepsilon = 0$ ist, dann schreiben wir für den Prozess $(\underline{Z}_t^\varepsilon)$ einfach nur (\underline{Z}_t) , und dieser Prozess heißt dann auch einfach nur (ABSTEIGENDER) LEITERPROZESS. \square

Satz 51 Für alle $\varepsilon \geq 0$ ist der Prozess $(\underline{Z}_t^\varepsilon)$ monoton fallend und rechtsseitig stetig. Es gilt außerdem für alle $t \geq 0$

$$\underline{Z}_t^\varepsilon \leq Z_t - \varepsilon \text{ fast sicher, falls } \underline{Z}_t^\varepsilon < \infty \quad (3.5)$$

Beweis Ein Blick auf die Definition des ε -Leiterprozesses klärt sofort die Monotonie des Prozesses. Da der Lévy Prozess (Z_t) rechtsseitig stetig ist, folgt

$$\lim_{\delta \searrow 0} L_{t+\delta}^\varepsilon = \lim_{\delta \searrow 0} \inf\{s > t + \delta : Z_s < Z_{t+\delta} - \varepsilon\} = L_t^\varepsilon$$

Und wieder folgt aus der rechtsseitigen Stetigkeit von (Z_t) und von (L_t^ε)

$$\lim_{\delta \searrow 0} \underline{Z}_{t+\delta}^\varepsilon = \lim_{\delta \searrow 0} \inf\{Z_s : 0 \leq s \leq L_{t+\delta}^\varepsilon\} = \underline{Z}_t^\varepsilon$$

Also ist der Prozess $(\underline{Z}_t^\varepsilon)$ ebenfalls rechtsseitig stetig. Schließlich folgt aus der rechtsseitigen Stetigkeit von (Z_t) fast sicher $Z_{L_t^\varepsilon} \leq Z_t - \varepsilon$, und daraus folgt per Definition des Leiterprozesses $\underline{Z}_t^\varepsilon \leq Z_{L_t^\varepsilon} \leq Z_t - \varepsilon$ fast sicher. \blacksquare

Für eine Kernhalbgruppe $(P_t(x, dy))$, die die Annahme (A_{FH}) erfüllt, seien für $t > 0$ mit der Notation aus Definition 46 die folgenden Kerne definiert:

$$\begin{aligned} P_t^{\geq z}(x, dy) &:= P_t^{[z, \infty)}(x, dy) = \mathbb{P}_x(Z_t \in dy, Z_s \geq z \forall s \in [0, t)) \\ P_t^{> z}(x, dy) &:= P_t^{(z, \infty)}(x, dy) = \mathbb{P}_x(Z_t \in dy, Z_s > z \forall s \in [0, t)) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Die Kernhalbgruppen $(\tilde{P}_t^{\geq z}(x, dy))_{t \in \mathbb{R}_+}$ bzw. $(\tilde{P}_t^{> z}(x, dy))_{t \in \mathbb{R}_+}$ seien die gemäß Satz 47 getilgeten Kerne. Da die Zuwächse stationär sind, erhalten wir außerdem die Gleichung

$$P_t^{\geq z}(x, dy) = P_t^{\geq 0}(x - z, dy - z) \quad (3.7)$$

Das nun folgende Lemma dient in erster Linie als eine Hilfsrechnung in den nachfolgenden Überlegungen. An mehreren Stellen werden wir auf die Gleichung 3.8 zurück greifen. Eine tiefere und erleuchtendere stochastische Interpretation wird diese Gleichung in dieser Arbeit zumindest nicht erfahren.

Allerdings wird im Beweis des Lemmas deutlich, dass die im ε -Leiterprozess enthaltene Information über die Zukunft des Prozesses (Z_t) für die Gleichung 3.8 durchaus relevant ist – immerhin beinhaltet die rechte Seite der Gleichung mit der Funktion q ebenfalls Informationen über die Zukunft. Damit stellt diese Gleichung in gewisser Weise die zentrale Verbindung zwischen Leiterprozessen und bedingtem Prozess her.

Lemma 52 *Es sei $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ ein Lévy Prozess und $(\tilde{Z}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ ein mit dem Parameter γ getilgeter Prozess. Dann gilt für alle $\varepsilon > 0, z \leq 0$ und $t \geq 0$:*

$$\int_{-z}^{\infty} \gamma e^{-\gamma y} \mathbb{P}(\tilde{Z}_t^\varepsilon \leq -y \mid \tilde{Z}_t = z) dy = e^{\gamma z} q(\varepsilon) \quad (3.8)$$

wobei $q(x)$ wie in Lemma 48 die Wahrscheinlichkeit sei, dass der Prozess (Z_t) bei Start in x auf $[0, \infty)$ nichtnegativ bleibt.

Beweis Es sei $(P_t(x, dy))$ die Kernhalbgruppe von (Z_t) mit denen wir die Bezeichnungen aus Gleichung 3.6 übernehmen. Da der Prozess $(\tilde{Z}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ einen negativen Drift besitzt, folgt für alle $x \in \mathbb{R}, t > 0$ und $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}_x(\tilde{Z}_t^\varepsilon \leq x) = \mathbb{P}_x(\tilde{Z}_s < x - \varepsilon \text{ für ein } s > t) = 1. \quad (3.9)$$

Betrachten wir uns den Prozess $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$, so gilt für alle $\varepsilon > 0$ und $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x(\underline{Z}_0^\varepsilon \leq x) &= \mathbb{P}_x(Z_t < x - \varepsilon \text{ für ein } t \in \mathbb{R}_+) \\ &= 1 - \mathbb{P}_x(Z_t \geq x - \varepsilon \text{ für alle } t \in \mathbb{R}_+) \\ &= 1 - \mathbb{P}_\varepsilon(Z_t \geq 0 \text{ für alle } t \in \mathbb{R}_+) \\ &= 1 - q(\varepsilon). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Und für $x \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ und $z < x - \varepsilon$ gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x(\tilde{Z}_0^\varepsilon \in dz) &= \mathbb{P}_x(\exists t > 0 : \tilde{Z}_s \geq x - \varepsilon \forall s < t \text{ und } \tilde{Z}_t \in dz) \\ &= \int_0^\infty \tilde{P}_t^{\geq x - \varepsilon}(x, dz) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\gamma(z-x)} P_t^{\geq x - \varepsilon}(x, dz) dt \\ &= e^{-\gamma(z-x)} \mathbb{P}_x(\underline{Z}_0^\varepsilon \in dz) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Mit diesen drei Vorbemerkungen können wir uns nun der eigentlichen Behauptung dieses Lemmas widmen:

$$\begin{aligned} \int_{-z}^{\infty} \gamma e^{-\gamma y} \mathbb{P}(\tilde{Z}_t^\varepsilon \leq -y \mid \tilde{Z}_t = z) dy &= \int_{-z}^{\infty} \gamma e^{-\gamma y} \mathbb{P}_z(\tilde{Z}_0^\varepsilon \leq -y) dy \\ &= \int_{-z}^{\infty} \int_{-\infty}^{-y} \gamma e^{-\gamma y} \mathbb{P}_z(\tilde{Z}_0^\varepsilon \in dh) dy \end{aligned}$$

Fubini erlaubt es, die Integrale geschickt zu vertauschen:

$$= \int_{-\infty}^z \int_{-z}^{-h} \gamma e^{-\gamma y} dy \mathbb{P}_z(\tilde{Z}_0^\varepsilon \in dh)$$

Das innere Integral können wir nun ausrechnen; mit Hilfe von $\int_{-z}^{-h} \gamma e^{-\gamma y} dy = e^{\gamma z} - e^{\gamma h}$ folgt

$$= e^{\gamma z} \int_{-\infty}^z (1 - e^{\gamma(h-z)}) \mathbb{P}_z(\tilde{Z}_0^\varepsilon \in dh)$$

Aus Gleichung 3.11 folgt dann

$$\begin{aligned} &= e^{\gamma z} \left(\int_{-\infty}^z \mathbb{P}_z(\tilde{Z}_0^\varepsilon \in dh) - \int_{-\infty}^z \mathbb{P}_z(\tilde{Z}_0^\varepsilon \in dh) \right) \\ &= e^{\gamma z} \left(\mathbb{P}_z(\tilde{Z}_0^\varepsilon \leq z) - \mathbb{P}_z(\tilde{Z}_0^\varepsilon \leq z) \right) \end{aligned}$$

Und die Gleichungen 3.9 und 3.10 führen schließlich zu

$$= e^{\gamma z} q(\varepsilon)$$

■

Für den Weitergang der Zerlegung seien in den folgenden Lemmata $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ ein Lévy Prozess, der die Annahme (A_{FH}) erfüllt, und es sei $(\tilde{Z}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ ein mit dem Parameter γ getilteter Prozess. Die Zufallsvariable $M := \inf_{s \geq 0} Z_s$ sei das globale Infimum von (Z_t) . Mit dieser Notation sei für $\varepsilon > 0$ und $t > 0$ die folgende zufällige Menge definiert:

$$\mathcal{H}^\varepsilon := \{t > 0 : Z_s \geq Z_t - \varepsilon \forall s < t \text{ und } Z_t \geq M \text{ und } Z_t \leq M + \varepsilon\}$$

Und für den getilteten Prozess (\tilde{Z}_t) , seinen ε -Leiterprozess $(\tilde{Z}_t^\varepsilon)_{t \in \mathbb{R}_+}$ und eine exponentiell zum Parameter γ verteilte Zufallsvariable Y sei für $\varepsilon > 0$ und $t > 0$ folgende zufällige Menge definiert:

$$\tilde{\mathcal{H}}^\varepsilon := \{t > 0 : \tilde{Z}_s \geq \tilde{Z}_t - \varepsilon \forall s < t \text{ und } \tilde{Z}_t \geq -Y \text{ und } \tilde{Z}_t^\varepsilon \leq -Y\}$$

Wie der Buchstabe ε schon suggeriert, handelt es sich bei diesen Mengen um Approximationen. Da beide Mengensysteme für $\varepsilon \rightarrow 0$ eine bezüglich Inklusion absteigende Folge bilden, lässt sich der Grenzwert der Mengen intuitiv erraten:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &:= \bigcap_{\varepsilon \searrow 0} \mathcal{H}^\varepsilon = \{t > 0 : Z_s \geq Z_t \forall s < t \text{ und } \min(Z_t, Z_{t-}) = M\} \\ \tilde{\mathcal{H}} &:= \bigcap_{\varepsilon \searrow 0} \tilde{\mathcal{H}}^\varepsilon = \{t > 0 : \tilde{Z}_s \geq \tilde{Z}_t \forall s < t \text{ und } \tilde{Z}_t \geq -Y \text{ und } \tilde{Z}_t \leq -Y\} \end{aligned}$$

Dabei handelt es sich bei der ersten Menge um die Zeitpunkte, zu denen der Prozess (Z_t) sein Infimum annimmt, und die zweite Menge beinhaltet alle Zeitpunkte, in denen gerade ein Sprung über die Schranke $-Y$ stattfindet. Allerdings sind Ereignisse der Art $\{t \in \mathcal{H}\}$ oder $\{t \in \tilde{\mathcal{H}}\}$ im Allgemeinen Nullereignisse.

Der Weg zu der Zerlegung führt deshalb über derartige approximative Mengen, um in den Rechnungen mit Verteilungen Nullereignisse sicher zu umschiffen, wie das Lemma 54 zeigen wird. Mit diesem Trick können wir sorglos auf elementare Art und Weise bedingte Verteilungen berechnen, ohne auf das Problem zu stoßen, dass die Bedingung ein Nullereignis ist. Erst im Hauptsatz selber wird ein Grenzübergang hin zu der gewünschten Zerlegung stattfinden.

Lemma 53 *Für alle $\varepsilon > 0$ wird fast sicher das Infimum von \mathcal{H}^ε bzw. von $\tilde{\mathcal{H}}^\varepsilon$ in der jeweiligen Menge selbst angenommen.*

Beweis Sei $t_0 := \inf \mathcal{H}^\varepsilon$. Dann existiert eine monoton fallende Folge $(t_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in \mathcal{H}^ε , die gegen t_0 konvergiert. Da der Prozess (Z_t) rechtsseitig stetig ist, folgt

$$\lim_{i \rightarrow \infty} Z_{t_i} = Z_{t_0}.$$

Außerdem ist per Definition $M \leq Z_{t_i} \leq M + \varepsilon$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Da die Menge $[M, M + \varepsilon]$ in \mathbb{R} kompakt ist, konvergiert die Folge (Z_{t_i}) in diesem Intervall; es gilt also $M \leq Z_{t_0} \leq M + \varepsilon$. Außerdem ist $Z_{t_i} \leq Z_s + \varepsilon$ für alle $s < t_i$. Da $t \leq t_i$ für alle i ist, gilt deshalb insbesondere

$$Z_{t_i} \in K := \bigcap_{s \leq t} [M, Z_s + \varepsilon] \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

Damit ist K nicht leer, und zusätzlich kompakt. Also konvergiert die Folge (Z_{t_i}) in K , d.h. $Z_{t_0} \in K$. Damit haben wir nun alles zusammen: Es ist $M \leq Z_{t_0} \leq M + \varepsilon$ und $Z_{t_0} \leq Z_s + \varepsilon$ für alle $s < t_0$. Also ist $t_0 \in \mathcal{H}^\varepsilon$. ■

Lemma 54 *Für alle $\varepsilon > 0$ und $t > 0$ besitzen die Ereignisse $\{t \in \mathcal{H}^\varepsilon\}$ und $\{t \in \tilde{\mathcal{H}}^\varepsilon\}$ eine positive Wahrscheinlichkeit.*

Beweis

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_0(t \in \mathcal{H}^\varepsilon) &= \mathbb{P}_0(Z_s \geq Z_t - \varepsilon \forall s < t \text{ und } Z_t \geq M \geq Z_t - \varepsilon) \\ &= \int_{-\infty}^{\varepsilon} P_t^{\geq z - \varepsilon}(0, dz) \mathbb{P}_z(z \geq M > z - \varepsilon) \\ &= q(\varepsilon) \int_{-\infty}^{\varepsilon} P_t^{\geq z - \varepsilon}(0, dz) \end{aligned}$$

Beachten wir, dass das Ereignis $\{Z_t \in dz \text{ und } Z_s \geq Z_t - \varepsilon \forall s < t\}$ die Wahrscheinlichkeit $P_t^{\geq z - \varepsilon}(0, dz)$ besitzt, dann beschreibt mit dieser Interpretation das Integral in obiger Gleichungskette gerade das Ereignis $\{Z_s \geq Z_t - \varepsilon \forall s < t\}$. Da der Prozess einen positiven Drift besitzt, hat dieses Ereignis auch eine strikt positive Wahrscheinlichkeit. Und nach Lemma 48 ist $q(\varepsilon) > 0$. Also besitzt das Produkt insgesamt ebenfalls eine positive Wahrscheinlichkeit, was zu zeigen war. Mit Hilfe des kommenden Lemmas 55 folgt auch die Aussage für das Ereignis $\{t \in \tilde{\mathcal{H}}^\varepsilon\}$. ■

Lemma 55 Für alle $\varepsilon > 0$ besitzen die Mengen \mathcal{H}^ε und $\tilde{\mathcal{H}}^\varepsilon$ jeweils die gleiche Verteilung auf $\mathfrak{P}(\mathbb{R})$.

Beweis Den Mengen \mathcal{H}^ε und $\tilde{\mathcal{H}}^\varepsilon$ kann durch die Festsetzung

$$H_t^\varepsilon := I(t \in \mathcal{H}^\varepsilon) \quad \text{und} \quad \tilde{H}_t^\varepsilon := I(t \in \tilde{\mathcal{H}}^\varepsilon)$$

jeweils ein 0, 1-wertiger stochastischer Prozess zugeordnet werden. Da diese Zuordnung bijektiv ist, genügt es zu zeigen, dass für alle $\varepsilon > 0$ jeweils die Verteilungen der Prozesse $(H_t^\varepsilon)_{t \in \mathbb{R}_+}$ und $(\tilde{H}_t^\varepsilon)_{t \in \mathbb{R}_+}$ übereinstimmen. Und hierfür genügt laut Folgerung 42 wiederum nur die endlichdimensionalen Marginalverteilungen der Prozesse zu betrachten.

