# Arbeiten aus dem Institut für Psychologie

## der Johann Wolfgang Goethe-Universität

## Frankfurt am Main

**HEFT 3, 2000**

# KONTROLLFRAGEN, ÜBUNGSMATERIAL UND KLAUSURBEISPIELE ZU „PSYCHOLOGISCHE STATISTIK II“

**HELFRIED MOOSBRUGGER UND ULRIKE RABL**

**ÜBERARBEITET VON DOROTHEA MILDNER, JUNI 2006**

# INHALTSVERZEICHNIS

# Teil A: Kontrollfragen und Übungsaufgaben

# 1. Matrixalgebra

## 1.1 Aufgaben

*Aufgabe I:* Gegeben seien die folgenden Matrizen:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & 0{,}5 & 2 \\ 0{,}5 & 6 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 9 \\ -1 & 7 & -3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -3{,}5 & 6 & 2 \\ 9 & 1 & 0{,}5 \\ 3 & -5 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 0{,}3 \\ 9 & 8 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 6 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

1) Von welchem Typ sind die angegebenen Matrizen?
2) Bei welchen der angegebenen Matrizen handelt es sich um
   a) quadratische Matrizen?
   b) symmetrische Matrizen?
   c) Skalarmatrizen?
3) Für welche Paare aus den Matrizen ist die Summe definiert? Berechnen Sie **alle** möglichen Summen.
4) Welche der folgenden Differenzen sind definiert?
   a) **F - C**
   b) **B - F**
   c) **C - A**
   d) **B - E**
   Berechnen Sie die definierten Differenzen.

5) **D** sei eine Datenmatrix ;
   a) Welchen Wert hat Versuchsperson 4 in Variable 2?
   b) Welchen Typ hat eine Datenmatrix von 62 Versuchspersonen in 5 Variablen?

*Aufgabe II*: Gegeben seien die folgenden Matrizen:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}5 & 1 & 0{,}5\\ 1 & 8 & 3\\ 0{,}5 & 3 & 0\end{bmatrix}\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}0 & 6 & 1\\ 3 & 5 & 2\\ -1 & 0 & -5\\ 1 & 3 & 6\end{bmatrix}\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}0{,}3 & 6 & 8 & 1\\ 0 & 2 & 8 & 4\end{bmatrix}\quad \mathbf{D'}=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 5 & 1\\ 0 & 6\end{bmatrix}\quad \mathbf{E}=\begin{bmatrix}5 & 1 & 0\\ -3 & 1 & 5\\ 2 & 4 & 9\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}=\begin{bmatrix}-1 & 6\\ 5 & 0{,}3\\ 7 & 4\\ 9 & 7\end{bmatrix}$$

1) Transponieren Sie die Matrix **B**.
2) Warum ist das Produkt zweier Matrizen nicht kommutativ? Warum ist das Produkt einer Matrix mit ihrer Transponierten auf jeden Fall definiert?
3) Berechnen Sie die Produkte **C'C**, **CB**, **C'D**. Warum kann das Produkt **DA** gebildet werden, nicht jedoch das Produkt **AD**?
4) Was ist eine "Minormatrix"? Was bedeuten die Indizes i und j in der Bezeichnung "$\mathbf{M}_{ij}$"?
5) Erläutern Sie die "Reihenentwicklung" für die Berechnung der Determinante einer Matrix:

$$|\mathbf{Y}| = \sum_{i=1}^{m} (y_{ij} \cdot (-1)^{1+j} \cdot |\mathbf{M}_{ij}|$$

6) Was bedeutet "lineare Abhängigkeit" und was impliziert das Vorliegen linearer Abhängigkeiten in einer Matrix für ihre Determinante?
7) Berechnen Sie die Determinanten von **E**, **A** und (**F'F**).
8) Wie ist die Inverse einer Matrix definiert?
9) Was bedeuten die Ausdrücke in folgender "Rechenvorschrift"? $\mathbf{Y}^{-1} = \frac{\mathbf{K'}}{|\mathbf{Y}|}$
10) Warum ist es von Vorteil, bei der Berechnung der Inversen einer Matrix mit der Berechnung der Determinante zu beginnen?
11) Berechnen Sie die Inverse zu **A, F'F** und **D'D**, soweit definiert. Wie lassen sich die Ergebnisse überprüfen?

*Aufgabe III:*

Gegeben seien vier Matrizen **U, X, Y** und **Z**. **U** sei vom Typ (3 x 5), **X** vom Typ (3 x 2), **Y** vom Typ (2 x 4) und **Z** vom Typ (5 x 3). Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

a) **UZX= XZU**

b) **(ZX)Y = Z(XY)**

b) **XZY = Z(XY)**

d) **((ZX)Y)' = Y'X'Z'**

e) **(Z')'** ist vom Typ (3×5)

f) **((U'+Z)X)’ = X'U + X'Z'**

**1.2 Musterlösungen**

*Aufgabe I:*

1) **A** ist vom Typ (3×3), **B** vom Typ (2×3), **C** (3×3), **D** (4×2), **E** (3×2) und **F** (3×3).

2) a) **A, C, F**

b) **A, F**

c) **F**

3. $\mathbf{A}+\mathbf{C}=\begin{bmatrix} 4{,}5 & 6{,}5 & 4 \\ 9{,}5 & 7 & 3{,}5 \\ 5 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ $\mathbf{A}+\mathbf{F}=\begin{bmatrix} 13 & 0{,}5 & 2 \\ 0{,}5 & 11 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ $\mathbf{C}+\mathbf{F}=\begin{bmatrix} 1{,}5 & 6 & 2 \\ 9 & 6 & 0{,}5 \\ 3 & -5 & 9 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{A}+\mathbf{C}+\mathbf{F}=\begin{bmatrix} 9{,}5 & 6{,}5 & 4 \\ 9{,}5 & 12 & 3{,}5 \\ 5 & -2 & 10 \end{bmatrix}$$

4) a) $\mathbf{F}-\mathbf{C}=\begin{bmatrix} 8{,}5 & -6 & -2 \\ -9 & 4 & -0{,}5 \\ -3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\mathbf{B}-\mathbf{F}$: nicht definiert c) $\mathbf{C}-\mathbf{A}=\begin{bmatrix} -11{,}5 & 5{,}5 & 0 \\ 8{,}5 & -5 & -2{,}5 \\ 1 & -8 & 3 \end{bmatrix}$

d) $\mathbf{B}-\mathbf{E}$: nicht definiert

5) a) Versuchsperson 4 hat in Variable 2 den Wert 4.

b) Eine Datenmatrix von 62 Vp in fünf Variablen ist vom Typ $(62 \times 5)$.

*Aufgabe II:*

1) Bei der Transposition einer Matrix wird die erste Zeile der Ausgangsmatrix **X** zur ersten Spalte der Transponierten Matrix **X'**, die zweite Zeile zur zweiten Spalte usw.

$$\mathbf{B}' = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 & 1 \\ 6 & 5 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -5 & 6 \end{bmatrix}$$

2) Die Multiplikation zweier Matrizen ist nicht kommutativ, da ggf. die inneren Typangaben nach einem Reihenfolgewechsel nicht mehr korrespondieren. Zum Beispiel ist für zwei Matrizen **A** (n x m) und **B** (m x k) das Produkt **AB** definiert, da ihre inneren Typangaben übereinstimmen, nicht jedoch das Produkt **BA**. Selbst bei Matrizen, deren Typen auch nach vertauschter Reihenfolge noch korrespondieren, resultieren unterschiedliche Ergebnisse, was an den verschiedenen Typen der Ergebnismatrizen sichtbar wird. So ist **AB** vom Typ (n x k), **BA** dagegen vom Typ (m x m).
Eine Ausnahme bildet die Multiplikation mit der Einheitsmatrix, welche **stets kommutativ** ist. Es gilt also: **XI = IX = X** . Das Produkt einer Matrix mit ihrer Transponierten ist in jedem Fall definiert, da bei der Transposition die Spalten zu Zeilen und umgekehrt werden und aus diesem Grund die inneren Typangaben übereinstimmen.
Auch ist die Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar stets kommutativ.

3)

$$\mathbf{C'C} = \begin{bmatrix} 0{,}09 & 1{,}8 & 2{,}4 & 0{,}3 \\ 1{,}8 & 40 & 64 & 14 \\ 2{,}4 & 64 & 128 & 40 \\ 0{,}3 & 14 & 40 & 17 \end{bmatrix} \quad \mathbf{CB} = \begin{bmatrix} 11 & 34{,}8 & -21{,}7 \\ 2 & 22 & -12 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C'D} = \begin{bmatrix} 0{,}6 & 1{,}5 & 0 \\ 18 & 32 & 12 \\ 40 & 48 & 48 \\ 14 & 9 & 24 \end{bmatrix}$$

Das Produkt zweier Matrizen kann nur dann gebildet werden, wenn die *inneren Typangaben* übereinstimmen, d.h. wenn die erste Matrix so viele Spalten hat, wie die damit zu multiplizierende Matrix Zeilen. Die Matrix **D** ist vom Typ (2 x 3), die Matrix **A** vom Typ (3 x 3), also kann das Produkt **DA** gebildet werden, nicht aber das Produkt **AD**, da **A** 3 Spalten hat, **D** aber nur 2 Zeilen.

4) Als Minormatrix bezeichnet man eine verkleinerte Matrix, die aus der ursprünglichen Matrix **Y** dadurch entsteht, daß man die Ausgangsmatrix **Y** um eine Zeile und eine Spalte verkleinert. Die

Indizes i und j in der Bezeichnung $\mathbf{M_{ij}}$ geben dabei an, welche Zeile (i) und welche Spalte (j) der Ausgangsmatrix **Y** beim Bilden der Minormatrix entfernt werden.

5) Bei der Entwicklung über die erste Zeile stellen die $y_{1j}$ (j = 1,...,m) die Elemente der ersten Zeile von **Y** dar; der Term $(-1)^{1+j}$ nimmt abwechselnd den Wert +1 (für j = 1,3,5,...) und –1 (für j = 2,4,6,...) an, da $(-1)^{1+j}$ genau dann +1 wird, wenn 1 + j geradzahlig ist, bei ungeraden 1 + j aber gleich –1 bleibt. Für die Berechnung der Determinante einer Matrix **Y** geht man bei der Reihenentwicklung aus der ersten Reihe so vor, daß die einzelnen Elemente der ersten Reihe ($y_{1j}$) mit der Determinante der zugehörigen Minormatrix und einem Vorzeichen (-1 oder +1) multipliziert werden und diese Produkte dann aufsummiert werden.

