JOHANN WOLFGANG GOETHE-UNIVERSITÄT
FRANKFURT AM MAIN

FACHBEREICH WIRTSCHAFTSWISSENSCHAFTEN

**Konstantin Korolev/ Kai D. Leifert/
Heinrich Rommelfanger**

Optionspreistheorie bei vagen Daten

**No. 42
Oktober 1999**

WORKING PAPER SERIES: FINANCE & ACCOUNTING

Konstantin Korolev/ Kai D. Leifert/
Heinrich Rommelfanger*

Optionspreistheorie bei vagen Daten

No. 42
Oktober 1999

ISSN 1434-3401

* Prof. Dr. Heinrich Rommelfanger, Professor für Wirtschaftsmathematik, Institut für Statistik und Mathematik, Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main, Mertonstr. 17-23, D-60054 Fankfurt/Main,
Tel. +49 69 79822268, Fax +49 69 79823431, E-Mail: Rommelfanger@wiwi.uni-frankfurt.de

Option Pricing Theory and Fuzzy Expectations

Oktober 1999

Abstract

The classical option pricing theory assumes that the future payoffs are known; uncertain is only which payoff will be realized. The probability distribution is given too. But this model leads to a mismatch of theoretical prices and observable market prices. Moreover, it is not reasonable, why everyone should have the same set of crisp payoffs.

In this paper we will show that options can also be valued when uncertainty is not reduced to probabilities of payoffs. In our approach the basic model is extended to the case that payoffs are described by fuzzy numbers.

By connecting option pricing theory and fuzzy set theory we get a better model of real financial markets. This allows us to establish modern portfolio instruments in a fuzzy environment.

JEL classification: D82, G14

Keywords: Arbitrage, Contingent claims, Fuzzy logic, Time continuous valuation, Options

Optionspreistheorie bei vagen Daten

Oktober 1999

Zusammenfassung

In der heutigen Theorie der Optionsbewertung wird davon ausgegangen, daß die Markterwartungen genau berechenbar sind. Die Unsicherheit besteht lediglich darin, welcher Aktienkurs sich letztlich realisiert, die Eintrittswahrscheinlichkeiten sind bekannt. Dabei treten jedoch erhebliche Probleme auf, denn theoretisch erwartete Preise entsprechen oft nicht den am Markt beobachteten.

Ziel dieser Arbeit ist es, zu untersuchen, ob auch dann eine Optionsbewertung möglich ist, wenn die Unsicherheit nicht nur auf die Stochastik reduziert wird, sondern wenn zusätzlich angenommen wird, daß Marktteilnehmer nur unscharfes Wissen über künftige Preisentwicklungen haben. Hierbei dient die Fuzzy Set Theorie zur Modellierung der nur größenordnungsmäßig bekannten künftigen Aktienkurse.

Es wird in dieser Arbeit zwischen der Optionspreistheorie und der Fuzzy Set Theorie eine Verbindung geschaffen, die es zukünftig erlauben wird, die Unsicherheit im Markt besser zu modellieren, als dies mit heute dominierenden Methoden der Optionsbewertung möglich ist.

JEL classification: D82, G14

Schlagworte: Arbitragebewertung, Derivate Finanzinstrumente, Fuzzy-Logik, Zeitstetige Optionsbewertung

1. Einleitung

In den letzten 25 Jahren haben, nicht zuletzt durch die 1997 mit dem Nobelpreis ausgezeichneten Arbeiten von Fischer Black und Myron Scholes, Optionsmärkte einen großen Aufschwung erlebt. Finanzintermediäre wurden durch die großen Gewinnmargen, die Optionsgeschäfte beinhalten, angelockt. Allerdings wurde die Öffentlichkeit auch durch Nachrichten über große Verluste bei Termingeschäften erschüttert. Um Insolvenzen zu vermeiden ist sowohl eine ausgereifte Optionspreistheorie vonnöten, als auch ein einfach zu handhabendes Instrumentarium zum Risikomanagement erforderlich. Die Pionierarbeiten von Black und Scholes lieferten zwar beides, jedoch war schnell einzusehen, daß die hierbei zugrunde gelegten Annahmen in der Realität oft nicht gegeben sind und sich Optionspreise auch häufig anders verhalten, als dies das Modell beschreibt. Insbesondere wurde immer wieder darauf hingewiesen, daß die wichtige Einflußgröße Volatilität in der Realität im Gegensatz zum Modellrahmen nicht konstant bleibt; mit der Folge, daß trotz großem Rechenaufwand eine bedeutende Unsicherheitskomponente verbleibt, die es zu managen gilt.

Dieses Problem wurde in der Folgezeit nach 1973 unter verschiedenen Gesichtspunkten betrachtet. Hieraus entwickelten sich zum Beispiel Modelle zu stochastischer Volatilität oder impliziten Verteilungen[1], an denen auch heute noch geforscht wird. Annahme hierbei ist es, daß das Black/Scholes-Modell grundsätzlich theoretisch richtige Preise liefert, jedoch die Volatilität besser geschätzt werden muß. Zahlreiche empirische Studien wie zum Beispiel die Arbeiten von BAKSHI, CAO, CHEN [1996] und andere[2] belegen diese Vorstellung.

Die in jenen Modellen als konstant angenommenen Parameter sind in der Realität häufig nur ungenau beobachtbar und es wird meist davon ausgegangen, daß die verbliebene Unsicherheit allein auf die Volatilität zurückzuführen ist. Im Gegensatz dazu soll in dieser Arbeit ein alternativer Vorschlag zum Umgang mit der Unsicherheit gemacht werden. Da über die Volatilität niemals genaue Aussagen getroffen werden können, wird diese weiterhin als vorhandene Risikoquelle angesehen. Zusätzlich wird eine Ungenauigkeit in einem Parameter eingeführt, welcher Aufschluß über die zukünftigen Erwartungen von Marktteilnehmern gibt und im klassischen Modell als konstant angenommenen wird.

Zur Modellierung dieser Ungenauigkeit soll das Instrumentarium des „Fuzzy-Logik“ dienen. Auch dieser Teilbereich der angewandten Mathematik wurde in den letzten Jahren zunehmend mit praktischen Problemstellungen in Verbindung gebracht. Ein gute theoretische Grundlage hierzu bieten Forschungen der Fuzzy-Logik basierten Entscheidungstheorie[3,4], der Fuzzy-Optimierung[5] und der Fuzzy-Mathematik[6], so daß auch eine Anwendung von Fuzzy-Logik in finanzwirtschaftlichen Bereichen faszinierend erscheint.

[1] vgl. Derman, E., I. Kani (1994) u.a.
[2] z.B. Longstaff, F. (1995) u.a.
[3] vgl. Zadeh L. (1992) u.a.
[4] vgl. Rommelfanger H. (1994, 1999) u.a.
[5] vgl. Rommelfanger, H. (1994) u.a.
[6] Dubois, D., H. Prade (1980) u.a.

Es soll gezeigt werden, daß eine theoretische Bewertung von Derivaten mit Hilfe eines Fuzzy-Logik basierten Modells möglich ist und daß dessen Konstruktion analog zu klassischen Derivatebewertungsmodellen hergeleitet werden kann. Durch die Anwendung eines solchen Verfahrens leiten sich neue Erkenntnisse über die finanzwirtschaftliche Theorie ab und es können Empfehlungen für das Risikomanagement gegeben werden, die auf individuellen Markteinschätzungen eines Investors beruhen. So wird gleichzeitig eine *präferenz-unabhängige* Bewertung, wie auch ein *präferenzabhängiges* Hedging möglich. Die größten Anforderungen bei der Konstruktion eines neuen Verfahrens stellen Arbitragefreiheit und Vollständigkeit eines Kapitalmarktes, denn diese Bedingungen sind für das weitere Vorgehen essentiell.

In der vorliegenden Arbeit wird diese Vorgehensweise anhand von zeitdiskreten und zeitstetigen Betrachtungsweisen der Kursfeststellung von Aktien erläutert. Betrachtet werden ausschließlich europäische Standard-Optionen auf Aktien. Die Erkenntnisse sind jedoch auch auf komplexere Titel übertragbar.

Die Arbeit schließt mit einer Zusammenfassung, in welcher Ausblicke auf weitere Forschungen gegeben werden.

2. Fuzzy-Logik basierte Darstellung des Binomialmodells

2.1. Annahmen und Implikationen

Das Ziel dieses Abschnitts besteht darin, eine Möglichkeit des Aufbaus von Binomialmodellen mit Fuzzy-Logik zu beschreiben und diese zu diskutieren. Ein besonderes Augenmerk soll dabei auf die sich ergebenden Unterschiede zum Standard-Binomialmodell nach COX, ROSS, RUBINSTEIN [1979] gelegt werden.

An dieser Stelle müssen zunächst einige Annahmen getroffen werden.

<u>Annahme 2.1 [Unschärfe im Modellrahmen]</u>

Einzig unscharf im Fuzzy-Logik basierten Binomialmodell sind Auszahlungen eines zugrundeliegenden Assets und dessen Derivate.

<u>Annahme 2.2 [Verteilungseigenschaft von Fuzzy-Auszahlungen]</u>

Sei $\tilde{S}$ *ein Underlying mit Fuzzy-Auszahlungen in Zeitpunkt* t*, so ist der Preis dessen im Nachfolgezeitpunkt* $t+1$ *durch*

$$S_{t+1} = \begin{cases} \tilde{S}_{t+1}^{(i+1)} = \left(S_t^{(i)} \cdot u \,;\, \underline{S}_{t+1}^{(i+1)} \,;\, \overline{S}_{t+1}^{(i+1)} \right)_{LR} \\ \tilde{S}_{t+1}^{(i)} = \left(S_t^{(i)} \cdot d \,;\, \underline{S}_{t+1}^{(i)} \,;\, \overline{S}_{t+1}^{(i)} \right)_{LR} \end{cases}$$

bestimmt. Dabei ist $u > 1$ *ein Wachstums- und* d*,* $0 < d < 1$*, ein Schrumpfungsparameter.*

Dies impliziert, daß die Ausprägung der Spannweiten zu jedem Knoten *nicht zwingend* abhängig von den vorhergehenden Knoten und Zeitpunkten ist.

KOROLEV, LEIFERT, ROMMELFANGER [1999] haben gezeigt, daß die risikolosen Wahrscheinlichkeiten nicht von den Spannweiten der Auszahlungen abhängen, sondern nur die Gipfel entscheidend sind. Ansonsten gelten die im neoklassischen Modell getroffenen Annahmen.

Annahme 2.3 [Atomistische Konkurrenz der Investoren]

Der Preis eines Gutes kann von Investoren nicht durch Käufe oder Verkäufe beeinflußt werden. Alle Investoren sind Preisnehmer.

Annahme 2.4 [Friktionsloser Kapitalmarkt]

Der Kapitalmarkt ist friktionslos. Dies bedeutet im einzelnen:
(1) Es gibt keine Marktzugangsbeschränkungen
(2) Es existieren keine Steuern und Transaktionskosten
(3) Sämtliche Wertpapiere sind beliebig teilbar
(4) Es existieren keinerlei Leerverkaufsbeschränkungen für die Wertpapiere

Annahme 2.5 [Arbitragefreiheit]

Es existieren auf dem Kapitalmarkt keine Arbitragemöglichkeiten.

Annahme 2.6 [Vollständigkeit des Anleihemarkts]

Der Anleihemarkt ist vollständig im Sinne, daß insolvenzrisikolose Nullkuponanleihen der Fälligkeiten $t = 1, 2, ..., T$ *existieren.*

Annahme 2.7 [Dividendenzahlung]

Bei dem Underlying handelt es sich um ein nicht-dividendenausschüttendes Wertpapier.

Annahme 2.8 [Konstanter risikoloser Zins]

Der risikolose Zins sei über die betrachtete Laufzeit konstant.