Sei also $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ und $a = (a_1, \dots, a_n) \in \{0, 1\}^n$. Da die Prozesse 0, 1-wertig sind, können wir ohne Einschränkung $a_i = 1$ für alle i fordern. Denn ist $a_k = 0$ für ein k , so gilt

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_0(H_{t_1}^\varepsilon = a_1, \dots, H_{t_{k-1}}^\varepsilon = a_{k-1}, H_{t_k}^\varepsilon = 0, H_{t_{k+1}}^\varepsilon = a_{k+1}, \dots, H_{t_n}^\varepsilon = a_n) \\ &= \mathbb{P}_0(H_{t_1}^\varepsilon = a_1, \dots, H_{t_{k-1}}^\varepsilon = a_{k-1}, H_{t_{k+1}}^\varepsilon = a_{k+1}, \dots, H_{t_n}^\varepsilon = a_n) \\ &\quad - \mathbb{P}_0(H_{t_1}^\varepsilon = a_1, \dots, H_{t_{k-1}}^\varepsilon = a_{k-1}, H_{t_k}^\varepsilon = 1, H_{t_{k+1}}^\varepsilon = a_{k+1}, \dots, H_{t_n}^\varepsilon = a_n) \end{aligned}$$

Rekursiv können somit alle Stellen k mit $a_k = 0$ eliminiert werden. Der gleiche Trick funktioniert natürlich auch bei $(\tilde{H}_t^\varepsilon)$. Betrachten wir uns nun die Marginalverteilung von $(\tilde{H}_t^\varepsilon)$:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_0(\tilde{H}_{t_1}^\varepsilon = 1, \dots, \tilde{H}_{t_n}^\varepsilon = 1) \\ &= \mathbb{P}_0(\tilde{Z}_{s_i} \geq \tilde{Z}_{t_i} - \varepsilon \forall s_i \in [t_{i-1}, t_i] \forall i = 1, \dots, n \text{ und } \tilde{Z}_{t_n} \geq -Y \text{ und } \tilde{Z}_{t_n}^\varepsilon \leq -Y) \\ &= \int_{-\infty}^\varepsilon \tilde{P}_{t_1}^{\geq z_1 - \varepsilon}(0, dz_1) \cdots \int_{-\infty}^{z_{n-1}} \tilde{P}_{t_n - t_{n-1}}^{\geq z_n - \varepsilon}(z_{n-1}, dz_n) \int_{-z_n}^\infty \gamma e^{-\gamma y} \mathbb{P}(\tilde{Z}_{t_n}^\varepsilon \leq -y \mid \tilde{Z}_{t_n} = z_n) dy \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Gleichung 3.8 aus Lemma 52 folgt

$$= \int_{-\infty}^\varepsilon \tilde{P}_{t_1}^{\geq z_1 - \varepsilon}(0, dz_1) \cdots \int_{-\infty}^{z_{n-1}} \tilde{P}_{t_n - t_{n-1}}^{\geq z_n - \varepsilon}(z_{n-1}, dz_n) e^{\gamma z_n} q(\varepsilon)$$

Und da nach Satz 47 die Kerne $(\tilde{P}_t^{\geq y}(x, dy))$ zu den Kernen $(P_t^{\geq y}(x, dy))$ getiltet sind, folgt schließlich

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^\varepsilon P_{t_1}^{\geq z_1 - \varepsilon}(0, dz_1) \cdots \int_{-\infty}^{z_{n-1}} P_{t_n - t_{n-1}}^{\geq z_n - \varepsilon}(z_{n-1}, dz_n) q(\varepsilon) \\ &= \mathbb{P}_0(Z_{s_i} \geq Z_{t_i} - \varepsilon \forall s_i \in [t_{i-1}, t_i] \forall i = 1, \dots, n \text{ und } M \leq Z_{t_n} \text{ und } Z_{t_n} \leq M + \varepsilon) \\ &= \mathbb{P}_0(H_{t_1}^\varepsilon = 1, \dots, H_{t_n}^\varepsilon = 1) \end{aligned}$$

Damit stimmen die Verteilungen der Prozesse auf den Zylindermengen überein; aus der Folgerung 42 folgt damit, dass beide Verteilungen identisch sind. \blacksquare

Lemma 56 Für alle $\varepsilon > 0$ und $t > 0$ besitzen die bedingten Prozesse $((Z_s)_{0 \leq s \leq t} \mid t \in \mathcal{H}^\varepsilon)$ und $((\tilde{Z}_s)_{0 \leq s \leq t} \mid t \in \tilde{\mathcal{H}}^\varepsilon)$ jeweils die gleiche Verteilung.

Beweis Es sei $q(x)$ wie in Lemma 48 die Wahrscheinlichkeit, dass (Z_t) bei Start in x auf $[0, \infty)$ nichtnegativ bleibt. Betrachten wir uns nun für $\varepsilon > 0$ und festes $t > 0$ die bedingte

Verteilung von $((Z_s)_{0 \leq s \leq t} | t \in \mathcal{H}^\varepsilon)$ an den Stellen $0 < t_1 < \dots < t_n < t$. Da nach Lemma 54 die Bedingung $\{t \in \mathcal{H}^\varepsilon\}$ eine positive Wahrscheinlichkeit besitzt, kann die bedingte Verteilung ganz einfach elementar berechnet werden. Wir erhalten so für $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+1})$

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_0((Z_{t_1}, \dots, Z_{t_n}, Z_t) \in A | t \in \mathcal{H}^\varepsilon) \\ &= \frac{\mathbb{P}_0((Z_{t_1}, \dots, Z_{t_n}, Z_t) \in A, t \in \mathcal{H}^\varepsilon)}{\mathbb{P}_0(t \in \mathcal{H}^\varepsilon)} \\ &= \frac{\int_A 1_{(-\infty, \varepsilon)}(z) q(\varepsilon) P_{t-t_n}^{\geq z-\varepsilon}(x_n, dz) P_{t_n-t_{n-1}}^{\geq z-\varepsilon}(x_{n-1}, dx_n) \dots P_{t_1}^{\geq z-\varepsilon}(0, dx_1)}{\int_{-\infty}^{\varepsilon} q(\varepsilon) P_t^{\geq z-\varepsilon}(0, dz)} \end{aligned}$$

Kürzen von $q(\varepsilon)$ führt dann zu

$$= \frac{\int_A 1_{(-\infty, \varepsilon)}(z) P_{t-t_n}^{\geq z-\varepsilon}(x_n, dz) P_{t_n-t_{n-1}}^{\geq z-\varepsilon}(x_{n-1}, dx_n) \dots P_{t_1}^{\geq z-\varepsilon}(0, dx_1)}{\int_{-\infty}^{\varepsilon} P_t^{\geq z-\varepsilon}(0, dz)} \quad (3.12)$$

Betrachten wir uns nun die Verteilung des getilteten Prozesses. Für die Marginalverteilung von $((\tilde{Z}_t)_{0 \leq t \leq T^\varepsilon} | t \in \tilde{\mathcal{H}}^\varepsilon)$ gilt analog

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_0((\tilde{Z}_{t_1}, \dots, \tilde{Z}_{t_n}, \tilde{Z}_t) \in A | t \in \tilde{\mathcal{H}}^\varepsilon) \\ &= \frac{\mathbb{P}_0((\tilde{Z}_{t_1}, \dots, \tilde{Z}_{t_n}, \tilde{Z}_t) \in A, t \in \tilde{\mathcal{H}}^\varepsilon)}{\mathbb{P}_0(t \in \tilde{\mathcal{H}}^\varepsilon)} \\ &= \frac{\int_A 1_{(-\infty, \varepsilon)}(z) \tilde{P}_{t-t_n}^{\geq z-\varepsilon}(x_n, dz) \dots \tilde{P}_{t_1}^{\geq z-\varepsilon}(0, dx_1) \int_{-z}^{\infty} \gamma e^{-\gamma y} \mathbb{P}(\underline{\tilde{Z}}_t^\varepsilon \leq -y | \tilde{Z}_t = z) dy}{\int_{-\infty}^{\varepsilon} \tilde{P}_t^{\geq z-\varepsilon}(0, dz) \int_{-z}^{\infty} \gamma e^{-\gamma y} \mathbb{P}(\underline{\tilde{Z}}_t^\varepsilon \leq -y | \tilde{Z}_t = z) dy} \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Gleichung 3.8 aus Lemma 52 folgt

$$= \frac{\int_A 1_{(-\infty, \varepsilon)}(z) e^{\gamma z} q(\varepsilon) \tilde{P}_{t-t_n}^{\geq z-\varepsilon}(x_n, dz) \dots \tilde{P}_{t_1}^{\geq z-\varepsilon}(0, dx_1)}{\int_{-\infty}^{\varepsilon} e^{\gamma z} q(\varepsilon) \tilde{P}_t^{\geq z-\varepsilon}(0, dz)}$$

Durch Kürzen von $q(\varepsilon)$ und mit Satz 47 folgt schließlich

$$= \frac{\int_A 1_{(-\infty, \varepsilon)}(z) P_{t-t_n}^{\geq z-\varepsilon}(x_n, dz) P_{t_n-t_{n-1}}^{\geq z-\varepsilon}(x_{n-1}, dx_n) \dots P_{t_1}^{\geq z-\varepsilon}(0, dx_1) dt}{\int_{-\infty}^{\varepsilon} P_t^{\geq z-\varepsilon}(0, dz)}$$

Und dies ist gerade die rechte Seite von Gleichung 3.12. Damit stimmen die Verteilungen der bedingten Prozesse auf den Zylindermengen überein; aus dem Satz 41 folgt damit, dass beide Verteilungen identisch sind. \blacksquare

Lemma 57 Für $\varepsilon > 0$ sei $(\hat{Z}_t^\varepsilon)_{t \in \mathbb{R}_+}$ ein in ε startender Prozess, dessen Zuwächse gemäß der Halbgruppe $(Q_t(x, dy))$ verteilt sind. Dann besitzen für alle $t > 0$ jeweils die Prozesse $((Z_{s+t} - Z_t)_{s \in \mathbb{R}_+} | t \in \mathcal{H}^\varepsilon)$ und $(\hat{Z}_s^\varepsilon - \varepsilon)_{s \in \mathbb{R}_+}$ die gleiche Verteilung.

Beweis Betrachten wir zu den Zeitpunkte $0 < t < t + t_1 < \dots < t + t_n$ und $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ die Marginalverteilung von $((Z_{s+t} - Z_t)_{s \in \mathbb{R}_+} | t \in \mathcal{H}^\varepsilon)$. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_0((Z_{t_1+t} - Z_t, \dots, Z_{t_n+t} - Z_t) \in A | t \in \mathcal{H}^\varepsilon) \\ &= \frac{\mathbb{P}_0((Z_{t_1+t} - Z_t, \dots, Z_{t_n+t} - Z_t) \in A, t \in \mathcal{H}^\varepsilon)}{\mathbb{P}_0(t \in \mathcal{H}^\varepsilon)} \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{\varepsilon} P_t^{\geq x-\varepsilon}(0, dx) \int_{A+(x, \dots, x)} q(z_n - x + \varepsilon) P_{t_n-t_{n-1}}^{\geq x-\varepsilon}(z_{n-1}, dz_n) \dots P_{t_1}^{\geq x-\varepsilon}(x, dz_1)}{\int_{-\infty}^{\varepsilon} q(\varepsilon) P_t^{\geq x-\varepsilon}(0, dx)} \end{aligned}$$

Da die Zuwächse eines Lévy Prozesses stationär sind, können wir mit Hilfe der Gleichung 3.7 den Prozess nach dem Infimum vom Startpunkt x in den Startpunkt ε verschieben. So erhalten wir

$$= \frac{\int_{-\infty}^{\varepsilon} P_t^{\geq x-\varepsilon}(0, dx) \int_{A+(\varepsilon, \dots, \varepsilon)} q(z_n) P_{t_n-t_{n-1}}^{\geq 0}(z_{n-1}, dz_n) \dots P_{t_1}^{\geq 0}(\varepsilon, dz_1)}{\int_{-\infty}^{\varepsilon} q(\varepsilon) P_t^{\geq x-\varepsilon}(0, dx)}$$

Da das zweite Integral im Zähler unabhängig von den Parametern des ersten ist, kann bis auf $q(\varepsilon)$ der gesamte Nenner gekürzt werden.

$$= \int_{A+(\varepsilon, \dots, \varepsilon)} \frac{q(z_n)}{q(\varepsilon)} P_{t_n-t_{n-1}}^{\geq 0}(z_{n-1}, dz_n) \dots P_{t_1}^{\geq 0}(\varepsilon, dz_1)$$

Und die Definition der Kerne in Satz 49 liefert:

$$\begin{aligned} &= \int_{A+(\varepsilon, \dots, \varepsilon)} Q_{t_n-t_{n-1}}(z_{n-1}, dz_n) \dots Q_{t_1}(\varepsilon, dz_1) \\ &= \mathbb{P}_\varepsilon((\hat{Z}_{t_1}^\varepsilon, \dots, \hat{Z}_{t_n}^\varepsilon) \in A + (\varepsilon, \dots, \varepsilon)) \\ &= \mathbb{P}_\varepsilon((\hat{Z}_{t_1}^\varepsilon - \varepsilon, \dots, \hat{Z}_{t_n}^\varepsilon - \varepsilon) \in A) \end{aligned}$$

Damit stimmen die Verteilungen der Prozesse auf den Zylindermengen überein; aus der Folgerung 42 folgt damit, dass beide Verteilungen identisch sind. \blacksquare

An dieser Stelle müssen wir die einzelnen Bausteine nur noch zusammen zu setzen, um die Zerlegung eines Lévy Prozesses zu erhalten. Der größte Teil der Arbeit wurde schon in den vorangegangenen Lemmata erbracht. Der Vollständigkeit halber sind in der Formulierung des Hauptsatzes noch einmal alle Bedingungen und Hilfsprozesse aufgeführt:

Hauptsatz 58 (Zerlegung eines Lévy Prozesses) Sei $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ ein in 0 startender Lévy Prozess, der die Bedingung (A_{FH}) erfüllt, und es seien die Zufallsvariablen definiert:

$$\begin{aligned} M &:= \inf\{Z_t : t \in \mathbb{R}_+\} \\ \tau &:= \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : Z_t \leq M \text{ oder } Z_{t-} \leq M\} \end{aligned}$$

Für einen zu (Z_t) mit dem Parameter γ getilteten Prozess $(\tilde{Z}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ mit dem absteigenden Leiterprozess (\tilde{Z}_t) und eine unabhängige zum Parameter γ exponentiell verteilte Zufallsvariable Y sei folgende Zufallsvariablen definiert:

$$\tilde{T} := \inf\{t \geq 0 : \tilde{Z}_t \leq -Y\}.$$

Sei $(\hat{Z}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ ein unabhängiger, gemäß $(Q_t(x, dy))_{t \in \mathbb{R}_+}$ verteilter in 0 startender Prozess, und sei $(Z'_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ definiert durch

$$Z'_t := \begin{cases} \tilde{Z}_t & \text{für } t < \tilde{T} \\ \hat{Z}_{t-\tilde{T}} + \tilde{Z}_{\tilde{T}} & \text{für } t \geq \tilde{T} \end{cases}.$$

Dann besitzen $((Z_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, \tau)$ und $((Z'_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, \tilde{T})$ die gleiche Verteilung.

Beweis Nach Lemma 56 sind für alle $\varepsilon > 0$ und $t > 0$ die bedingten Prozesse $((Z_s)_{0 \leq s \leq t} | t \in \mathcal{H}^\varepsilon)$ und $((\tilde{Z}_s)_{0 \leq s \leq t} | t \in \tilde{\mathcal{H}}^\varepsilon)$ jeweils identisch verteilt, und nach Lemma 55 sind die Mengen \mathcal{H}^ε und $\tilde{\mathcal{H}}^\varepsilon$ selbst ebenfalls identisch verteilt. Damit gilt auch für alle $t > 0$

$$((Z_s)_{0 \leq s \leq t}, t \in \mathcal{H}^\varepsilon) \sim ((\tilde{Z}_s)_{0 \leq s \leq t}, t \in \tilde{\mathcal{H}}^\varepsilon)$$

Insbesondere gilt dann auch

$$((Z_s)_{0 \leq s \leq \inf \mathcal{H}^\varepsilon}, \mathcal{H}^\varepsilon) \sim ((\tilde{Z}_s)_{0 \leq s \leq \inf \tilde{\mathcal{H}}^\varepsilon}, \tilde{\mathcal{H}}^\varepsilon) \quad (3.13)$$

Es seien zusätzlich die Zufallsvariablen $T^\varepsilon := \inf \mathcal{H}^\varepsilon$ und $\tilde{T}^\varepsilon := \inf \tilde{\mathcal{H}}^\varepsilon$ definiert. Diese sind wegen Lemma 55 ebenfalls identisch verteilt. Zusammen mit der Gleichung 3.13 folgt

$$((Z_s)_{0 \leq s \leq T^\varepsilon}, T^\varepsilon) \sim ((\tilde{Z}_s)_{0 \leq s \leq \tilde{T}^\varepsilon}, \tilde{T}^\varepsilon)$$

Da nach Lemma 53 fast sicher $T^\varepsilon \in \mathcal{H}^\varepsilon$ und $\tilde{T}^\varepsilon \in \tilde{\mathcal{H}}^\varepsilon$ sind, erweitert Lemma 57 die obige Gleichung um den Prozess $(\hat{Z}_t^\varepsilon - \varepsilon)_{t \geq 0}$, der gleichverteilt ist mit dem Prozess $(Z_{t+T^\varepsilon} - Z_{T^\varepsilon})_{t \geq 0}$, so dass wir insgesamt erhalten

$$((Z_t)_{0 \leq t \leq T^\varepsilon}, (Z_{t+T^\varepsilon} - Z_{T^\varepsilon})_{t \geq 0}, T^\varepsilon) \sim ((\tilde{Z}_t)_{0 \leq t \leq \tilde{T}^\varepsilon}, (\hat{Z}_t^\varepsilon - \varepsilon)_{t \geq 0}, \tilde{T}^\varepsilon)$$

