Institut für Geschichte der Naturwissenschaften

Institute for the History of Science

Johann Wolfgang Goethe-Universität

Frank Linhard

Symmetrie

Juli 1997

Preprint No. 32

The IGN Preprint Series

Symmetrie

Frank Linhard

Institut für Geschichte der Naturwissenschaften
Johann Wolfgang Goethe-Universität
Frankfurt am Main

Um zu einem grundlagenbezogenen Verständnis der Natur vom Standpunkt ihrer theoretischen Beschreibung zu gelangen, ist es sinnvoll, von einer prinzipiellen Verfaßtheit derselben auszugehen (Leibniz). Diese prinzipielle Verfaßtheit ist dann derart, daß neben den logischen Prinzipien, wie dem Satz vom zureichenden Grunde, oder dem Widerspruchssatz, echt physikalische Prinzipien einen Weg der theoretischen Beschreibung konstituieren. Ein solches fundamentales physikalisches Prinzip wäre das *Prinzip der kleinsten Wirkung* (Principle of least action). Andere Prinzipien, wie das der *Identität des Ununterscheidbaren* können Zwischenstufen darstellen, die im Grenzbereich logischer und physikalischer Prinzipien zu verorten wären.

Symmetrie und Symmetriebrechung

Die Omnipräsenz symmetrischer Strukturen in der belebten und unbelebten Natur liefert nur ein Indiz für die Fundamentalität von Symmetrien für die Welt als Ganzes. So wie die *phänomenalen Symmetrien* aller Bereiche von unterschiedlichster Ursache sein mögen, wobei eine *lex parsimoniae* des Öfteren zugrunde liegen dürfte, entwickelt sich die Grundlage *physikalischer Symmetrien* zunehmend als einheitliche. Hierbei soll unter *physikalischer Symmetrie* eine symmetrische Situation eines Systemes verstanden werden, die eine *physikalische* Konsequenz hat. Weiter unten werden dazu Beispiele zu betrachten sein.
Versteht man die Physik als die Basiswissenschaft von alldem was ist, so stellt der formale Zugang der theoretischen Physik unsere gesicherteste Form scharf formulierten Wissens über das Seiende dar. Hierbei wird dem wissenschaftlichen Denken stets nur eine Annäherung an das was wahr ist gelingen, das Wißbare selbst kann jedoch zur bestmöglichen Form (δόξα) gebracht werden (Parmenides).
Theoriebildung basiert dann als Prozeß im wesentlichen auf zwei Teilen: a) Der Insichtnahme des Welthaften; alles dessen was physikalisch existiert. b) Dem Dialog mit dem beschreibenden Formalismus, der durch die Eigengesetzlichkeit mathematischer Strukturen in Gang gesetzt wird. Diese Eigengesetzlichkeit basiert auf der zur Beschreibung des in Sicht genommenen Welthaften angesetzten Definitorik, die dann, im Versuch Prozesse des Welthaften auf diese mathematischen Strukturen abzubilden, ihre Beliebigkeit verliert und nicht mehr willkürlich formbar ist. Solcherart kann dann die immanente Struktur des mathematischen Bildes zum Regulativ der Theoriebildung werden. Reine Isomorphie bildhafter und welthafter Strukturen ist unzureichend und nur die gleiche Art von Verknüpfungsstruktur oder