Die Spannweiten spielen eine herausragende Rolle in Zusammenhang mit Arbitragefreiheit und Vollständigkeit der modellierten Welt. Sie haben nicht nur auf den festzustellenden Preis des Derivats einen Einfluß, sondern determinieren auch Grenzen für die Parameter u und d.
Es ist leicht nachzuvollziehen, daß die Spannweiten der Auszahlungen sich nicht überschneiden sollten. Dies kann durch eine geeignet kleine Wahl der Spannweiten selbst oder aber durch eine geeignet große Wahl des Parameters u und eine geeignet kleine Wahl des Parameters d sichergestellt werden.

Definition 2.1 [Perfekte Vollständigkeit]

Folgen jedem Zustand im Binomialmodell zwei mögliche Zustände im nächsten Zeitpunkt und gelte es weiterhin, daß die Zugehörigkeitsfunktionen der Wertpapierauszahlungen in den verschiedenen Umweltzuständen auf einem ρ-Niveau keine gemeinsame Elemente aufweisen, also:

$$S_t^{(i+1)} \succ_\rho S_t^{(i)} \; \forall \, t = 1,\dots,T, \; i = 0,\dots,t,$$

dann heißt der Markt „vollständig auf einem ρ-Niveau“[7].

Annahme 2.9 [Spannweiten der Auszahlungen]

Die Spannweiten der Fuzzy-Auszahlungen seien zu jedem Zustand in T *gleich groß und symmetrisch und genügen weiterhin den Vollständigkeitsüberlegungen nach Definition 3.1. Weiterhin gebe der Entscheider nur die Spannweiten in* T *an.*

2.2. Modellierung des Binomialmodells mit Fuzzy-Logik

Gegeben sei eine Menge von Zeitpunkten mit $t \in \{0,1,\dots,T\}$. Ein betrachtetes Wertpapier S habe zu einem Zeitpunkt t die Fuzzy-Auszahlung $\tilde{S}_t^{(i)}$. Zum nachfolgenden Zeitpunkt t + 1 kann das Wertpapier dann die Auszahlung $\tilde{S}_{t+1}^{(i+1)}$ oder $\tilde{S}_{t+1}^{(i)}$ aufweisen. Diese Fuzzy-Auszahlungen können jedoch nicht mahr wie im klassischen Modell durch einfache Skalarmultiplikation mit u und d errechnet werden, denn für die Verteilungseigenschaft gilt nunmehr Annahme 2.2.

Diese Spannweiten können frei gewählt werden, sollen jedoch die Vollständigkeitsbedingung erfüllen. Es wurde ebenfalls in KOROLEV, LEIFERT, ROMMELFANGER [1999] gezeigt, daß der Vektor $\mathbf{Q}$ unabhängig von den Spannweitenausprägungen ist, deshalb gilt:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \dfrac{(1+r)-d}{u-d} \\ \dfrac{u-(1+r)}{u-d} \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Anlehnend an das neoklassische Modell soll auch hier zunächst wieder Pfadunabhängigkeit unterstellt werden. Es gilt dann:

$$\tilde{S}_t^{(i)} = \left(S_0 \cdot u^i \cdot d^{t-i}; \underline{S}_t^{(i)}; \overline{S}_t^{(i)} \right)_{LR}. \tag{2.2}$$

---

[7] Eine Menge $\tilde{B} \in \tilde{\wp}(X)$ wird einer Menge $\tilde{C} \in \tilde{\wp}(X)$ auf dem Niveau $\rho \in [0,1]$ vorgezogen, und man schreibt $\tilde{B} \succ_\rho \tilde{C}$, wenn ρ die kleinste reelle Zahl ist, so daß

$$\operatorname{Inf} B_\alpha \geq \operatorname{Sup} C_\alpha \quad \text{für alle } \alpha \in [\rho, 1]$$

und für wenigstens ein $\alpha \in [\rho, 1]$ die obige Ungleichung im strengen Sinne erfüllt ist. Dabei sind

$$B_\alpha = \{x \in X \,|\, \mu_B(x) \geq \alpha\} \text{ und } C_\alpha = \{x \in X \,|\, \mu_C(x) \geq \alpha\}$$

die α-Nivau-Mengen von $\tilde{B}$ bzw. $\tilde{C}$.

Um in diesem Szenario einen vollständigen Markt zu modellieren, muß unter Annahme 2.9 für alle rechten Spannweiten $\overline{S}$ sowie alle linken Spannweiten $\underline{S}$ gelten, daß

$$0 \leq \underline{S} = \overline{S} \leq \frac{S_T^{(1)} - S_T^{(0)}}{2} . \tag{2.3}$$

Solange das Fuzzy-Logik-basierte Binomialmodell in diesem perfekt vollständigen Markt angewandt wird, ergeben sich zum herkömmlichen Modell bei der Optionsbewertung keine Unterschiede. Es muß beachtet werden, daß der Preis in t = 0 über T Perioden errechnet wird, d.h. auch die Spannweiten werden mit der Pfadwahrscheinlichkeit gewichtet und über T Perioden diskontiert.

Der heutige Erwartungswert zukünftiger unscharfer Auszahlungen des Wertpapiers S ergibt sich also durch

$$\hat{E}_0^Q\left[\tilde{S}_T\right] = \left(\sum_{i=0}^{T} S_T^{(i)} \cdot \binom{T}{i} \cdot q^i \cdot (1-q)^{T-i} ; \sum_{i=0}^{T} \underline{S} \cdot \binom{T}{i} \cdot q^i \cdot (1-q)^{T-i} ; \sum_{i=0}^{T} \overline{S} \cdot \binom{T}{i} \cdot q^i \cdot (1-q)^{T-i} \right)_{LR} \tag{2.4}$$

und läßt sich vereinfachen zu:

$$\hat{E}_0^Q\left[\tilde{S}_T\right] = \left(S_0 \cdot (1+r)^T ; \sum_{i=0}^{T} \underline{S} \cdot \binom{T}{i} \cdot q^i \cdot (1-q)^{T-i} ; \sum_{i=0}^{T} \overline{S} \cdot \binom{T}{i} \cdot q^i \cdot (1-q)^{T-i} \right)_{LR} \tag{2.5}$$

wobei S_0 hier den Gipfelpunkt der Fuzzy-Auszahlung des Wertpapiers S zum Zeitpunkt t = 0 bezeichnet.

Bei der Optionsbewertung in diesem Modellrahmen sind die Spannweiten der Optionszahlung von herausragender Bedeutung. Grundsätzlich wird davon ausgegangen, daß die Spannweiten der Optionsauszahlung von denen des Underlyings abhängig sein sollten. Da das betrachtete Binomialmodell lediglich eine Erweiterung des Arbitragemodells darstellt, können die ge-wonnenen Erkenntnisse aus KOROLEV, LEIFERT, ROMMELFANGER [1999] übertragen werden.
Die Spannweiten der Optionszahlungen lassen sich also durch die Spannweiten des zugrundeliegenden Assets errechnen. So soll für die linke Spannweite einer europäischen Call-Option mit Basispreis K gelten:

$$\underline{C}_T^{(i)} = \max\{S_T^{(i)} - \kappa ; 0\} - \max\{S_T^{(i)} - \underline{S} - \kappa, 0\} \tag{2.6}$$

und analog für die rechte Spannweite

$$\overline{C}_T^{(i)} = \max\{S_T^{(i)} + \overline{S} - \kappa, 0\} - \max\{S_T^{(i)} - \kappa ; 0\} . \tag{2.7}$$

Damit der Call positive Auszahlungen aufweist, müssen die Auszahlungen des Underlyings über dem Basispreis liegen. Die Mindestanzahl von Aufwärtssprüngen im Binomialbaum, damit *zumindest der Gipfelpunkt* einer Optionsauszahlung „im Geld“ liegt, sei mit a bezeichnet.
Für a gilt dann bezogen auf die Gipfelpunkte von $\tilde{S}_t^{(i)}$: $a \in N$ mit $S_t^{(a)} \geq \kappa \wedge S_t^{(a-1)} < \kappa$.

Für $\tilde{S}_t^{(i)}$ läßt sich weiterhin mit Sicherheit sagen, daß $\tilde{S}_t^{(a-2)} \prec \kappa$.
Die Spannweiten und der Gipfelpunkt der Option $\tilde{C}_t^{(i)}$ mit $i = 0,1,\dots,a\text{-}2$ sind dann immer gleich Null, also $\tilde{C}_t^{(i)} = (0;0;0)_{LR}$ mit $i = 0,1,\dots,a-2$.
Andererseits muß auch gelten, daß $\tilde{S}_t^{(a+1)} \succ \kappa$, denn in diesem und allen weiteren oberen Knoten sind die Spannweiten des Underlyings symmetrisch und die Spannweiten der Optionszahlungen werden nicht durch die Bedingungen der Gleichung (2.6) oder (2.7) tangiert.
Durch Einsetzen in die Bestimmungsgleichungen für die Optionsspannweiten erhält man $\underline{C}_T^{(i)} = \underline{S} \wedge \overline{C}_T^{(i)} = \overline{S}$ für $i = (a+1),(a+2),\dots,T$. Der aus diesen Zuständen ermittelte Optionspreis soll im folgenden mit ${}_r C_t^{(i)}$ bezeichnet werden. Dies entspricht der Aufspaltung des Optionspreises in positive Auszahlungen und Zahlungen von Null wie im klassischen Modell nach Cox/ Ross/ Rubinstein. Es werden also hier zunächst nur alle Optionszahlungszustände einbezogen, die symmetrische oder keine Spannweiten aufweisen, da dies den Rechenaufwand erheblich vereinfacht. Nicht in die Berechnung des Optionspreises einbezogen sind zunächst Zustände, in denen die Zahlungen asymmetrische Spannweiten erhalten können. Diese werden danach gesondert behandelt.

Der Optionswert aus allen Zuständen symmetrischer Spannweiten ergibt sich zu:

$${}_r\tilde{C}_0 = \tag{2.8}$$
$$(1+r)^{-T} \cdot \left(\sum_{i=a+1}^{T} \binom{T}{i} q^i \cdot (1-q)^{T-i} \cdot (S_T^{(i)} - X)\, ; \sum_{i=a+1}^{T} \binom{T}{i} q^i \cdot (1-q)^{T-i} \cdot \underline{S} ; \sum_{i=a+1}^{T} \binom{T}{i} q^i \cdot (1-q)^{T-i} \cdot \overline{S} \right)_{LR}$$

Dieser Ausdruck läßt sich mit Hilfe der Gleichung (2.5) umformen und man erhält:

$$\begin{aligned} {}_r\tilde{C}_0 = (1+r)^{-T} \cdot \Bigg(& S_0 \cdot (1+r)^T \cdot \sum_{i=a+1}^{T} \binom{T}{i} \cdot \left(\frac{u-q}{1+r}\right)^i \cdot \left(\frac{(1-q)\cdot d}{1+r}\right)^{T-i} - \kappa \cdot \sum_{i=a+1}^{T} \binom{T}{i} \cdot q^i \cdot (1-q)^{T-i}; \\ & \sum_{i=a+1}^{T} \binom{T}{i} \cdot q^i \cdot (1-q)^{T-i} \cdot \underline{S}; \sum_{i=a+1}^{T} \binom{T}{i} \cdot q^i \cdot (1-q)^{T-i} \cdot \overline{S} \Bigg)_{LR} \end{aligned} \tag{2.9}$$

Die Spannweiten der Option in den Zuständen $i = (a+1),(a+2),\dots,T$ ergeben sich also aus den mit der Pfadwahrscheinlichkeit gewichteten Spannweiten des Underlyings.

Zur vollständigen Bewertung der Option müssen zuletzt noch die Zustände nach (a-1) und a Aufwärtssprüngen betrachtet werden. Der Anteil des Optionspreises aus diesen Zuständen sei mit ${}_l C_t^{(i)}$ bezeichnet. Bei jeweils einem dieser beiden Zustände können die Spannweiten der Option trotz symmetrischer Underlying-Spannweiten asymmetrisch werden. Ursächlich hierfür ist die Optionseigenschaft, nach der negative Zahlungen ausgeschlossen werden.