Damit lässt sich nun für $\varepsilon > 0$ ein Prozess $(Z_t^{\varepsilon})_{t \in \mathbb{R}}$ wie folgt konstruieren:

$$Z_t^{\varepsilon} := \begin{cases} \tilde{Z}_t & \text{für } t < \tilde{T}^\varepsilon \\ \hat{Z}_{t-\tilde{T}^\varepsilon}^\varepsilon + \tilde{Z}_{\tilde{T}^\varepsilon} - \varepsilon & \text{für } t \geq \tilde{T}^\varepsilon \end{cases}.$$

Und es gilt dann offenbar für alle $\varepsilon > 0$

$$((Z_t^{\varepsilon})_{t \in \mathbb{R}_+}, \tilde{T}^\varepsilon) \sim ((Z_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, T^\varepsilon) \quad (3.14)$$

Es genügt nun die drei folgenden Konvergenzaussagen zu beweisen.

$$\begin{aligned} (\hat{Z}_t^\varepsilon - \varepsilon) &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} (\hat{Z}_t) \text{ in Verteilung} \\ T^\varepsilon &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \tau \text{ in Verteilung} \\ \tilde{T}^\varepsilon &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{T} \text{ in Verteilung} \end{aligned}$$

Denn diese implizieren in dem folgenden Diagramm die beiden Konvergenzpfleile, und es folgt schließlich die Verteilungsgleichheit \star , die die Aussage des Satzes darstellt.

$$\begin{array}{ccc} ((Z'_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, \tilde{T}^\varepsilon) & \xrightarrow[\text{in Verteilung}]{\varepsilon \rightarrow 0} & ((Z'_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, \tilde{T}) \\ \left. \vphantom{((Z'_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, \tilde{T}^\varepsilon)} \right\} & & \left. \vphantom{((Z'_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, \tilde{T})} \right\} \star \\ ((Z_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, T^\varepsilon) & \xrightarrow[\text{in Verteilung}]{\varepsilon \rightarrow 0} & ((Z_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, T) \end{array}$$

1. KONVERGENZ VON $(\hat{Z}_t^\varepsilon - \varepsilon)$: Es genügt hier die Konvergenz der Kernhalbgruppen zu zeigen. Die Kernhalbgruppe des Prozesses (\hat{Z}_t) ist gegeben durch $(Q_t(x, dy))$, und die Kernhalbgruppe des Prozesses $(\hat{Z}_t^\varepsilon - \varepsilon)$ ist durch die Konstruktion gegeben durch $(Q_t(x + \varepsilon, dy + \varepsilon))$. Damit folgt dann für alle stetigen beschränkten Funktionen f

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} f(y - \varepsilon) Q_t(x + \varepsilon, dy) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} f(y - \varepsilon) \frac{q(y)}{q(x + \varepsilon)} P_t(x + \varepsilon, dy)$$

Da die Kerne $(P_t(x, dy))$ stationär sind, gilt $P_t(x + \varepsilon, dy) = P_t(x, dy - \varepsilon)$, und es folgt

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} f(y) \frac{q(y)}{q(x + \varepsilon)} P_t(x, dy)$$

Da die Funktion $q(\cdot)$ rechtsseitig stetig ist, folgt

$$= \int_{\mathbb{R}} f(y) Q_t(x, dy).$$

2. KONVERGENZ VON T^ε : Für $\varepsilon \rightarrow 0$ bilden die Mengen \mathcal{H}^ε eine bezüglich Inklusion absteigende Folge. Dann ist der Grenzwert der Mengen fast sicher gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &:= \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{H}^\varepsilon \\ &= \bigcap_{\varepsilon > 0} \{t > 0 : Z_s \geq Z_t - \varepsilon \forall s < t \text{ und } Z_t \geq M \text{ und } Z_t \leq M + \varepsilon\} \end{aligned}$$

Da die Pfade von (Z_t) fast sicher nur rechtsseitig stetig sind, die linken Limiten jedoch existieren, folgt weiter

$$= \{t > 0 : Z_s \geq M \forall s < t \text{ und } \min(Z_t, Z_{t-}) = M\}$$

Für die zufälligen Zeiten T^ε bedeutet dies

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T^\varepsilon = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{H}^\varepsilon$$

Da die Mengen \mathcal{H}^ε bezüglich Inklusion absteigend sind, dürfen \lim und \inf vertauscht werden.

$$\begin{aligned} &= \inf\{t > 0 : Z_s \geq M \forall s < t \text{ und } \min(Z_t, Z_{t-}) = M\} \\ &= \inf\{t > 0 : \min(Z_t, Z_{t-}) = M\} \end{aligned}$$

Mit der Konvention $\inf \emptyset = \infty$ erhalten wir schließlich

$$= \tau \quad \text{fast sicher}$$

3. KONVERGENZ VON \tilde{T}^ε : Die Konvergenz von \tilde{T}^ε ist vollkommen analog zu beweisen wie die von T^ε . Denn für $\varepsilon \rightarrow 0$ bilden die Mengen $\tilde{\mathcal{H}}^\varepsilon$ ebenfalls eine bezüglich Inklusion absteigende Folge. Dann ist der Grenzwert der Mengen fast sicher gegeben durch

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}} &:= \bigcap_{\varepsilon > 0} \tilde{\mathcal{H}}^\varepsilon \\ &= \bigcap_{\varepsilon > 0} \{t > 0 : \tilde{Z}_s \geq \tilde{Z}_t - \varepsilon \forall s < t \text{ und } \tilde{Z}_t \geq -Y \text{ und } \underline{\tilde{Z}}_t^\varepsilon \leq -Y\} \end{aligned}$$

Aus der Definition des absteigenden ε -Leiterprozesses folgt

$$= \{t > 0 : \tilde{Z}_s \geq \tilde{Z}_t \forall s < t \text{ und } \tilde{Z}_t \geq -Y \text{ und } \underline{\tilde{Z}}_t \leq -Y\}$$

Für die zufälligen Zeiten \tilde{T}^ε bedeutet dies

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{T}^\varepsilon = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{\mathcal{H}}^\varepsilon$$

Da die Mengen $\tilde{\mathcal{H}}^\varepsilon$ bezüglich Inklusion absteigend sind, dürfen \lim und \inf vertauscht werden.

$$= \inf \{t > 0 : \tilde{Z}_s \geq \tilde{Z}_t \forall s < t \text{ und } \tilde{Z}_t \geq -Y \text{ und } \underline{\tilde{Z}}_t \leq -Y\}$$

Aus der Ungleichung $\tilde{Z}_t \geq \underline{\tilde{Z}}_t$ und der Monotonie des Leiterprozesses folgt

$$= \inf \{\underline{\tilde{Z}}_t \leq -Y\}$$

Mit der Konvention $\inf \emptyset = \infty$ erhalten wir schließlich

$$= \tilde{T} \quad \text{fast sicher}$$

■

Folgerung 59 (Konstruktion bis zum Minimum) Sei $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ ein in 0 startender \mathbb{R} -wertiger Lévy Prozess mit positivem Drift. Dann kann das Kopfstück von (Z_t) bis zum globalen Minimum wie folgt konstruiert werden:

1. Bestimme den Wert einer unabhängigen exponentiell zum Parameter γ verteilten Zufallsvariable Y .
2. Simuliere den getilteten Prozess (\tilde{Z}_t) solange, bis dieser die Schranke $-Y$ trifft oder nach unten unterschreitet. Dies passiere zum Zeitpunkt $\tilde{\pi}$.
3. Bestimme den Zeitpunkt $\tilde{\tau} < \tilde{\pi}$ zu dem der Prozess (\tilde{Z}_t) das erste mal sein Infimum auf dem Intervall $[0, \tilde{\pi}]$ angenommen hat.

Dann besitzen $((\tilde{Z}_t)_{0 \leq t \leq \tilde{\tau}}, \tilde{\tau})$ und $((Z_t)_{0 \leq t \leq \tau}, \tau)$ eine identische Verteilung, wobei τ das erste globale Infimum von (Z_t) ist.

Nachdem wir nun eine Zerlegung eines stochastischen Prozesses gefunden haben, folgen in den nächsten Kapiteln genauere Beschreibungen des getilteten Prozesses in Spezialfällen, bis schließlich in Kapitel 6 alle Ergebnisse zusammengetragen werden, um eine möglichst exakte Beschreibung des getilteten Prozesses eines Lévy Prozesses zu erhalten.

An der Form des Hauptsatzes 58 ändert sich dabei in den meisten Fällen nichts mehr; nur die Brownsche Bewegung mit Drift als die einzige stetige Klasse innerhalb der Lévy Prozesse erlaubt es noch einmal, die Formulierung des Satzes zu vereinfachen. Damit wird auch die Konstruktion 59 ein Stück weit vereinfacht.

3.8 Offene Fragen und Probleme

Zwar löst der Hauptsatz 58 das Problem der Zerlegung für eine große Klasse an Lévy Prozessen, aber eine zentrale Voraussetzung des Satzes war die Existenz des getilteten Prozesses. Es wurde im Lemma 37 die hinreichende und notwendige Bedingung (A_{FH}) angegeben. Doch eine Überprüfung dieser Annahme durch Lösen der Gleichung $\varphi_\mu(\gamma) = 1$ kann sich als sehr schwierig erweisen. Deshalb wurden in einer Bemerkung die hinreichende Bedingung (G_{FH}) bzw. die dazu äquivalente Bedingung $(G_{FH'})$ angegeben:

$$\begin{aligned} & 1. \quad \varphi_\mu(\lambda) < \infty \quad \forall \lambda \in [0, \infty) \\ \text{und } & 2. \quad 0 < \int x \mu_t(dx) < \infty \quad \forall t > 0 \\ & \text{und } 3. \quad \mu_t((-\infty, 0)) > 0 \quad \forall t > 0. \end{aligned} \tag{G_{FH}}$$

Ein Teil dieser Bedingung ist offenbar, dass der Erwartungswert von μ_t existiert und endlich ist. Diese Bedingung wird allerdings im Allgemeinen von einem Lévy Prozess nicht erfüllt. Noch stärker ist natürlich die Forderung nach der Endlichkeit der Laplace Transformation auf der positiven Halbachse. Es stellt sich also die Frage, ob die drei Bedingungen in $(G_{FH'})$ abgeschwächt werden können durch

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Z_t = \infty \quad \text{fast sicher} \quad \text{und} \quad \mathbb{P}(Z_1 < Z_0) > 0$$

Auf den zweiten Teil dieser Bedingung wird man nicht verzichten können, da diese Ungleichung gerade sicherstellt, dass der Prozess mit positiver Wahrscheinlichkeit sich auch nach unten bewegen kann. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so ist das Infimum des Prozesses fast sicher der Startpunkt.

Ein weiteres in der Literatur nur teilweise gelöstes Problem (siehe zum Beispiel [Ber96]) ist die Frage nach der Verteilung des Prozesses (\hat{Z}_t) . Für große Klassen innerhalb der Lévy Prozesse konnte die Frage beantwortet werden, insbesondere für die Brownsche Bewegung und für spektral positive Prozesse.

In dieser Arbeit wird auf diese Frage nicht weiter eingegangen; wir konzentrieren uns auf die Verteilung des getilteten Prozesses. Wie schon weiter oben angekündigt, wird im Kapitel 6 eine Darstellung mit Hilfe der Laplace Transformation des getilteten Prozesses erarbeitet.

3.9 Literatur

Die ersten Arbeiten, die sich mit einer Pfadzerlegung am Minimum stochastischer Prozesse beschäftigten, waren die von Williams ([Wil74]) und von Pitman ([Pit75]). Beide Arbeiten beschränkten sich jedoch auf die Zerlegung einer Brownschen Bewegung mit Drift. Die dabei verwendeten Techniken sind vollkommen andere, als die dieser Arbeit. Während der Hauptsatz 58 sehr viel mit den Maßen und Kernen des zu zerlegenden Prozesses arbeitet, werden in den oben genannten Arbeiten Transformationen wie Spiegelungen verwendet. Dafür konnte Williams den Prozess nach dem Infimum exakt untersuchen, und hat gezeigt, dass es sich bei der Brownschen Bewegung um einen Bessel Prozess handelt, der nach dem Infimum angesetzt wird.

Spätere Arbeiten von Bertoin ([Ber92], [Ber93] oder [Ber91]) und Chaumont ([Cha96]) haben die Ergebnisse von Williams und Pitman auf Klassen von Lévy Prozessen verallgemeinert – allerdings ebenfalls mittels vollkommen anderer Ideen und Techniken als die, die in dieser Arbeit verwendet wurden. Auch wurden in den genannten Arbeiten immer nur Unterklassen der Lévy Prozesse behandelt, insbesondere die Spektral Positiven Prozesse wurden eingehend untersucht. Dabei handelt es sich um Lévy Prozesse, die keine negativen Sprünge besitzen. Dieser Einschränkung unterliegt die hier entwickelte Zerlegung nicht.

Kapitel 4

Compound Poisson Prozesse

Nachdem im letzten Kapitel Lévy Prozesse abstrakt zerlegt wurden, wird in diesem Kapitel die wohl einfachste Klasse der Lévy Prozesse beschrieben und untersucht. Als erstes werden die Poisson Prozesse eingeführt, und diese dann zu den Compound Poisson Prozessen verallgemeinert. Unser Interesse ist dabei nicht nur die Darstellung eines Compound Poisson Prozesses, sondern vor allem die Frage, wie der getiltete Prozess aus einem Compound Prozess hervorgeht.

4.1 Poisson Prozesse

Im Abschnitt 2.4 wurde schon der diskrete Poisson Prozess eingehend untersucht. Diese diskrete Irrfahrt kann sehr leicht zu einem echten zeitkontinuierlichen Prozess erweitert werden.

Definition 60 (Poisson Prozess) *Ein \mathbb{Z} -wertiger stochastischer Prozess $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ mit unabhängigen stationären Zuwächsen heißt POISSONSCHER PROZESS ZUM PARAMETER $\alpha > 0$, falls er rechtsseitig stetige, isotone Pfade mit Sprüngen der Größe 1 besitzt und für alle $0 \leq s < t$ die Zuwächse $Z_t - Z_s$ poissonverteilt zum Parameter $\alpha(t - s)$ sind.*

Mit dieser Definition ist ein Poisson Prozess natürlich insbesondere auch ein Lévy Prozess. Und die dem Poisson Prozess zugrundeliegende Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ ist gegeben durch

$$\mu_t(dx) = \begin{cases} \frac{(\alpha t)^x}{x!} e^{-\alpha t} & \text{für } x \in \mathbb{N}_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Existenz eines Poisson Prozesses sichert der folgende Satz:

Satz 61 *Es existieren Poissonsche Prozesse zum Parameter $\alpha > 0$.*

Beweis Siehe Paragraph 41 in [Bau91]. ■

Da ein Poisson Prozess (Z_t) nur Sprünge der Größe 1 besitzen darf und für den Erwartungswert $\mathbb{E}_0 Z_1 = \alpha$ gilt, legt der Parameter α gerade fest, wie oft der Prozess im Intervall $[0, 1]$ springt. Aus diesem Grund wird α auch als (SPRUNG-)RATE bezeichnet.

Die folgende alternative Konstruktion eines Poisson Prozesses liefert eine wichtige Eigenschaft des Poisson Prozesses: Die Abstände zwischen den Sprüngen sind exponentiell zum Parameter α verteilt. Diese Tatsache zusammen mit der dazugehörigen Konstruktion wird im folgenden Satz festgehalten.

Satz 62 Sei $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Familie unabhängiger, exponentiell zum Parameter α verteilter \mathbb{R} -wertige Zufallsvariablen. Dann ist der Prozess $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ definiert durch

$$Z_t := \min \left\{ n : \sum_{i=1}^{n+1} T_i > t \right\}$$

ein Poisson Prozess.