6) Eine Matrix enthält lineare Abhängigkeiten genau dann, wenn sich mindestens einer ihrer Zeilen- oder Spaltenvektoren durch eine Linearkombination (gewichtete Summe) der übrigen Zeilen-/Spaltenvektoren darstellen läßt. Enthält eine Matrix lineare Abhängigkeiten, so ist ihre Determinante gleich Null, d.h. die Matrix läßt sich nicht invertieren, da die Elemente der Kofaktorenmatrix nicht durch Null dividiert werden können. Matrizen, deren Determinante gleich Null ist, die also lineare Abhängigkeiten enthalten, heißen **singuläre Matrizen** (Gegenteil: **fundamentale Matrizen**).

7)

$$|\mathbf{E}| = 5\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}1 & 5\\4 & 9\end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}-3 & 5\\2 & 9\end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}-3 & 1\\2 & 4\end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= 5\cdot(1\cdot 9 - 4\cdot 5) + (-1)\cdot(-3\cdot 9 - 2\cdot 5) + 0\\
&= 5\cdot(-11) - 1\cdot(-37) + 0\\
&= (-55) + 37\\
&= -18
\end{aligned}$$

$$|\mathbf{A}| = 5\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}8 & 3\\3 & 0\end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 3\\0{,}5 & 0\end{vmatrix} + 0{,}5\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & 8\\0{,}5 & 3\end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= 5\cdot(8\cdot 0 - 3\cdot 3) + (-1)\cdot(1\cdot 0 - 0{,}5\cdot 3) + 0{,}5\cdot(1\cdot 3 - 0{,}5\cdot 8)\\
&= 5\cdot(-9) + (-1)\cdot(-1{,}5) + 0{,}5\cdot(-1)\\
&= -45 + 1{,}5 - 0{,}5\\
&= -44
\end{aligned}$$

$$\mathbf{F'F} = \begin{bmatrix} 156 & 86{,}5 \\ 86{,}5 & 101{,}09 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{F'F}| &= 156 \cdot (-1)^{1+1} \cdot 101{,}09 + 86{,}5 \cdot (-1)^{1+2} \cdot 86{,}5 \\ &= 156 \cdot 101{,}09 - 86{,}5 \cdot 86{,}5 \\ &= 15770{,}04 - 7482{,}25 \\ &= 8287{,}79 \end{aligned}$$

8) Existiert zu einer quadratischen Matrix **Y** die inverse Matrix $\mathbf{Y}^{-1}$, so ist sie definiert als diejenige Matrix, deren Produkt mit der Ausgangsmatrix die Einheitsmatrix **I** ergibt: $\mathbf{Y} \cdot \mathbf{Y}^{-1} = \mathbf{I} = \mathbf{Y}^{-1} \cdot \mathbf{Y}$

9) $\mathbf{Y}^{-1}$ ist die Inverse zur Matrix **Y**, **K'** die transponierte Kofaktorenmatrix zu **Y** und $|\mathbf{Y}|$ ist die Determinante von **Y**. Falls **Y** symmetrisch ist, gilt **K'** = **K**!

10) Da im Falle linearer Abhängigkeiten in einer Matrix ihre Determinante Null ist, ist ihre Inverse wegen der nicht erlaubten Division durch Null nicht definiert und die Berechnung der Kofaktorenmatrix nicht mehr notwendig.

11)

$$|\mathbf{A}| = -44$$

$$\mathbf{K'} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & -1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0{,}5 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 8 \\ 0{,}5 & 3 \end{vmatrix} \\ -1\begin{vmatrix} 1 & 0{,}5 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0 \end{vmatrix} & -1\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0{,}5 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0{,}5 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} & -1\begin{vmatrix} 5 & 0{,}5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 1{,}5 & -1 \\ 1{,}5 & -0{,}25 & -14{,}5 \\ -1 & -14{,}5 & 39 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}205 & -0{,}034 & 0{,}023 \\ -0{,}034 & 0{,}0057 & 0{,}33 \\ 0{,}023 & 0{,}33 & -0{,}886 \end{bmatrix}$$

$$\left|\mathbf{F'F}\right| = 8287{,}79$$

$$\mathbf{K'} = \begin{bmatrix} 101{,}09 & -86{,}5 \\ -86{,}5 & 156 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{F'F}^{\mathbf{-1}} = \begin{bmatrix} 0{,}012 & -0{,}010 \\ -0{,}010 & 0{,}019 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D'D} = \begin{bmatrix} 13 & 13 & 18 \\ 13 & 26 & 6 \\ 18 & 6 & 36 \end{bmatrix}$$

$$\left|\mathbf{D'D}\right| = 13 \cdot \begin{vmatrix} 26 & 6 \\ 6 & 36 \end{vmatrix} - 13 \cdot \begin{vmatrix} 13 & 6 \\ 18 & 36 \end{vmatrix} + 18 \cdot \begin{vmatrix} 13 & 26 \\ 18 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 13 \cdot (26 \cdot 36 - 6 \cdot 6) - 13 \cdot (13 \cdot 36 - 18 \cdot 6) + 18 \cdot (13 \cdot 6 - 18 \cdot 26)$$
$$= 13 \cdot 900 - 13 \cdot 360 + 18 \cdot (-390) = 0$$

Da die Determinante 0 ergibt, ist die Inverse der Matrix **D’D** nicht definiert, die Berechnung der Kofaktorenmatrix erübrigt sich also.

Die Ergebnisse lassen sich überprüfen, indem man die Inverse mit der Ausgangsmatrix multipliziert, was die Einheitsmatrix **I** ergeben sollte: $\mathbf{Y} \cdot \mathbf{Y}^{\mathbf{-1}} = \mathbf{I} = \mathbf{Y}^{\mathbf{-1}} \cdot \mathbf{Y}$

*Aufgabe III:*

a) Falsch, Matrixprodukte sind nicht kommutativ.

b) Wahr, für die Multiplikation von Matrizen gilt das Assoziativgesetz.

c) Falsch, siehe a).

d) Wahr, bei der Transposition eines Matrixproduktes wird die Reihenfolge der zu multiplizierenden Matrizen vertauscht (siehe 2. Distributivgesetz der Transposition)**.**

e) Falsch, die Transposition einer transponierten Matrix führt zur Ausgangsmatrix (hier: 5×3).

f) Wahr, siehe e) sowie das Distributivgesetz für die Multiplikation von Matrizensummen:

**((U'+Z)X)'=X'(U'+Z)' =X'U''+X'Z'=X'U+X'Z'**

# 2. Allgemeines Lineares Modell (ALM)

## 2.1 Aufgaben

*Aufgabe I:* Kontrollfragen

1.) Was ist das Ziel beim Erstellen eines Regressionsmodells?

2.) Wofür stehen die in der Modellgleichung des "Allgemeinen Linearen Modells" (ALM)

$y_i = \beta_0 x_{i0} + \beta_1 x_{i1} + ... + \beta_m x_{im} + \varepsilon_i$ vorkommenden Ausdrücke $\beta_0$, $\beta_j$, $x_{i1}$, $y_i$, $\varepsilon_i$ ?

3.) Was am "Allgemeinen Linearen Modell" ist linear?

4.) Wie lassen sich die Ausdrücke $\beta_0$, $\beta_1 ... \beta_m$ im Variablenraum geometrisch interpretieren?

5.) Was für ein Vektor ist der Vektor $\mathbf{x}_0$?

6.) Was ist der Unterschied zwischen einem Wert $y_i$ und einem Wert $\hat{y}_i$ ?

7.) Wie kann man die Einflußgewichte im ALM mathematisch schätzen?

8.) Was ist der Unterschied zwischen einem mit $b_j$ und einem mit $\beta_j$ bezeichneten Einflußgewicht? Worin besteht der (analoge) Unterschied zwischen dem Vektor $\mathbf{e}$ und dem Vektor $\boldsymbol{\varepsilon}$?

*Aufgabe II:*

Ein Psychologe will die Kriteriumsvalidität eines Extraversionsfragebogens und eines Tapping-Tests prüfen; dazu erstellt er ein Regressionsmodell mit der Zahl der Gesprächspartner auf einer Party als abhängiger Variable. Die Werte für 9 Probanden sind in der folgenden Tabelle zusammengefaßt (hohe Testwerte stehen dabei für Extraversion):

| Fragebogenscore ($x_1$) | Fehlerzahl beim Tapping ($x_2$) | Zahl der Gesprächspartner (y) |
|---|---|---|
| 2 | 6 | 0 |
| 6 | 2 | 2 |
| 8 | 1 | 3 |
| 6 | 9 | 4 |
| 5 | 6 | 5 |
| 9 | 8 | 7 |
| 12 | 11 | 8 |
| 8 | 15 | 8 |
| 10 | 8 | 10 |

a) Schätzen Sie die Einflußgewichte $b_0$, $b_1$, $b_2$.

b) Erstellen Sie eine Modellgleichung für die Schätzung der Werte $\hat{y}_i$ .

c) Interpretieren Sie das Ergebnis inhaltlich.

d) Machen Sie eine Vorhersage über die Anzahl der Gesprächspartner eines Probanden i auf einer Party, der einen Extraversionscore von $x_{i1}$=7 erreicht und beim Tapping $x_{i2}$=5 Fehler macht. Welches Problem ergibt sich bei der Interpretation des Ergebnisses?

**2.2 Musterlösungen**

*Aufgabe I:*

1.)Das Ziel beim Erstellen eines Linearen Modells besteht darin, die Ausprägungen in einer Kriteriumsvariablen y eines Merkmalsträger i aus den Ausprägungen der j = 1,...,m Prädiktorvariablenvariablen $x_j$ desselben Merkmalsträger i vorherzusagen. Sinnvolle Anwendung findet ein solches Vorgehen sowohl in der Grundlagenforschung als auch in der Anwendung in den empirischen Sozialwissenschaften: Im ersten Fall ist es von Interesse, die Zusammenhänge verschiedener Phänomene herauszufinden, im zweiten Fall - etwa bei der Berufseignungsdiagnostik - hat man die Möglichkeit, aufgrund geeigneter Prädiktoren Aufschlüsse über die Ausprägung einer Variablen wie eben der Berufseignung zu gewinnen, deren tatsächliche Ausprägung man erst feststellen könnte, wenn der Bewerber einige Zeit tatsächlich gearbeitet hat.