Prozeßhaftig-keit im Welthaften wie im Bildhaften kann auf eine erfolgreiche theoretische Struktur verweisen (Hertz).
Die Physik beschreibt die Ausfällung neuartiger Strukturen als Prozeß einer Symmetriebrechung. Wesentlich theoretisch fundiert ist diese Sichtweise durch die erfolgreiche „Vereinheitlichung" der elektro-schwachen Wechselwirkung (Salam, Weinberg). Hierbei ist es möglich gewesen auf formaler Basis die zunächst scheinbar voneinander unabhängigen physikalischen Grundkräfte, die den elektro-magnetischen, sowie der schwachen Wechselwirkung zugrunde liegen, als unterschiedliche Ausfällungen ein- und derselben Kraft, nämlich der elektro-schwachen Kraft zu be-schreiben. Diese Vereinigung wurde auf symmetrietheoretischer Basis durchgeführt. Die Ausfällung der einzelnen Kräfte wird dabei durch den Higgs-Mechanismus be-schrieben, der Ausdruck einer *Symmetriebrechung* ist. Entsprechend dieser erfolg-reichen Vorlage aus der theoretischen Physik der 60er Jahre versucht man mannig-fache Phänomene mittles eines äquivalenten Prozesses zu beschreiben. Die Initial-singularität (Urknall) wird beispielsweise als Brechung (Anregung, Aufwerfung, Knall, ...) eines symmetrischen Zustandes verstanden. Die Entstehung des Welthaften selber wäre auf dieser Basis als Prozeß von Symmetrie und deren Brechung zu verstehen.

Prinzip der kleinsten Wirkung

Basierend auf dem Vorbild der klassischen Mechanik hat sich in den Teilbereichen der Physik eine Form der Beschreibung etabliert, die eine einheitliche Basis des Welthaften zumindest auf der Ebene des Formalismus nahe legt. Gemeint ist die *Lagrangesche Beschreibung.* Lagranges Darstellung der Mechanik (Mécanique Analytique) gründet auf den Lagrangeschen Gleichungen, die als dynamische Gleichungen den Newtonschen völlig äquivalent sind, solange es sich um mechanische Systeme ohne Zwangsbedingungen handelt. Greifen konservative Kräfte am Mechani-schen System an, so erlauben die Lagrangeschen Gleichungen die Lösung eines belie-bigen mathematischen Problemes und zwar in der denkbar einfachsten Weise. Des-weiteren sind diese Gleichungen invariant unter beliebigen Koordinatentrans-formationen. Aus diesem Grunde haben sie einen extrem großen Anwendungsbereich bezüglich der verschiedensten mechanischen Probleme und mit entsprechender Ver-allgemeinerung auch in den *Feldtheorien.*
Mathematisch und damit auch bei entsprechender Anwendung des Formalismus in einer Theorie auch physikalisch bedeutet Symmetrie Invarianz unter Transfor-mationen. Ein System ist symmetrisch bezüglich einer Transformation, wenn es über Invarianten verfügt. Größen des Systemes sind dann von sich selbst vor und nach der Symmetrietransformation *ununterscheidbar.*

Das Prinzip der kleinsten Wirkung ist ein Variationsprinzip. Als solches ist es eine Voraussetzung für die Gültigkeit des Noetherschen Theoremes. Lagrange selbst hat seine Gleichungen aus dem Prinzip von d'Alembert abgeleitet, obgleich er sich über die Möglichkeit, eine Ableitung aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung vorzunehmen, im Klaren war. Vermutlich lag der Prioritätsstreit zwischen Maupertuis und den Leibnizianern noch nicht weit genug zurück und Lagrange fürchtete den physikalischen Inhalt seiner Mechanik durch eine Anknüpfung an diesen Streit zu überschatten. Zweifelsohne geht das Prinzip der kleinsten Wirkung -

auch wenn Leibniz keine Anwendung oder mathematische Formulierung gibt - auf den Leibnizschen Ansatz einer prinzipiellen Verfaßtheit der Welt zurück. Im 19. Jahrhundert hat Hamilton das Prinzip in seiner modernen Form formuliert. Sein Verdienst bestand darin, daß er in der Lage war, die isoenergetische Einschränkung bezüglich der Pfade im Variationsprinzip zu vermeiden. Er hat gezeigt, daß Lagrangegleichungen aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung ohne Beschränkungen bezüglich der virtuellen Pfade im Konfigurationsraum abgeleitet werden können.
Das Wirkungsfunktional hat die Form