Folgende Graphik soll dessen Sachverhalt verdeutlichen:

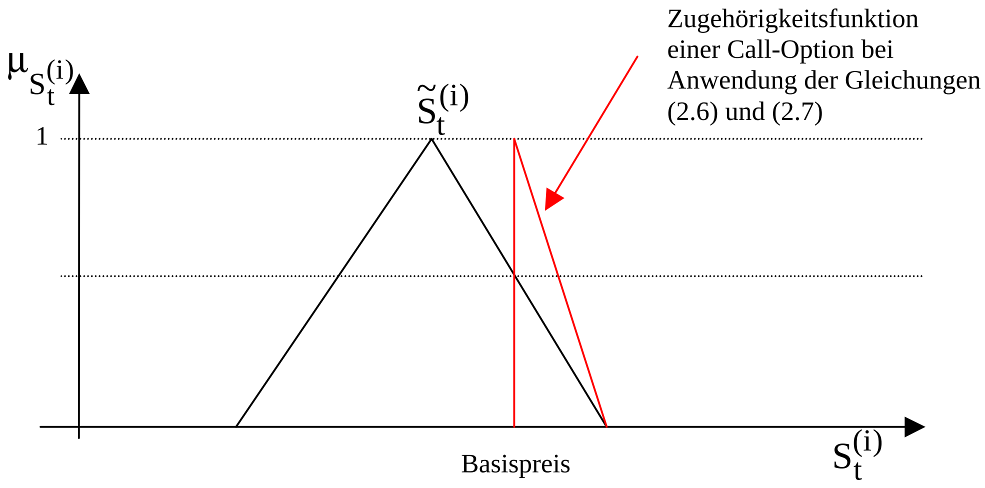

Abbildung 2-1 : Asymmetrie der Spannweiten eines Calls

Den Optionsauszahlungen werden in diesem Fall falsche Zugehörigkeitswerte zugewiesen, die zu groß sind, wenn der Gipfelpunkt der Differenz aus zustandsabhängiger Auszahlung und dem Basispreis im negativen Bereich liegt. Wenn der Gipfelpunkt aus dieser Differenz positiv ist, dann werden den Optionsauszahlungen zu kleine Zugehörgkeitswerte zugewiesen. Dieser Fehler tritt aber nur in einem einzigen Zustand auf und ist daraus folgend mit steigender Anzahl von Zeitpunkten entsprechend klein.

Deshalb wird der Fehler im folgenden vernachlässigt und Gleichungen (2.6) und (2.7) sollen weiterhin Anwendung finden. Die Bewertung dieser Zustandspreise erfolgt über:

$$
\begin{aligned}
{}_{l}\tilde{C}_0 = (1+r)^{-T} \cdot \Bigg(& S_0 \cdot (1+r)^T \cdot \sum_{i=a-1}^{a} \binom{T}{i} \cdot \left(\frac{u-q}{1+r}\right)^i \cdot \left(\frac{(1-q)\cdot d}{1+r}\right)^{T-i} - \kappa \cdot \sum_{i=a-1}^{a} \binom{T}{i} \cdot q^i \cdot (1-q)^{T-i}; \\
& \sum_{i=a-1}^{a} \binom{T}{i} \cdot q^i \cdot (1-q)^{T-i} \cdot \max\{S_T^{(i)} - \kappa, 0\} - \max\{S_T^{(i)} - \underline{S} - \kappa, 0\}; \qquad (2.10) \\
& \sum_{i=a+1}^{T} \binom{T}{i} \cdot q^i \cdot (1-q)^{T-i} \cdot \max\{S_T^{(i)} + \bar{S} - \kappa, 0\} - \max\{S_T^{(i)} - \kappa, 0\} \Bigg)_{LR}
\end{aligned}
$$

Addiert man alle Zustandsauszahlungen, bei denen der Call im Geld ist, so erhält man eine Bewertungsformel für europäische Calls mit Fuzzy-Auszahlungen:

$$\tilde{C}_0 = {}_{r}\tilde{C}_0 \oplus {}_{l}\tilde{C}_0 \qquad (2.11)$$

Dabei fällt auf, daß sich der Gipfelpunkt bei einer Fuzzy-Optionsbewertung nicht von der klassischen Bewertung unterscheidet, denn

$$\tilde{C}_0 = \left(S_0 \cdot B(T;q;i) - \kappa \cdot (1+r)^{-T} \cdot B(T;q;i);\ {}_{r}\underline{C}_0 + {}_{l}\underline{C}_0;\ {}_{r}\overline{C}_0 + {}_{l}\overline{C}_0\right)_{LR} \ . \qquad (2.12)$$

Der Fuzzy-Preis eines europäischen Calls ergibt sich also aus dem Gipfelpunkt, der den gleichen Wert aus der klassischen Optionsbewertung annimmt, und den in T gültigen Optionsspannweiten, die über T Perioden diskontiert werden müssen.

2.3 Das Fuzzy-Logik basierte Binomialmodell in der Grenzfallbetrachtung

Das vorstehende Fuzzy-Logik basierte Binomialmodell soll nun weiter modifiziert werden, um die Zustandsbäume der Realität genauer anzupassen. Realistischer wäre die Annahme, daß sich der Aktienkurs in vielen kleinen Abschnitten ändert, also durch eine große Anzahl von aufeinanderfolgenden Binomialschritten darstellen läßt.
Präziser formuliert, sei im folgenden die Zeit, in der sich der zugrundeliegende Aktienkurs verändert, mit h bezeichnet. Sei t eine feststehende Zeitperiode, welche z.B. in Kalendertagen ausgedrückt werden kann, und n die Anzahl der Perioden während der Zeitspanne t, so wird h wie folgt definiert:

$$h \equiv \frac{t}{n} \tag{2.13}$$

Werden die betrachteten Zeitabschnitte stärker verkleinert, so strebt h gegen Null, wenn $n \to \infty$ geht. Entsprechend müssen die Parameter u, d und R angepaßt werden.

Sei R der risikolose Kontierungsfaktor, so gilt $\hat{R}^n = R^t$ genau dann, wenn

$$\hat{R} = R^{\frac{t}{n}}. \tag{2.14}$$

Mit $h \to 0$ gilt für (2.14): $\hat{R} = e^{rh}$. (2.15)

Entsprechend dem Standard-Binomialmodell in der Grenzfallbetrachtung müssen dann auch die Sprungparameter angepaßt werden.
Hier greifen wir auf den Vorschlag von COX, ROSS, RUBINSTEIN [1979] zurück. Um diese Vorstellung in das vorgestellte Modell einzubringen, muß zunächst überlegt werden, wie die Spannweiten bei Marktvollständigkeit gewählt werden müssen. Durch Einsetzen der Parameter u , mit $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$,und d, mit $d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$, mit Hilfe von Gleichung (2.3) in die Gleichung (2.4) ergibt sich zunächst

$$\underline{S} = \overline{S} = \frac{S_0 \cdot e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \cdot e^{-(T-1)\cdot\sigma\sqrt{\Delta t}} - S_0 \cdot e^{-T\cdot\sigma\sqrt{\Delta t}}}{2} \tag{2.16}$$

Dies läßt sich weiter vereinfachen zu

$$\underline{S} = \overline{S} = \frac{S_0}{2}\left[e^{(2-T)\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{(-T)\sigma\sqrt{\Delta t}}\right] \tag{2.17}$$

und die Grenzwertbetrachtung führt zu $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \underline{S} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \overline{S} = 0$.

Da die Parametrisierung aus dem Standard-Binomialmodells übernommen wurde, muß untersucht werden, ob das Binomialmodell mit Fuzzy-Auszahlungen im Grenzfall auch gegen die Black/Scholes-Formel konvergiert. Auf eine ausführliche mathematische Beweisführung sei an dieser Stelle verzichtet. Es soll hier lediglich die Beweisidee dargelegt werden:

Mit kleiner werdenden Zeitabschnitten müssen auch die Spannweiten der Option und des Underlyings kleiner gewählt werden, um Vollständigkeit zu garantieren. Flexiblere Anpassung bietet in diesem Zusammenhang das Konzept des ρ-Niveaus, das schon bei der Definition der Vollständigkeit (Definition 2.1) erfolgt ist. Die vom Anwender gewählte Fuzziness des Optionswerts kann derart eingeschränkt werden, daß der Markt vollständig auf einem ρ-Niveau wird. Mit kleiner werdenden Zeitintervall und zunehmender Anzahl von Knoten steigt dieses Niveau, bis schlußendlich ein ρ-Niveau von eins erreicht wird. Dann ist die Unschärfe der Auszahlungen für eine Option sowie auch für die des Underlyings verlorengegangen. Da aber die klassischen Binomialbäume so aufgebaut werden, daß die Vollständigkeit zu jedem Zeitpunkt und in jedem Knoten gegeben sein muß, ist der Markt auch bei Binomialbäumen mit Fuzzy-Auszahlungen auf dem ρ-Niveau von eins immer vollständig. Auf dem ρ-Niveau von eins unterscheidet sich die Bewertung im Fuzzy-Binomialmodell somit nicht von der Bewertung des Standard-Binomialmodells.

Hieraus folgt, daß eine Bewertung bei unendlich kleinen Zeitabschnitten im Fuzzy-Binomialmodell ebenfalls gegen das Black/Scholes-Modell konvergieren muß. Es ist jedoch anzumerken, daß die Binomialwahrscheinlichkeiten schneller gegen eine Normalverteilung konvergieren, als die Spannweiten gegen Null streben. Im Anhang 2-A sind Zusammenhänge zwischen den Spannweiten, den Basispreisen und der Anzahl der Zeitsprünge graphisch dargestellt.

Mit diesen Erkenntnissen kann nun ein zeitstetiges Optionsbewertungsmodell mit unscharfen Auszahlungen des Underlyings aufgebaut werden.

3. Fuzzy-Logik basiertes zeitstetiges Optionbewertungsmodell

3.1. Zeitstetige Prozesse mit Fuzzy-Auszahlungen des Underlyings

Im zeitstetigen Modell nach Black/ Scholes wird eine Annahme über den Prozeß des Underlyings gemacht. Es wird unterstellt, daß die Auszahlungen der Aktien einer geometrischen Brownschen Bewegung mit Steigung folgen.

Definition 3.1 [Brownsche Bewegung]:

Der Prozeß $W = (W_t : t \geq 0)$ *ist eine Brownsche Bewegung unter dem Wahrscheinlichkeitsvektor* Q *dann und nur dann, wenn gilt*

- W_t *ist kontinuierlich, und* $W_0 = 0$,
- *der Wert* W_t *ist unter Wahrscheinlichkeiten* Q *normalverteilt* $\Rightarrow W_t \sim N(0, t)$,
- *das Inkrement* $W_{s+t} - W_s \sim N(0, t)$ *ist normalverteilt unter Wahrscheinlichkeiten* Q *und ist unabhängig von der Filtration* F_s, *der Historie des Prozesses bis zum Zeitpunkt* s. *(Markov-Eigenschaft)*

Wir werden aber alle Annahmen, einschließlich dieser, aus dem Standardmodell übernehmen und zeigen, daß sie auch für ein Fuzzy-Logik basiertes Modell völlig ausreichen, um eine partielle Differentialgleichung aufzustellen. Für den Prozeß des Underlyings sei nun angenommen:

Annahme 3.1 [Dynamik eines Aktienpreisprozesses für Titel mit Fuzzy-Auszahlungen]
Der Aktienpreisprozeß für Titeln mit unscharfen Auszahlungen sei durch eine Brownsche Bewegung der Form

$$d(S;\underline{S};\overline{S})_{LR} = (\mu S;\underline{S};\overline{S})_{LR}dt + (\sigma S;0;0)_{LR}dW$$

beschrieben.