2.)Bei $\boldsymbol{\beta_0}$ handelt es sich um die "Regressionskonstante", d.h. den Wert, den $y_i$ annimmt, wenn alle Prädiktoren den Wert Null haben (Beispiel Fieber: Auch wenn Prädiktoren, wie z.B. Schwere der Erkrankung, Null sind, hat ein Mensch eine gewisse Körpertemperatur). Geometrisch läßt sich $\beta_0$ als derjenige Wert interpretieren, bei dem die m-dimensionale Regressionsgerade, -ebene oder Hyperebene die y-Achse schneidet. $\boldsymbol{\beta_j}$ bezeichnet die Gewichtung, mit der die Variable $x_j$ (eine der Prädiktorvariablen) in die Vorhersage des Kriteriumswertes eingeht. $\mathbf{x_{i1}}$ ist der Wert der Person i in der Prädiktorvariablen $x_1$, $\mathbf{y_i}$ ist der Wert einer Person i in der Kriteriumsvariablen y und $\boldsymbol{\varepsilon_i}$ ist derjenige (Fehler-) Betrag, um den der Kriteriumswert $\hat{y}_i$, den die Modellgleichung für den Merkmalsträger i vorhersagt, von der tatsächlichen Ausprägung der Variablen $y_i$ beim Merkmalsträger i abweicht.

3.) Das ALM ist deshalb ein *lineares Modell*, da sich der Vektor der Kriteriumswerte **y** als *Linearkombination* aus den Vektoren der Prädiktorwerte $\mathbf{x_1}$ bis $\mathbf{x_m}$ und dem Vektor der Fehlerwerte $\boldsymbol{\varepsilon}$ darstellen läßt, wobei die geschätzten Gewichtszahlen $b_0$ bis $b_m$ in der ersten Potenz stehen. Mit dem linearen Modell lassen sich nicht nur lineare Zusammenhänge sondern auch nichtlineare Modelle (Moderatormodelle, quadratische Zusammenhänge u.Ä.) beschreiben.

4.) Zu $\beta_0$ siehe 2.), $\beta_1$ bis $\beta_m$ lassen sich als Steigung der Regressionsgeraden (für m=1) bzw. der Regressionsebene (für m=2) bzw. der Hyperebene (für m>2) in Richtung der Achsen $x_1$ bis $x_m$ interpretieren.

5.) Beim Vektor $\mathbf{x}_0$ handelt es sich um einen Einsen-Spalten-Vektor mit den Elementen $\mathbf{x}_{io}$=1. Die Einführung des Vektors $x_0$ ermöglicht es, die Regressionskonstante $\beta_0$ gemeinsam mit den anderen Einflußgewichten $\beta_{1\text{-}m}$ aus jeder Zeile des Gleichungssystems auszuklammern.
Die i = 1 bis i = n Gleichungen

$$y_i = \beta_0 x_{i0} + \beta_1 x_{i1} + ... + \beta_m x_{im} + \varepsilon_i$$

können dann auch simultan als Matrizengleichung $\mathbf{y=X\beta+\varepsilon}$ mit $\beta' = [\beta_0, \beta_1,...,\beta_m]$ ausgedrückt werden.

6.) Bei einem Wert $y_i$ handelt es sich um den tatsächlichen, beobachteten Wert einer Person i in einer Kriteriumsvariablen y, beim Wert $\hat{y}_i$ um denjenigen Wert in der Variablen y, der für die Person i aufgrund der Modellgleichung vorhergesagt würde. Die vorhergesagten $\hat{y}_i$ - Werte unterscheiden sich von den beobachteten $y_i$ - Werten um den Betrag des Fehlers $\varepsilon_i$: $y_i = \hat{y}_i + \varepsilon_i$.

7.) Die gebräuchlichste Möglichkeit, die Einflußgewichte im ALM mathematisch zu schätzen, erfolgt nach dem Kriterium der kleinsten Quadrate. Bei diesem Vorgehen werden jene Werte für $\beta_{0\text{-}m}$ gesucht, für welche die Summe der quadrierten Abweichungen der vorhergesagten Kriteriumswerte von den tatsächlich gefundenen Kriteriumswerten minimiert wird.

8.) $\beta_j$ bezeichnet das in der Regel unbekannte wahre Einflußgewicht der Variablen $x_j$ bei der Vorhersage eines Kriteriums y in der interessierenden *Population*, $b_j$ das Einflußgewicht für die Variable $x_j$, das aufgrund der Daten aus einer bestimmten Stichprobe für $\beta_j$ *geschätzt* wurde (z.B. nach dem Kriterium der kleinsten Quadrate). Analog besteht der Unterschied zwischen einem Vektor $\boldsymbol{\varepsilon}$ und einem Vektor $\mathbf{e}$ darin, daß $\boldsymbol{\varepsilon}$ die wahren Abweichungen der durch das Modell mit den $\beta$-Gewichten vorhergesagten Werte $\hat{y}$ von den tatsächlichen Werten in y auf Populationsebene enthält, während $\mathbf{e}$ diejenigen Werte enthält, die sich als Abweichungen der vorhergesagten Werte in $\hat{y}$ von den tatsächlichen Daten ergeben, wenn die auf der Basis von Stichprobendaten *geschätzten* $\beta$-Gewichte verwendet wurden.

*Aufgabe II:*

a) Sollen die Einflußgewichte nach dem Kriterium der kleinsten Quadrate geschätzt werden, gilt:

$$\mathbf{b = (X'X)^{-1} X'y}$$

Die Ausdrücke in dieser Formel werden im Folgenden berechnet:

$$\mathbf{X'X} = \begin{bmatrix} 9 & 66 & 66 \\ 66 & 554 & 520 \\ 66 & 520 & 632 \end{bmatrix} \qquad |\mathbf{X'X}| = 81576$$

$$\mathbf{K'} = \begin{bmatrix} 79728 & -7392 & -2244 \\ -7392 & 1332 & -324 \\ -2244 & -324 & 630 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X'y} = \begin{bmatrix} 47 \\ 408 \\ 417 \end{bmatrix}$$

$$b = \frac{1}{81576} \cdot \begin{bmatrix} 79728 & -7392 & -2244 \\ -7392 & 1332 & -324 \\ -2244 & -324 & 630 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 47 \\ 408 \\ 417 \end{bmatrix} = \frac{1}{81576} \cdot \begin{bmatrix} -204468 \\ 60924 \\ 25050 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2{,}506 \\ 0{,}747 \\ 0{,}307 \end{bmatrix}$$

b) $\hat{y}_i = -2{,}506 + 0{,}747\, x_{i1} + 0{,}307\, x_{i2}$

c) Der Einflußgewichtevektor **b** beschreibt hier die Raumlage einer Regressions**ebene**. Die Regressionsebene schneidet die y-Achse in $b_0$ = -2,506. Verändert man $x_{i1}$ (bzw. $x_{i2}$) um eine Einheit und hält die anderen Prädiktorvariablen konstant, so verändert sich die vorhergesagte Zahl der Gesprächspartner $\hat{y}_i$ um $b_1$ = 0,747 (bzw. $b_2$ = 0,307) Einheiten.

Die Prädiktionskonstante $b_0$ mit dem Wert -2,506 bedeutet, daß für einen Probanden mit einem Extraversionsscore von 0 und dem Fehlerwert 0 beim Tapping weniger als Null Gespräche auf einer Party vorhergesagt werden, denn der vorhergesagte Wert läge für diesen theoretischen Fall mit -2,506 im negativen Bereich. Der Extraversionscore $x_1$ wird mit 0,747 gewichtet, d.h. mit Anstieg um eine Einheit im Extraversionsscore (bei konstanter Fehlerzahl im Tapping) steigt die Zahl der vorhergesagten Gespräche auf einer Party um 0,747; der Prädiktor $x_2$, die Fehlerzahl beim Tapping, wird mit 0,307 gewichtet, d.h. mit jedem zusätzlichen Fehler (bei konstantem Extraversionsscore) steigt die vorhergesagte Anzahl der Gesprächspartner um 0,307.

Für den Fall, daß die Skalenwerte der beiden Prädiktoren die gleiche Streuung hätten, fiele der Prädiktor $x_1$ (Extraversionscore im Fragebogen) stärker ins Gewicht, der Betrag des Einflußgewichtes von $b_1$ (0,747) ist größer ist als der Betrag von $b_2$ (0,307).

d) $\hat{y}_i = -2{,}506 + 0{,}747 \cdot 7 + 0{,}307 \cdot 5 = 4{,}258$

Einem Probanden i, der einen Extraversionsscore von $x_{i1} = 7$ aufweist und beim Tapping $x_{i2} = 5$ Fehler macht, wird durch die Prädiktionsgleichung eine Anzahl von $\hat{y}_i = 4{,}258$ Gesprächspartnern auf einer Party vorhergesagt; d.h. er wird wahrscheinlich mindestens vier Gesprächspartner auf einer Party haben. Das Problem bei der Interpretation ist, daß die Zahl der Gespräche eine diskrete Variable ist, also nur ganzzahlige Werte annehmen kann; für die Berechnung der Ergebnisse gemäß Prädiktionsgleichung wird allerdings angenommen, daß sie eine kontinuierliche Variable ist. Darüberhinaus ist anhand des Modells niemals eine inhaltliche Kausalitätsaussage möglich.

## 3. Multiple Regressionsanalyse

### 3.1. Aufgaben

In einer Studie zur Evaluation von Psychotherapien soll geklärt werden, ob der Therapieerfolg (y) aus der Schwere des Symptoms des Patienten ($x_1$) und aus seiner Therapiemotivation ($x_2$) vorhergesagt werden kann. An einer Stichprobe von N=8 Patienten sind die folgenden Daten erhoben worden:

| Patient Nr. | Therapieerfolg (y) | Symptomschwere ($x_1$) | Therapiemotivation ($x_2$) |
|---|---|---|---|
| 1 | 10 | 5 | 7 |
| 2 | 12 | 3 | 2 |
| 3 | 13 | 4 | 9 |
| 4 | 15 | 10 | 12 |
| 5 | 5 | 17 | 3 |
| 6 | 7 | 15 | 5 |
| 7 | 16 | 11 | 15 |
| 8 | 3 | 18 | 1 |

1) Erstellen Sie ein Modell zur Vorhersage des Therapieerfolges auf Basis der Kenntnis von Symptomschwere und Therapiemotivation. Schätzen Sie die Einflußgewichte dabei nach Maßgabe des Kriteriums der kleinsten Quadrate.

2) Berechnen Sie die totale Quadratsumme, die determinierte Quadratsumme und die Fehlerquadratsumme. Wieviel Prozent der Kriteriumsvarianz werden durch das Modell erklärt?

3) Wieviel Prozent der Kriteriumsvarianz können *jeweils* durch Therapiemotivation und Symptomschwere *allein* erklärt werden?

4) Bestimmen Sie *jeweils* das Inkrement der Symptomschwere und der Therapiemotivation.

5) Welchen der beiden im uneingeschränkten Modell enthaltenen Prädiktoren würden Sie aufgrund Ihrer Ergebnisse für den "besseren" halten?

6) Welches Inkrement hätte der Prädiktor Symptomschwere, wenn seine Korrelation mit der Therapiemotivation r = 0 wäre und seine Korrelation mit dem Kriterium r = 0.5549 betrüge? Welchen Wert würde in diesem Fall der Standardschätzfehler annehmen?