Beweis Die Verteilung von Z_t ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_t = n) &= \mathbb{P} \left(\sum_{i=1}^n T_i \leq t, \sum_{i=1}^{n+1} T_i > t \right) \\ &= \int_{\substack{t_1 + \dots + t_n \leq t \\ t_1 + \dots + t_n + t_{n+1} > t \\ t_i \geq 0}} \alpha e^{-\alpha t_1} \dots \alpha e^{-\alpha t_{n+1}} dt_1 \dots dt_{n+1} \\ &= \int_{\substack{t_1 + \dots + t_n \leq t \\ t_1 + \dots + t_n + t_{n+1} > t \\ t_i \geq 0}} \alpha^{n+1} e^{-\alpha t_1} \dots e^{-\alpha t_{n+1}} dt_1 \dots dt_{n+1} \end{aligned}$$

Die Substitution $z_i := t_1 + \dots + t_i$ führt zu

$$= \int_{\substack{z_n \leq t \\ z_{n+1} > t \\ z_{n+1} \geq z_n \geq \dots \geq z_1 \geq 0}} \alpha^{n+1} e^{-\alpha z_{n+1}} dz_1 \dots dz_{n+1} \quad (4.1)$$

Wenn wir nun das Integral dz_{n+1} ausrechnen, erhalten wir

$$= \alpha^n e^{-\alpha t} \int_{t \geq z_n \geq \dots \geq z_1 \geq 0} dz_1 \dots dz_n \quad (4.2)$$

Falls in der Menge, über die integriert wird, die z_i permutiert werden, ändert dies in diesem Fall natürlich nichts an dem Wert des Integrals. Diese Beobachtung wollen wir nun ausnutzen. Bezeichne hierfür S_n die Permutationsgruppe der Ordnung n . S_n besitzt bekanntlich $n!$ Elemente, und es folgt

$$= \alpha^n e^{-\alpha t} \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} \int_{t \geq z_{\pi(n)} \geq \dots \geq z_{\pi(1)} \geq 0} dz_1 \dots dz_n,$$

denn alle Integrale haben den gleichen Wert. Die $n!$ verschiedenen Integrationsbereiche sind bis auf jeweils die Lebesgue-Nullmenge $\{(x, \dots, x) : x \in [0, t]\}$ disjunkt, und ergeben vereinigt $[0, t]^n$. Also folgt

$$= \frac{\alpha^n}{n!} e^{-\alpha t} \int_{0 \leq z_i \leq t} dz_1 \dots dz_n \quad (4.3)$$

Da das letzte Integral den Wert t^n hat, folgt schließlich

$$= \frac{(\alpha t)^n}{n!} e^{-\alpha t}$$

Also ist Z_t Poisson verteilt zum Parameter αt . Offenbar sind die Zuwächse von (Z_t) stationär, da sie zu keinem Zeitpunkt t von Z_t selber abhängen. Da die T_i darüber hinaus unabhängig und gedächtnislos sind, besitzt damit durch die Konstruktion auch der Prozess $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ unabhängige Zuwächse. Zusätzlich sichert die Konstruktion auch die rechtsseitige Stetigkeit der Pfade. ■

Bemerkung Die Zeiten zwischen zwei Sprüngen eines Poisson Prozesses $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ sind – wie oben bemerkt – exponentiell verteilt. Betrachten wir jedoch die Verteilung der Sprungzeiten τ_i , die induktiv definiert sind durch

$$\begin{aligned} \tau_1 &:= \inf\{t \geq 0 : Z_t - Z_{t-} \neq 0\} \\ \tau_i &:= \inf\{t > \tau_{i-1} : Z_t - Z_{t-} \neq 0\} \quad \text{für } i > 1. \end{aligned}$$

Mit der Notation aus Satz 62 gilt offenbar der Zusammenhang

$$\tau_n := \sum_{i=1}^n T_i$$

Damit entsprechen die Zufallsvariablen τ_i gerade den z_i in der Substitution, die zu dem Ausdruck 4.1 führte. Nehmen wir nun die Gleichung 4.2 als Ausgangspunkt, dann erhalten wir sofort

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_t = n) &= \alpha^n e^{-\alpha t} \int_{t \geq z_n \geq \dots \geq z_1 \geq 0} dz_1 \dots dz_n \\ &= (\alpha t)^n e^{-\alpha t} \int_{t \geq z_n \geq \dots \geq z_1 \geq 0} \frac{dz_1}{t} \dots \frac{dz_n}{t} \end{aligned} \quad (4.2')$$

und mit Gleichung 4.3 folgt weiter

$$= \frac{(\alpha t)^n}{n!} e^{-\alpha t} \int_{0 \leq z_i \leq t} \frac{dz_1}{t} \dots \frac{dz_n}{t} \quad (4.3')$$

In der Gleichung 4.2' können wir somit auf die Verteilung der nach Größe aufsteigend sortierten Sprungzeiten τ_i Bezug nehmen.

Und in Gleichung 4.3' können wir nun sehen, dass die unsortierten Sprungzeiten gleichmäßig im Intervall $[0, t]$ verteilt sind. Damit kann ein Poisson Prozess bis zum Zeitpunkt t auch wie folgt konstruiert werden:

1. Bestimme den Wert einer zum Parameter αt poissonverteilten Zufallsvariable N .
2. Bestimme N -mal den Wert unabhängiger auf dem Intervall $[0, t]$ gleichverteilter Zufallsvariablen τ_i mit $i = 1, \dots, N$.

3. Setze $Z'_s := \max\{i : \tau_i \leq s\}$ für $0 \leq s \leq t$

Dann ist der Prozess $(Z'_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ ein Poisson Prozess. Denn er ist durch die Konstruktion zunächst einmal rechtsseitig stetig, und es gilt für $s \leq t$:

$$\mathbb{P}(Z'_s = m) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(\alpha t)^n}{n!} e^{-\alpha t} \binom{n}{m} \underbrace{\int_{0 \leq z_1 \leq s} \frac{dz_1}{t} \cdots \frac{dz_m}{t}}_{=s^m} \underbrace{\int_{s < z_{m+1} \leq t} \frac{dz_{m+1}}{t} \cdots \frac{dz_n}{t}}_{=(t-s)^{(n-m)}}$$

Auflösen des Binomialkoeffizienten und Kürzen durch $n!$ und t^n bringt

$$\begin{aligned} &= \frac{(\alpha s)^m}{m!} e^{-\alpha s} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(\alpha(t-s))^{n-m}}{(n-m)!} e^{-\alpha(t-s)} \\ &= \frac{(\alpha s)^m}{m!} e^{-\alpha s} \cdot e^{-\alpha(t-s)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha(t-s))^n}{(n)!} \end{aligned}$$

Die Summe ergibt gerade $e^{\alpha(t-s)}$, und wir erhalten

$$= \frac{(\alpha s)^m}{m!} e^{-\alpha s}$$

□

4.2 Compound Poisson Prozesse

Aus dem Poisson Prozess lässt sich sehr einfach ein weiterer Prozess entwickeln, nämlich der COMPOUND POISSON PROZESS. Während die Sprünge eines Poisson Prozesses alle die Größe 1 besitzen müssen, werden bei einem Compound Poisson Prozess die Größen der Sprünge gemäß einer Verteilung bestimmt. Die folgende Definition liefert die Konstruktion:

Definition 63 (Compound Poisson Prozess) Sei μ ein Maß auf \mathbb{R} mit $0 < \mu(\mathbb{R}) < \infty$, und seien $(X_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ unabhängige gemäß $\mu/\mu(\mathbb{R})$ verteilte Zufallsvariablen. Desweiteren sei $(N_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ ein Poisson Prozess zum Parameter $\mu(\mathbb{R})$. Dann heißt der Prozess

$$Z_t := \sum_{i=1}^{N_t} X_i$$

COMPOUND POISSON PROZESS MIT INTENSITÄTSMASS μ . Ein Prozess $(Z'_t)_{t \geq 0}$ der Form $Z'_t := Z_t + tc$ heißt ebenfalls Compound Poisson Prozess mit Intensitätsmaß μ und LINEAREN DRIFT c .

Bemerkung Nach dieser Definition soll noch einmal nachdrücklich auf die beiden verschiedenen Drift-Begriffe hingewiesen werden: Der DRIFT eines stochastischen Prozesses mit unabhängigen stationären Zuwächsen beschreibt das Verhalten des Prozesses im Unendlichen,

wohingegen der LINEARE DRIFT eines Compound Poisson Prozesses definiert ist als der Parameter c , der eine lineare und stetige Bewegung ausmacht. Diese beiden Begriffe sind vollkommen unabhängig, und haben bis auf die sprachliche Verwandtschaft nichts gemein! \square

Der Compound Poisson Prozess ist also eine zufällige Summe, wobei die Anzahl der Summanden selbst ein Poisson Prozess ist und somit an einem festen Zeitpunkt t Poissonsch Verteilt zum Parameter $t\mu(\mathbb{R})$ ist.

Wie schon eingangs erwähnt, stellt der Compound Poisson Prozess eine Verallgemeinerung des Poisson Prozesses dar, bei dem nicht mehr nur Sprünge der Größe 1 zugelassen sind, sondern die Sprünge selber unabhängige gleichverteilte Zufallsvariablen sind. Da die Anzahl der Summanden, und damit die Anzahl der Sprünge, zu jedem Zeitpunkt Poisson verteilt ist, bestimmt das Gewicht $\mu(\mathbb{R})$ die Sprungrate. Je größer das Gewicht, desto mehr Sprünge sind zu erwarten.

Demnach kann ein Compound Poisson Prozess analog zum Poisson Prozess wie folgt konstruiert werden: $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ seien unabhängige zum Parameter $\mu(\mathbb{R})$ exponentiell verteilte Zufallsvariablen, $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ seien unabhängige gemäß $\mu/\mu(\mathbb{R})$ verteilte Zufallsvariablen. Setze $\tau_i := T_1 + \dots + T_i$. Dann ist der Prozess

$$Z_t := \sum_{\substack{i=1 \\ \tau_i \leq t}}^{\infty} X_i \quad (4.4)$$

wieder ein Compound Poisson Prozess, und die Zufallsvariablen τ_i sind offenbar gerade die Sprungzeiten.

Mit der Summendarstellung 4.4 kann ein Compound Poisson Prozess $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ auch als Integrator in stochastischen Integralen verwendet werden; er stellt also ein zufälliges Maß dar. Für eine messbare \mathbb{R} -wertige Funktion f setzen wir

$$\int_0^t f dZ := \sum_{\substack{i=1 \\ \tau_i \leq t}}^{\infty} f(X_i)$$

Wie mit diesem Integral gerechnet wird, zeigt beispielhaft das nächste Lemma:

Lemma 64 Sei (Z_t) ein Compound Poisson Prozess mit Intensitätsmaß μ . Dann gilt für eine μ -integrierbare Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \int_0^t f dZ &= t \int_{\mathbb{R}} f(x) \mu(dx) \\ \text{Var} \int_0^t f dZ &= t \int_{\mathbb{R}} f^2(x) \mu(dx) \end{aligned}$$

Insbesondere gilt für einen Compound Poisson Prozess ohne Drift

$$\mathbb{E} Z_1 = \mathbb{E} \int_0^1 x dZ = \int_{\mathbb{R}} x \mu(dx) \quad \text{und} \quad \text{Var} Z_1 = \text{Var} \int_0^1 x dZ = \int_{\mathbb{R}} x^2 \mu(dx). \quad (4.5)$$

Beweis 1. Für den Erwartungswert gilt:

$$\mathbb{E} \int_0^t f dZ = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{e^{-t\mu(\mathbb{R})} \frac{(t\mu(\mathbb{R}))^n}{n!}}_{=\mathbb{P}(N_t=n)} \left(\int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} f(x_1) + \dots + f(x_n) \frac{\mu(dx_1)}{\mu(\mathbb{R})} \dots \frac{\mu(dx_n)}{\mu(\mathbb{R})} \right)$$

Das n -fache Integral ist einfach die Summe von n Integralen; in diesem Fall sogar einfach nur das n -fache eines Integrals, da alle identisch sind.

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-t\mu(\mathbb{R})} \frac{(t\mu(\mathbb{R}))^n}{n!} n \int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{\mu(dx)}{\mu(\mathbb{R})} \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x) \mu(dx) \cdot e^{-t\mu(\mathbb{R})} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(t\mu(\mathbb{R}))^n}{n!} \frac{n}{\mu(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

Durch Kürzen können wir einfach die Summationsgrenze um Eins nach unten verschieben, und einmal den Faktor t aus der Summe ziehen

$$= \int_{\mathbb{R}} f(x) \mu(dx) \cdot t e^{-t\mu(\mathbb{R})} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\mu(\mathbb{R}))^n}{n!}$$

Die Summe ergibt gerade $e^{t\mu(\mathbb{R})}$, und es folgt die Behauptung:

$$= t \int_{\mathbb{R}} f(x) \mu(dx)$$

2. Um die Varianz zu berechnen, versuchen wir zunächst, $\mathbb{E}(\int_0^t f dZ)^2$ zu bestimmen:

$$\mathbb{E} \left(\int_0^t f dZ \right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-t\mu(\mathbb{R})} \frac{(t\mu(\mathbb{R}))^n}{n!} \left(\int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} (f(x_1) + \dots + f(x_n))^2 \frac{\mu(dx_1)}{\mu(\mathbb{R})} \dots \frac{\mu(dx_n)}{\mu(\mathbb{R})} \right)$$

In der ausmultiplizierten Form der quadrierten Summe kommen insgesamt n^2 Summanden vor; n von ihnen sind der Form $f^2(x_i)$, die übrigen $n(n-1)$ Summanden haben die Gestalt $f(x_i)f(x_j)$ mit $i \neq j$. Also kann der Ausdruck wie folgt zerlegt werden:

$$= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-t\mu(\mathbb{R})} \frac{(t\mu(\mathbb{R}))^n}{n!} \left(n \int_{\mathbb{R}} f^2(x) \frac{\mu(dx)}{\mu(\mathbb{R})} + n(n-1) \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x)f(y) \frac{\mu(dx)}{\mu(\mathbb{R})} \frac{\mu(dy)}{\mu(\mathbb{R})} \right)$$

Wenn wir beide Integrale getrennt summieren, erhalten wir

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-t\mu(\mathbb{R})} \frac{(t\mu(\mathbb{R}))^n}{n!} n \int_{\mathbb{R}} f^2(x) \frac{\mu(dx)}{\mu(\mathbb{R})} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-t\mu(\mathbb{R})} \frac{(t\mu(\mathbb{R}))^n}{n!} n(n-1) \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x)f(y) \frac{\mu(dx)}{\mu(\mathbb{R})} \frac{\mu(dy)}{\mu(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

Die Integrale können wieder vor die Summen geschrieben werden

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{R}} f^2(x) \mu(dx) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-t\mu(\mathbb{R})} \frac{(t\mu(\mathbb{R}))^n}{n!} \frac{n}{\mu(\mathbb{R})} \\ &\quad + \left(\int_{\mathbb{R}} f(x) \mu(dx) \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-t\mu(\mathbb{R})} \frac{(t\mu(\mathbb{R}))^n}{n!} \frac{n(n-1)}{\mu(\mathbb{R})^2} \end{aligned}$$

Kürzen hilft erneut weiter:

$$= \int_{\mathbb{R}} f^2(x) \mu(dx) \cdot t e^{-t\mu(\mathbb{R})} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\mu(\mathbb{R}))^n}{n!} \\ + \left(\int_{\mathbb{R}} f(x) \mu(dx) \right)^2 \cdot t^2 e^{-t\mu(\mathbb{R})} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\mu(\mathbb{R}))^n}{n!}$$

Die Summen ergeben gerade $e^{t\mu(\mathbb{R})}$, und es folgt:

$$= t \int_{\mathbb{R}} f^2(x) \mu(dx) + t^2 \left(\int_{\mathbb{R}} f(x) \mu(dx) \right)^2$$

Für die Varianz gilt nun

$$\text{Var} \int_0^t f dZ = \mathbb{E} \left(\int_0^t f dZ \right)^2 - \left(\mathbb{E} \int_0^t f dZ \right)^2 = t \int_{\mathbb{R}} f^2(x) \mu(dx)$$

■

4.3 Laplace Transformation

Da ein Compound Poisson Prozess ein Spezialfall eines Lévy Prozesses ist, ist dessen zugrundeliegende Faltungshalbgruppe nach Satz 45 stetig. Also können wir auch die Laplace Transformation der Verteilung bestimmen.

Satz 65 (Laplace Transformation eines Compound Poisson Prozesses) Sei $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ ein Compound Poisson Prozess mit Intensitätsmaß μ und linearen Drift c mit $\mu(\mathbb{R}) < \infty$. Dann ist die Laplace Transformierte φ_Z gegeben durch

$$\varphi_Z(\lambda) = \exp\left(-\lambda c + \int_{\mathbb{R}} (e^{-\lambda x} - 1) \mu(dx)\right)$$

Beweis Nachrechnen liefert die Behauptung:

$$\begin{aligned} \varphi_Z(\lambda) &= \mathbb{E} e^{-\lambda Z_1} \\ &= \mathbb{E} e^{-\lambda(\sum_{i=1}^{N_1} X_i + c)} \\ &= \mathbb{E} \prod_{i=1}^{N_1} e^{-\lambda X_i} e^{-\lambda c} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{e^{-\mu(\mathbb{R})} \frac{\mu(\mathbb{R})^n}{n!}}_{=\mathbb{P}(N_1=n)} \cdot \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda x} \frac{\mu(dx)}{\mu(\mathbb{R})} \right)^n}_{=\mathbb{E} e^{-\lambda X_i}} \cdot e^{-\lambda c} \\ &= e^{-\mu(\mathbb{R}) - \lambda c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\int e^{-\lambda x} \mu(dx) \right)^n}{n!} \\ &= e^{-\mu(\mathbb{R}) - \lambda c} \exp\left(\int e^{-\lambda x} \mu(dx) \right) \\ &= \exp\left(-\lambda c + \int_{\mathbb{R}} (e^{-\lambda x} - 1) \mu(dx) \right) \end{aligned}$$



In der Laplace Transformierte eines Compound Poisson Prozesses erkennt man sofort die Lévy-Khinchin Darstellung wieder, mit dem einzigen Unterschied, dass die Laplace Transformation reell ist, wohingegen die klassische Darstellung die komplex-wertige charakteristische Funktion verwendet. Die charakteristische Funktion ψ_Z eines Compound Poisson Prozesses (Z_t) mit Intensitätsmaß μ und linearem Drift c ist nämlich gegeben durch

$$\begin{aligned}\psi_Z(\lambda) &:= \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x} \mu(dx) \\ &= \exp\left(ic \cdot \lambda + \int_{\mathbb{R}} (e^{i\lambda x} - 1) \mu(dx)\right)\end{aligned}$$

4.4 Tiltten

Da wir nun eine Darstellung der Compound Poisson Prozesse mittels der Laplace Transformierten gefunden haben, liegt es nahe, auch die Laplace Transformierte der getilteten Prozesse näher zu untersuchen, um die Verwandtschaft des Ursprungsprozesses zum getilteten klar darzustellen. Dies wird in Satz 67 geleistet.