In übrigen gelten Annahmen 2.3 bis 2.8 weiterhin.
Die Annahme 3.1 unterstellt eine geometrische Brownsche Bewegung mit Drift. Eine Fuzzy-Zahl erfährt in der Zeit eine deterministische Steigung, wobei der zweite Term der rechten Seite der Gleichung stochastisch ist, deshalb ist die *Lage* der Fuzzy-Auszahlungen unsicher. Zu bemerken ist weiterhin, daß die Risikoquelle beim Standardmodell und bei dem Fuzzy-Logik basierten Modell identisch ist. Durch eine vage Darstellung von Auszahlungen kann das Fuzzy-Logik basierte Modell eine gewisse Unsicherheit in den deterministischen Teil der angenommenen Brownschen Bewegung aufnehmen. Auch hier fließt also eine weitere Genauigkeitskomponente ein.
Zwar ist der heutige Preis des Underlyings am Markt beobachtbar, es ist jedoch fraglich, ob dieser durch eine eindeutige reelle Zahl dargestellt werden kann. Die Problematik ist offenkundig. Zum einen bildet der am Markt beobachtbare Bid-Ask-Spread „natürliche“ Spannweiten für das Underlying. Andererseits stellt sich die Frage, ob der Markt den Wert des Unternehmens korrekt einschätzt. Die Fehleinschätzung kann zum einen bei der Bewertung gegenwärtiger Anlagen aber auch bei der Bewertung Investitionsmöglichkeiten mit unsicheren künftigen Zahlungen resultieren. Aus Annahme 3.1 geht weiterhin hervor, daß die Spannweiten der Aktienauszahlungen über die Zeit driftunabhängig sein sollen, also konstant bleiben. Diese Annahme ist nicht zwingend notwendig. Über die nächste Periode können jedoch nur Erwartungswerte der Auszahlung gebildet werden, gleiches würde für die Spannweiten gelten. Da jedoch über dieses Verhalten bis hierher keine Aussagen getroffen sind, noch Informationen darüber verfügbar wären, soll diese Ungenauigkeitskomponente, welche einmal festgelegt wurde, zunächst nicht verändert werden. Ist es möglich, über die Entwicklung der zukünftigen Unsicherheit genauere Angaben zu machen, sollten diese selbstverständlich in die Modellierung einfließen.

Der Volatilitätsterm soll dagegen scharf darstellbar bleiben. Das kann damit begründet werden, daß die historische durchschnittliche Volatilität am Markt berechnet wird und über die gegenwärtige oder künftige Volatilität des Underlyings keine Aussagen getroffen werden können. Eine Vermischung von Fuzzy-Logik-Methoden und stochastischen Verfahren soll im stochastischen Teil der Brownschen Bewegung vermieden werden, denn es kann nicht ausgeschlossen werden, daß die Entscheidungsträger unter Umständen emotional, also begrenzt rational, handeln. Diese aggregierten Handlungsweisen implizieren stochastische Bewegungen. Eine Zuweisung von Spannweiten könnte nur spekulativ erfolgen.

3.2. Problematik und Notwendigkeit der Differentiation von Fuzzy-Zahlen

Um im folgenden analog zum klassischen Modell aus Abschnitt 8 vorgehen zu können, ist es notwendig, auch partielle Ableitungen in einem Fuzzy-Modellrahmen darstellen zu können. Dies wurde insbesondere benötigt, um für beliebige andere Aktienpreisprozesse partielle Differentialgleichungen erstellen zu können. Ein allgemeingültiges Verfahren existiert zum derzeitigen Stand der Forschung nicht. An dieser Stelle soll daher zunächst die Problematik verdeutlicht werden und dann verschiedene Lösungsansätze vorgestellt werden.

Während sich bei Variation einer Variablen einer klassischen Funktion nur die einzelnen Funktionswerte verändern können[8], können sich bei Funktionen von Fuzzy-Zahlen nicht nur die Gipfelpunkte, sondern auch die Spannweiten verändern. Die Ausprägung einer Differentiation besteht statt aus eines einzelnen Elements, bzw. einer einzelnen Funktion, einer Menge von reellen Zahlen dann aus einer Menge von Elementen der gesamten Menge von reellen Zahlen. Diese Menge ist durch Zugehörigkeitsfunktionen beschrieben und kann sich aufgrund einer Ausprägung der ursprünglichen Funktion an jeder Stelle auf andere Weise verändern. Daraus folgt, daß die Ableitung einer Funktion von Fuzzy-Zahlen eine Fuzzy-Menge sein müßte.

Formal läßt sich das Problem wie folgt formulieren:
Für eine klassische Funktion mehrerer Variablen läßt sich eine eindeutige, von den Variablen abhängige Ableitung bestimmen:

$$\frac{\partial F(x, \mathbf{y})}{\partial x} = f(x, \mathbf{y}),$$

wobei **y** einen Vektor mit anderer unabhängigenVariablen beschreibt, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$.

Beinhaltet die Funktion nunmehr eine Variable, welche Fuzzy-Zahlen annimmt, d.h. eine Funktion $F(\tilde{x}, \mathbf{y})$, so ist die Ableitung dieser Funktion eine Fuzzy-Zahl $\tilde{f}$, wobei sowohl der Gipfel und die Spannweiten als auch die Referenzfunktionen von der Ausprägung der Funktion $F(\tilde{x}, \mathbf{y})$ abhängig sind:

$$\frac{\partial F(\tilde{x}, \mathbf{y})}{\partial x} = \tilde{f}(\tilde{x}, \mathbf{y}) \text{ mit } \tilde{f}(\tilde{x}, \mathbf{y}) = \left(f(\tilde{x}, \mathbf{y}); \underline{f}(\tilde{x}, \mathbf{y}); \overline{f}(\tilde{x}, \mathbf{y})\right)_{LR}$$

und für die Zugehörigkeitswerte gilt

$$\mu_{\tilde{f}(\tilde{x}, \mathbf{y})}[f(x, \mathbf{y})] = \begin{cases} L(\frac{f(\tilde{x}, \mathbf{y}) - f(x, \mathbf{y}\})}{\underline{f}(\tilde{x}, \mathbf{y})}) & \text{für } f(x, \mathbf{y}) \leq f(\tilde{x}, \mathbf{y}), \underline{f}(\tilde{x}, \mathbf{y}) > 0 \\ R(\frac{f(x, \mathbf{y}) - f(\tilde{x}, \mathbf{y})}{\overline{f}(\tilde{x}, \mathbf{y}\})}) & \text{für } f(\tilde{x}, \mathbf{y}) > f(x, \mathbf{y}), \overline{f}(\tilde{x}, \mathbf{y}) > 0 \end{cases}.$$

[8] klassischen partielle Ableitung

Dabei stellt $f(x, \mathbf{y})$ den Wert der Ableitung an genau einer Stelle x dar. Aus dieser Überlegung geht hervor, daß jede Ableitung einer Funktion, die unter anderem von einer Fuzzy-Zahl abhängt, einzeln überdacht werden muß, da für $\underline{f}(\tilde{x}, \mathbf{y})$ und $\overline{f}(\tilde{x}, \mathbf{y})$ keine genauen Aussagen getroffen werden können.

Zwei grundlegende Richtungen zur Lösung dieses Problems sind vorstellbar. Dabei ist eine Vorgehensweise auf die explizite Lösung des Differentials ausgerichtet und es ist denkbar, eine Lösung mit Hilfe fuzzy-mathematischer Methoden zu finden, die sich zu einer Fuzzy-Zahl, bzw. einer Fuzzy-Funktion ergibt[9]. Eine andere stark vereinfachte Vorgehensweise ist die Defuzzifizierung von Fuzzy-Zahlen, um eine klassische, aus eindeutigen reellen Zahlen erhaltene, Ableitung zu erhalten.

Es wird also für jede Fuzzy-Ableitung ein Verfahren gesucht, welches für den Spezialfall beste Ergebnisse liefert. Daher werden an dieser Stelle lediglich einige relevante Ableitungen untersucht. Dabei wird im besonderen Maße Wert auf die ökonomische Plausibilität und Interpretation gelegt. Für die Defuzzifizierung von Ableitungen wird ein spezielles Verfahren vorgeschlagen. Die Verwendung alternativer Verfahren ist aber ebenso möglich.

Die Defuzzifizierung einer Funktion, die abhängig von einer Fuzzy-Zahl ist, vollzieht sich in 3 Stufen. Zunächst muß die Fuzzy-Zahl selbst über eine geeignete, präferenzabhängige Wahl eines Niveaus, das α-Niveau, auf eine Spanne möglicher Ausprägungen reduziert werden. Danach werden die Werte dieses α-Schnitts auf einen einzigen Wert Ψ reduziert. Inwieweit dieser Wert Ψ Aussagekraft über die Präferenzeinstellung eines Investors hat, zeigte bereits LEIFERT [1999]. Der letzte Schritt ist dann die Ableitung der Funktion, welche nunmehr nur noch von defuzzifizierten Variablen abhängt und somit mit üblichen Methoden bestimmt werden kann.

Gegeben sei eine Funktion $F(\tilde{x}, \mathbf{y})$, welche unter anderem von einer Variablen x abhängt, die nur fuzzy beschrieben ist. Diese Variable wird dann auf zwei Niveaus defuzzifiziert und es ergibt sich:

$$F({}^{\Psi}x^{\alpha}, \mathbf{y}).$$

Diese Funktion stellt nichts anderes dar, als $F(x, \mathbf{y}\})$ und die Ableitung läßt sich somit durch

$$\frac{\partial F({}^{\Psi}x^{\alpha}, \mathbf{y})}{\partial\, {}^{\Psi}x^{\alpha}} = f({}^{\Psi}x^{\alpha}, \mathbf{y})$$

ermitteln.

Dem Prozeß der logarithmierten Aktienkurse kommt in der Theorie wesentliche Bedeutung zu. Dies ist vor allem darauf zurückzuführen, daß durch die Anwendung von Itô´s Lemma die Dynamik einer Brownschen Bewegung vereinfacht werden kann. Offenbar waren dazu Kenntnisse über drei

[9] Dubois, D., Prade,H. (1980), S.95-126

verschiedene Ableitungen der Logarithmusfunktion erforderlich. Diese sollen bei Fuzzy-Auszahlungen des Underlyings ausführlich im Anhang 3-A betrachtet werden.

Es wurde bereits erwähnt, daß die hier angestellten Überlegungen zunächst rein theoretisch sind und daß jede Ableitung einzeln betrachtet werden muß. Es ist sicher nicht von der Hand zu weisen, daß andere Verfahren zur Bestimmung der Ableitungen vielleicht mathematisch exaktere Ergebnisse liefern können. Jedoch muß zunächst untersucht werden, inwieweit dieser Fehler für die Optionsbewertung an sich relevant sind, oder ob er sich nicht vielleicht sogar negativ auf die Gesamtergebnisse auswirken könnte, wenn an dieser Stelle andere Annahmen getroffen werden würden. Fakt ist, daß die Spannweiten der Auszahlung eines Finanztitels vorgegeben werden. Ein entscheidender Teil der Lösung kommt also der geeigneten Wahl dieser Spannweiten zu. Es ist zum derzeitigen Stand nicht erklärbar, warum sich auch die Spannweiten der Auszahlung einer Bewegung verändern sollen, wenn diese abgeleitet wird. Daher soll hier auf zusätzliche Komplexität verzichtet werden.