7) Welches Inkrement hätte der Prädiktor Symptomschwere, wenn seine Korrelation mit dem Kriterium r = 0.8319 betrüge und die Korrelation mit dem Prädiktor Therapiemotivation r = 1.0?

8) Nehmen Sie eine Schätzung des voraussichtlichen Therapieerfolges für einen Patienten vor, der einen Symptomschwere-Wert von 4 und einen Therapiemotivations-Wert von 10 aufweist. Bestimmen Sie das Intervall, in dem sich der Therapieerfolg mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% befinden wird.

**3.2 Musterlösungen**

1) Da die Schätzung der Einflußgewichte nach Maßgabe des Kriteriums der kleinsten Quadrate als

$$\mathbf{b}=(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'y}$$

vorgenommen wird, sind zunächst die Matrixprodukte $\mathbf{X'X}^{-1}$ und $\mathbf{X'y}$ zu bestimmen, wobei für

$\mathbf{X'X}^{-1} = \dfrac{\mathbf{K'}_{X'X}}{|\mathbf{X'X}|}$ gilt.

Matrix **X:** $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 10 & 12 \\ 1 & 17 & 3 \\ 1 & 15 & 5 \\ 1 & 11 & 15 \\ 1 & 18 & 1 \end{bmatrix}$ Matrix **X'X**: $\mathbf{X'X} = \begin{bmatrix} 8 & 83 & 54 \\ 83 & 1109 & 506 \\ 54 & 506 & 538 \end{bmatrix}$

Determinante von **X'X**:

$$|\mathrm{X'X}| = 8 \cdot \begin{vmatrix} 1109 & 506 \\ 506 & 538 \end{vmatrix} - 83 \cdot \begin{vmatrix} 83 & 506 \\ 54 & 538 \end{vmatrix} + 54 \cdot \begin{vmatrix} 83 & 1109 \\ 54 & 506 \end{vmatrix}$$
$$= 8 \cdot (1109 \cdot 538 - 506 \cdot 506) - 83 \cdot (83 \cdot 538 - 54 \cdot 506) + 54 \cdot (83 \cdot 506 - 54 \cdot 1109)$$
$$= 320506$$

Inverse Matrix: $|\mathrm{X'X}| = \dfrac{\mathrm{K'}_{X'X}}{|\mathrm{X'X}|} = \dfrac{1}{320506} \cdot \begin{bmatrix} 340606 & -17330 & -17888 \\ -17330 & 1388 & 434 \\ -17888 & 434 & 1983 \end{bmatrix}$

Weiterhin ist noch das Matrixprodukt **X'y** zu bestimmen: $\mathbf{X'y} = \begin{bmatrix} 81 \\ 708 \\ 684 \end{bmatrix}$

Der **b**-Vektor ergibt sich also als: $\mathbf{b} = \dfrac{1}{320506} \cdot \begin{bmatrix} 340606 & -17330 & -17888 \\ -17330 & 1388 & 434 \\ -17888 & 434 & 1983 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 81 \\ 708 \\ 684 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9{,}622 \\ -0{,}387 \\ 0{,}67 \end{bmatrix}$

Die Modellgleichung lautet folglich: $\hat{y}_i = 9{,}622 - 0{,}387\, x_{i1} + 0{,}67\, x_{i2}$.

2) Es gelten die folgenden Ausdrücke zur Bestimmung von determinierter, Fehler- und totaler Quadratsumme:

$$Q_d = \mathbf{b'X'y} - n\bar{y}^2$$
$$Q_e = \mathbf{y'y} - \mathbf{b'X'y}$$
$$Q_t = Q_d + Q_e = \mathbf{y'y} - n\bar{y}^2$$

Die Ausdrücke $\mathbf{b'X'y}$, $\mathbf{y'y}$ und $n\bar{y}^2$ lauten wie folgt:

$$\mathbf{b'X'y} = 963{,}666$$
$$\mathbf{y'y} = 977$$
$$n\bar{y}^2 = 820{,}125$$

Folglich sind:

$$Q_d = 143{,}541$$
$$Q_e = 13{,}334$$
$$Q_t = 156{,}875$$

Der multiple Determinationskoeffizient ist definiert als der Quotient aus der determinierten und der totalen Quadratsumme. Daraus läßt sich dann durch Multiplikation mit 100 der prozentuale Anteil erklärter Varianz berechnen:

$$R^2 = \frac{Q_d}{Q_t} = \frac{143{,}541}{156{,}875} = 0{,}915$$

Es werden also 91,5% der Kriteriumsvarianz durch das Modell erklärt.

3) Wenn bestimmt werden soll, wieviel Prozent der Kriterimusvarianz durch die Therapiemotivation bzw. Symptomschwere *allein* erklärt werden können, kann dies im Prinzip auf zwei Arten geschehen:

a) Durch Bestimmung des quadrierten **Produkt-Moment-Korrelationskoeffizienten** für die Kriteriums- und *eine* Prädiktorvariable (zum genaueren Vorgehen siehe Moosbrugger, Lineare Modelle, S. 45ff.). Die Bestimmung ist auch per Taschenrechner problemlos durchzuführen:

$$r^2_{xj\,y} = \frac{\left(\frac{x_j'y}{n} - \bar{x}_j\bar{y}\right)^2}{\left(\frac{x_j'x_j}{n} - \bar{x}_j^2\right)\cdot\left(\frac{y'y}{n} - \bar{y}^2\right)}$$

b) Durch die Schätzung von b-Gewichten für die sich ergebenden eingeschränkten Modelle (in diesem Fall mit je einer Prädiktorvariablen) und daraus folgend der Bestimmung von $R^2$. Der Vorteil dieser Vorgehensweise liegt darin, daß sie auch anwendbar ist, wenn nicht nur nach dem Einfluß eines einzelnen Prädiktors, sondern nach dem einer Prädiktoruntermenge gefragt ist, so daß im eingeschränkten Modell mehr als ein Prädiktor verbleibt. Aus diesem Grund soll hier exemplarisch auch diese Vorgehensweise angewandt werden.

Soll die Varianzerklärung, die durch die *Symptomschwere allein* geleistet wird, bestimmt werden, so reduziert sich die Matrix **X** um den Vektor $\mathbf{x_2}$, die **X'X**-Matrix reduziert sich auf

$$\mathbf{X'X} = \begin{bmatrix} 8 & 83 \\ 83 & 1109 \end{bmatrix}$$

und die Determinante nimmt den Wert 1983 an. Die Kofaktorenmatrix und der Vektor **X'y** werden zu:

$$\mathbf{K'}_{X'X} = \begin{bmatrix} 1109 & -83 \\ -83 & 8 \end{bmatrix} \text{bzw.}\ \mathbf{X'y} = \begin{bmatrix} 81 \\ 708 \end{bmatrix}$$

Damit ergibt sich der **b**-Vektor als:

$$\mathbf{b} = \frac{1}{1983}\cdot\begin{bmatrix} 1109 & -83 \\ -83 & 8 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 81 \\ 708 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15{,}666 \\ -0{,}534 \end{bmatrix}$$

Obwohl es sich bei **X’X** , **K’**$_{X'X}$, und **X’y** des eingschränkten Modells um numerisch identische Teilmatrizen aus den entsprechenden Matrizen des uneingeschränkten Modells handelt, enthält der b-Vektor andere Werte!

Der Ausdruck **b'X'y** reduziert sich auf 890,874. Die determinierte Quadratsumme $Q_d$ beträgt 70,749 (**y'y** und $n\bar{y}^2$ bleiben gleich). Die erklärte Varianz als $R^2 \cdot 100 = \frac{Q_d}{Q_t} \cdot 100$ reduziert sich auf 45,1 % der Kriteriumsvarianz.

Soll die Varianzerklärung, die durch die *Therapiemotivation allein* geleistet wird, berechnet werden, so reduziert sich die Matrix **X** um den Vektor $\mathbf{x_1}$, als **X'X**-Matrix verbleibt

$$\mathbf{X'X} = \begin{bmatrix} 8 & 54 \\ 54 & 538 \end{bmatrix}.$$

Die Determinante nimmt den Wert 1388 an. Die Kofaktorenmatrix und der **X'y**-Vektor werden zu:

$$\mathbf{K'}_{X'X} = \begin{bmatrix} 538 & -54 \\ -54 & 8 \end{bmatrix} \text{bzw. } \mathbf{X'y} = \begin{bmatrix} 81 \\ 684 \end{bmatrix}$$

Damit ergibt sich der **b**-Vektor als:

$$\mathbf{b} = \frac{1}{1388} \cdot \begin{bmatrix} 538 & -54 \\ -54 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 81 \\ 684 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4{,}785 \\ 0{,}791 \end{bmatrix}$$

Der Ausdruck **b'X'y** reduziert sich auf 928,629, die determinierte Quadratsumme $Q_d$ beträgt 108,504 und die erklärte Varianz als $R^2 \cdot 100 = \frac{Q_d}{Q_t} \cdot 100$ reduziert sich auf 69,2 % der Kriteriumsvarianz.

4) Sollen die Inkremente der Therapiemotivation und der Symptomschwere bestimmt werden, ist zu überlegen, wie hoch der Anteil an erkärter Varianz ist, der hinzukommt, wenn man den jeweiligen Prädiktor in ein Modell, das den jeweils anderen Prädiktor schon enthält, *zusätzlich* aufnimmt.

Für das Modell, das ausschließlich die Symptomschwere als Prädiktor enthält, ergibt sich ein $R_E^2$ von rund 0,45. Fügt man nun den Prädiktor Therapiemotivation dazu, erhät man ein Modell mit einem $R_U^2$ von rund 0,915 (in unserem Fall das vollständige Modell mit beiden Prädiktoren). Folglich ist das Inkrement, das sich bei Hinzufügen des Prädiktors Therapiemotivation ergibt, gerade der Betrag, um den sich die Determinationskoeffizienten des eingeschränkten Modells (mit einem Prädiktor) und des uneingeschränkten Modells (mit beiden Prädiktoren) voneinander unterscheiden, nämlich 0,465.