$$S[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(\dot{q}, q, t)\,dt$$

wobei t_1 und t_2 die Anfangs- und Endzeiten, sowie L die Lagrangefunktion des gegebenen Systemes sind. Die Lagrangefunktion L setzt sich aus kinetischer Energie T und potentieller Energie U nach L=T-U zusammen.
Diese Form des Variationsprinzipes liefert einen erweiterten Zugang zur Dynamik. Man betrachte den Anfangspunkt im Konfigurationsraum eines Systemes, der durch die Koordinaten

$$q_\alpha(t_1)\ (\alpha=1,...,f)$$

gegeben ist, sowie durch den Endpunkt:

$$q_\alpha(t_2)\ (\alpha=1,...,f).$$

Nun stelle man sich vor, diese beiden Punkte des Phasen- oder Konfigurationsraumes wären durch *alle möglichen Pfade* dieses Raumes verbunden. Damit hat man die virtuellen Pfade. Die Frage nach dem „wirklich“ realisierten dieser Pfade wird dann durch das Prinzip der kleinsten Wirkung beantwortet: Es ist derjenige aus der hier „anschaulich“ definierten Klasse von Pfaden, der die Wirkung S des obigen Ausdruckes minimiert. Es gibt einen Pfad $q_r(t)$ für den die Wirkung $S[q_r(t)]$ kleiner ist als für alle anderen Pfade:

$$S[q_r(t)] < S[q_{\alpha\neq r}(t)]$$

Dieser Pfad ist der realisierte, die Lösung der Lagrangegleichung.
Diese Form des Prinzipes der kleinsten Wirkung ist extrem allgemein und steht in einer großen Zahl physikalischer Theorien an fundamentaler Position. Darüberhinaus hat das Prinzip der kleinsten Wirkung in dieser Form die Art in der Rechnungen in der theoretischen Physik durchgeführt werden verändert: Alle modernen Feldtheorien wie klassische und Quanten Elektrodynamik, Gravitationstheorie, Quantenchromodynamik, Theorie der elektro-schwachen Wechselwirkungen, Theorie der Supergravi-tation, Superstringtheorie, wurden aus einem verallgemeinerten Prinzip der kleinsten Wirkung für Systeme mit unendlich vielen Freiheitsgraden abgeleitet. Heutzutage ist das prinzipielle Problem jeder neuen fundamentalen Theorie die Angabe der ent-sprechenden Lagrangedichte. Ganz abgesehen davon ist das Prinzip auch in der Berechnung konkreter Probleme von großem Nutzen.
Man sieht also, daß das Prinzip der kleinsten Wirkung ganz offenbar ein fundamentales Naturgesetz ist. Darüberhinaus drängt sich die Frage nach dem Hintergrund dieses Prinzipes auf, nach seiner Bedeutung und wodurch die ubiquitäre

Generalität gewährleistet ist. Der Feynmansche Pfadintegralformalismus wird auf die Antwort dieser Fragen verweisen.