Zuvor geben wir im folgenden Lemma eine hinreichende Bedingung für die Existenz eines zu einem Compound Poisson Prozess getilteten Prozesses an, um der notwendigen Annahme (A_{FH}) einen praktischen Inhalt im Falle der Compound Poisson Prozesse zu geben. Dabei stützen wir uns auf die Bedingung (G_{FH}) .

Lemma 66 *Zu einem Compound Poisson Prozess $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ mit linearem Drift c und Intensitätsmaß μ mit endlicher Erwartung existiert genau dann ein getilteter Prozess, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

1. $\int_{\mathbb{R}} (e^{-\lambda x} - 1) \mu(dx) < \infty \quad \forall \lambda \in [0, \infty)$
- und 2. $c + \int_{\mathbb{R}} x \mu(dx) > 0$ (GCPP)
- und 3. $c < 0$ oder $c \geq 0$ und $\mu((-\infty, 0)) > 0$

Beweis Es genügt zu zeigen, dass die Voraussetzungen (G_{FH}) aus Satz 37 erfüllt sind. Wir beweisen die Behauptung nur für den Fall $c \geq 0$ und $\mu((-\infty, 0)) > 0$; der zweite in der dritten Bedingung folgt vollkommen analog.

TEIL 1: Aus der ersten Bedingung in (G_{CPP}) folgt sofort für die Laplace Transformierte für $\lambda \in [0, \infty)$

$$\varphi_Z(\lambda) = \exp\left(-\lambda c + \int_{\mathbb{R}} (e^{-\lambda x} - 1) \mu(dx)\right) < \infty. \quad (4.6)$$

Also ist damit die erste Bedingung in (G_{FH}) erfüllt.

TEIL 2: Im folgenden bezeichne $(\nu_t)_{t \in \mathbb{R}}$ die dem Compound Poisson Prozess zugrunde liegende Faltungshalbgruppe. Mit Hilfe der Gleichung 4.5 aus Satz 64 und mit der Voraussetzung folgt für $t > 0$

$$\int_{\mathbb{R}} x \nu_t(dx) = \mathbb{E}_0 Z_t = t \left(\int_{\mathbb{R}} x \mu(dx) + c \right) > 0$$

Dies ist gerade die zweite Bedingung in (G_{FH}) .

TEIL 3: Schließlich gilt laut Voraussetzung $\int_{\mathbb{R}} x\nu_t(dx) < \infty$. Betrachten wir uns nun für festes $t > 0$

$$\nu_t((-\infty, 0)) = \mathbb{P}_0(Z_t < 0) = \mathbb{P}_0\left(\sum_{i=1}^{N_t} X_i + tc < 0\right) > 0,$$

wobei die Zufallsvariablen X_i unabhängig und identisch gemäß μ verteilt sind. Die Ungleichung folgt dann aus der Tatsache, dass $\mu((-\infty, 0)) > 0$ vorausgesetzt wurde, was nicht anderes bedeutet, als dass auch negative Sprünge mit einer positiven Wahrscheinlichkeit auftreten. Also ist auch die dritte und letzte Bedingung in (G_{FH}) aus Satz 37 erfüllt, und demnach existiert ein zu (Z_t) getilteter Prozess. ■

Satz 67 (Tilten eines Compound Poisson Prozesses) Sei $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ ein Compound Poisson Prozess mit Intensitätsmaß μ und linearen Drift c , so dass die Annahme (A_{FH}) erfüllt ist. Dann existiert ein mit dem Parameter $\gamma > 0$ getilteter Prozess (\tilde{Z}_t) . Dieser ist wieder ein Compound Poisson Prozess mit Intensitätsmaß $\tilde{\mu}$ und Drift c . Dabei ist $\tilde{\mu}(dx) := e^{-\gamma x} \mu(dx)$.

Beweis Durch die Erfüllung der Annahme (A_{FH}) ist sichergestellt, dass ein zu (Z_t) getilteter Prozess existiert. Demnach existiert auch ein $\gamma > 0$ gemäß Lemma 37. Es gilt dann

$$\begin{aligned} \varphi_Z(\gamma) = 1 &\iff \exp\left(-\gamma c + \int_{\mathbb{R}} (e^{-\gamma x} - 1)\mu(dx)\right) = 1 \\ &\iff -\gamma c + \int_{\mathbb{R}} (e^{-\gamma x} - 1)\mu(dx) = 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Für die Laplace Transformation des getilteten Prozesses (\tilde{Z}_t) folgt aus Gleichung 3.1

$$\begin{aligned} \varphi_{\tilde{Z}}(\lambda) &= \varphi_Z(\lambda + \gamma) \\ &= \exp\left(-(\lambda + \gamma)c + \int_{\mathbb{R}} (e^{-(\lambda + \gamma)x} - 1)\mu(dx)\right) \end{aligned}$$

und Gleichung 4.7 führt zu

$$\begin{aligned} &= \exp\left(-\lambda c + \int_{\mathbb{R}} (e^{-(\lambda + \gamma)x} - 1)\mu(dx) - \int_{\mathbb{R}} (e^{-\gamma x} - 1)\mu(dx)\right) \\ &= \exp\left(-\lambda c + \int_{\mathbb{R}} (e^{-(\lambda + \gamma)x} - e^{-\gamma x})\mu(dx)\right) \\ &= \exp\left(-\lambda c + \int_{\mathbb{R}} (e^{-\lambda x} - 1)e^{-\gamma x}\mu(dx)\right) \\ &= \exp\left(-\lambda c + \int_{\mathbb{R}} (e^{-\lambda x} - 1)\tilde{\mu}(dx)\right) \end{aligned}$$

wobei $\tilde{\mu}(dx)$ definiert ist durch

$$\tilde{\mu}(dx) := e^{-\gamma x} \mu(dx)$$

Aus der Laplace Transformierten $\varphi_{\tilde{Z}}$ sind die behaupteten Eigenschaften von (\tilde{Z}_t) nun einfach abzulesen. ■

Da der lineare Drift des getilteten Prozesses gegenüber dem ursprünglichen Prozess unverändert geblieben ist, wird man erwarten, dass sich auch wieder die Sprungrate verändert hat. In der Tat: Aus Gleichung 4.7 folgt

$$\begin{aligned} & -\gamma c + \int_{\mathbb{R}} (e^{-\gamma x} - 1) \mu(dx) = 0 \\ \iff & -\gamma c + \int_{\mathbb{R}} e^{-\gamma x} \mu(dx) - \mu(\mathbb{R}) = 0 \\ \iff & -\gamma c + \int_{\mathbb{R}} \tilde{\mu}(dx) - \mu(\mathbb{R}) = 0 \\ \iff & \tilde{\mu}(\mathbb{R}) = \mu(\mathbb{R}) + \gamma c \end{aligned}$$

Da γ positiv ist, nimmt die Sprungrate im Falle eines positiven linearen Drifts c zu, und im Falle eines negativen linearen Drifts c ab. Die Sprünge müssen also dem linearen Drift entgegenwirken. Falls der Prozess keinen linearen Drift besitzt, werden die Sprünge lediglich umgewichtet, und die Sprungrate bleibt unverändert.

Der getiltete Prozess (\tilde{Z}_t) besitzt also wiederum eine Darstellung der Form

$$\tilde{Z}_t = \sum_{i=1}^{\tilde{N}_t} \tilde{X}_i + tc$$

wobei $(\tilde{N}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ ein Poisson Prozess zum Parameter $\tilde{\mu}(\mathbb{R})$ ist, und die \tilde{X}_i unabhängige gemäß $\tilde{\mu}/\tilde{\mu}(\mathbb{R})$ verteilte reelle Zufallsvariablen sind.

4.5 Beispiel: Poisson Prozess mit linearem Drift

Natürlich ist jeder Poisson Prozess auch ein Compound Poisson Prozess. In diesem Abschnitt wollen wir uns deshalb den Poisson Prozesses als Sonderfall näher betrachten.

Zunächst stellt sich die Frage, wie der Poisson Prozess als Sonderfall interpretiert werden muss. Da der Poisson Prozess nur Sprünge der Größe 1 besitzt, liegt es nahe, als Intensitätsmaß für den entsprechenden Compound Poisson Prozess einfach das Punktmaß zu verwenden, welches sein gesamtes Gewicht auf der 1 besitzt. Das Gewicht selber gibt dann die Sprungrate des Poisson Prozesses an. Aus einem Poisson Prozess mit Rate α wird so ein Compound Poisson Prozess mit dem Intensitätsmaß μ definiert durch

$$\mu(x) := \begin{cases} \alpha & \text{für } x = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.8)$$

Als nächstes wollen wir natürlich Poisson Prozesse betrachten, die zwar einen positiven Drift besitzen, sich aber auch abwärts bewegen können; sonst wird das globale Minimum ja sofort beim Startpunkt angenommen, und eine weitere Betrachtung wäre langweilig. Das gewünschte Verhalten erreichen wir durch einen linearen Drift $c < 0$. Da der gesamte Drift $\mathbb{E}Z_1$ eines Poisson Prozesses (Z_t) dann gegeben ist durch

$$\mathbb{E}Z_1 = \alpha + c$$

bekommen wir so auch sofort eine Bedingung für die Wahl der Rate α und des linearen Driftes c , wenn $\mathbb{E}Z_1 > 0$ und $\mathbb{P}_0(Z_1 < 0) > 0$ sein soll:

$$-\alpha < c < 0 \quad \text{und} \quad \alpha > 0$$

Satz 68 Die Laplace Transformierte eines Poisson Prozesses $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ mit Rate $\alpha > 0$ und linearem Drift c ist gegeben durch

$$\varphi_Z(\lambda) = \exp\left(-\lambda c + \alpha(e^{-\lambda} - 1)\right)$$

Beweis Der Poisson Prozess besitzt in der Darstellung als Compound Poisson Prozess das in Gleichung 4.8 angegebene Intensitätsmaß μ , bei der das gesamte Gewicht auf dem Punkt 1 liegt. Also erhalten wir die Laplace Transformierte durch

$$\begin{aligned} \varphi_Z(\lambda) &= \exp\left(-\lambda c + \int_{\mathbb{R}} (e^{-\lambda x} - 1) \mu(dx)\right) \\ &= \exp\left(-\lambda c + \alpha(e^{-\lambda} - 1)\right) \end{aligned}$$

■

Mit dem Satz 67 erhalten wir nun auch sofort den getilteten Prozess. Dieser ist natürlich wieder ein Poissonscher Prozess mit linearem Drift c und Sprungrate $e^{-\gamma}\alpha$, wobei $\gamma > 0$ gemäß Lemma 37 die Nullstelle des Exponenten der Laplace Transformierten ist, also

$$-\gamma c + \alpha(e^{-\gamma} - 1) = 0$$

Diese Feststellung halten wir im folgenden Satz fest:

Satz 69 Sei $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ ein Poisson Prozess mit Sprungrate $\alpha > 0$ und linearem Drift c mit $-\alpha < c < 0$. Dann existiert ein $\gamma > 0$ gemäß Lemma 37, und der getiltete Prozess $(\tilde{Z}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ ist wieder ein Poisson Prozess mit Sprungrate $e^{-\gamma}\alpha$ und linearem Drift c .

Da $\gamma > 0$ ist, ist die Sprungrate des getilteten Prozesses erwartungsgemäß kleiner als die des ursprünglichen Prozesses. Diese Resultate decken sich auch mit denen aus Abschnitt 2.4, in dem der diskrete Poissonsche Prozess behandelt wurde.

Kapitel 5

Brownsche Bewegung

Historisch war die Brownsche Bewegung wohl einer der ersten Prozesse, die am Minimum zerlegt wurden. Durch diese Tatsache bedingt ist deren Zerlegung wohl auch am besten untersucht. Dennoch wird dieses Kapitel ziemlich kurz gehalten, da die Zerlegung in dieser Arbeit von den Methoden stark von den klassischen Arbeiten abweicht, und andererseits für eine genauere Untersuchung (speziell des Prozesses nach dem Minimum) noch viel mehr Hilfsmittel dargestellt werden müssen. Wir wollen uns deshalb in dieser Arbeit mit einer leicht abgewandelten Version des Hauptsatzes 58 aus Abschnitt 3.7 und der genauen Beschreibung des getilteten Prozesses vor dem Minimum zufrieden geben.

5.1 Brownschen Bewegung

Definition 70 (Brownsche Bewegung) *Ein Prozess $(B_t)_{t \geq 0}$ heißt BROWNSCHE BEWEGUNG, falls er unabhängige stationäre Zuwächse besitzt, und für alle $0 \leq s < t$ der Zuwachs $B_t - B_s$ normalverteilt zum Parameter $t - s$ ist, und falls fast alle Pfade von (B_t) stetig sind. Falls $B_0 = 0$ fast sicher ist, dann heißt der Prozess NORMALE BROWNSCHE BEWEGUNG*

Die so definierte Brownsche Bewegung besitzt zunächst keinen Drift; es gilt für alle $t \geq 0$ und alle Startpunkte $x \in \mathbb{R}$: $\mathbb{E}_x B_t = x$. Aber der obige Prozess lässt sich noch parametrisieren; setzen wir nämlich

$$B'_t := \sigma B_t + tb,$$

dann besitzt (B'_t) den Drift b und die Varianz von B'_1 beträgt gerade σ^2 . Dieser Prozess $(B'_t)_{t \geq 0}$ heißt BROWNSCHE BEWEGUNG MIT VARIANZ σ^2 UND DRIFT b . Die zugrunde liegende Faltungshalbgruppe (μ_t) ist dann gegeben durch

$$\mu_t(dx) := \frac{1}{\sqrt{2\pi t\sigma^2}} e^{-\frac{(x-b)^2}{2t\sigma^2}} dx$$

Bemerkung Die Brownsche Bewegung mit Drift als Spezialfall eines Lévy Prozesses nimmt eine Sonderstellung innerhalb der Lévy Prozesse ein. Denn alle fast sicher stetigen Lévy Prozesse $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ haben die Form

$$Z_t = \sigma B_t + bt$$

wobei $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ eine standard Brownsche Bewegung und $b \in \mathbb{R}$ ist. Einen Beweis findet man in Abschnitt 28 in Kapitel I in [RW94]. \square

5.2 Laplace Transformierte und Tiltten

Um die Laplace Transformierte φ_B einer Brownschen Bewegung $(B_t)_{t \geq 0}$ mit Varianz σ^2 und linearem Drift b zu bestimmen, erinnere man sich einfach daran, dass B_1 eine normalverteilte Zufallsvariable mit Varianz σ^2 und Erwartungswert b ist. Und die Laplace Transformierte φ_B wurde gerade als φ_{B_1} definiert, so dass wir einfach auf alte Ergebnisse der Normalverteilung zurückgreifen können. Wir erhalten somit sofort folgenden Satz:

Satz 71 *Sei $(B_t)_{t \geq 0}$ eine Brownsche Bewegung mit Varianz σ^2 und Drift b . Dann ist die Laplace Transformierte φ_B gegeben durch*

$$\varphi_B(\lambda) = \exp\left(-\lambda b + \frac{\sigma^2 \lambda^2}{2}\right)$$

Genauso wurde in Abschnitt 2.2 die getiltete Verteilung einer normalverteilten Zufallsvariablen mit Varianz σ^2 und Erwartungswert b berechnet. Es stellte sich heraus, dass die Varianz unverändert blieb, jedoch der Erwartungswert das Vorzeichen wechselte. Zusammenfassend führt dies zu folgendem Satz:

Satz 72 *Sei $(B_t)_{t \geq 0}$ eine Brownsche Bewegung mit Varianz σ^2 und Drift $b > 0$. Dann ist der getiltete Prozess $(\tilde{B}_t)_{t \geq 0}$ wieder eine Brownsche Bewegung mit Varianz σ^2 und Drift $-b$. Der Parameter γ , mit dem die Verteilung von (B_t) getiltet wird, ist gegeben durch $\gamma = \frac{2b}{\sigma^2}$.*

5.3 Zerlegung

Die Zerlegung einer Brownschen Bewegung mit Drift wird hier zwar mit den selben Techniken durchgeführt, doch ist die Zerlegung ein Stück einfacher, da die Brownsche Bewegung stetig ist. Aus diesem Grund fällt die umständliche Konstruktion, bei der die exponentiell verteilte Grenze zunächst unterschritten wird, und erst dann das Minimum bestimmt wird, weg. Denn die Stetigkeit garantiert, dass die Grenze selbst von der Brownschen Bewegung berührt wird.