Formal ausgedrückt:

$$R_U^2 = R_E^2 + R_I^2 \;\Rightarrow\; R_I^2 = R_U^2 - R_E^2$$

$$R_{x1,x2}^2 = 0{,}915$$
$$r_{x1,y}^2 = 0{,}45$$
$$\rightarrow R_{Ix2}^2 = 0{,}465$$

$$R_{x1,x2}^2 = 0{,}915$$
$$r_{x2,y}^2 = 0{,}692$$
$$\rightarrow R_{Ix1}^2 = 0{,}223$$

Das *Inkrement* einer Variablen $x_j$, das sich als Zugewinn an erklärter Varianz bei der Erweiterung eines eingeschränkten zu einem uneingeschränkten Modell ergibt, läßt sich auch umgekehrt als *Dekrement* interpretieren, nämlich als derjenige Anteil an erklärter Varianz, der verloren geht, wenn das uneingeschränkte Modell um den Prädiktor $x_j$ reduziert wird. In unserem Fall heißt das, daß der Anteil der erklärten Varianz um 46,5 Prozentpunkte sinkt, wenn man im uneingeschränkten Modell mit Therapiemotivation und Symptomschwere als Prädiktoren auf den Prädiktor Therapiemotivation verzichtet.

Formal ausgedrückt:

$$R_E^2 = R_U^2 - R_D^2 \;\Rightarrow\; R_D^2 = R_U^2 - R_E^2$$
$$0{,}45 = 0{,}915 - 0{,}465 \Rightarrow 0{,}465 = 0{,}915 - 0{,}45$$

Entsprechend ergibt sich *das Inkrement der Variablen Symptomschwere* als Differenz zwischen dem Anteil an Kriteriumsvarianz, der sich mit Therapiemotivation *allein* erklären läßt und dem Anteil an Kriteriumsvarianz, der sich erklären läßt, wenn die Symptomschwere *zusätzlich* als Prädiktor ins Modell aufgenommen wird. In unserem Fall beträgt der durch Therapiemotivation allein erklärte Anteil an Kriteriumsvarianz 0,692 und der durch beide Prädiktoren erklärte Anteil 0,915, d.h. für die Symptomschwere ergibt sich ein Inkrement von 0,223.

5) Da der Zweck unseres Regressionsmodells darin besteht, den Therapieerfolg vorherzusagen, ist derjenige Prädiktor der "bessere", der mehr Information für eine genaue Vorhersage enthält. Die

Vorhersagen werden umso genauer, je mehr Kriteriumsvarianz durch den jeweiligen Prädiktor aufgeklärt wird. Da die Therapiemotivation alleine 69,2% der Kriteriumsvarianz aufklärt, die Symptomschwere aber "nur" 45%, und darüber hinaus vor allem das Inkrement der Therapiemotivation (0,465) größer ist als das der Symptomschwere (0,223), handelt es sich bei der Therapiemotivation um den Prädiktor, der eine genauere Vorhersage erlaubt.

6) Korreliert ein Prädiktor zu Null mit allen anderen bereits im Modell vorhandenen Prädiktoren („orthogonaler Fall“), ergibt sich sein Inkrement als die Kriteriumsvarianz, die durch diesen Prädiktor erklärt wird, d.h. als die quadrierte Korrelation zwischen Prädiktor und Kriterium. Bei Null-Korrelation mit den anderen Prädiktoren enthalten die Ausprägungen des Prädiktors in bezug auf das Kriterium ausschließlich Informationen, die in den anderen Prädiktoren nicht enthalten sind.
Es ergibt sich bei $r_{x1,y} = 0{,}5549$ ein $r_{x1,y}^2$ von 0,3079 und damit ein $R_I^2$ von gleicher Höhe.
Gemeinsam mit $r_{x2,y}^2 = 0{,}6921$ ergibt sich ein $R_U^2 = r_{x1,y}^2 + r_{x2,y}^2 = 0{,}6921 + 0{,}3079 = 1{,}0$, so daß $Q_e = 0$.
Da gilt $\hat{\sigma}_e = \sqrt{\frac{Q_e}{df_e}}$, ist in diesem Falle $\hat{\sigma}_e = 0$.

7) Korreliert ein Prädiktor, dessen Inkrement bestimmt werden soll, mit einem weiteren, bereits im Modell enthaltenen Prädiktor zu Eins („kollinearer Fall“ in extremer Form), ist sein Inkrement jedenfalls Null. Der Prädiktor enthält in bezug auf das Kriterium ausschließlich Information, die bereits in dem anderen Prädiktor enthalten ist. Das Inkrement eines Prädiktors hängt also nicht nur von seiner Korrelation mit dem Kriterium ab, sondern auch von der Korrelation mit den anderen Prädiktoren!

8) Das vollständige Vorhersagemodell lautet:

$$\hat{y}_i = 9{,}622 - 0{,}387x_{i1} + 0{,}67x_{i2}$$

Für $x_1 = 4$ und $x_2 = 10$ ergibt sich durch Einsetzen in die Prädiktionsgleichung:

$$\hat{y}_i = 14{,}774.$$

Für einen Patienten mit einem Symptomschwerewert von $x_1 = 4$ und einem Therapiemotivationswert von $x_2 = 10$ wird durch die Modellgleichung ein Therapieerfolg von $\hat{y}_i = 14{,}774$ vorhergesagt.

Da das Vorhersagemodell jedoch nicht in der Lage ist, völlig exakte Prognosen vorzunehmen, sondern die Vorhersage mit einem bestimmten Fehler (Standardschätzfehler $\widehat{\sigma}_e$) behaftet ist, kann man für den wahren Kriteriumswert einer Person mit den genannten Ausprägungen nur ein Intervall bestimmen, das den wahren Wert mit einer gewissen Irrtumswahrscheinlichkeit einschließt.

Dieses Konfidenzintervall berechnet sich nach folgender Formel:

$$\hat{y}_i - t_{\alpha/2,\,dfe} \cdot \hat{\sigma}_e \leq y_i \leq \hat{y}_i + t_{\alpha/2,\,dfe} \cdot \hat{\sigma}_e$$

Zur Berechnung des Intervalls benötigt man also die Punktschätzung $\hat{y}_i$ sowie den Standardschätzfehler $\sigma_e$, der sich folgendermaßen berechnet:

$$\hat{\sigma}_e = \sqrt{\frac{Q_e}{df_e}} \qquad \text{mit } df_e = n - (\text{Anzahl der Spalten von } \mathbf{X})$$

In unserem Fall ist $Q_e = 13{,}334$, **X** hat 3 Spalten und die Anzahl der Probanden war n = 8. Daraus resultieren $df_e = 5$ Freiheitsgrade, so daß

$$\hat{\sigma}_e = \sqrt{\frac{13{,}334}{5}} = 1{,}633$$

Für $t_{\alpha/2}$ finden wir in unserem Fall in der Tabelle den Wert 2.571 ($\alpha = 0{,}05$; $df_e = 5$). Das Intervall, das den wahren Wert $y_i$ der Person i mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% einschließt, hat folglich die Grenzen 10,576 und 18,972.

Der Therapieerfolgs-Wert einer Person mit einer Therapiemotivation von 10 und einer Symptomschwere von 4 ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% zwischen 10,576 und 18,972 zu erwarten.

# 4. Hypothesenprüfung im ALM

## 4.1 Aufgaben

*Aufgabe I:* Kontrollfragen

1) Welchen Zweck verfolgt die inferenzstatistische Überprüfung von Einflußparametern im ALM?
2) Was ist unter einer Parameterrestriktion zu verstehen?
3) Warum erfolgt die inferenzstatistische Prüfung von Hypothesen im ALM typischerweise unter Zuhilfenahme der *F*-Verteilung?
4) Was versteht man unter einer *globalen Nullhypothese*?
5) Geben Sie für ein Modell mit zwei Prädiktoren die globale Nullhypothese an.
6) Erläutern Sie den folgenden F-Bruch: Was bedeuten die vorkommenden Ausdrücke?

$$F = \frac{R_D^2/df_h}{(1-R_U^2)/df_e}$$

7) Welchen Wert nimmt $R_D^2$ bei Überprüfung der globalen Nullhypothese stets an?
8) Zeigen Sie, daß man den F-Bruch zur Prüfung der globalen Nullhypothese sowohl unter Verwendung der multiplen Determinationskoeffizienten ($R_U^2$, $R_E^2$) als auch durch Verwendung von Quadratsummen ($Q_d$, $Q_e$) formulieren kann.
9) Was versteht man unter dem α-Risiko?

A*ufgabe II:*

Untersuchen Sie für die Daten von Kapitel 3 folgende Fragen:

1) Kann für die Population ein Zusammenhang zwischen den Prädiktoren Symptomschwere und Therapiemotivation als Prädiktoren und dem Kriterium Therapieerfolg als Kriterium behauptet werden ($\alpha = 0.01$)?
2) Kann für die Population behauptet werden, daß sich die Vorhersagegenauigkeit des Modells verbessert, wenn zusätzlich zum Prädiktor Symptomschwere der Prädiktor Therapiemotivation in das Modell aufgenommen wird ($\alpha = 0.01$)?
3) Kann für die Population behauptet werden, daß sich die Vorhersagegenauigkeit des Modells verbessert, wenn zusätzlich zum Prädiktor Therapiemotivation der Prädiktor Symptomschwere in das Modell aufgenommen wird ($\alpha = 0.01$)?
4) Kann für die Population ein Zusammenhang zwischen der Symptomschwere *alleine* und dem Therapieerfolg behauptet werden ($\alpha = 0.01$) ?

**4.2 Musterlösungen**

*Aufgabe I:*

1) Ziel der inferenzstatistischen Überprüfung von Einflußparametern im ALM ist, zu testen, ob der gefundene Zusammenhang zwischen der Kriteriumsvariablen und einem bzw. mehrerer Prädiktoren nur die Gegebenheiten in der Stichprobe, anhand derer das Modell erstellt wurde, beschreibt, oder ob darüber hinaus mit einer hinreichend geringen Irrtumswahrscheinlichkeit behauptet werden kann, daß auch in der Population, aus der die Stichprobe stammt, ein Zusammenhang zwischen Prädiktoren und Kriterium existiert.

2) *Parameterrestriktion* bedeutet, daß einem Parameter - im ALM typischerweise einem Einflußgewicht $\beta_j$ - hypothetisch ein bestimmter Wert zugewiesen wird, der Parameter also auf diesen Wert *restringiert* wird. Parameterrestriktionen werden im Rahmen der Hypothesenprüfung benutzt: Um den Zusammenhang zwischen einem Prädiktor (ob alleine oder zusätzlich zu anderen bereits im Modell enthaltenen) und dem Kriterium zu testen, wird seinem zugehörigen Einflußparameter ein bestimmter Wert (z.B. Null) zugewiesen. Anschließend wird geprüft, ob die vorliegenden empirischen Daten auch mit einem Modell, bei dem der betreffende Parameter nur den ihm durch die Restriktion zugewiesenen Wert annehmen kann, kompatibel sind oder ob das Varianzdekrement, welches mit der Parameterrestriktion einhergeht, so groß ist, daß es im Vergleich zur Fehlervarianz als statistisch signifikant einzustufen ist. Im letzteren Fall entscheidet man sich dafür, die Nullhypothese, die mit der Parameterrestriktion verbunden ist, zu verwerfen und die Alternativhypothese anzunehmen, welche besagt, daß die vorgenommene Parameterrestriktion für die Population nicht zutrifft.