3.3. Stochastische Differentialgleichung mit Fuzzy-Auszahlungen des Underlyings

Zur Lösung der Gleichung aus Annahme 3.1. soll wieder auf Itô´s Lemma zurückgegriffen werden. Dies ist grundsätzlich möglich, da der stochastische Prozess des Underlyings unverändert geblieben ist. Allerdings ist hier eine modifizierte Form notwendig, um den Fuzzy-Eigenschaften der Auszahlungen und der SDE zu genügen. Würden nur die ersten Ableitungen bei einer Taylor-Expansion zur Lösung genügen, so ergibt sich:

$$\Delta\tilde{C} \approx \frac{\partial\tilde{C}}{\partial\tilde{S}}\Delta\tilde{S} + \frac{\partial\tilde{C}}{\partial t}\Delta t \tag{3.1}$$

Dies ist jedoch nicht der Fall. Vielmehr müssen gleiche Überlegungen wie im klassichen Modell angestellt werden, um zu überprüfen, ob Δt-Terme der Ordnung eins auch in höheren Ableitungsordnungen existieren. Die Taylor-Reihe bei Fuzzy-Auszahlungen unter obigen Annahmen bezüglich der SDE kann also wie folgt formuliert werden:

$$\begin{aligned}\Delta\tilde{C} = {} & \Delta^F \cdot \Delta(S;\underline{S};\overline{S})_{LR} + \frac{\partial(C;\underline{C};\overline{C})_{LR}}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}(\Gamma;\underline{\Gamma};\overline{\Gamma})_{LR} \cdot \Delta[(S;\underline{S};\overline{S})_{LR}]^2 + \\ & \frac{\partial^2(C;\underline{C};\overline{C})_{LR}}{\partial t(S;\underline{S};\overline{S})_{LR}}\Delta(S;\underline{S};\overline{S})_{LR}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2(C;\underline{C};\overline{C})_{LR}}{\partial t^2}\Delta t^2 + R(\Delta S, \Delta t)\end{aligned} \tag{3.2}$$

In vorhergehender Schreibweise stellt Δ^F das Delta einer Hedge-Position bzw. die erste Ableitung des Fuzzy-Preises eines Claims C nach dem Fuzzy-Preis des Underlyings S dar, welches nach Abschnitt 3.2 ermittelt werden konnte. Wie im diskreten Binomialmodell läßt sich auch $\tilde{\Gamma}$ oder $(\Gamma;\underline{\Gamma};\overline{\Gamma})_{LR}$ bestimmen. Nach Itô´s Lemma existiert lediglich *ein* weiterer Term, welche Werte der Ordnung Δt beinhaltet. Durch die Fuzzyness der Auszahlungen wird jedoch Δt nicht tangiert, folglich gilt für die Veränderung des Preises eines Claims $\tilde{C}$:

$$\Delta\tilde{C} = \Delta^F \cdot \Delta(S;\underline{S};\overline{S})_{LR} + \frac{\partial(C;\underline{C};\overline{C})_{LR}}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}(\Gamma;\underline{\Gamma};\overline{\Gamma})_{LR} \cdot \Delta[(S;\underline{S};\overline{S})_{LR}]^2 . \tag{3.3}$$

Strebt nun im Limes Δt gegen Null, so folgt aus (3.4):

$$d\tilde{C} = \Delta^F \cdot d(S;\underline{S};\overline{S})_{LR} + \frac{\partial(C;\underline{C};\overline{C})_{LR}}{\partial t}dt + \frac{1}{2}(\Gamma;\underline{\Gamma};\overline{\Gamma})_{LR} \cdot d[(S;\underline{S};\overline{S})_{LR}]^2 . \tag{3.4}$$

Einzig problematisch erscheint zunächst der Ausdruck $d[(S;\underline{S};S)_{LR}]^2$, da hier zur genauen Berechnung eine Fuzzy-Multiplikation durchgeführt werden müßte, welche zur Folge hätte, daß der Term sehr große Spannweiten aufweisen würde. Es lassen sich jedoch Überlegungen anstellen, inwieweit sich eine quadratische Veränderung auswirkt, wenn Δt wiederum gegen Null strebt.
Gilt also:

$$d[(S;\underline{S};\overline{S})_{LR}]^2 = [(\mu S;\underline{S};\overline{S})_{LR}dt]^2 + [(\sigma S;0;0)_{LR}dW]^2 , \tag{3.5a}$$

dann wirkt sich die Veränderung maßgeblich nur noch auf den stochastischen Teil der Gleichung aus und wir formulieren dann:

$$d[(S;\underline{S};\overline{S})_{LR}]^2 = (S^2;0;0)\,\sigma^2 dt \tag{3.5b}$$

Wird die Gleichung in Annahme 3.1 in die Gleichung (3.4) eingesetzt, so erhält man

$$d\tilde{C} = \Delta^F \cdot (\mu S;\underline{S};\overline{S})_{LR} + \Delta^F(\sigma S;0;0)_{LR}\,dW + \frac{\partial\tilde{C}}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\tilde{\Gamma}(S^2;0;0)_{LR}\,\sigma^2 dt \tag{3.6}$$

Nach Umformung und Zusammenfassung der Terme:

$$d\tilde{C} = [\Delta^F(\mu S;\underline{S};\overline{S})_{LR} + \frac{\partial\tilde{C}}{\partial t} + \frac{1}{2}\tilde{\Gamma}(S^2;0;0)_{LR}\sigma^2]\,dt + [(\Delta^F\sigma S;0;0) =_{LR}]\,dW \tag{3.7}$$

Entsprechend dem zeitstetigen Standardmodell hat die Änderung des Optionswertes die gleiche Struktur wie die Änderung des Wertes des Underlyings. Sie hat zwei Bestandteile, eine deterministische Steigung und eine Risikoquelle, die identisch mit der Risikoquelle des Underlyings ist.

Es wurde im Abschnitt 3.1. die Frage aufgeworfen, ob ein ähnliches Vorgehen für einen Preisprozeß logarithmierter Aktienkurse denkbar wäre. Dies ist, wie in Abschnitt 3.2 gezeigt wurde, nicht ohne zusätzliche Annahmen über die Differentiale der Gleichung (3.7) möglich.
Dies kann weiter vereinfacht werden zu:

$$d(\ln\tilde{S}) = [(\mu;\frac{\underline{S}}{S};\frac{\overline{S}}{S}) - \frac{1}{2}\sigma^2]_{LR}dt + \sigma dW \tag{3.8}$$

Der Beweis befindet sich im Anhang 3-B.

3.4. Normierung von Fuzzy-Logik basierten Brownschen Bewegungen

In diesem Abschnitt wird die Normierung einer Fuzzy-Logik basierten Brownschen Bewegung mit dem Geldmarktkonto und mit der Aktie untersucht. Es soll hier bereits mit der Dynamik eines logarithmierten Preisprozesses gearbeitet werden. Dies erspart zum Ende einige Umformungen, die nötig sind, um den Übergang zu einer Optionsbewertung darzulegen, wie dieser in Abschnitt 3.6. untersucht wird.

Zunächst werden die beiden folgenden Preisprozesse angenommen:

$$d(\ln \tilde{S}) = [(\mu; \frac{\underline{S}}{S}; \frac{\overline{S}}{S}) - \frac{1}{2}\sigma^2]_{LR} dt + \sigma dW \qquad (3.9a)$$

$$dK = rKdt \quad \text{mit } K_0 = 1 \qquad (3.9b)$$

Dabei ist die Dynamik der Aktie bereits aus den neoklassischen Modellierung bekannt. Eine Normierung mit

$$\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma} \text{ und } d\hat{W} = dW + \lambda dt$$

dazu führt, daß über den Drift des ursprünglichen Preisprozesses genauere Aussagen getroffen werden können. Auf die ausführliche Beweisführung wird verzichtet. Dargestellt wird, wie der mit dem Geldmarktkonto normierte Preisprozeß aussieht und welche Bedeutung diesem zukommt. Es soll also der Prozeß

$$d(\ln \tilde{S}) = [(\mu; \frac{\underline{S}}{S}; \frac{\overline{S}}{S}) - \frac{1}{2}\sigma^2]_{LR} dt + \sigma dW$$

dem Geldmarktkonto normiert werden:

$$d(\ln \tilde{S}) = [(\mu; \frac{\underline{S}}{S}; \frac{\overline{S}}{S})_{LR} - \frac{1}{2}\sigma^2] dt + \sigma(d\hat{W}_t - \frac{\mu - r}{\sigma} dt)$$

Nach Zusammenfassung der Terme dt und $d\hat{W}_t$ ergibt sich:

$$d(\ln \tilde{S}) = [(r; \frac{\underline{S}}{S}; \frac{\overline{S}}{S})_{LR} - \frac{1}{2}\sigma^2] dt + \sigma d\hat{W}_t .$$

Dieses Ergebnis entspricht auch gerade dem aus dem klassischen Modell bekannten Zusammenhang. Wird mit dem Geldmarktkonto normiert, entspricht der Drift einer Brownschen Bewegung gerade dem risikolosen Zins. Es könnte an dieser Stelle der Einwand erhoben werden, daß durch die Struktur der Spannweiten die LR- Fuzzy-Zahl des Driftterms negativ werden könnte. Der Drift einer Bewegung aber muß nicht unbedingt größer als Null sein. Ob der Driftterm ökonomisch plausibel ist, hängt von den Spannweiten selbst ab. Sind diese aber im Vergleich zum Gipfelpunkt klein, wie dies zu erwarten wäre, so wären die Schwankungen des Driftterms ebenfalls nur gering und relativ problemlos zu erklären. Der Betrag der risikolos investiert werden könnte, hängt selbstverständlich auch von der Ausprägung von S ab. Sind die Spannweiten eher groß gewählt, so wird auch dieser Betrag unsicherer. Wiederum muß darauf verwiesen werden, daß eine plausible Lösung von der Wahl geeigneter Spannweiten abhängt.

Es soll hier die Normierung mit dem Aktienpreisprozeß S selbst durchgeführt werden. Dazu werden wiederum die Preisprozesse (3.9a) und (3.9b) verwendet. Es gelte nun für einen normierten Preisprozeß

$$Y = \frac{K}{\tilde{S}} .$$

Dieser Prozeß besitzt nicht die Martingaleigenschaft. Um diese zu erhalten, wird so normiert, daß

$$\phi = \frac{r - \mu + \sigma^2}{\sigma}$$

entsprechen muß, wobei $d\hat{W} = dW - \phi\, dt$. Normiert wird also

$$d(\ln \tilde{S}) = [(\mu; \frac{\underline{S}}{S}; \frac{\overline{S}}{S}) - \frac{1}{2}\sigma^2]_{LR} dt + \sigma dW$$

und durch Ersetzen von dW kann formuliert werden:

$$d(\ln \tilde{S}) = [(\mu; \frac{\underline{S}}{S}; \frac{\overline{S}}{S})_{LR} - \frac{1}{2}\sigma^2] dt + \sigma(d\hat{W}_t + \frac{r - \mu + \sigma^2}{\sigma} dt)$$

Nach Zusammenfassung der Terme dt und $d\hat{W}_t$ ergibt sich:

$$d(\ln \tilde{S}) = [(r + \sigma^2; \frac{\underline{S}}{S}; \frac{\overline{S}}{S})_{LR} - \frac{1}{2}\sigma^2] dt + \sigma d\hat{W}_t .$$

Auch dieser Term unterscheidet sich nicht wesentlich von der analogen Darstellung des klassischen Modells. Es konnte also festgestellt werden, daß identische Normierungshilfen zu Ergebnissen führen, die eine Analogie zum klassischen Modell aufweisen und weiterhin ökonomisch begründbar bleiben. Auch der Volatilitätsterm bleibt unabhängig von der gewählten Normierung. Hiermit ist wiederum gezeigt, daß durch die Umformung bezüglich der Wahrscheinlichkeiten kein Fehler entsteht. Volatilitätsschätzungen können gerade deshalb wie bisher durchgeführt werden, da sich diese durch eine Normierung nicht verändern. Bevor versucht wird, anhand der erzielten Ergebnisse in diesem Abschnitt gezielt Optionen zu bewerten, wird untersucht, ob eine partielle Differentialgleichung existiert, die den Eigenschaften der bekannten Black/Scholes PDE am nächsten kommt.