Hauptsatz 73 (Zerlegung einer Brownschen Bewegung) *Sei $(B_t)_{t \geq 0}$ eine Brownsche Bewegung mit Varianz σ^2 und Drift $b > 0$.*

Für eine unabhängige zum Parameter $\frac{2b}{\sigma^2}$ exponentiell verteilte Zufallsvariable Y und eine weitere Brownsche Bewegung $(\tilde{B}_t)_{t \geq 0}$ mit Varianz σ^2 und Drift $-b$ sei folgende Zufallsvariable definiert:

$$T := \inf\{t \geq 0 : \tilde{B}_t = -Y\}$$

Sei $(\hat{B}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ ein gemäß den in Satz 49 definierten Kernen $(Q_t(x, dy))_{t \in \mathbb{R}_+}$ verteilter in 0 startender Prozess, und sei $(B'_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ definiert durch

$$B'_t := \begin{cases} \tilde{B}_t & \text{für } t \leq T \\ \hat{B}_{t-T} + \tilde{B}_T & \text{für } t > T \end{cases}$$

τ sei der Zeitpunkt des ersten globalen Minimums von (B_t) . Dann besitzen $((B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, \tau)$ und $((B'_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, T)$ die gleiche Verteilung.

Beweis Nach Satz 72 existiert zu der Brownschen Bewegung (B_t) mit Drift $b > 0$ ein mit dem Parameter $\gamma = \frac{2b}{\sigma^2}$ getilteter Prozess $(\tilde{B}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$. Dieser ist wieder eine Brownsche Bewegung mit Varianz σ^2 und Drift $-b$.

Betrachten wir die folgenden analog dem Hauptsatz 58 definierten Zufallsvariablen für (\tilde{B}_t) :

$$\begin{aligned}\tilde{L}_t &:= \inf\{s > t : \tilde{B}_s < \tilde{B}_t\} \\ \tilde{H}_t &:= \tilde{B}_{\tilde{L}_t} \\ \tilde{T} &:= \inf\{t \geq 0 : \tilde{H}_t \leq -Y\}\end{aligned}$$

Da (\tilde{B}_t) einen negativen Drift besitzt und deshalb fast sicher jede untere Schranke unterschreitet, folgt für $t \in \mathbb{R}_+$ mit $\tilde{B}_t = -Y$ auch sofort $\tilde{L}_t < \infty$ fast sicher und somit $\tilde{H}_t \leq -Y$ fast sicher. Daraus folgt schließlich

$$\tilde{T} \leq \inf\{t \geq 0 : \tilde{B}_t = -Y\} \text{ fast sicher}$$

Umgekehrt folgt aus der Stetigkeit sofort $\tilde{B}_{\tilde{T}} = -Y$, also

$$\tilde{T} \geq \inf\{t \geq 0 : \tilde{B}_t = -Y\} \text{ fast sicher}$$

Und insgesamt erhalten wir

$$\tilde{T} = T \text{ fast sicher}$$

Damit entspricht die Zerlegung genau der aus dem Hauptsatz 58, und der Satz ist bewiesen. ■

Durch die Stetigkeit der Brownschen Bewegung vereinfacht sich auch die Konstruktion einer am Minimum zerlegten Brownschen Bewegung:

Folgerung 74 (Konstruktion bis zum Minimum) Sei $(B_t)_{t \geq 0}$ eine in 0 startende \mathbb{R} -wertige Brownsche Bewegung mit Drift $b > 0$. Dann kann das Kopfstück von (B_t) bis zum globalen Minimum wie folgt konstruiert werden:

1. Bestimme den Wert einer unabhängigen exponentiell zum Parameter $\frac{2b}{\sigma^2}$ verteilten Zufallsvariable Y .
2. Simuliere eine Brownsche Bewegung (\tilde{B}_t) mit Drift $-b$ solange, bis sie nach unten die Grenze $-Y$ trifft. Dies passiere zum Zeitpunkt $\tilde{\tau}$.

Dann ist $((\tilde{B}_t)_{0 \leq t \leq \tilde{\tau}}, \tilde{\tau})$ zu $((B_t)_{0 \leq t \leq \tau}, \tau)$ identisch verteilt, wobei τ das erste globale Minimum von (B_t) ist.

5.4 Literatur

Die Brownsche Bewegung war wohl der erste zeitkontinuierliche Prozess mit unabhängigen stationären Zuwächsen, der am Infimum zerlegt worden ist. Die klassischen Beweise von Williams aus dem Jahr 1974 (siehe [Wil74]) oder kurz später in allgemeinerer und einfacherer Form von Pitman aus dem Jahr 1975 (siehe [Pit75]) verwenden jedoch andere Methoden und Konstruktionen, um diesen Satz zu beweisen.

Dafür konnten beide zusätzlich zeigen, dass der Prozess $(B_t - B_\tau)_{t \geq \tau}$ nach dem ersten Infimum der Brownschen Bewegung ein Bessel-Prozess ist. Wir begnügen uns hier mit dem abstrakten Ergebnis, dass es sich hierbei um eine Brownsche Bewegung handelt, die darauf bedingt ist, nicht negativ zu werden.

Kapitel 6

Lévy Prozesse

In Kapitel 4 und Kapitel 5 wurden Spezialfälle von Lévy Prozessen näher untersucht; der Zerlegungssatz 58 liefert aber die Möglichkeit zur Zerlegung einer wesentlich größeren Klasse an Lévy Prozessen. Dieses Kapitel wird nun ein wenig in der umfangreichen Theorie der Lévy Prozesse stochern, um schließlich eine Darstellung der Lévy Prozesse mit Hilfe der Laplace Transformation zu erlangen. Wir werden sehen, dass die Lévy-Prozesse im Grunde eine verallgemeinerte Kombination aus Compound Poisson Prozess und Brownscher Bewegung sind; die Zutaten sind uns also schon wohlbekannt.

6.1 Lévy Prozesse

Dieser Abschnitt stellt eine knappe Einführung in die Theorie der Lévy Prozesse dar. Zunächst wird die Definition 43 der Lévy Prozesse zurück in das Gedächtnis gerufen:

Definition 75 (Lévy Prozess) *Ein zeithomogener Prozess $(Z_t)_{t \geq 0}$ mit Werten in \mathbb{R}^d mit unabhängigen stationären Zuwächsen und Pfaden, die fast sicher rechtsseitig stetig sind und linksseitige Limiten besitzen heiße LÉVY PROZESS.*

Diese Definition erfasst eigentlich so ziemlich alle für uns interessanten Prozesse. Der zentrale Satz der Theorie der Lévy-Prozesse gibt Aufschluss darüber, aus welchen Bestandteilen denn so ein allgemeiner Lévy Prozess überhaupt aufgebaut ist:

Hauptsatz 76 (Lévy-Khinchin) *Sei $(Z_t)_{t \geq 0}$ ein Lévy Prozess in \mathbb{R} . Dann besitzt die charakteristische Funktion ψ_Z die Gestalt*

$$\psi_Z(\lambda) = \exp \left(ib\lambda - \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2 + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{i\lambda x} - 1 - i\lambda x I(|x| \leq 1) \right) \mu(dx) \right)$$

wobei das Maß μ und die Faktoren $b, \sigma \in \mathbb{R}$ eindeutig bestimmt sind, und μ folgender Bedingung genügt:

$$\int_{\mathbb{R}} \min(|x|^2, 1) \mu(dx) < \infty \tag{6.1}$$

Umgekehrt existiert zu jedem solchen Tripel (b, σ, μ) ein Lévy Prozess mit obiger charakteristischen Funktion ψ_Z .

Beweis Siehe Kapitel I in [Ber96]. ■

Der Kernpunkt dieser Darstellung ist die Bedeutung der drei Parameter μ, b und σ : Der Parameter b gibt den linearen Drift des Prozesses an, der Parameter σ entspricht einer Brownschen Bewegung mit Varianz σ^2 und das Maß μ (welches als LÉVY-MASS bezeichnet wird) beschreibt den enthaltenen Sprungprozess.

Diese Sichtweise führt zu einer wichtigen Beobachtung: Jeder Lévy Prozess setzt sich aus einem linearen Drift, einer Brownschen Bewegung und einem Sprungprozess zusammen. Allerdings ist noch nicht klar, wie letzterer aussieht, bzw. wie der Sprungprozess konstruiert werden kann. Dies klärt der nächste Satz:

Satz 77 Sei $(Z_t)_{t \geq 0}$ ein Lévy Prozess mit Lévy-Maß μ . Die Menge N der Sprünge von (Z_t) und die Menge N^ε der Sprünge größer als ε seien gegeben durch

$$N := \{(t, \Delta Z_t) : \Delta Z_t \neq 0, t \geq 0\}$$

$$N^\varepsilon := \{(t, \Delta Z_t) : |\Delta Z_t| > \varepsilon, t \geq 0\}$$

mit $\Delta Z_t := Z_t - Z_{t-}$. Zu $\varepsilon > 0$ sei der Sprungprozess $(X_t^\varepsilon)_{t \geq 0}$ definiert durch

$$X_t^\varepsilon := \sum_{\substack{(s, \Delta Z_s) \in N^\varepsilon \\ s \leq t}} \Delta Z_s - c_\varepsilon t$$

mit der Kompensation c_ε definiert durch

$$c_\varepsilon := \int_{[-1, -\varepsilon] \cup (\varepsilon, 1]} x \mu^\varepsilon(dx).$$

Dann ist (X_t^ε) ein Compound Poisson Prozess mit linearem Drift c_ε und Intensitätsmaß μ^ε , definiert durch

$$\mu^\varepsilon(dx) := \mu|_{[-\varepsilon, \varepsilon]^c}(dx)$$

Außerdem konvergieren die Prozesse (X_t^ε) gleichmäßig gegen den Sprungprozess (X_t) von (Z_t)

$$X_t := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} X_t^\varepsilon$$

Beweis Siehe Kapitel I in [Ber96]. ■

Dieser Satz lüftet also das Geheimnis des Sprungprozesses: Der Sprungprozess (X_t) eines Lévy-Prozesses ist der Grenzwert herkömmlicher Compound Poisson Prozesse mit endlichen Intensitätsmaßen. Denn obwohl das Lévy-Maß μ selbst nicht endlich sein muss, sondern nur der Bedingung 6.1 genügt, sind die Maße μ^ε für $\varepsilon > 0$ alle endlich. Denn gäbe es ein $\varepsilon > 0$ mit $\mu^\varepsilon(\mathbb{R}) = \infty$, dann folgte

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \min(|x|^2, 1) \mu(dx) &\geq \int_{\mathbb{R}} \min(|x|^2, 1) \mu^\varepsilon(dx) \\ &\geq \int_{\mathbb{R}} \min(\varepsilon^2, 1) \mu^\varepsilon(dx) \\ &= \min(\varepsilon^2, 1) \mu^\varepsilon(\mathbb{R}) \\ &= \infty, \end{aligned}$$

was ein klarer Widerspruch zur Bedingung 6.1 darstellt. Diese Eigenschaft wollen wir für später festhalten:

Lemma 78 Sei μ ein Lévy-Maß auf \mathbb{R} , das die Ungleichung 6.1 erfüllt, d.h. $\int_{\mathbb{R}} \min(|x|^2, 1)\mu(dx) < \infty$. Dann gilt für alle $\varepsilon > 0$

$$\mu^\varepsilon(\mathbb{R}) = \int_{(-\infty, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, \infty)} \mu(dx) < \infty$$

Eine besondere Bedeutung in der Konstruktion des Sprungprozesses kommt den linearen Driftparametern c_ε zu. Diese Faktoren kompensieren die kleinen Sprünge des Prozesses, deren Betrag kleiner oder gleich eins sind. Denn Betrachten wir zu $\varepsilon > 0$ den Prozess

$$Y_t^\varepsilon := \sum_{\substack{(s, \Delta Z_t) \in N^\varepsilon \\ |\Delta Z_t| \leq 1 \\ s \leq t}} \Delta Z_t - c_\varepsilon t,$$

der nur die kompensierten Sprünge der Größe mindestens ε und höchstens 1 besitzt, dann gilt für den Erwartungswert

$$\mathbb{E}Y_t^\varepsilon = \int_0^t x I(\varepsilon < |x| \leq 1) dZ - c_\varepsilon t$$

Mit Hilfe von Lemma 64 erhalten wir

$$\begin{aligned} &= t \int_{\mathbb{R}} x I(\varepsilon < |x| \leq 1) \mu(dx) - c_\varepsilon t \\ &= t \int_{[-1, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, 1]} x \mu(dx) - c_\varepsilon t \\ &= 0 \end{aligned}$$

Also ist Y_t^ε ein Martingal, und alle kleinen Sprünge werden zu Null kompensiert. Diese Kompensation ist nötig, um die gleichmäßige Konvergenz zu erhalten. Eine wichtige Tatsache ist hierbei, dass die Grenze, die zwischen „großen“ und „kleinen“ Sprüngen scheidet, mit dem Wert 1 willkürlich gewählt ist.

Jetzt sind uns alle Bausteine bekannt, und wir können einen Lévy Prozess nun vollständig beschreiben:

Folgerung 79 Sei $(Z_t)_{t \geq 0}$ ein Lévy Prozess. Dann existieren eindeutig ein Maß μ und Zahlen σ, c , so dass (Z_t) folgende Darstellung besitzt:

$$Z_t = \sigma B_t + X_t + ct,$$

wobei B_t eine unabhängige standard Brownsche Bewegung ist und $X_t := \lim X_t^\varepsilon$ der Grenzwert der Compound Poisson Prozesse mit den Intensitätsmaßen $\mu^\varepsilon = \mu|_{[-\varepsilon, \varepsilon]^c}$ aus der Konstruktion aus Satz 77 ist, und das Maß μ die Bedingung 6.1 erfüllt:

$$\int_{\mathbb{R}} \min(|x|^2, 1)\mu(dx) < \infty$$

Beweis Siehe Kapitel I in [Ber96]. ■

Bei dieser Zerlegung sollte man sich eine Tatsache stets vor Augen halten: In der Konstruktion werden die Sprünge des Prozesses (X_t) durch einen linearen Drift kompensiert - dieser verfälscht natürlich in der Zerlegung in Folgerung 79 den Driftparameter c - aus diesem Grund müssen Aussagen über c mit großer Vorsicht interpretiert werden.

Bemerkung In [Ber96] wird eine unwesentlich andere Zerlegung gewählt; ein Lévy Prozess (Z_t) wird in die drei Prozesse $(X_t^{(1)})$, $(X_t^{(2)})$ und $(X_t^{(3)})$ zerlegt, derart dass gilt:

$$Z_t = X_t^{(1)} + X_t^{(2)} + X_t^{(3)}$$

Dabei ist der Prozess $(X_t^{(1)})$ eine linear transformierte Brownsche Bewegung, der Prozess $(X_t^{(2)})$ ist ein Compound Poisson Prozess, der nur Sprünge der Größe mindestens 1 besitzt und $(X_t^{(3)})$ ist schließlich ein Martingal, das aus Sprüngen kleiner als 1 besteht.

Diese Zerlegung ist natürlich zu der hier gewählten Zerlegung äquivalent und führt zu genau den gleichen Ergebnissen; es handelt sich tatsächlich nur um eine andere Sichtweise. \square

6.2 Laplace Transformation

Die Zerlegung eines Lévy Prozesses ermöglicht uns nun auch sehr einfach, die Laplace Transformierte eines Lévy Prozesses zu bestimmen, denn die drei Komponenten sind ziemlich vertraut.

Satz 80 (Laplace Transformierte eines Lévy Prozesses) Sei (Z_t) ein Lévy Prozess mit Lévy Maß μ , linearem Drift c und einer Brownschen Bewegung mit Varianz σ^2 . Dann ist die Laplace Transformierte φ_Z gegeben durch

$$\varphi_Z(\lambda) = \exp\left(-c\lambda + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2 + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{-\lambda x} - 1 + \lambda x I(|x| \leq 1)\right) \mu(dx)\right) \quad (6.2)$$

Beweis Nach Folgerung 79 existiert zu (Z_t) eine eindeutige Zerlegung der Form $Z_t = \sigma B_t + X_t + ct$. Für die Laplace Transformierte φ_Z gilt dann

$$\varphi_Z(\lambda) = \varphi_{\sigma B_1}(\lambda) \cdot \varphi_X(\lambda) \cdot \varphi_c(\lambda)$$

Die Laplace Transformierte der Brownschen Bewegung (σB_t) und des linearen Driftes ct sind uns schon bekannt; es fehlt also nur noch die Laplace Transformierte φ_X .