Noethers Theorem

Bekanntermaßen ist der Zusammenhang zwischen Symmetriegesetzen und Erhaltungssätzen der Physik über Noethers Theorem gegeben. Noethers Theorem ist ein wesentlicher grundlagentheoretischer Beitrag zum Variationskalkül. Dieser geht wesentlich auf Lagrange zurück. Erfüllt eine Funktion die Euler-Lagrange-Gleichungen, so heißt sie *stationär*. Diese Stationarität ist für das Studium der Mechanik von großer Bedeutung. Durch die Newtonschen Gesetze ist der Zustand eines Systemes zu jeder Zeit t durch die Vektorfunktion x(t) bestimmt - eine stationäre Funktion für ein bestimmtes Integral. Diese Stationarität garantiert die außerordentlich nützliche Freiheit in der Koordinatenwahl.
Emmy Noethers Beitrag zum Variationskalkül besteht aus zwei Theoremen über Lösungen der Euler-Lagrange-Gleichungen (Noether 1918b[1]). Sie hat gezeigt, daß für ein Integral, das unter einer Gruppe von Abbildungen von Funktionen auf Funktionen invariant ist, die stationären Funktionen bestimmte Bedingungen erfüllen. Diese Bedingungen nehmen im Falle einfacher Integralprobleme die Form erster Integrale der Euler-Lagrange-Gleichungen an. Diese Formulierung ist sehr allgemein und schließt z.B. Energie, Impuls und Drehimpuls ein.
Noethers Theorem besagt, daß ein dynamisches System, das durch eine Wirkung - die unter einer n-parametrigen Gruppentransformation invariant ist - beschrieben wird, n Invarianten, also erhaltene Größen besitzt, die in der Zeit, in der sich das System entwickelt, konstant bleiben. Diese Erhaltungsgrößen heißen auch Bewegungs-integrale.
Das Theorem ist deshalb von so herausragender Bedeutung, weil es diese sehr große Allgemeinheit aufweist. So läßt es sich nicht nur auf die klassischen Systeme anwenden, sondern sowohl auf diskrete, als auch auf kontinuierliche Systeme, auf klassische, wie auf quantenmechanische. Insbesondere können alle Feldtheorien (also: Hydrodynamik, Maxwellsche Elektrodynamik, die Einsteinschen Theorien) als kontinuierliche dynamische Systeme formuliert werden, die auf ein Wirkungs-Prinzip zurückgehen.

Damit liefert Noethers Theorem auch die Möglichkeit, Erhaltungsgrößen direkt aus den Symmetriegruppen der Feld-Differentialgleichungen zu konstruieren. Somit lassen sich die klassischen Erhaltungsgrößen aus der Galilei-Gruppe und die relativistisch formulierten Erhaltungsgrößen aus der Poincaré-Gruppe gewinnen.
Aufgrund seines hohen Allgemeinheitsgrades stellt das Theorem Noethers einen wichtigen Beitrag zur Einheit der Physik dar. Insbesondere lichteten sich dadurch die mythischen Nebel, die zur Zeit seiner Formulierung solche Gebiete, wie z.B. die Energieerhaltung umgaben.

Um die auch aus physikalischer Argumentation herleitbaren Erhaltungsgrößen Energie, Impuls und Drehimpuls einfach aus dem Umstand zu gewinnen, daß die klassische Mechanik aus einem Wirkungsprinzip abgeleitet werden kann, benötigt

[1] Emmy Noether: Invariante Variationsprobleme, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen (1918), p.237-257

man eine möglichst allgemeine Formulierung des Theoremes von Noether. In der relativistischen Verallgemeinerung nimmt der Ausdruck für die Wirkung die Form

$$S \quad = \quad \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi)\, d^4x$$

an. Noethers Theorem lautet dann:

> *Noethers Theorem*:
> Im Falle, daß die Wirkung durch eine Reparametrisierung von x_μ und ϕ unverändert bleibt, d.h. daß sie invariant unter einer Gruppe von Transformationen auf x_μ und ϕ ist, dann existiert mindestens eine Erhaltungsgröße.

Erhalten sind Kombinationen von Feldern und deren Ableitungen, die unter den Transformationen invariant sind.
Mit diesem Ergebnis können die Erhaltungsgrößen rein formal aus der Invarianz unter den raum-zeitlichen Symmetrietransformationen gewonnen werden. Dieses Vorgehen ist anderswo gezeigt[2].
Die Transformationen unter denen die Wirkung S voraussetzungsgemäß invariant ist, bilden eine Gruppe. Sie wirken auf die Orts- und die Feldvariable x_μ und ϕ.
Man gelangt zu einem erhaltenen (d.h. divergenzlosen) Strom $J^\nu{}_\mu$ dessen Existenz aus dieser Invarianz der Wirkung folgt. Durch diesen Strom läßt sich eine erhaltene - also zeitunabhängige- Ladung Q_ν definieren.