3.5. Fuzzy-Logik basierte partielle Differentialgleichung

Um die Risikoquelle zumindest zum größten Teil zu eliminieren, wird ein Hedge-Portfolio gebildet, welches an dieser Stelle mit P bezeichnet wird.

$$P = -\tilde{C} + \Delta^F \cdot \tilde{S} \tag{3.10}$$

Es wird später untersucht, ob der Wert des Portfolios fuzzy ausgedrückt werden muß. Für die Änderung des Portfoliowertes bei marginal kleinen t gilt folgender Zusammenhang:

$$dP = -d\tilde{C} + \Delta^F \cdot d\tilde{S} \tag{3.11}$$

Werden die Gleichung aus Annahme 3.1. und (3.8) in die Gleichung (3.11) eingesetzt, so gilt:

$$\begin{aligned} dP = &-[\Delta^F \cdot (\mu S; \underline{S}; \overline{S})_{LR} + \frac{\partial \tilde{C}}{\partial t} + \frac{1}{2}\tilde{\Gamma}(S^2;0;0)_{LR}\sigma^2] dt \\ &- (\Delta^F \sigma S;0;0)_{LR} dW + \Delta^F \cdot (\mu S; \underline{S}; \overline{S})_{LR} dt - (\Delta^F \sigma S;0;0)_{LR} dW \end{aligned} \tag{3.12}$$

Nach Umformung und Zusammenfassung erhalten wir:

$$dP = -[(\frac{\partial \tilde{C}}{\partial t}) + \frac{1}{2}\tilde{\Gamma} \cdot (S^2;0;0)_{LR} \cdot \sigma^2] dt \tag{3.13}$$

Der Wert des Portfolios hängt auch bei Fuzzy-Logik basierten zeitstetigen Modell nicht von der Risikoquelle dW ab. Das Portfolio ist risikolos und muß im Gleichgewicht eine sichere Rendite r erbringen:

$$\frac{dP}{P} = \frac{-[(\frac{\partial\tilde{C}}{\partial t}) + \frac{1}{2}\tilde{\Gamma}\cdot(S^2;0;0)_{LR}\cdot\sigma^2]\,dt}{-\tilde{C} + \Delta^F\cdot\tilde{S}} \approx r\,dt \tag{3.14}$$

Es gilt hier lediglich „ungefähr gleich“, da das gesamte Risiko nur in Spezialfällen vollständig gehedged werden kann. Durch Optimierung des Deltas einer Position wird lediglich eine Annäherung an einen perfekten Hedge erzielt.

Die Gleichung (3.14) kann umgeformt werden, so daß gilt:

$$-[(\frac{\partial\tilde{C}}{\partial t}) + \frac{1}{2}\tilde{\Gamma}(S^2;0;0)_{LR}\sigma^2]dt \approx r\cdot(-\tilde{C} + \Delta^F\cdot\tilde{S})dt \tag{3.15}$$

oder

$$\frac{\partial\tilde{C}}{\partial t} + r\Delta^F\tilde{S} + \frac{1}{2}\sigma^2(S^2;0;0)_{LR}\cdot\tilde{\Gamma} - r\tilde{C} \approx 0 \tag{3.16}$$

Gleichung (3.15) stellt die Fuzzy-Logik basierte partielle Differentialgleichung dar, die auf einer geometrischen Brownschen Bewegung mit Fuzzy-Auszahlungen des Underlyings beruht. Augenscheinlich ist vor allem, daß diese nunmehr lediglich ungefähr gleich Null sein muß. Es wird jedoch in den folgenden Abschnitten deutlich, daß dies eher problematisch als hilfreich ist und es werden Defuzzifizierungsansätze vorgestellt, die auf der in Abschnitt 3.2. dargestellten Idee basieren.

3.6. Fuzzy-Logik basierte risikoneutrale Bewertung

Die Grundlagen der Fuzzy-Logik basierten risikoneutralen Bewertung wurden bereits im ein- und mehrperiodigen Modellen vorgestellt. Im einperiodigen Fuzzy-Logik basierten Modell wurde die Behauptung bewiesen, daß die risikoneutrale Bewertung Ergebnisse liefern kann, wenn mindestens ein auf dem Markt gehandeltes Basiswertpapier crispe Auszahlungen hat. Diese Eigenschaften sollen nun im zeitstetigen Modell benutzt werden. Dies scheint zunächst möglich, da eine europäische Call-Option im Fuzzy-Logik basierten stetigen Modell durch ein Underlying mit fuzzy Auszahlungen und eine risikolose Anleihe, der ein bekannter crisper Zins zugrunde gelegt wird, nachgebildet wird.

Diese Darstellung lehnt sich an risikoneutrale Bewertung im zeitstetigen Modell nach Black/ Scholes. Es werden also solche Wahrscheinlichkeiten für die Fuzzy- Logik basierte Brownsche Bewegung gesucht, bei denen der angenommene Prozeß für das Underlying und Derivat zu einem Martingal wird.

Alle Annahmen aus Abschnitt 3 werden beibehalten. Das Underlying mit fuzzy Auszahlungen folgt folgender geometrischen Brownschen Bewegung:

$$d(S;\underline{S};\overline{S})_{LR} = (\mu S;\underline{S};\overline{S})_{LR}\,dt + \sigma S dW \tag{3.17}$$

Die Entwicklung des Geldmarktkontos kann beschrieben werden als eine Steigung ohne Risikoquelle, wobei die Momentanverzinsung bekannt und crisp ist :

$$dK = rKdt,\ \text{mit}\ K_0 = 1 \tag{3.18}$$

Die Auszahlungen eines europäischen Call mit fuzzy Auszahlungen des Underlyings sind:

$$\tilde{C}_T = \max\,[(S_T;\underline{S};\overline{S})_{LR} - \kappa, 0] \tag{3.19}$$

Die Maximumsbedingung in Gleichung (3.19) kann durch eine Indikatorfunktion ersetzt werden:

$$\tilde{C}_T = [(S_T;S;S)_{LR} - \kappa]\cdot I_{\{(S_T;\underline{S};\overline{S})_{LR}\succ\kappa\}} \quad \text{mit } I_A = \begin{cases} 1 & \text{wenn A eintritt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{3.20}$$

Da ein europäischer Call durch zwei Wertpapiere nachgebildet werden kann, deren Zahlungsströme additiv verknüpfbar sind, ist die Bewertungsgleichung (3.20) darstellbar als:

$$\tilde{C}_T = (S_T;\underline{S};\overline{S})_{LR}\cdot I_{\{(S_T;\underline{S};\overline{S})_{LR}\succ\kappa\}} - \kappa\cdot I_{\{(S_T;\underline{S};\overline{S})_{LR}\succ\kappa\}} \tag{3.21}$$

Dadurch können die beiden Terme auf der rechten Seite der Gleichung (3.21) einzeln bewertet werden.

Bewertung von $\kappa\cdot I_{\{(S_T;\underline{S};\overline{S})_{LR}\succ\kappa\}}$

Zunächst soll eine Hilfsvariable $\tilde{y}$ definiert werden, so daß gilt:

$$\tilde{y}_T = \kappa\cdot I_{\{(S_T;\underline{S};\overline{S})_{LR}\succ\kappa\}} \tag{3.22}$$

Die Auszahlungen von y werden nun mit Geldmarktkonto normiert. Es sind aber auch andere Normierungen denkbar. Das Geldmarktkonto als Numeraire hat den Vorteil, daß der Erwartungswert von y unter dieser Normierung zu einem Martingal wird:

$$\frac{\tilde{y}_0}{K_0} = \hat{E}_0[\frac{\tilde{y}_T}{K_T}] \tag{3.23}$$

Der in y_T enthaltene Basispreis κ und das Geldmarktkonto K zum Zeitpunkt T sind konstant und können somit aus dem Erwartungswert herausgenommen werden, so daß die Gleichung (3.23) vereinfacht wird zu:

$$\frac{\tilde{y}_0}{K_0} = \frac{\kappa}{K_T}\hat{E}_0[I_{\{(S_T;\underline{S};\overline{S})_{LR}\succ\kappa\}}] \tag{3.24}$$

Dabei kann der Term $\hat{E}_0[I_{\{(S_T;\underline{S};\overline{S})_{LR}\succ\kappa\}}]$ als Erwartungswert unter risikolosen, künstlichen Wahrscheinlichkeiten für das Ereignis, daß die Option zum Verfallsdatum „im Geld“ liegt, interpretiert werden. Deshalb soll zunächst die Brownsche Bewegung unter den risikolosen Wahrscheinlichkeiten betrachtet werden. Die Brownsche Bewegung nach Annahme 3.1 wird normiert mit:

$$dW_t = d\hat{W} - \lambda dt \quad \text{mit} \quad \lambda = \frac{\mu - r}{\sigma} \tag{3.25}$$

Dabei wird λ als Marktpreis des Risikos bezeichnet. Wird die Gleichung (3.24) in die Gleichung (3.17) eingesetzt, so kann die Verteilung des Underlyings beschrieben werden als:

$$d(S_t;\underline{S};\overline{S})_{LR} = (\mu S_t;S;S)_{LR}\,dt + \sigma S_t\,(d\hat{W}_t - \frac{\mu - r}{\sigma}dt) \tag{3.26}$$

Die Gleichung (3.23) kann weiter umgeformt werden zu:

$$d\tilde{S}_t = (rS_t;S;S)_{LR}\,dt + \sigma S_t d\hat{W}_t \tag{3.27}$$

Der Driftterm in der Gleichung (3.27) ist bei Zinsunsicherheit lokal risikoneutral. Mit der Normierung des Prozesses für das Underlying kann somit der gleiche Effekt erzielt werden, wie im Abschnitt 3.4. durch Bildung eines Hedgeportfolios. Wird die linke Seite der Gleichung (3.27) logarithmiert, so wird die geometrische Brownsche Bewegung zu:

$$d(\ln \tilde{S}_t) = [(r;\frac{\underline{S}}{S};\frac{\overline{S}}{S})_{LR} - \frac{\sigma^2}{2}]\,dt + \sigma d\hat{W}t \qquad (3.28)$$

Der Beweis findet sich in Anhang 3-B dieser Arbeit.

Die Gleichung (3.28) ist eine arithmetische Brownsche Bewegung. Die Vorteile wurden bereits erläutert. Weiterhin gilt folgende Eigenschaft:

$$\hat{W}(\tilde{S}_t \succ \kappa) = \hat{W}(\ln \tilde{S}_t \succ \ln \kappa) \qquad (3.29)$$

Der Wert der Underlyings am Verfallsdatum der Option kann bei einer arithmetischen Brownschen Bewegung dargestellt werden als:

$$\ln \tilde{S}_T = \ln \tilde{S}_0 + \int_0^T d \ln \tilde{S}_T \qquad (3.30)$$

Die Gleichung (3.30) kann weiterhin umgeformt werden zu:

$$\begin{aligned} &\ln \tilde{S}_T = \ln \tilde{S}_0 + \int_0^T [(r;\frac{\underline{S}}{S};\frac{\overline{S}}{S})_{LR} - \frac{\sigma^2}{2}]dt + \int_0^T \sigma d\hat{W}_t \\ &\Leftrightarrow \ln \tilde{S}_T = \ln \tilde{S}_0 + [(r;\frac{\underline{S}}{S};\frac{\overline{S}}{S})_{LR} - \frac{\sigma^2}{2}]T + \sigma\hat{W}_T \end{aligned} \qquad (3.31)$$

Wird die Gleichung (3.31) in die Bedingung (3.29) eingesetzt, so kann die risikolose Wahrscheinlichkeit errechnet werden:

$$\begin{aligned} &\ln \tilde{S}_T \succ \ln \kappa \\ &\Leftrightarrow \ln \tilde{S}_0 + [(r;\frac{\underline{S}}{S};\frac{\overline{S}}{S})_{LR} - \frac{\sigma^2}{2}]\,T + \sigma\hat{W}_T \succ \ln \kappa \end{aligned} \qquad (3.32)$$

Aus der Definition 3.1 für die Brownsche Bewegung folgt, daß der Term $\sigma\hat{W}_T$ dem Fehlerterm $\varepsilon\sqrt{T}$, mit $\varepsilon \sim N(0{,}1)$, entspricht. Deshalb kann die Ungleichung (3.32) auch dargestellt werden als:

$$\frac{\ln \tilde{S}_0 + \ln \kappa - [(r;\frac{\underline{S}}{S};\frac{\overline{S}}{S})_{LR} - \frac{\sigma^2}{2}]T}{\sigma\sqrt{T}} \prec \varepsilon \qquad (3.33)$$