Der Sprungprozess (X_t) ist definiert durch den Grenzwert

$$X_t := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} X_t^\varepsilon$$

Also konvergieren auch die Faltungshalbgruppen der Prozesse (X_t^ε) schwach gegen die Faltungshalbgruppe von (X_t) . Damit konvergiert auch die Laplace Transformierten φ_{X^ε} punktweise gegen φ_X .¹ Die Prozesse (X_t^ε) sind nun allesamt Compound Poisson Prozesse jeweils

¹Diese Schlussfolgerung ist nicht trivial, und im Allgemeinen (d.h. wenn kein Lévy Prozess betrachtet wird) falsch. Der Beweis dieser Behauptung nutzt allerdings die Existenz der charakteristischen Funktion aus und verwendet Argumente der Funktionentheorie. Wir nehmen deshalb diese Aussage einfach als gegeben.

mit Intensitätsmaß μ^ε und linearem Drift $-c_\varepsilon$; die Laplace Transformierte φ_{X^ε} sind demnach gegeben durch

$$\varphi_{X^\varepsilon}(\lambda) = \exp\left(c_\varepsilon\lambda + \int_{\mathbb{R}} (e^{-\lambda x} - 1) \mu^\varepsilon(dx)\right)$$

Da $c_\varepsilon = \int_{-1}^{+1} x\mu^\varepsilon(dx)$ ist, folgt

$$\begin{aligned} &= \exp\left(\int_{\mathbb{R}} (e^{-\lambda x} - 1 + \lambda x I(|x| \leq 1)) \mu^\varepsilon(dx)\right) \\ &= \exp\left(\int_{(-\infty, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, \infty)} (e^{-\lambda x} - 1 + \lambda x I(|x| \leq 1)) \mu(dx)\right) \end{aligned}$$

Offenbar konvergieren φ_{X^ε} für $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen

$$\varphi_X(\lambda) = \exp\left(\int_{\mathbb{R}} (e^{-\lambda x} - 1 + \lambda x I(|x| \leq 1)) \mu(dx)\right)$$

Die Laplace Transformierte des gesamten Prozesses (Z_t) ergibt sich nun aus

$$\begin{aligned} \varphi_Z(\lambda) &= \varphi_{\sigma B_1}(\lambda) \cdot \varphi_X(\lambda) \cdot \varphi_c(\lambda) \\ &= \exp\left(\frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2\right) \exp\left(\int_{\mathbb{R}} (e^{-\lambda x} - 1 + \lambda x I(|x| \leq 1)) \mu(dx)\right) \exp(-c\lambda) \\ &= \exp\left(-c\lambda + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2 + \int_{\mathbb{R}} (e^{-\lambda x} - 1 + \lambda x I(|x| \leq 1)) \mu(dx)\right) \end{aligned}$$

■

Bemerkung Mit Hilfe der Laplace Transformaten können wir auch sehr einfach den Erwartungswert (falls er denn existiert) der Zuwächse eines Lévy Prozesses $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ mit Lévy Maß μ , linearem Drift c und Brownscher Bewegung mit Varianz σ^2 berechnen. Denn nach Satz 4 gilt $\mathbb{E}(Z_1 - Z_0) = -\varphi'_Z(0)$. Die Ableitung der Laplace Transformaten ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \varphi'_Z(\lambda) &= \frac{d}{d\lambda} \exp\left(-c\lambda + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2 + \int_{\mathbb{R}} (e^{-\lambda x} - 1 + \lambda x I(|x| \leq 1)) \mu(dx)\right) \\ &= \varphi_Z(\lambda) \left(-c + \sigma^2\lambda + \int_{\mathbb{R}} (-xe^{-\lambda x} + x I(|x| \leq 1)) \mu(dx)\right) \end{aligned}$$

Damit folgt, da $\varphi_Z(0) = 1$ ist,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z_1 - Z_0) &= -\varphi'_Z(0) \\ &= c - \int_{\mathbb{R}} (-x + x I(|x| \leq 1)) \mu(dx) \\ &= \int_{[-1, +1]^c} x\mu(dx) - c \end{aligned} \tag{6.3}$$

Dieses Ergebnis ist auch nicht überraschend, wenn man sich die Konstruktion eines Lévy Prozesses in das Gedächtnis ruft. Denn ein Lévy Prozess kann in drei unabhängige Prozesse

zerlegt werden: Einen linearen Drift (eben ct), eine Brownsche Bewegung (mit Varianz σ^2) und einen Sprungprozess. Da die Brownsche Bewegung zentriert ist, trägt diese nichts zum Erwartungswert der Zuwächse bei. Und im Sprungprozess werden alle Sprünge, die kleiner oder gleich 1 sind, kompensiert. Insgesamt tragen zum Erwartungswert der Zuwächse nur der Drift und die Sprünge größer als 1 bei. \square

6.3 Tiltten

Lemma 81 Sei (Z_t) ein Lévy Prozess mit Lévy Maß μ , linearem Drift $c \in \mathbb{R}$, und Brownscher Bewegung mit Varianz $\sigma^2 \in \mathbb{R}_+$ und μ , so dass die drei Bedingungen

$$\begin{aligned} 1. \quad & \int_{\mathbb{R}} \left(e^{-\lambda x} - 1 + \lambda x I(|x| \leq 1) \right) \mu(dx) < \infty \quad \forall \lambda \in [0, \infty) \\ \text{und } 2. \quad & 0 < \int_{[-1, +1]^c} x \mu(dx) + c < \infty \\ \text{und } 3. \quad & \lim_{\lambda \rightarrow \infty} -c\lambda + \frac{1}{2} \sigma^2 \lambda^2 + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{-\lambda x} - 1 + \lambda x I(|x| \leq 1) \right) \mu(dx) = \infty \end{aligned} \quad (\text{GLP})$$

erfüllt sind. Dann existiert genau ein $\gamma > 0$, so dass für die Laplace Transformierte $\varphi_Z(\gamma) = 1$ gilt.

Beweis Es genügt zu zeigen, dass die Voraussetzungen von Lemma 37 erfüllt sind, d.h. der Lévy Prozess muss der Bedingung (G_{FH}) oder der gleichwertigen Bedingung $(G_{\text{FH}'})$ genügen.

TEIL 1: Aus der ersten Bedingung in (GLP) folgt zunächst für alle $\lambda \in [0, \infty)$

$$\exp \left(\int_{\mathbb{R}} \left(e^{-\lambda x} - 1 + \lambda x I(|x| \leq 1) \right) \mu(dx) \right) < \infty$$

Damit folgt natürlich auch sofort für die Laplace Transformierte für alle $\lambda \in [0, \infty)$

$$\varphi_Z(\lambda) = \exp \left(-c\lambda + \frac{1}{2} \sigma^2 \lambda^2 + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{-\lambda x} - 1 + \lambda x I(|x| \leq 1) \right) \mu(dx) \right) < \infty.$$

Also ist die Laplace Transformierte φ_Z auf $[0, \infty)$ endlich, und damit ist der erste Teil der Bedingung $(G_{\text{FH}'})$ erfüllt.

TEIL 2: Betrachten wir für den Lévy Prozess (Z_t) den Erwartungswert, so erhalten wir mit Hilfe der Gleichung 6.3

$$\mathbb{E}(Z_1 - Z_0) = -\varphi'_Z(0) = \int_{[-1, +1]^c} x \mu(dx) + c$$

Daraus folgt sofort mit dem ersten Teil der Voraussetzung (GLP) der zweite Teil der Bedingung $(G_{\text{FH}'})$.

TEIL 3: Falls $\mathbb{P}(Z_1 < Z_0) = 0$ ist, dann folgt daraus für $\lambda > 0$

$$\varphi_Z(\lambda) = \mathbb{E}_0 e^{-\lambda Z_1} = \int_0^\infty e^{-\lambda z} \mathbb{P}_0(Z_1 \in dz) \leq 1.$$

Ist andererseits $\mathbb{P}(Z_1 < Z_0) > 0$, dann existiert ein Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ mit $a < b < 0$, so dass $\mathbb{P}(Z_1 - Z_0 \in [a, b]) =: p > 0$ ist. Damit folgt für $\lambda > 0$

$$\varphi_Z(\lambda) = \mathbb{E}_0 e^{-\lambda Z_1} = \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda z} \mathbb{P}_0(Z_1 \in dz) \geq p e^{-\lambda b} \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} \infty$$

Es ist also $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \varphi_Z(\lambda) = \infty$ genau dann, wenn $\mathbb{P}(Z_1 < Z_0) > 0$ ist. Dies ist äquivalent dazu, dass $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \log \varphi_Z(\lambda) = \infty$ ist; dies entspricht in der Darstellung 6.2 der Laplace Transformierten des Prozesses (Z_t) jedoch gerade der zweiten Bedingung in (G_{LP}) . Also ist $\mathbb{P}(Z_1 < Z_0) > 0$ und damit auch der dritte Teil der Bedingung $(G_{FH'})$ erfüllt. ■

Satz 82 (Tilten eines Lévy Prozesses) Sei $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ ein Lévy Prozess mit Lévy Maß μ , linearem Drift c und Brownscher Bewegung mit Varianz σ^2 , so dass die Bedingungen (G_{LP}) erfüllt sind. Dann existiert ein mit dem Parameter $\gamma > 0$ getilteter Prozess (\tilde{Z}_t) . Dieser ist wieder ein Lévy Prozess mit Lévy Maß $\tilde{\mu}$, linearem Drift \tilde{c} und Brownscher Bewegung mit Varianz σ^2 . Dabei sind

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}(dx) &:= e^{-\gamma x} \mu(dx) \\ \tilde{c} &:= c - \sigma^2 \gamma + \int_{-1}^{+1} x (e^{-\gamma x} - 1) \mu(dx). \end{aligned}$$

Beweis Der Prozess (Z_t) besitzt nach Satz 80 die Laplace Transformierte

$$\varphi_Z(\lambda) = \exp \left(-c\lambda + \frac{1}{2} \sigma^2 \lambda^2 + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{-\lambda x} - 1 + \lambda x I(|x| \leq 1) \right) \mu(dx) \right)$$

Da der Prozess (Z_t) die Bedingungen (G_{LP}) erfüllt, existiert ein $\gamma > 0$ mit

$$\varphi_Z(\gamma) = 1.$$

Dies ist offenbar dazu äquivalent, dass der Exponent der Laplace Transformierten gleich Null ist, also

$$-c\gamma + \frac{1}{2} \sigma^2 \gamma^2 + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{-\gamma x} - 1 + \gamma x I(|x| \leq 1) \right) \mu(dx) = 0 \quad (6.4)$$

TEIL 1: Als ersten Schritt konstruieren wir aus μ ein neues Lévy Maß $\tilde{\mu}$, das dann das Lévy Maß des getilteten Prozesses sein wird. Als erstes benötigen wir noch eine Ungleichung, die sich aus der Gleichung 6.4 ergibt:

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}} \left(e^{-\gamma x} - 1 + \gamma x I(|x| \leq 1) \right) \mu(dx) < \infty \\ \Rightarrow &\int_{(-\infty, -1) \cup (1, \infty)} \left(e^{-\gamma x} - 1 \right) \mu(dx) < \infty \end{aligned}$$

Da $\int_{(-\infty, -1) \cup (1, \infty)} \mu(dx) < \int_{\mathbb{R}} \min(|x^2|, 1) \mu(dx) < \infty$ ist, folgt daraus

$$\Rightarrow \int_{(-\infty, -1) \cup (1, \infty)} e^{-\gamma x} \mu(dx) < \infty \quad (6.5)$$

Damit können wir nun ein neues Maß einführen; setzen wir nämlich

$$\tilde{\mu}(dx) := e^{-\gamma x} \mu(dx),$$

dann ist $\tilde{\mu}$ wieder ein Lévy Maß, welches die Ungleichung 6.1 erfüllt, denn es gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \min(|x^2|, 1) \tilde{\mu}(dx) &= \int_{\mathbb{R}} \min(|x^2|, 1) e^{-\gamma x} \mu(dx) \\ &= \int_{[-1, +1]} x^2 e^{-\gamma x} \mu(dx) + \int_{(-\infty, -1) \cup (1, \infty)} e^{-\gamma x} \mu(dx) \\ &\leq e^{\gamma} \int_{[-1, +1]} x^2 \mu(dx) + \int_{(-\infty, -1) \cup (1, \infty)} e^{-\gamma x} \mu(dx) \\ &< \infty \end{aligned}$$

Der erste Summand ist dann durch die Bedingung 6.1 kleiner als Unendlich, und den zweiten Summanden haben wir ebenfalls in der Ungleichung 6.5 abgeschätzt, somit ist der gesamte Ausdruck endlich, und wir erhalten auch für das Maß $\tilde{\mu}$ die gewünschte Bedingung 6.1.

TEIL 2: Im zweiten Schritt wird gezeigt, dass der lineare Drift \tilde{c} überhaupt konvergiert, dass also gilt

$$\left| \int_{-1}^{+1} x (e^{-\gamma x} - 1) \mu(dx) \right| < \infty. \quad (6.6)$$

Denn $\int_{-1}^{+1} x \mu(dx)$ oder $\int_{-1}^{+1} x e^{-\gamma x} \mu(dx)$ müssen nicht notwendigerweise konvergieren. Die einzige Voraussetzung, die das Maß μ erfüllen muss, ist die Gleichung 6.1:

$$\int_{\mathbb{R}} \min(|x|^2, 1) \mu(dx) < \infty$$

Zunächst ergibt sich für die Exponentialfunktion $\exp(x)$ mit $-1 \leq x \leq 1$ folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\ &= 1 + x + x^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-2}}{n!} \end{aligned}$$

Für $-1 \leq x \leq 1$ erhalten wir weiterhin

$$\begin{aligned} &\leq 1 + x + x^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \\ &= 1 + x + x^2 (e - 2) \\ &\leq 1 + x + x^2 \end{aligned}$$

Damit kann das Integral in Ungleichung 6.6 abgeschätzt werden. Falls $|\gamma| \leq 1$ ist, erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\left| \int_{-1}^{+1} x (e^{-\gamma x} - 1) \mu(dx) \right| &\leq \int_{-1}^{+1} |x (e^{-\gamma x} - 1)| \mu(dx) \\
&\leq \int_{-1}^{+1} |x(\gamma^2 x^2 - \gamma x)| \mu(dx) \\
&= \int_{-1}^{+1} |\gamma^2 x^3 - \gamma x^2| \mu(dx) \\
&\leq |\gamma^2 - \gamma| \int_{-1}^{+1} x^2 \mu(dx) \\
&< \infty \quad \text{nach Voraussetzung 6.1.}
\end{aligned}$$

Falls $|\gamma| > 1$ ist, muss das Integral aufgeteilt werden, da die Abschätzung der Exponentialfunktion ja nur für x mit $|x| \leq 1$ gilt. Sei $\delta := |1/\gamma| < 1$. Dann gilt $|\gamma x| \leq 1$ genau dann, wenn $|x| \leq \delta$ ist. Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\left| \int_{-1}^{+1} x (e^{-\gamma x} - 1) \mu(dx) \right| &\leq \int_{-1}^{+1} |x (e^{-\gamma x} - 1)| \mu(dx) \\
&= \int_{\delta \leq |x| \leq 1} |x (e^{-\gamma x} - 1)| \mu(dx) + \int_{|x| < \delta} |x (e^{-\gamma x} - 1)| \mu(dx) \\
&\leq a \int_{\delta \leq |x| \leq 1} \mu(dx) + \int_{|x| < \delta} |\gamma^2 x^3 - \gamma x^2| \mu(dx)
\end{aligned}$$

mit $a := \sup\{|x(e^{-\gamma x} - 1)| : \delta \leq |x| \leq 1\} < \infty$. Da $|x| < \delta < 1$ ist, folgt weiter

$$\leq a \int_{\delta \leq |x| \leq 1} \mu(dx) + |\gamma^2 - \gamma| \int_{|x| < \delta} x^2 \mu(dx)$$

Der erste Summand ist nach Lemma 78 endlich, und der zweite nach Voraussetzung 6.1 ebenso, also folgt die Behauptung.

TEIL 3: Betrachten wir uns nun die Laplace Transformierte des mit γ getilteten Prozesses (\tilde{Z}_t) , dann gilt mit der Bemerkung zur Definition 38

$$\varphi_{\tilde{Z}}(\lambda) = \varphi_Z(\lambda + \gamma),$$

und wir erhalten somit für den Exponenten der Laplace Transformierten

$$\begin{aligned}
&\log(\varphi_{\tilde{Z}}(\lambda)) \\
&= -c(\lambda + \gamma) + \frac{1}{2}\sigma^2(\lambda + \gamma)^2 + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{-(\lambda+\gamma)x} - 1 + (\lambda + \gamma)xI(|x| \leq 1) \right) \mu(dx) \\
&= -(c - \sigma^2\gamma)\lambda + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2 + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{-(\lambda+\gamma)x} - 1 + (\lambda + \gamma)xI(|x| \leq 1) \right) \mu(dx) \\
&\quad - c\gamma + \frac{1}{2}\sigma^2\gamma^2
\end{aligned}$$

Gleichung 6.4 führt nun zu

$$\begin{aligned}
&= -(c - \sigma^2\gamma)\lambda + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2 + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{-(\lambda+\gamma)x} - 1 + (\lambda + \gamma)xI(|x| \leq 1) \right) \mu(dx) \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}} \left(e^{-\gamma x} - 1 + \gamma xI(|x| \leq 1) \right) \mu(dx) \\
&= -(c - \sigma^2\gamma)\lambda + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2 \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{-(\lambda+\gamma)x} - e^{-\gamma x} + \lambda xI(|x| \leq 1) \right) \mu(dx) \\
&= -(c - \sigma^2\gamma)\lambda + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2 \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{-(\lambda+\gamma)x} - e^{-\gamma x} + \lambda(x - xe^{-\gamma x} + xe^{-\gamma x})I(|x| \leq 1) \right) \mu(dx)
\end{aligned}$$

Da $\int_{\mathbb{R}} \lambda(x - xe^{-\gamma x})I(|x| \leq 1)\mu(dx) = \lambda \int_{-1}^{+1} (x - xe^{-\gamma x})\mu(dx)$ ist, und da im Schritt 2 gezeigt wurde, dass $\int_{-1}^{+1} x(e^{-\gamma x} - 1)\mu(dx)$ konvergiert, kann das Integral wie folgt zerteilt werden:

$$\begin{aligned}
&= - \left(c - \sigma^2\gamma + \int_{-1}^{+1} (xe^{-\gamma x} - x) \mu(dx) \right) \lambda + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2 \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{-(\lambda+\gamma)x} - e^{-\gamma x} + \lambda xe^{-\gamma x}I(|x| \leq 1) \right) \mu(dx) \\
&= - \left(c - \sigma^2\gamma + \int_{-1}^{+1} (xe^{-\gamma x} - x) \mu(dx) \right) \lambda + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2 \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{-\lambda x} - 1 + \lambda xI(|x| \leq 1) \right) e^{-\gamma x} \mu(dx)
\end{aligned}$$

Setzen wir nun das in Teil 1 konstruierte Lévy Maß $\tilde{\mu}(dx)$ ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
&= - \left(c - \sigma^2\gamma + \int_{-1}^{+1} x (e^{-\gamma x} - 1) \mu(dx) \right) \lambda + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2 \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{-\lambda x} - 1 + \lambda xI(|x| \leq 1) \right) \tilde{\mu}(dx)
\end{aligned}$$

Damit besitzt die Laplace Transformierte des getilteten Prozesses wieder die Form eines Lévy Prozesses mit der Lévy Dichte $\tilde{\mu}$, Brownscher Bewegung mit Varianz σ^2 und linearem Drift

$$\tilde{c} = c - \sigma^2\gamma + \int_{-1}^{+1} x (e^{-\gamma x} - 1) \mu(dx).$$

■

Bemerkung Falls das Lévy Maß μ eines Lévy Prozesses $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ endlich ist, dann gilt offenbar

$$\int_{-1}^{+1} x \mu(dx) < \infty.$$

Damit vereinfacht sich die Laplace Transformierte des Prozesses zu

$$\begin{aligned}\varphi_Z(\lambda) &= \exp\left(-c\lambda + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2 + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{-\lambda x} - 1 + \lambda x I(|x| \leq 1)\right) \mu(dx)\right) \\ &= \exp\left(-c'\lambda + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2 + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{-\lambda x} - 1\right) \mu(dx)\right)\end{aligned}$$

wobei $c' := c - \int_{-1}^{+1} x \mu(dx)$ ist. Somit wurde die Kompensation der kleinen Sprünge aus dem Prozess wieder mit in den linearen Drift eingerechnet. Damit stellt c' nunmehr auch den unverfälschten linearen Drift des Compound Poisson Prozesses dar.