3) Bei der inferenzstatistischen Prüfung von Hypothesen im ALM wird die Hypothese geprüft, ob eine Menge von m Prädiktoren die Varianz des Kriteriums auch in der Population "erklären" kann. Dazu wird geprüft, ob der Anteil erklärter Kriteriumsvarianz, der durch die Parameterrestriktionen der Nullhypothese verloren geht, deutlich größer ist als die Fehlervarianz (das Varianzdekrement entsteht durch jene Variablen, deren Parameter restringiert wurden). Ist die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten der gegebenen empirischen Daten unter den Restriktionen der Nullhypothese sehr klein wird die Nullhypothese zugunsten der Alternativhypothese zurückgewiesen.
Bei der inferenzstatistischen Prüfung von Hypothesen im ALM wird also ein Verhältnis von zwei Varianzen gebildet, nämlich das Verhältnis aus dem Dekrement an erklärter Varianz, das sich durch die Parameterrestriktionen ergibt, und der Fehlervarianz. Die Verteilung, die die Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten von Varianzverhältnissen abbildet, ist die F-Verteilung.

4) Eine globale Nullhypothese besagt, daß in der Population keinerlei Zusammenhang zwischen sämtlichen Prädiktoren und dem Kriterium besteht und folglich **alle** Parameter $\beta_1,\ldots, \beta_j,\ldots, \beta_m$ auf Null restringiert werden können.

5) $H_0$: Die Prädiktoren $x_1$ und $x_2$ weisen in der Population keinen Zusammenhang mit dem Kriterium auf. $H_0$: $\beta_1 = 0$ und $\beta_2 = 0$.

6) $R_D^2$ ist das Dekrement an erklärter Varianz, das sich ergibt, wenn die in der Nullhypothese formulierten Parameterrestriktionen in das Modell aufgenommen und auf die Daten angewendet werden. $R_U^2$ berücksichtigt den Varianzanteil, der durch das uneingeschränkte Modell erklärt wird, $1-R_U^2$ dementsprechend den unerklärbaren Varianzanteil (Fehlervarianzanteil). Bei $df_e$ handelt es sich um die bereits von der Schätzung des Standardschätzfehlers bekannten Fehlerfreiheitsgrade (n – Anzahl der Spalten von **X** im uneingeschränkten Modell). Außerdem stehen im F-Bruch noch die Hypothesenfreiheitsgrade $df_h$ als Anzahl der in der Nullhypothese formulierten Parameterrestriktionen bzw. Teilhypothesen.

7) In der globalen Nullhypothese werden **alle** Parameter $\beta_1,\ldots, \beta_j,\ldots, \beta_m$ auf Null restringiert, woraus folgt, daß das eingeschränkte Modell ein $R_E^2$ von Null aufweist; da gilt $R_D^2 = R_U^2 - R_E^2$, ist $R_D^2 = R_U^2$. Bei der Überprüfung der globalen Nullhypothese ist also $R_D^2$ stets so groß wie $R_U^2$.

8)

$$R_D^2 = \frac{Q_h}{Q_t};\ (1-R_U^2) = \frac{Q_e}{Q_t}$$

$$\frac{R_D^2 / df_h}{(1-R_U^2)/df_e} = \frac{\left(\frac{Q_d}{Q_t}\right)/df_h}{\left(\frac{Q_e}{Q_t}\right)/df_e} = \frac{Q_t}{Q_t}\cdot\frac{Q_d/df_h}{Q_e/df_e} = \frac{Q_d/df_h}{Q_e/df_e}$$

9) Das $\alpha$-Risiko ist die akzeptierbare Irrtumswahrscheinlichkeit. Mit $\alpha$ wird der sogenannte **Fehler der 1. Art** kontrolliert, d.h. die Wahrscheinlichkeit jenes Fehlers, den man begeht, wenn die Nullhypothese irrtümlicherweise zugunsten der Alternativhypothese verworfen wird, obwohl die $H_0$ in Wahrheit zutreffen würde. Da ein $\alpha$-Risiko von 5% bzw. 1% als wissenschaftlich vertretbar gilt, wird das Signifikanzniveau im Signifikanztest in der Regel auf 5% bzw. 1% festgesetzt. Ist die Irrtumswahrscheinlichkeit nicht größer als das $\alpha$-Niveau, wird $H_1$ angenommen, anderenfalls wird $H_0$ beibehalten.

*Aufgabe II:*

1) Im errechneten multiplen Determinationskoeffizienten von $R^2 = 0{,}915$ dokumentiert sich ein Zusammenhang in der Stichprobe. Er alleine ist nicht hinreichend, um davon ausgehen zu können, daß auch auf Populationsebene ein Zusammenhang zwischen den Prädiktoren und dem Kriterium angenommen werden kann. Vielmehr ist die Frage nach der Signifikanz des Zusammenhangs zu stellen: Ist die durch das Modell erklärte Varianz (oder Quadratsumme) im Vergleich zur Fehlervarianz (oder -quadratsumme) so groß, daß man mit einer hinreichend geringen Irrtumswahrscheinlichkeit davon ausgehen kann, daß es sich nicht nur um zufallsbedingte Stichprobeneffekte handelt? Diese Frage ist inferenzstatistisch - es handelt sich um das Verhältnis zweier Varianzen - über die F-Verteilung zu beantworten; und zwar im Fall der globalen Nullhypothese $\beta_1 = 0$ und $\beta_2 = 0$ als:

$$F = \frac{R_D^{\,2}/df_h}{(1-R_U^{\,2})/df_e} = \frac{R_U^{\,2}/df_h}{(1-R_U^{\,2})/df_e}$$

Bei $df_e$ handelt es sich um die bereits bekannten Fehlerfreiheitsgrade. Die Hypothesenfreiheitsgrade $df_h$ ergeben sich aus der Anzahl der Parameterrestriktionen in der Nullhypothese. Es werden zwei Parameter restringiert und somit gilt $df_h = 2$. Mit $R_D^2$ wird das *Dekrement am erklärten Varianzanteil bezeichnet, das sich ergibt, wenn die in der Nullhypothese formulierten Parameterrestriktionen auf die Stichprobendaten angewendet werden*. Nimmt der durch das Modell erklärte Varianzanteil nicht oder kaum ab, obwohl Parameter auf Null restringiert werden (was gleichbedeutend mit einer Entfernung der Prädiktoren aus dem Modell ist), kann nicht (oder nur mit einer zu hohen Irrtumswahrscheinlichkeit) davon ausgegangen werden, daß die entsprechenden Prädiktoren in der Population tatsächlich einen Zusammenhang mit dem Kriterium aufweisen. Ein solcher Zusammenhang würde sich in einem Dekrement an erklärter Varianz ausdrücken, wenn das $\beta$-Gewicht auf Null restringiert wird. Für unser Beispiel ergibt sich der F-Bruch als:

$$F = \frac{0{,}915/2}{(1-0{,}915)/5} = 26{,}912$$

Der kritische F-Wert bei einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}01$ ist 13,27; damit ist $F_{emp} > F_{krit}$ und die Nullhypothese kann mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $< \alpha = 0{,}01$ verworfen, die Alternativhypothese angenommen werden: Für die Population kann ein Zusammenhang zwischen den beiden Prädiktoren und dem Kriterium mit weniger als 1% Risiko angenommen werden.

2) Wir wissen, daß bei Entfernen des Prädiktors Therapiemotivation aus dem Modell (Restriktion $\beta_2 = 0$) der Anteil an erklärter Varianz um 46,5% abnimmt. Da $R_D^2 = R_I^2$, ist dies auch der Anteil, nach dem in der Aufgabe gefragt wird, nämlich der Anteil an erklärter Varianz, der hinzukommt,

wenn Therapiemotivation als Prädiktor in ein Modell mitaufgenommen wird, das schon die Symptomschwere enthält. Es soll die Annahme geprüft werden, ob sich die Vorhersagegenauigkeit signifikant verbessert, wenn der zweite Prädiktor in das Modell aufgenommen wird. Die Parameterrestriktion, um die erfragte Hypothese zu prüfen, läßt sich als $H_0$: $\beta_2 = 0$ und $\beta_1$ = beliebig formulieren. Als F-Bruch mit $df_h$=1 erhalten wir:

$$F = \frac{0{,}465/1}{(1-0{,}915)/5} = 27{,}353$$

mit $R_D^2 = 0{,}465$ = der Anteil an erklärter Varianz, der verlorengeht, wenn die in der $H_0$ formulierte Parameterrestriktion in das Modell implementiert wird.
Der kritische F-Wert ist 16,26, womit $F_{emp} > F_{krit}$ und die Nullhypothese mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit < $\alpha = 0{,}01$ verworfen werden und die Alternativhypothese akzeptiert werden kann.

3) Da bei Entfernen des Prädiktors Symptomschwere aus dem Modell (Restriktion $\beta_1 = 0$) der Anteil an erklärter Varianz um 22,3 % abnimmt, gilt hier $R_D^2 = 0{,}223$. Die zu testende Nullhypothese nimmt an, daß die Hinzunahme dieses Prädiktors in ein Modell, das bereits die Therapiemativation enthält, die Güte des Modells nicht verbessert: $H_0$: $\beta_1 = 0$ und $\beta_2$ = beliebig.

   Auch diese Hypothese enthält eine Restriktion, daher $df_h = 1$ und als F-Bruch erhalten wir:

$$F = \frac{0{,}223/1}{(1-0{,}915)/5} = 13{,}118$$

   Der kritische F-Wert ist wieder 16,26, so daß $F_{emp} < F_{krit}$ und die Nullhypothese nicht verworfen werden kann. Die Hinzunahme des Prädiktors Symptomschwere verbessert die Vorhersagegenauigkeit also nicht signifikant.

4) Da in dieser Aufgabe nach dem Zusammenhang zwischen Symptomschwere allein und dem Therapieerfolg gefragt wird, enthält das uneingeschränkte Modell nur **einen** Prädiktor. Als $R_U^2$ erhalten wir die quadrierte Korrelation zwischen Symptomschwere und Therapieerfolg (0,45). Für die inferenzstatistische Überprüfung wird eine Nullhypothese formuliert, die diesen Zusammenhang für die Population negiert, mit $H_0$: $\beta_1 = 0$ (*Eine* Parameterrestriktion, daher $df_h$=1).

   Das Dekrement $R_D^2$ beträgt 0,45. Die Fehlerfreiheitsgrade sind $df_e = 6$ und die Fehlervarianz ist 1-$R_U^2$, also 1 - 0,45 = 0,55.

$$F = \frac{0{,}45/1}{(1-0{,}45)/6} = 4{,}91$$

   Bei einem $F_{krit}$ von 13,75 kann die Nullhypothese nicht verworfen werden und wird beibehalten.