Die Ungleichung (3.33) ist dem Ausdruck d_2 aus der Black-Scholes Gleichung sehr ähnlich, hat aber einen negativen Vorzeichen, also $-d_2$. Weiterhin zu bemerken ist es, daß die linke Seite der Ungleichung (3.33) fuzzy ist. Die Ungleichung kann deshalb folgendermaßen formuliert werden:

$$\hat{W}(\varepsilon \succ -\tilde{d}_2) = \hat{W}(\varepsilon \prec \tilde{d}_2) \Rightarrow N(\tilde{d}_2) \qquad (3.34)$$

Wird dies in die Gleichung (3.23) eingesetzt, läßt sich vor einer Rück-Normierung formulieren:

$$\frac{\tilde{y}_0}{K_0} = \frac{\kappa N(\tilde{d}_2)}{K_T} \qquad (3.35a)$$

Für das Geldmarktkonto gilt die Beziehung

$$\frac{K_0}{K_T} = \frac{K_0}{K_0 \cdot e^{rT}} = e^{-rT},$$

so daß (3.35a) schlußendlich zu (3.35b) umgeformt werden kann:

$$\tilde{y}_0 = \kappa e^{-rT} N(\tilde{d}_2) \tag{3.35b}$$

Bewertung von $\tilde{S}_T \cdot I_{\{(S_T;\underline{S};\overline{S})_{LR} \succ \kappa\}}$

Auch hier soll zunächst eine Hilfsvariable y definiert werden, so daß gilt:

$$\tilde{y}_T = \tilde{S}_T \cdot I_{\{(S_T;\underline{S};\overline{S})_{LR} \succ \kappa\}} \tag{3.40}$$

Die Auszahlungen von $\tilde{y}$ werden dem Underlying normiert. Unter diesem Numeraire wird der Erwartungswert von $\tilde{y}$ zu einem Martingal:

$$\frac{\tilde{y}_0}{\tilde{S}_0} = \hat{E}_0[\frac{\tilde{y}_T}{\tilde{S}_T}] \tag{3.41}$$

Dabei ist die Unschärfe der Hilfsvariable $\tilde{y}$ direkt Fuzzyness des Underlyings abhängig. Die Problematik der Division von Fuzzy-Zahlen wird an dieser Stelle nicht erläutert. Anzumerken sei, daß von uns hier betrachtete Spezialfall identisch mit in Abschnitt 3.2 erläuterten Problematik der Differentiation von Fuzzy-Zahlen ist. Deshalb können die dort dargelegten Ausführungen ohne Einschränkung auf die Gleichung (3.41) übertragen werden. Der Ausdruck S_T in der Gleichung (3.41) kann gekürzt werden zu:

$$\frac{\tilde{y}_0}{\tilde{S}_0} = \hat{E}_0[I_{\{(S_T;\underline{S};\overline{S})_{LR} \succ \kappa\}}] \tag{3.42}$$

Dabei kann der Term $\hat{E}_0[I_{\{(S_T;\underline{S};\overline{S})_{LR} \succ \kappa\}}]$ Erwartungswert unter künstlichen Wahrscheinlichkeiten interpretiert werden. Die Parallelen zum obigen Beweis sollen erhalten bleiben, so daß zunächst die Brownsche Bewegung unter den risikolosen Wahrscheinlichkeiten und einer anderen Normierung betrachtet wird:

$$dW_t = d\hat{W} - \phi dt \text{ mit } \phi = \frac{\mu - r + \sigma^2}{\sigma} \tag{3.43}$$

Wird die Gleichung (3.43) in die Gleichung (3.17) eingesetzt, so kann die Verteilung des Underlyings beschrieben werden als:

$$d\tilde{S}_t = (rS_t + \sigma^2; S; S)_{LR}\, dt + \sigma S_t d\hat{W}_t \tag{3.44}$$

Wird die linke Seite der Gleichung (3.44) logarithmiert, so wird die geometrische Brownsche Bewegung zu:

$$d(\ln \tilde{S}_t) = [(r; \frac{\underline{S}}{S}; \frac{\overline{S}}{S})_{LR} + \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{2}]dt + \sigma d\hat{W}t \tag{3.45}$$

Die Gleichung (3.45) kann weiterhin vereinfacht werden:

$$d(\ln \tilde{S}_t) = [(r; \frac{S}{\underline{\underline{S}}}; \frac{\overline{S}}{S})_{LR} + \frac{\sigma^2}{2}]dt + \sigma d\hat{W}t \tag{3.46}$$

Mit der Gleichung (3.46) wurde eine arithmetische Brownsche Bewegung erreicht. Der Wert der Underlyings am Verfallsdatum der Option kann bei dieser arithmetischen Brownschen Bewegung dargestellt werden als:

$$\begin{aligned} \ln \tilde{S}_T &= \ln \tilde{S}_0 + \int_0^T [(r; \frac{S}{\underline{\underline{S}}}; \frac{\overline{S}}{S})_{LR} + \frac{\sigma^2}{2}]dt + \int_0^T \sigma d\hat{W}_t \\ \Leftrightarrow \ln \tilde{S}_T &= \ln \tilde{S}_0 + [(r; \frac{S}{\underline{\underline{S}}}; \frac{\overline{S}}{S})_{LR} + \frac{\sigma^2}{2}]T + \sigma \hat{W}_T \end{aligned} \tag{3.47}$$

Aus der Definition 3.1 für die Brownsche Bewegung folgt, daß der Term $\sigma\hat{W}_T$ dem Fehlerterm $\gamma\sqrt{T}$, mit $\gamma \sim N(0{,}1)$, entspricht. Wird die Gleichung (3.47) in die Bedingung (3.33) eingesetzt, so kann die künstliche Wahrscheinlichkeit errechnet werden:

$$\begin{aligned} &\hat{W}(\ln S_T \succ \ln \kappa) \\ \Leftrightarrow\ &\hat{W}(\gamma \succ \frac{\ln \kappa - \ln \tilde{S}_0 - [(r; \frac{S}{\underline{\underline{S}}}; \frac{\overline{S}}{S}) + \frac{\sigma^2}{2}]T}{\sigma\sqrt{T}}) \end{aligned} \tag{3.48}$$

Die Ungleichung in (3.46) dem Ausdruck d_1 aus der Black-Scholes Formel ähnlich und entspricht - d_1. Die Bedingung (3.48) wird daher umgeformt zu:

$$\hat{W}(\gamma \prec \frac{\ln \tilde{S}_0 - \ln \kappa + [(r; \frac{S}{\underline{\underline{S}}}; \frac{\overline{S}}{S}) + \frac{\sigma^2}{2}]T}{\sigma\sqrt{T}}) = N(\tilde{d}_1) \tag{3.49}$$

Die in der Gleichung (3.41) getroffene Normierung wird dann rückgängig gemacht:

$$y_0 = \tilde{S}_0 N(\tilde{d}_1) \tag{3.50}$$

Werden beide Terme aus Gleichung (3.39b) und Gleichung (3.50) zusammengefaßt, kann eine europäische Call-Option bewertet werden:

$$C = \tilde{S}_0 N(\tilde{d}_1) - \kappa e^{-rT} N(\tilde{d}_2) \tag{3.51}$$

4. Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit beschäftigte sich mit Bewertung derivater Finanztitel mit Fuzzy-Auszahlungen des Underlyings. Es wurde diskutiert, ob mit Hilfe eines Fuzzy-Logik basierten Modells die Realität von Aktienmärkten genauer beschrieben werden kann. Dabei wurde versucht, klassische Instrumente der Bewertung von derivaten Finanztiteln in eine Betrachtung zu überführen, die es erlaubt, mit Fuzzy-Auszahlungen umzugehen. Der Trick der Modellierung bestand darin, daß die Stochastik des neoklassischen Bewertungsmodells im wesentlichen unverändert blieb. Jedoch wurde eine weitere Unbestimmtheitskomponente in Form von unscharfen Auszahlungen modelliert. Diese schlägt sich in Fuzzy-Preisen des Derivats nieder. Dabei ist anzumerken, daß ein solcher Fuzzy-Preis auf vollständigen Märkten eine Gleichgewichtslösung darstellt und präferenzunabhängig ist.

Mit Hilfe des gleichen Modellrahmens gelang es dann, auch zeitstetige Modelle zu implementieren. Bei dieser Vorgehensweise zeigten jedoch Probleme bei der Differentiation von Fuzzy-Zahlen, was weitere Berechnungen erheblich erschwert. Um hier zunächst zu interpretierbaren Ergebnissen zu kommen, wurde ein Defuzzifizierungsverfahren angewandt. Es wurde dann gezeigt, daß es für *alle* Investoren eine präferenzunabhängige Menge von Preisen gibt, welche durch eine Zugehörigkeitsfunktion beschrieben ist. Für jeden einzelnen Investor wird jedoch die individuelle Präferenzeinstellung eingebracht, um zu Optionspreisen zu gelangen.

Die Modellannahme, daß die zukünftigen Auszahlungen des Underlyings nur unscharf darstellbar sind, scheint uns plausibel zu sein. So werden Risiken, die in der realen Welt bestehen, aber in den Standardmodellen aus der Modellierung ausgeschlossen werden, berücksichtigt. Dabei bedienen sich die Standardmodelle der Annahme über homogene bedingte Erwartungen aller Marktteilnehmer bezüglich der zustandsbedingten Auszahlungen des Underlyings. Jene wird im Modell mit Fuzzy-Auszahlungen gelockert. Nichtsdestotrotz ist eine Bewertung von Derivaten möglich, die in Extremfällen analoge Ergebnisse wie das Standardmodell liefert.

Obwohl für die Bewertung von Standardoptionen im Fuzzy-Binomialmodell wie auch im zeitstetigen Modell geschlossene Formeln präsentiert wurden, bleibt die Frage offen, ob auch komplexere Auszahlungsmuster der Unschärfe modelliert werden können. Ein durchaus weites Forschungsgebiet bietet die Problematik der Bildung und Berechnung von Zugehörigkeitsfunktionen. Die Frage nach der Struktur jener ist von essentieller Bedeutung, kann doch eine Bewertung im Fuzzy-Logik basierten Modellrahmen nur so gut sein, wie die Wahl der Zugehörigkeitsfunktionen die Realität widerspiegelt. Es muß dazu ein plausibles Verfahren aufgestellt werden.

Anhang 2-A

Die Zusammenhänge zwischen Spannweiten, Zeitsprüngen und dem Basispreis von Optionen lassen sich gegeneinander abtragen. Dies ist im folgenden dargestellt.