Der getiltete Prozess $(\tilde{Z}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ besitzt nach Satz 82 als Laplace Transformierte die Darstellung

$$\begin{aligned}\varphi_{\tilde{Z}}(\lambda) &= -\left(c - \sigma^2\gamma + \int_{-1}^{+1} x (e^{-\gamma x} - 1) \mu(dx)\right) \lambda + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2 \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{-\lambda x} - 1 + \lambda x I(|x| \leq 1)\right) \tilde{\mu}(dx)\end{aligned}$$

Setzen wir nun c' ein, und ziehen die (endliche) Kompensation aus dem zweiten Integral heraus, dann erhalten wir

$$\begin{aligned}&= -\left(c' - \sigma^2\gamma + \int_{-1}^{+1} x e^{-\gamma x} \mu(dx)\right) \lambda + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2 \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{-\lambda x} - 1\right) \tilde{\mu}(dx) + \int_{-1}^{+1} \lambda x \tilde{\mu}(dx) \\ &= -(c' - \sigma^2\gamma) \lambda + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2 + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{-\lambda x} - 1\right) \tilde{\mu}(dx) \\ &\quad - \lambda \int_{-1}^{+1} x \underbrace{e^{-\gamma x} \mu(dx)}_{=\tilde{\mu}(dx)} + \lambda \int_{-1}^{+1} x \tilde{\mu}(dx)\end{aligned}$$

Die beiden letzten Summanden addieren sich gerade zu Null auf, und so folgt

$$= -(c' - \sigma^2\gamma) \lambda + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2 + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{-\lambda x} - 1\right) \tilde{\mu}(dx)$$

In dieser einfacheren Darstellung für den Fall eines endlichen Lévy-Maßes erkennen wir auch sofort die schon behandelten Fälle eines Compound Poisson Prozess und einer Brownschen Bewegung wieder; es wird also wieder das Intensitätsmaß getiltet, und der Lineare Drift c' wird durch $c' - \sigma^2\gamma$ ersetzt. \square

6.4 Beispiele

Es drängt sich jetzt natürlich auch die Frage nach einem nicht-trivialen Beispiel für die Zerlegung eines Lévy Prozesses auf – insbesondere für die Beschreibung des getilteten Prozesses, der das Anfangsstück der Zerlegung darstellt. Die Theorie wurde in Satz 82 schon vorbereitet;

in der Praxis stehen wir jedoch vor dem Problem, ein γ zu finden, das Gleichung 6.4 erfüllt. Wir wollen uns deshalb auf den Fall einer endlichen Lévy Dichte, sprich eines Compound Poisson Prozesses mit Brownscher Bewegung, beschränken.

Sei also (Z_t) ein Lévy Prozess mit endlicher Lévy Dichte μ . Wie wir in der vorigen Bemerkung gesehen haben, besitzt der Prozess dann eine Laplace Transformation

$$\varphi_Z(\lambda) = \exp\left(-c\lambda + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2 + \int_{\mathbb{R}} (e^{-\lambda x} - 1) \mu(dx)\right)$$

Und die Laplace Transformierte des getilteten Prozesses (\tilde{Z}_t) ist gegeben durch

$$\varphi_{\tilde{Z}}(\lambda) = \exp\left(-\tilde{c}\lambda + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2 + \int_{\mathbb{R}} (e^{-\lambda x} - 1) \tilde{\mu}(dx)\right)$$

wobei der Drift $\tilde{c} = c - \sigma^2\gamma$ ist, und $\tilde{\mu}$ das mit dem Parameter γ getiltete Intensitätsmaß ist.

Beispiel: Poisson Prozess mit Brownscher Bewegung

In dem ersten Beispiel betrachten wir den Fall eines Lévy Prozesses (Z_t) , der aus einem Poisson Prozesses mit Sprungrate $\alpha = \frac{-3}{2(e^{-1}-1)} \approx 2.373$ und linearem Drift $c = -1$ besteht, und von einer standard Brownschen Bewegung (also mit Varianz $\sigma^2 = 1$) überlagert wird. Die Laplace Transformierte ist dann gegeben durch

$$\varphi_Z(\lambda) = \exp\left(\lambda + \frac{1}{2}\lambda^2 + \frac{-3}{2(e^{-1}-1)}(e^{-\lambda} - 1)\right)$$

Offenbar ist mit $\gamma = 1$ eine Lösung der Gleichung $\varphi_Z(\gamma) = 1$ gegeben. Wie wir in Abschnitt 1.3 gesehen haben, ist dieses γ bis auf die trivialen Lösung 0 eindeutig.

Damit können wir nun die Verteilung des getilteten Prozesses bestimmen. Der Drift \tilde{c} ist gegeben durch

$$\tilde{c} = c - \gamma = -2.$$

Da das Intensitätsmaß des Compound Poisson Prozesses nur eine einpunktige Masse in 1 besitzt, lässt sich auch sofort die Sprungrate des getilteten Prozesses angeben:

$$\tilde{\alpha} = e^{-\gamma}\alpha = \frac{-3}{2(1-e)} \approx 0.873$$

In diesem Beispiel können wir zwei interessante Phänomene beobachten: Einerseits wird der lineare Drift kleiner, und andererseits nimmt auch die Sprungrate ab. Beide Beobachtungen decken sich allerdings mit der Intuition: Der getiltete Prozess besitzt einen negativen Drift im Gegensatz zum Ausgangsprozess. Da eine Brownsche Bewegung ein Bestandteil des Prozesses ist, verändert sich der lineare Drift (Vergleiche hierzu das Kapitel über die Brownsche Bewegung.). Und da der Poisson Prozess ausschließlich positive Sprünge der Größe 1 besitzt, nimmt auch hier die Sprungrate ab, so dass auch der Sprungprozess zu dem negativen Drift von (\tilde{Z}_t) beiträgt.

Beispiel: Negativer Poisson Prozess mit Brownscher Bewegung

Um das vorige Beispiel noch etwas zu erleuchten, untersuchen wir nun eine ähnliche Konfiguration. Allerdings soll der Sprungprozess diesmal nur negative Sprünge der Größe 1 besitzen; es handelt sich also um einen negativen Poisson Prozess.

Sei also (Z_t) ein Lévy Prozess bestehend aus einem negativen Poisson Prozesses mit Sprungrate $\alpha = \frac{1}{2(e-1)} \approx 0.291$ und linearem Drift $c = 1$, der von einer standard Brownschen Bewegung (also mit Varianz $\sigma^2 = 1$) überlagert wird. Die Laplace Transformierte ist dann gegeben durch

$$\varphi_Z(\lambda) = \exp\left(-\lambda + \frac{1}{2}\lambda^2 + \frac{1}{2(e-1)}(e^\lambda - 1)\right)$$

Wieder löst $\gamma = 1$ die Gleichung $\varphi_Z(\gamma) = 1$, und wir erhalten diesmal für den linearen Drift \tilde{c} des getilteten Prozesses

$$\tilde{c} = c - \gamma = 0.$$

Da das Intensitätsmaß des Compound Poisson Prozesses seine gesamte Masse auf dem Punkt -1 legt, können wir die Sprungrate des getilteten Prozesses ermitteln durch

$$\tilde{\alpha} = e^\gamma \alpha = \frac{e}{2(1-e)} \approx 0.791$$

Auch in diesem Beispiel ist der lineare Drift kleiner geworden, aber diesmal hat die Sprungrate zugenommen; dies erklärt sich dadurch, dass der Sprungprozess nur negative Sprünge besitzt, und somit eine Vergößerung der Sprungrate den gesamten getilteten Prozess den negativen Drift verstärkt.

Beispiel: Brownscher Bewegung mit normalverteilten Sprüngen

Als letztes Beispiel wollen wir uns einen Compound Poisson Prozess betrachten, dessen Intensitätsmaß gerade die Normalverteilung ist. Dieser wird dann wieder von einer Brownschen Bewegung mit Drift überlagert. Damit erhalten wir für den Prozess (Z_t) folgende Laplace Transformation:

$$\varphi_Z(\lambda) = \exp\left(-c\lambda + \frac{1}{2}\lambda^2 + \int_{\mathbb{R}} (e^{-\lambda x} - 1) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx\right)$$

Das Integral ergibt gerade $\exp(\frac{\lambda^2}{2}) - 1$, also erhalten wir

$$= \exp\left(-c\lambda + \frac{1}{2}\lambda^2 + e^{\frac{\lambda^2}{2}} - 1\right)$$

Setzen wir für den linearen Drift nun $c := \sqrt{e} - \frac{1}{2} \approx 1.148$ an, dann ist gerade $\gamma = 1$ die positive Nullstelle des Exponenten der Laplace Transformierten. Dann besitzt der gesamte Prozess natürlich einen positiven Drift der gegeben ist durch

$$\mathbb{E}_0 Z_1 = c + \int x \mu(dx) = \sqrt{e} - \frac{1}{2} \approx 1.148$$

Aber sowohl die Brownsche Bewegung als auch der Sprungprozess mit Sprüngen normalverteilter Größe ermöglichen auch Abwärtsbewegungen des Prozesses, so dass das globale Infimum nicht fast sicher trivial im Startpunkt liegt.

Für den getilteten Prozess (\tilde{Z}_t) erhalten wir dann den linearen Drift

$$\tilde{c} = c - \gamma = \sqrt{e} - \frac{3}{2} \approx 0.148$$

und das Intensitätsmaß

$$\tilde{\mu}(dx) = e^{-\gamma x} \mu(dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x} e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+1)^2}{2}}$$

Damit hat sich die Sprungrate (die sich aus $\int \tilde{\mu}(dx)$ ergibt, siehe Abschnitt 4.2) von 1 auf \sqrt{e} erhöht, und zusätzlich hat sich das Zentrum der Normalverteilung aus Null heraus nach -1 hin verschoben. Der Sprungprozess von (\tilde{Z}_t) besitzt also einerseits eine größere Sprungrate und zusätzlich werden negative Sprünge verstärkt begünstigt. Damit besitzt der Prozess (\tilde{Z}_t) den Gesamtdrift

$$\mathbb{E}_0 \tilde{Z}_1 = \tilde{c} + \int x \tilde{\mu}(dx) = \sqrt{e} - \frac{3}{2} - \sqrt{e} = -\frac{3}{2}$$

6.5 Offene Fragen und Probleme

Es stellt sich natürlich wieder die Frage, ob die Bedingung (G_{LP}) notwendig ist für die Existenz eines getilteten Prozesses, oder ob sie nicht abgeschwächt werden kann durch

1. $\lim_{t \rightarrow \infty} Z_t = \infty$ fast sicher
- und 2. $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} -c\lambda + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2 + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{-\lambda x} - 1 + \lambda x I(|x| \leq 1) \right) \mu(dx) = \infty$

Eine solche Vermutung ist plausibel: Die erste Bedingung fordert einen positiven Drift des Prozesses, und die zweite Bedingung stellt sich, dass der Prozess sich auch mit positiver Wahrscheinlichkeit nach unten bewegt (vergleiche den Beweis der Bedingung (G_{LP}) in Lemma 81).

Ein weiteres Problem ist die Tatsache, dass Satz 82 zwar eine Darstellung des getilteten Prozesses angibt – einen nicht trivialen Lévy Prozess zu tilten stellt allerdings kein einfaches Unterfangen dar. Denn allein eine geschlossene oder numerische Lösung der Gleichung 6.4 zu bekommen, kann beliebig schwierig werden.

Rufen wir uns eine getiltete Brownsche Bewegung mit Drift und einen getilteten Compound Poisson Prozess in das Gedächtnis. Wir wissen, dass der erste Prozess wieder eine Brownsche Bewegung ist, deren Drift allerdings das Vorzeichen gewechselt hat. Im zweiten Fall blieb der lineare Drift erhalten, es wurden nur die Sprünge umgewichtet, und die Sprungrate verändert. Nun stellt sich natürlich die interessante Frage, wie das Tilten auf die Pfade eines Lévy Prozesses wirkt, der sehr viele kleine Sprünge besitzt.

Ein möglicher Ansatz, um den linearen Drift eines Lévy Prozesses (Z_t) zu bestimmen, ist die Konvergenz von

$$\lim_{t \searrow 0} 1/t Z_t$$

zu untersuchen, da der Grenzwert die Steigung im Punkt 0 angibt. Falls (Z_t) eine Brownsche Bewegung ist, dann führt dieser Ansatz jedoch nicht weit, da mit $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ auch $(tZ_{1/t})_{t \in \mathbb{R}_+}$ eine Brownsche Bewegung ist, und somit der Ausdruck nicht konvergiert. Falls es sich jedoch um einen Compound Poisson Prozess handelt, dann ist dieser Ansatz erfolgreich, und man erhält

$$\lim_{t \searrow 0} 1/tZ_t = c$$

wobei c der lineare Drift in der Darstellung 65 ist (Siehe Proposition I.2 in [Ber96]). Allerdings haben wir hier das Verhalten des Drifts schon geklärt.

Eine Aussage dieser Art über einen allgemeinen Lévy Prozess steht noch aus und scheint sehr schwierig zu sein. Es ist auch fraglich, ob überhaupt eine derartiger Satz für einen Lévy Prozess existiert, denn wie oben bemerkt wurde, verhält sich alleine schon der lineare Drift sehr unterschiedlich, je nachdem ob eine einfache Brownsche Bewegung oder ein Compound Poisson Prozess vorliegt.

Literaturverzeichnis

- [Bau91] BAUER, HEINZ: *Wahrscheinlichkeitstheorie*. de Gruyter, 1991.
- [Ber91] BERTOIN, JEAN: *Sur la décomposition de la trajectoire d'un processus de Lévy spectralement positif en son infimum*. Ann. Inst. Henri Poincaré, 27(4):537–547, 1991.
- [Ber92] BERTOIN, JEAN: *An Extension of Pitman's Theorem for Spectrally Positive Lévy Processes*. The Annals of Probability, 20(3):1464–1483, 1992.
- [Ber93] BERTOIN, JEAN: *Splitting at the Infimum and Excursions in Half-Lines for Random Walks and Lévy Processes*. Stochastic Processes and their Applications, 47:17–35, 1993.
- [Ber96] BERTOIN, JEAN: *Lévy Processes*. Cambridge Tracts in Mathematics, 1996.
- [Cha96] CHAUMONT, L.: *Conditioning and Path Decompositions for Lévy Processes*. Stochastic Processes and their Applications, 64:39–54, 1996.
- [KS91] KARATZAS, IOANNIS und SHREVE, STEVEN E.: *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1991.
- [Pit75] PITMAN, JAMES W.: *One-Dimensional Brownian Motion and the Three-Dimensional Bessel Process*. Adv. Appl. Prob., 7:511–526, 1975.
- [RW94] ROGERS, L. C. G. und WILLIAMS, DAVID: *Diffusions, Markov Processes and Martingales*, Band 1 der Reihe *Cambridge Mathematical Library*. Cambridge University Press, 1994.
- [Wil74] WILLIAMS, DAVID: *Path Decomposition and Continuity of Local Time for One-Dimensional Diffusions*. Proc. London Math. Soc., 28:738–768, 1974.