# 5. Einfaktorielle Varianzanalyse

## 5.1 Aufgaben

*Aufgabe I:*

1) Varianzanalytische Fragestellungen werden häufig auch als "Überprüfung von Unterschiedshypothesen" klassifiziert, regressionsanalytische Fragestellungen hingegen als "Überprüfung von Zusammenhangsfragestellungen". Inwieweit halten Sie diese terminologische Unterscheidung für gerechtfertigt?
2) Worin unterscheiden sich bei Regressions- und Varianzanalyse die in der Matrix **X** zusammengefaßten Variablen?
3) Von welchem Typ ist die Matrix **X'X** bei varianzanalytischen Designs mit Zellenmittelwertekodierung?
4) Beantworten Sie folgende Fragen zur "Allgemeinen Linearen Hypothese" (ALH):
   - Was ist die Funktion der Matrix **C**? Wie bestimmt sich ihre Zeilen- und Spaltenzahl?
   - Was bedeutet die Notierung einer Null an einer bestimmten Stelle der **C**-Matrix?
   - Inwiefern ist die ALH ein flexibleres Konzept zur Überprüfung von Hypothesen als das bisherige mit eingeschränkten und uneingeschränkten Modellen?
5) Was versteht man unter der Hypothesenquadratsumme?

*Aufgabe II:*

In einem Experiment zur Auswirkung von Kaffee auf die Konzentrationsleistung werden N = 9 Probanden zufällig auf drei Gruppen aufgeteilt, denen unterschiedliche Mengen Kaffee verabreicht werden. Anschließend wird die Anzahl der *Fehler* in einem Konzentrationstest ermittelt.

| Menge an Kaffee | | |
|---|---|---|
| Kein Kaffee | 1 Tasse | 5 Tassen |
| $y_1=13$ | $y_4=5$ | $y_7=20$ |
| $y_2=9$ | $y_5=5$ | $y_8=17$ |
| $y_3=11$ | $y_6=2$ | $y_9=26$ |

1) Bestimmen Sie die Schätzwerte für die Einflußparameter bei Zellenmittelwertkodierung.
2) Warum enthält der **b**-Vektor im Rahmen der Zellenmittelwertkodierung kein Element $b_0$ mehr? Geben Sie einen mathematischen und einen inhaltlichen Grund an.
3) Berechnen Sie für das vorliegende Beispiel den Vektor $\hat{y}$ !
4) Welcher Anteil der Varianz in den Konzentrationsleistungen wird durch die unterschiedlichen Stufen des Faktors "Menge an Kaffee” determiniert?

*5)* Kann die Annahme beibehalten werden, daß die Anzahl der Fehler von der Menge an Kaffee unabhängig ist? ($\alpha$=0.01) *Formulieren Sie hier wie im folgenden Ihre Hypothesen sowohl verbal als auch in Form der ALH!*

6) Verändert sich die Konzentrationsleistung durch Kaffee, wenn von der Menge abgesehen wird? ($\alpha$=0.05)

7) Unterscheiden sich die Fehlerzahlen nach dem Konsum von 1 Tasse Kaffee von denen nach dem Konsum von fünf Tassen? ($\alpha$=0.01)

**5.2 Musterlösungen**

*Aufgabe I:*

1) Die Unterscheidung zwischen "Unterschieds-" und "Zusammenhangsfragestellungen" läßt sich nur schwer rechtfertigen. Die varianzanalytischen „Unterschiedsfragestellungen“ (z.B.: Bestehen Unterschiede zwischen den verschiedenen Bedingungen, unter denen die Meßwerte zustande gekommen sind?) können nämlich auch als "Zusammenhangsfragestellungen" formuliert werden: Gibt es einen Zusammenhang zwischen den unterschiedlichen Bedingungen der UV und den Ausprägungen der Kriteriumswerte? Analoges gilt umgekehrt.

2) Hinsichtlich der Menge der Abstufungen: Bei Regressionsanalysen können die in der Matrix **X** zusammengefaßten Variablen (abgesehen von $\mathbf{x_0}$) theoretisch beliebig viele Werte annehmen (kontinuierliche Variablen), bei Varianzanalysen hingegen nur zwei (Kodiervariablen), da die Prädiktoren hier die Zugehörigkeit oder Nichtzugehörigkeit eines Meßwertes zu einer bestimmten Bedingung kodieren. Die in der Matrix **X** zusammengefaßten Variablen weisen in beiden Fällen das Skalenniveau der Intervallskala auf. Durch die Überführung der m Bedingungen, unter denen die Werte y zustande gekommen sind, in m Prädiktoren mit jeweils nur zwei numerischen Abtufungen und damit nur noch einem definierten Abstand, erfüllen auch bei varianzanalytischen Designs die in **X** zusammengefaßten Variablen die Voraussetzungen einer Intervallskala.

3) Bei Zellenmittelwertekodierung handelt es sich stets um eine Diagonalmatrix vom Typ m x m, wenn m die Anzahl der "Zellen" des Designs ist. Die Hauptdiagonalelemente zeigen die Anzahl der Merkmalsträger pro Zelle ($n_z$). Ist die Anzahl der Merkmalsträger in allen Zellen gleich, so ist **X’X** eine Skalarmatrix, die sich immer auch als $n_Z \cdot I$ schreiben läßt.

4) Zur ALH-Formulierung von Nullhypothesen:
   - Die Matrix **C** ermöglicht die simultane Formulierung von mehreren Teilhypothesen, indem zeilenweise - gemäß der entsprechenden Teilhypothese - angegeben wird, für welche(n) Einflußparameter $\beta_j$ eine Restriktion gelten soll. Jede Zeile der Matrix **C** gibt somit an, wie die einzelnen $\beta_j$ entsprechend der jeweiligen Teilhypothese linear zu kombinieren sind. Die **Spalten**anzahl m + 1 der **C**-Matrix ist durch die Anzahl der Parameter, die **Zeilen**anzahl k durch die Anzahl der Teilhypothesen bestimmt.
   - Die Notierung einer Null an einer bestimmten Stelle der **C**-Matrix gibt an, daß in der entsprechenden Teilhypothese (Zeile) keine Restriktion für den entsprechenden Einflußparameter $\beta_j$ (Spalte) gelten soll, beziehungsweise dass in den jeweiligen Teilhypothesen über den entsprechenden Einflußparameter keine Aussage gemacht wird.

- Die ALH ermöglicht die Formulierung und inferenzstatistische Überprüfung von Hypothesen, die in der bisherigen Terminologie von Varianzdekrementen nicht formulierbar waren: Mit dem $\delta$-Vektor kann man auch von Null abweichende theoretische Werte für Parameterrestriktionen wählen; die **C**-Matrix bietet die Möglichkeit, Restriktionen über Teilmengen von Einflußparametern $\beta_j$ zu formulieren, sowie über Linearkombinationen von Einflußparametern.

5) Die Hypothesenquadratsumme $Q_h$ bezeichnet jenes Dekrement, um das sich die determinierte Quadratsumme $Q_d$ verringert, wenn die in der ALH formulierten Parameterrestriktionen auf die Stichprobendaten angewendet werden.

*Aufgabe II:*

1) Bei Zellenmittelwertekodierung erhält man den **b**-Vektor als Vektor der Mittelwerte der Zellen des Designs, in unserem Fall:

$$b = \begin{bmatrix} 11 \\ 4 \\ 21 \end{bmatrix}$$

2) *Mathematisch* würde die Aufnahme des Terms $b_0\mathbf{x_0}$ in das Gleichungssystem dazu führen, daß **X** und mithin **X'X** nicht invertierbar ("singulär") werden würden: Der Einsenvektor $\mathbf{x_0}$ wäre stets als Summe aus den Vektoren $\mathbf{x_1}$ bis $\mathbf{x_m}$ bildbar und **X** enthielte somit stets lineare Abhängigkeiten. *Inhaltlich* ließe sich argumentieren, daß in der Regressionsanalyse die Regressionskonstante $b_0$ jenen Sockelbetrag der Kriteriumsvariablen y angibt, der vorhergesagt wird, wenn ein Proband in allen m Prädiktorvaiablen den Wert Null hätte. In der Varianzanalyse kann dieser Fall, daß alle Prädiktoren den Wert 0 annehmen, ausgeschlossen werden: Eine Person mit Null in allen Kodiervariablen $\mathbf{x_1}$ bis $\mathbf{x_m}$ hätte am Experiment nicht teilgenommen!

3) Der Vektor $\hat{\mathbf{y}}$ enthält als Vorhersage für jeden Probanden den Mittelwert der Zelle, aus der der Proband stammt:

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{Xb} = \begin{bmatrix} 11 \\ 11 \\ 11 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 21 \\ 21 \\ 21 \end{bmatrix}$$

4) Es gilt - wie im Zusammenhang von Regressionsanalysen auch:

$$R_U^{\,2} = \frac{Q_d}{Q_t}$$

$$Q_t = \mathbf{y'y} - n\bar{y}^2$$

$Q_d$ kann nach folgendem Ausdruck bestimmt werden:

$$Q_d = n_Z \cdot \mathbf{b'b} - n\bar{y}^2$$

Für unseren Fall erhält man:

$$Q_t = 494\ ,\ Q_d = 438;\ R^2 = 0{,}887$$

Es können also etwa 89% der Varianz der Fehlerzahlen auf die Variation des Faktors "Menge an Kaffee" zurückgeführt werden.

5) Unter dieser Fragestellung soll geprüft werden, ob sich mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens einem Prozent behaupten läßt, daß die Unterschiede zwischen den Gruppen unter den einzelnen Stufen des Faktors "Kaffee" nicht nur zufällig zustande gekommen sind. Die entsprechende Nullhypothese behauptet folglich, daß in der Population kein Unterschied zwischen den drei Stufen des Faktors „Kaffee" hinsichtlich der Konzentrationsleistung besteht (globale $H_0$):

$$H_0\text{: } \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$

Im Falle von Varianzanalysen ist es nun aus unterschiedlichen Gründen sinnvoll, die Nullhypothese nicht durch den Vergleich von Varianzen, sondern durch den Vergleich von Quadratsummen zu testen. Ansonsten funktioniert die Hypothesenprüfung genauso wie bei der Regressionsanalyse: Es wird die Frage gestellt, *ob die determinierte Quadratsumme durch die in der Nullhypothese formulierten Parameterrestriktionen soweit reduziert wird, daß man mit hinreichend geringer Irrtumswahrscheinlichkeit davon ausgehen kann, daß der in der Nullhypothese formulierte Sachverhalt in der Population nicht gegeben ist.* Träfe die Nullhypothese zu, dürfte sich die determinierte Quadratsumme durch die Restriktionen nicht erheblich verringern. Der Wert, um den die determinierte Quadratsumme bei Anwendung der Parameterrestriktionen auf die Stichprobendaten sinkt, wird als *Hypothesenquadratsumme* bezeichnet.