Noethers Theorem hat dann die Form

$$d/dt \int J_\nu{}^0\, d^3x = d/dt\, Q_\nu = 0 \qquad \text{(NT)}$$

Die Wirkung bleibt Invariante, wenn die Variation des Wirkungsintegrales verschwindet. Der Strom $J_\mu{}^\nu$ enthält Φ_ν und $X_\nu{}^\kappa$, die wiederum die Transformationen

$$\begin{aligned} \Delta x^\mu &= X_\nu{}^\mu\, \delta\omega^\nu \\ \Delta\phi &= \Phi_\mu\, \delta\omega^\mu \end{aligned} \qquad \text{(T)}$$

charakterisieren, wobei

$$\begin{aligned} x'^\mu &= x^\mu + \Delta x^\mu \\ \phi' &= \phi + \Delta\phi. \end{aligned}$$

Die Δx^μ , $\Delta\phi$ sind infinitesimale Transformationen mit arbiträren Parametern $\delta\omega$.
Läßt sich eine Transformation in der Form (T) darstellen, so läßt sie das Wirkungs-Integral invariant, weil die Variationen auf den Rändern des Integrationsgebietes verschwinden.
Folglich existiert dann der Strom $J_\mu{}^\nu$ mit der Eigenschaft

$$\partial_\mu J_\nu{}^\mu = 0.$$

[2] Z.B. in: Lewis H. Ryder: Quantum Field Theory, Cambridge 1985

Aus welcher wiederum folgt, daß die aus dem Strom konstruierbare Ladung Q_ν erhalten ist
Beispielsweise folgt dann aus einer Translation des Vierervektors

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon^{\mu}$$
$$\phi' = \phi$$

der Vierer-Impuls als Erhaltungsgröße

$$P_\nu = \int \theta^0{}_\nu \, d^3x.$$

Seine Komponenten sind die Energie und die drei Raumrichtungen des Impulses. Diese Größen sind Erhaltungsgrößen, *weil* die Transformation der raum-zeitlichen Translation das Wirkungsintegral S invariant läßt. Die Erhaltung des Vierer-Impulses entspricht dem Energie- und dem Impulssatz. Die Invarianz unter zeitlichen und räumlichen Translationen ist die Homogenität von Zeit und Raum.

Anhand des Beispiels ist zu sehen, daß es Symmetrieeigenschaften von Systemen gibt, die eine physikalische Konsequenz haben.
Sinnvollerweise bezeichnet man diese Symmetrien als *physikalische Symmetrien* und setzt sie von *phänomenalen Symmetrien*, die als reine Koordinatensymmetrien physikalisch folgenlos bleiben, ab.
Noethers Arbeit von 1918 zielt auf den Zusammenhang raum-zeitlicher Transformationen mit ihren Erhaltungsgrößen. Wie gesagt, erweist sich das in aller Allgemeinheit beweisbare Theorem jedoch als wesentlich tragfähiger: Es gibt auch *physikalische Symmetrien*, die über den raum-zeitlichen Bereich hinausgehen. Hiermit sind insbesondere die *physikalischen* Eichsymmetrien der Quantenfeldtheorien gemeint. Ein Beispiel für diese Klasse *physikalischer Symmetrien* ist jedoch auch schon aus der Klassik bekannt: die Ladungserhaltung.