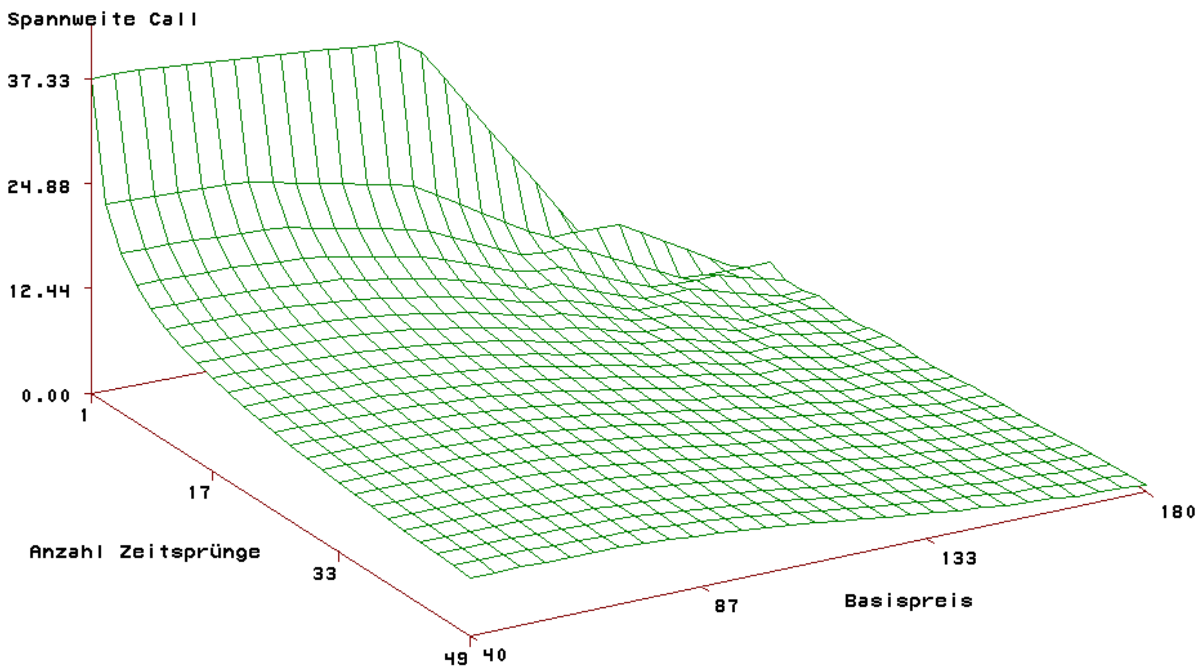

Abbildung 2A-1 : Der Zusammenhang von Spannweiten, Zeitsprüngen und dem Basispreis eines Calls

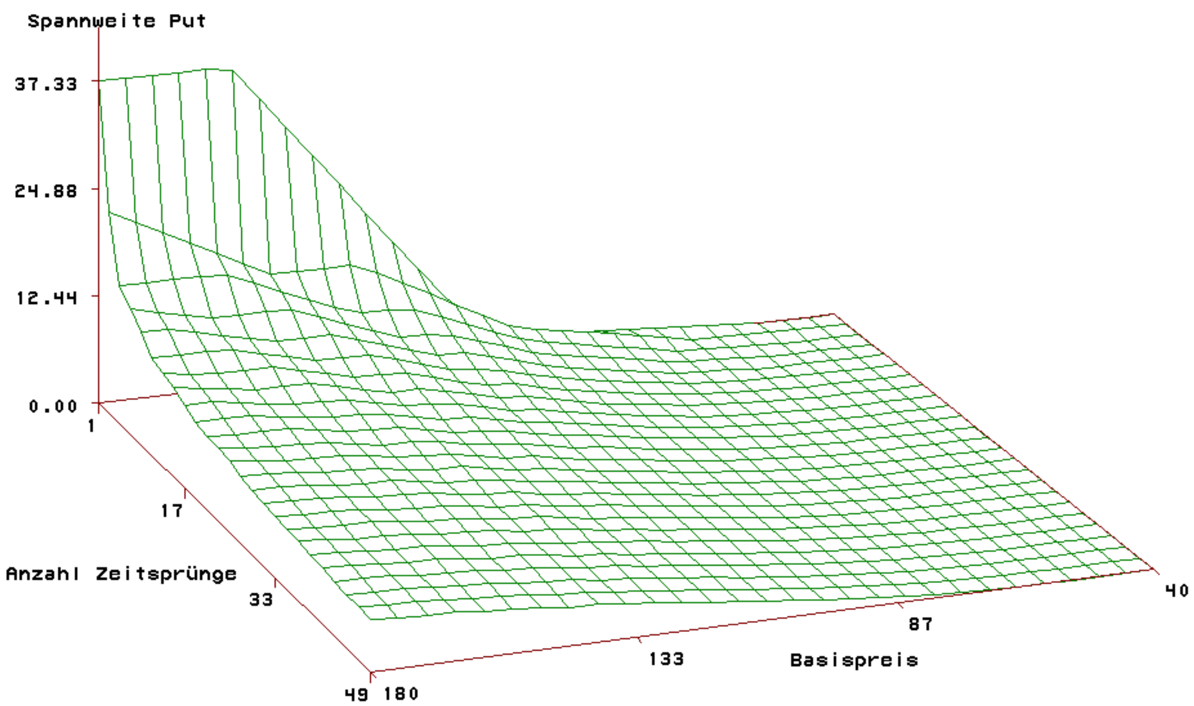

Abbildung 2A-2 : Der Zusammenhang von Spannweiten, Zeitsprüngen und dem Basispreis eines Puts

Zugrundeliegende Daten zu Abbildungen 2A-1 und 2A-2 :

- Zins r=0,1
- Proportionalitätsfaktor u=1,2 und d=1/u
- anfänglicher Aktienkurs S_0=100
- Spannweiten des Aktienkurses genügen den Vollständigkeitsbedingungen gemäß Gleichung 2.17
- Es wurden Basispreise von 40 bis 180 in Schritten von 5 Einheiten abgetragen

Anhang 3-A

Zunächst werden für den Aktienpreisprozeß $C = \ln \tilde{S}$ die ersten Ableitungen nach S und nach der Zeit, t, untersucht.

Für

$$\frac{\partial C}{\partial \tilde{S}} \equiv \Delta^F$$

ist also die Frage, wie sich der Logarithmus von S verhält, wenn S variiert wird. Es wurde geschildert, daß Ableitungen von Fuzzy-Funktionen gerade dann problematisch sind, wenn die Spannweiten von der Differenzierungsvariablen abhängen und sich nicht analog zum Gipfel verhalten. Im Fall der ersten Ableitung folgen jedoch alle Elemente aus dieser Fuzzy-Menge der gleichen Funktion und die Spannweiten sind nicht von einer anderen Funktion abhängig. Es gibt auch keine anderen Variablen in der Funktion. Es soll daher argumentiert werden, daß die erste Ableitung des Preisprozesses C nach der Fuzzy-Auszahlung der Aktie gerade der Ableitung im klassischen Modell entspricht. Die Spannweiten ändern sich aufgrund der Differentiation nicht:

$$\frac{\partial C}{\partial \tilde{S}} = \frac{1}{S} .$$

Deshalb sind auch die Spannweiten der zweiten Ableitung Null. Hier greift gleiches Argument, denn alle Elemente haben die gleiche Ursprungsfunktion und man erhält:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial \tilde{S}^2} \equiv \tilde{\Gamma} = -\frac{1}{S^2} .$$

Zur Substitution aller benötigten Ableitung in Itô´s Lemma fehlt nunmehr lediglich $\partial C / \partial t$. Der Prozeß C war aber lediglich als Logarithmus von S beschrieben. Er muß daher unabhängig von der Zeit t sein. Dies gilt konsequenterweise auch für die Spannweiten:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = 0 .$$

Anhang 3-B

Es wird ein Aktienpreisprozeß formuliert, der durch

$$C(\tilde{S};t) = \ln(S;\underline{S};\bar{S})_{LR}$$

beschrieben sein soll. Gesucht werden dann die Ableitungen dieses Ausdrucks.

Sei eine Funktion gegeben mit:

$$C(\tilde{S};t) = \ln(S;\underline{S};\bar{S})_{LR}$$

Die Spannweiten seien von C unabhängig, also konstant. Da die Spannweiten unter dieser Annahme nicht von der Steigung abhängen, lauten die Bedingungen erster und zweiter Ordnung, wie dies in Anhang 3-A gezeigt wurde:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial C}{\partial \tilde{S}} = \frac{1}{S}; \quad \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}$$

Wird auf den Prozeß $C(\tilde{S};t)$ Itô´s Lemma angewendet, so kann eine infinitesimal kleine Veränderung von C beschrieben werden durch:

$$d(\ln \tilde{S}) = \frac{1}{S}\left[(\mu S;\underline{S};\bar{S})_{LR}\,dt + \sigma S dW\right] + \frac{1}{2}(-\frac{1}{S^2})\sigma^2 S^2 dt$$

Nach einer Zusammenfassung der Terme wird dieser Ausdruck zu:

$$d(\ln \tilde{S}) = (\mu;\frac{\underline{S}}{S};\frac{\bar{S}}{S})_{LR}\,dt + \sigma dW - \frac{1}{2}\sigma^2 dt$$

Dies kann weiter vereinfacht werden zu:

$$d(\ln \tilde{S}) = [(\mu;\frac{\underline{S}}{S};\frac{\bar{S}}{S}) - \frac{1}{2}\sigma^2]_{LR}\,dt + \sigma dW$$

Literaturverzeichnis

Bakshi, G., C. Cao, Z. Chen (1996): Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models, Working Paper

Bakshi, G., C. Cao, Z. Chen (1998): Do Call Prices and the Underlying Stock Move in Opposite Directions?, Working Paper

Black, F., M. Scholes (1973): The Pricing of Options and Corporate Liabilities, Journal of Political Economy, S. 637-654

Breeden, D.T., R.H. Litzenberger (1978): Prices of State Contingent Claims Implicit on Option Prices, Journal of Business, 51, S. 621-651

Brennan, M.J. (1979): The Pricing of Contingent Claims in Discrete-Time Models, Journal of Finance 34, S. 53-68

Congxin, W., W. Shuli, M. Ming (1993): Generalized Fuzzy Integrals: Part I. Fundamental Concepts, Fuzzy Sets and Systems, 57, S.219-226

Cox, J.C., S.A. Ross, M. Rubinstein (1979): Option Pricing, A Simplified Approach, Journal of Financial Economics, 7, S. 229-263

Derman, E., I. Kani (1994): Riding on a Smile, Risk, 7, No.2, S. 32-39

Dubois, D., H. Prade (1980): Fuzzy Sets and Systems. Theory and Applications, Academic Press, New York

Dvurecenskij, A. (1992): The Radon-Nikodym Theorem for Fuzzy Probability Spaces, Fuzzy Sets and Systems, 45, S.69-78

Huang, C.-F., R.H. Litzenberger (1988): Foundations for Financial Economics

Itô, K. (1951): On Stochastic Differential Equations, Memoirs, American Mathematical Society, 4, S. 1-51

Kaleva, O. (1987): Fuzzy Differential Equations, Fuzzy Sets and Systems, 24, S.301-317

Klement, E.P. (1988): A Radon-Nikodym Theorem for Fuzzy-Valued Measures, Fuzzy Sets and Systems, 27, S.45-49

Korolev, K., K.D. Leifert, H. Rommelfanger (1999): Arbitragebewertung bei vagen Erwartungen der Marktteilnehmer, Working Paper Series: Finance and Accounting, FB Wirtschaftswissenschaften, J.W. Goethe-Universität Frankfurt am Main, ISSN 1434-3401

Leifert, K.D. (1999): Fuzzy-Logik basierte Bewertung von derivaten Finanzinstrumenten in zeitstetigen Modellen, Diplomarbeit am Institut für Statistik und Mathematik, FB Wirtschaftswissenschaften, J.W. Goethe-Universität Frankfurt am Main

Longstaff, F. (1995): Option Pricing and the Martingale Restriction, Review of Financial Studies, 8, S. 1091-1124

Lushu, L. (1995): Random Fuzzy Sets and Fuzzy Martingales, Fuzzy Sets and Systems, 69, S. 181-192

Malliaris, A.G.; W.A. Brock (1985): Stochastic Methods in Economics and Finance

Musiela, M., M. Rutkowski (1997): Martingale Methods in Financial Modelling, Springer Verlag, Berlin u.a.

Rommelfanger, H. (1994): Fuzzy Decision Support Systeme, Springer Verlag, 2. Auflage

Rommelfanger, H. (1999): Decision making in fuzzy environment- Ways for getting practical Decison models. Will be published in Wanka G.; Krallert U. D. (Eds.) Decision Theory and Optimization in Theory and Practice. University Chemnitz 1999

Rubinstein, M. (1994): Implied Binomial Trees, Journal of Finance, 49, S. 771-818

Sugeno, M. (1974): Theory of Fuzzy Integral and Its Appl., Ph.D. Thesis, Tokyo Inst. of Technology, Tokyo

Sundraram, R.K. (1997): Equivalent Martingale Measures and Risk-Neutral Pricing. An Expository Note, Journal of Derivatives

Yoshida, Y. (1994): Markov Chains with A Transition Possibility Measure and Fuzzy Dynamic Programming, Fuzzy Sets and Systems, 66, S.39-57

Zadeh, L.A. (1968): Probability Measures of Fuzzy-Events, Journal of Math. Anal. and Appl., 23, S. 421-427

Zadeh, L.A., J. Kacprzyk (1992): Fuzzy Logic for the Management of Uncerainty, John Wiley and Sons, New York