Der Fall der hierbei auftretenden *Eichinvarianz* ist das klassische Beispiel für eine interne Symmetrie. Die Transformation ist keine raum-zeitliche, d.h., daß unsere *Anschauung* zunächst versagt:- Was kann eine nicht-raum-zeitliche Transformation bedeuten? Die Mathematik, d.h. hier unser Formalismus, unterscheidet hingegen nicht zwischen anschaulich faßbaren und rein formalen, oder internen, Transformationen. Die Phasentransformation ist aufgrund ihrer Struktur eine Symmetrietransformation. Sie läßt die Wirkung invariant, so daß nach Noethers Theorem eine Erhaltungsgröße garantiert ist.
Hier wird deutlich, welche Tiefe dem Noetherschen Theorem zukommt. Solange Formalismus und „Anschauung“ parallel laufen - so wie im Bereich der klassischen Mechanik - mag die Formulierung zwar prägnant, oder auch ästhetisch in dem Sinne erscheinen, daß sie eine einheitliche oder auch *vereinheitlichende* Darstellung ermöglicht; verliert man jedoch die „Anschauung“, so erweist sich der Formalismus insoweit als fundamental, als er in der Konsequenz über die „Anschauung“ hinaus weist.
Mit dem Theorem von Noether verfügt man über ein Instrument, auch *unanschauliche* Erhaltungssätze zu generieren. Aufgrund seines hohen Allgemeinheits-

grades, entfaltet es seine Stärke gerade in dem Bereich, in dem die klassischen Regulative ihre Kraft einbüßen:

Ist das Skalarfeld komplex, d.h. hat es zwei reelle Komponenten, so ist das reelle Wirkungsintegral invariant gegenüber der *Phasentransformation*

$$\phi \quad \to \quad \phi' = e^{i\lambda}\,\phi$$

Dieser Umstand ist klar, weil in die Lagrangedichte nur Terme der Art $\phi\phi^*$ eingehen dürfen, damit die Wirkung reell bleibt; dann ist $e^{i\lambda}\, e^{-i\lambda} = 1$.
Der Parameter λ ist konstant und reell.
Die Transformation heißt *Eichtransformation erster Art*. Die infinitesimale Form ist

$$\delta\phi \quad = \quad -i\lambda\phi$$

Die Eichtransformation ist rein *intern*, läßt also die *Raum-Zeit* unberührt. Mit der Eichtrans-formation liegt eine Symmetrietransformation vor, die im Vergleich mit den raum-zeitlichen *unanschaulich* ist.
Um das Theorem von Noether anwenden zu können, schreibt man die Transformation als

$$\begin{aligned} \Phi &= -i\phi \\ \Phi^* &= -i\phi^* \\ X &= 0 \end{aligned}$$

Mit Noethers Theorem erhält man daraus die Stromdichte der elektrischen Ladung j^μ. Es gilt

$$\partial_\mu\, j^\mu \quad = \quad 0$$

und die entsprechende Erhaltungsgröße ist

$$Q \quad = \quad \int j^0\, d^3x$$

Diese reelle Größe wird als elektrische Ladung interpretiert.

Die Verbindung zwischen Symmetrieeigenschaften und Erhaltungsgrößen ist also in der Weise fundamental, als sie über die anschaulichen Symmetrien der Raum-Zeit hinausgeht. Durch dieses Hinausgehen wird auf einen Zusammenhang verwiesen, der dem unmittelbar zugänglichen Erfahrungsbereich raum-zeitlichen Erlebens zugrunde liegt und nur durch den Formalismus zugänglich wird.

Ununterscheidbarkeit

Es wurde gezeigt, daß das *Prinzip der kleinsten Wirkung* in seiner Vermitteltheit durch Noethers Theorem die Basis dafür darstellt, daß Symmetrien unmittelbar physikalische Wirkungen zeigen. Die Klasse der *physikalischen Sym-metrien* basiert

letztlich auf der gemeinsamen Wurzel, die durch Noethers Theorem konstituiert wird.
Ebenso wie die methodologische Basis dieses „Physiktreibens auf Symmetriebasis“ im Denken von Leibniz angelegt ist, so findet sich hier auch *ein methodisches Prinzip*, das bereits qua Deduktion und Anwendung auf den Zugang zu den mathematisch-physikalischen Symmetrieformulierungen verweist: Gemeint ist das *Prinzip von der Identität des Ununterscheidbaren.*
Bei Leibniz wird dieses Prinzip im Rahmen seiner Betrachtungen zum Ähnlichkeitsbegriff in der Geometrie eingeführt, nämlich in der *Analysis situs*. Dort heißt es:

> ¯Quae ex determinantibus (seu datis sufficientibus) discerni non possunt, ea omnio discerni non posse, cum ex determinantibus caetera omnia oriantur.®[3]

Wie gesagt handelt es sich bei Leibniz zunächst um ein rein methodisches Prinzip, das er ganz folgerichtig auch in einem mathematischen Kontext formuliert. An anderen Stellen und vor allem in der Auseinandersetzung mit Clarke, versucht Leibniz darzulegen, daß ununterscheidbare Entitäten als *realia* nicht vorkommen können. Ununterscheidbarkeit bleibt also eine auf *abstracta* beschränkte mögliche Eigenschaft.
Das Prinzip von der Identität des Ununterscheidbaren ist auf der Logik basiert: Ununterscheidbarkeit bedeutet, daß keine Eigenschaft, oder kein Merkmal zweier (oder entsprechend erweitert: beliebig vieler) Größen angegeben - und damit getestet - werden kann, das eine Unterscheidung erlauben würde. Physikalisch bedeutet das, daß zwei ununterscheidbare Entitäten als *ein- und dieselbe* erscheinen müssen. Und daß somit die beiden Entitäten auch ein- und dieselbe sind.
Zur Verdeutlichung der Leibnizschen Differenzierung zwischen *realia* und a*bstracta* sei ein Beispiel aus dem Leibniz-Clarke-Briefwechsel aufgegriffen:
Clarke führt als ein Beispiel für die Existenz ununterscheidbarer Größen - deren Befürworter er aus seinem atomistischen Kontext heraus ist - zwei gleich große Segmente des leeren Raumes an. Sind diese Raumsegmente gleichförmig und gleich groß, so gibt es keinen Unterschied zwischen ihnen. Die Antwort Leibnizens belegt genau die oben dargelegten Umstände: Er gibt die Ununterscheidbarkeit für die Raumsegmente als abstrakte Konzepte zu, stellt jedoch seinen relationalen Raumbegriff[4] dagegen, der zeigt, daß bloßen Raumsegmenten keine Existenz zukommen kann. Leibniz geht von einem kontinuierlichen Aufbau der Welt aus und läßt die Separation einzelner Weltsegmente nur qua Abstraktion zu.
Im abstrakten Sinne läßt sich dann auch die Transformation eines Systemes, wobei System maximal weit gefaßt verstanden werden soll, in der Weise betrachten, daß man den Zustand vor der eigentlichen Transformation, den Transformationsvorgang, sowie den Zustand nach der Transformation, *vereinzelt* - was heißen soll: ohne ihren Kontext - betrachtet. In diesen drei Phasen, heißt die Transformation als solche dann symmetrisch bezüglich einer Systemgröße, wenn diese Systemgröße im Zustand vor

[3] ¯Was aus seinen Bestimmungsstücken (oder zureichend definierenden Daten) nicht unterschieden werden kann, das kann überhaupt nicht unterschieden werden, weil von den Bestimmungsstücken alles andere (unterschiedene) herrührt.® Leibniz: De Analysi situ, Mathematische Schriften, C.I.Gerhardt, (ed.), Hildesheim 1962
[4] Den er in Initia Rerum Mathematicarum Metaphysica, in: Math. Schr., Gerhardt (ed.) s. letzte Fußnote expliziert.

der Transformation von der im Zustand nach der Transformation *ununterscheidbar* ist.

Abschließend soll noch eine kurze Betrachtung durchgeführt werden, die den Ununterscheidbarkeitsbegriff an einer Stelle untersucht, die im Zentrum dessen, was wir als Materie verstehen, anzusiedeln ist. Das Konzept ununterscheidbarer Teilchen wird im Jahre 1926 weitgehend unabhängig voneinander durch W. Heisenberg und P.A.M. Dirac in die Quantenmechanik eingeführt. Dirac zeigt in seiner Arbeit[5], daß sowohl der Umstand, daß elementare Teilchen entweder der Bose-Einstein-Statistik (Bosonen) oder der Fermi-Dirac-Statistik (Fermionen) gehorchen, als auch die Gültigkeit des Pauli-Prinzipes letztlich auf die Ununterscheidbarkeit der Elementarteilchen zurückgehen. Behält man die Basis des Leibnizschen Denkansatzes bei, und es gibt keinen zureichenden Grund dies nicht zu tun, so folgt daraus letztlich, daß es sich bei Größen, die sich wesentlich durch ihre Ununterscheidbarkeit definieren, um *abstracta* handeln muß. Bezüglich der *realia* spräche dies für eine kontinuierliche Verfaßtheit: Dadurch, daß die Elementarteilchen als ununterscheidbar aufgefaßt werden müssen, enthüllen sie ihren Charakter als *abstrakte Konzepte*.

Solche *abstracta* sind der natürliche Gegenstand mathematischer Theorien. Ein unserer Erfahrungs- und Erscheinungswelt vorgängiger Grundzustand wird notwendigerweise in keiner materiellen Weise darstellbar sein. Er kann nicht zur Domäne der Leibnizschen *realia* gehören. Nichtsdestotrotz erweisen sich Symmetriekonzepte, die, wie gezeigt, letztlich Ausdrucksformen des *Prinzips der kleinsten Wirkung* sowie des *Prinzips von der Identität des Ununterscheidbaren* sind, als adäquate Mittel, um einen beschreibenden Zugang zu diesem vormateriellen Grundzustand zu gewinnen. Symmetriekonzepte herrschen über den Bereich der Raum-Zeit hinaus und garantieren - gleichsam als Kybernans -, vermittelt durch das *Ununterscheidbarkeitsprinzip*, die Adäquatheit auf Invarianten basierender Beschreibungen überhaupt. Das *Prinzip der kleinsten Wirkung* hingegen verklammert die Symmetriekonzepte mit dem Gegenstandsbereich der Physik.
Damit liegen Symmetrien im Basisbereich der Wissenschaftlichkeit überhaupt: Jeder Gegenstandsbereich einer Wissenschaft wird erst theoriefähig, indem er erforschbare Invarianten aufweist. Nicht-invariante Bereiche sind nur theoriefähig, wenn man Aussagen über die Art der Veränderung treffen kann, also bei Angabe einer Gesetzmäßigkeit. Dahinter steckt dann immer die Invarianz der Restbereiche. *Ununterscheidbarkeit* haben wir im Leibnizschen Prinzip selbst als einen Abstraktionsschritt kennen gelernt. Das Ununterscheidbare wird vom Prinzip als *identisch* aufgefaßt. Identität ist die einfachste Symmetrie, weil die Null-Transformation alle Systemgrößen invariant läßt. Solcherart steht dann eine Symmetrieüberlegung am Beginn jeder Art von mathematischer Beschreibung und damit am Anfang jeder exakten Wissenschaft.

Für die Physik liefern die Symmetriekonzeptionen einen Teil der Antwort auf die Frage nach der *unreasonable effectiveness of mathematics in physics* (Wigner). Noethers Theorem garantiert die Physikalität von Symmetriekonzepten, indem es *physikalische Symmetrien* erklärt. Ganz offensichtlich ist dieser Zusammenhang fundamental genug, um hinter die bloße, stets raum-zeitlich vermittelte Erfahrungs-welt auf eine zugrundeliegende

[5] P.A.M. Dirac: On the Theory of Quantum Mechanics, Proc. Roy. Soc. (London) A112 (1926), p.661-677

Tiefenstruktur zu verweisen. Entsprechend wird auch eine *letzte Theorie* wesentlich symmetrietheoretische Konzepte incorporiert haben müssen.