In dieser Fragestellung zur globalen Nullhypothese entspricht die Hypothesenquadratsumme genau der determinierten Quadratsumme, und der zugehörige F-Bruch lautet:

$$F = \frac{438/2}{56/6} = 23{,}464$$

Die Hypothesenfreiheitsgrade $df_h$ nehmen den Wert 2 an, da in der Nullhypothese zwei Parameterrestriktionen formuliert werden (s. unten: ***Die C-Matrix hat zwei Zeilen***!).

Die Fehlerfreiheitsgrade $df_e$ nehmen den Wert 6 an, sie ergeben sich wieder als $df_e$ = N - Anzahl der Spalten von **X** (In der VA: N - Anzahl der Zellen des Designs).

Die Hypothesenquadratsumme $Q_h$ entspricht der determinierten Quadratsumme (s.o.) und die Fehlerquadratsumme ergibt sich als $Q_t - Q_d = Q_e = 494 - 438 = 56$. Der kritische F-Wert ($\alpha = 0{,}01$; $df_e = 6$) ist 10,92, womit $F_{emp} > F_{krit}$ und die Nullhypothese mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $< \alpha = 0{,}01$ verworfen werden kann.

Allgemein kann man die Hypothesenquadratsumme auch nach dem folgendem Ausdruck bestimmen

$$Q_h = (\mathbf{Cb} - \boldsymbol{\delta})'\left[\mathbf{C}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}'\right]^{-1}(\mathbf{Cb} - \boldsymbol{\delta}),$$

wenn man die Nullhypothese in Form der Allgemeinen Linearen Hypothese (ALH) formuliert hätte. Zu einer ALH-Formulierung der Nullhypothese gelangt man, indem man die in der Nullhypothese formulierten Parameterrestriktionen in *orthogonale Kontraste* (vgl. Moosbrugger, Lineare Modelle, S. 122ff.) umformt:

1. Kontrast: $$\mu_1 = \frac{\mu_2 + \mu_3}{2} \Leftrightarrow 2\mu_1 - \mu_2 - \mu_3 = 0$$

2. Kontrast:

$$\mu_2 = \mu_3 \Leftrightarrow \mu_2 - \mu_3 = 0$$

Die Linearkombinationen der Mittelwerte können auch simultan als Matrixprodukt aus dem Vektor der wahren Zellenmittelwerte $\boldsymbol{\mu}$ (= dem $\boldsymbol{\beta}$-Vektor) und einer Matrix $\mathbf{C}$ formuliert werden:

$$\begin{bmatrix} 2\mu_1 & -1\mu_2 & -1\mu_3 \\ 0 & 1\mu_2 & -1\mu_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix}$$

Die Nullhypothese als ganzes ist dann wie folgt formulierbar:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Und dies entspricht genau der Form der ALH: $\mathbf{C}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\delta}$.

Damit sind $\mathbf{C}$ und $\boldsymbol{\delta}$ bekannt und $Q_h$ kann wie oben angegeben berechnet werden. Bei Zellenmittelwertekodierung vereinfacht sich der oben angegebene Ausdruck zu

$$Q_h = n_Z \cdot (Cb)' \cdot (CC')^{-1} \cdot (Cb)$$

(vgl. Moosbrugger, Lineare Modelle, S. 124).

**Anmerkung:** Bei der globalen Nullhypothese kann man auf diese Berechnung verzichten, da die Hypothesenquadratsumme genau der determinierten Quadratsumme entspricht!

6) Hier ist als Nullhypothese zu formulieren, daß unter dem Genuß von Kaffee durchschnittlich genauso viele Fehler gemacht werden, wie ohne Kaffee, daß also der Durchschnitt der Fehlerzahlen in den Bedingungen mit Kaffee genauso groß ist wie die Fehlerzahlen ohne Kaffee:

$$H_0 : \mu_1 = \frac{\mu_2 + \mu_3}{2} \Leftrightarrow 2\mu_1 - \mu_2 - \mu_3 = 0$$

In ALH-Schreibweise: $$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix} = 0$$

$Q_h$ ergibt sich wie folgt:

$$Cb = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 11 \\ 4 \\ 21 \end{bmatrix} = -3$$

$$CC' = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = 6; \qquad (CC')^{-1} = \frac{1}{6}$$

$$Q_h = 3 \cdot (-3) \cdot \frac{1}{6} \cdot (-3) = 4{,}5$$

Womit $$F = \frac{Q_h/df_h}{Q_e/df_e} = \frac{4{,}5/1}{56/6} = 0{,}482$$

Der kritische F-Wert mit $\alpha = 0{,}05$ und $df_e = 6$ ist 5,99, so daß $F_{emp} < F_{krit}$, weswegen die Nullhypothese vorläufig beibehalten wird. Es ließ sich nicht zeigen, daß sich die Fehlerzahlen in Abhängigkeit von nicht näher differenziertem Kaffekonsum ändern.

7) Wenn überprüft werden soll, ob sich die Fehlerzahlen nach dem Konsum von 5 Tassen Kaffee von denen nach einer Tasse Kaffee unterscheiden, so wäre als Nullhypothese zu formulieren:

$$H_0: \mu_2 = \mu_3 \iff \mu_2 - \mu_3 = 0$$

In ALH-Schreibweise:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix} = 0$$

$Q_h$ ergibt sich wie folgt:

$$Cb = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 11 \\ 4 \\ 21 \end{bmatrix} = -17$$

$$CC' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 2; \qquad (CC')^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$Q_h = 3 \cdot (-17) \cdot \frac{1}{2} \cdot (-17) = 433{,}5$$

Womit

$$F = \frac{Q_h / df_h}{Q_e / df_e} = \frac{433{,}5/1}{56/6} = 46{,}446$$

Dieses Ergebnis ist bei einem kritischen F-Wert von 13,75 ($\alpha = 0{,}01$, $df_e = 6$) auf dem 1%-Niveau signifikant; d.h. man kann mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von weniger als 0,01 davon ausgehen, daß sich die Fehlerzahlen nach 1 Tasse Kaffee von denen nach 5 Tassen unterscheiden. Die Dateninspektion zeigt, daß wenig Kaffee zu einer Konzentrationszunahme, viel Kaffee hingegen zu einer beträchtlichen Konzentrationsabnahme führt.

## 6. Zweifaktorielle Varianzanalyse

### 6.1 Aufgaben

Ein Forscher soll untersuchen, ob ein neues Beruhigungsmittel die Fahrtüchtigkeit von Autofahrern beeinträchtigt. Dazu verabreicht er das Medikament in drei verschiedenen Dosierungen (0mg, 10mg, 25mg) und erhebt als abhängige Variable die Zahl der Fahrfehler in einem Fahrsimulator. Der Forscher weiß aber auch, daß nach der Persönlichkeitstheorie von Eysenck Extravertierte auf Sedativa stärker reagieren als Introvertierte; also teilt er seine Probanden in Extravertierte und Introvertierte, um diesen 2. Faktor zu kontrollieren. Die Ergebnisse des Experiments sind in der folgenden Tabelle dargestellt:

| | Faktor 1: Dosierung des Medikaments | | |
|---|---|---|---|
| Faktor 2: Extraversion | 0mg | 10mg | 25mg |
| Introvertierte | (Zelle 1)<br>6<br>1<br>2 | (Zelle 2)<br>5<br>4<br>6 | (Zelle 3)<br>8<br>7<br>9 |
| Extravertierte | (Zelle 4)<br>2<br>1<br>0 | (Zelle 5)<br>5<br>6<br>1 | (Zelle 6)<br>13<br>11<br>9 |

*Formulieren Sie im folgenden die Hypothesen und Antworten sowohl formal als auch inhaltlich.*

1) Geben Sie Schätzungen für die Einflußparameter bei Zellenmittelwertekodierung an.
2) Kann die Hypothese beibehalten werden, daß sich die Fahrfehler in der Population nicht unterscheiden? ($\alpha = 0{,}01$)
3) Kann mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens 1% davon ausgegangen werden, daß der Faktor Dosierung einen Einfluß auf die Fahrfehler hat?
4) Unterscheiden sich die Fahrfehler von Extravertierten und Introvertierten? ($\alpha = 0{,}05$)
5) Ist der Einfluß der Dosierung bei Extravertierten anders als bei Introvertierten (Wechselwirkung)? ($\alpha = 0{,}05$)
6) Kann die Hypothese beibehalten werden, daß bei Introvertierten die Fahrfehler mit 10mg des Medikaments gleich hoch sind wie mit 25mg? ($\alpha = 0{,}01$)

**6.2 Musterlösungen**

1) Bei Zellenmittelwertekodierung ergeben sich die Schätzwerte für die Einflußparameter als Mittelwerte der Zellen des Designs.

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \\ 1 \\ 4 \\ 11 \end{bmatrix}$$

2) $H_0$: In der Population existieren keine Unterschiede hinsichtlich der Anzahl der Fahrfehler in Abhängigkeit von der Dosierung des Medikaments oder von Introversion/Extraversion.

$$H_0\text{: } \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5 = \mu_6$$

Für die globale Nullhypothese gilt $Q_h = Q_d$

$$Q_d = n_z \mathbf{b'b} - n\bar{y}^2 = 3 \cdot 236 - 18 \cdot 5{,}\bar{3}^2 = 196$$

$$Q_t = \mathbf{y'y} - n\bar{y}^2 = 750 - 18 \cdot 5{,}\bar{3}^2 = 238$$

$$Q_e = Q_t - Q_d = 238 - 196 = 42$$

$$F = \frac{Q_d/df_h}{Q_e/df_e} = \frac{196/5}{42/12} = 11{,}2$$

$$F_{krit,\,0{,}01,\,dfh=5;\,dfe=12} = 5{,}06$$

$$F_{emp} > F_{krit} \Rightarrow H_1$$

Mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von < $\alpha$ = 0,01 kann man annehmen, daß sich die Anzahl der Fahrfehler in Abhängigkeit von der Dosierung und Introversion/Extraversion auch in der Population unterscheiden.

3) $H_{0A}$: Die Dosierung des Medikaments hat keinen Einfluß auf die Unfallzahlen (kein Haupteffekt A).

$H_{0A1}$: $\mu_1 + \mu_4 = \dfrac{\mu_2 + \mu_3 + \mu_5 + \mu_6}{2}$ und $H_{0A2}$: $\mu_2 + \mu_5 = \mu_3 + \mu_6 \Leftrightarrow$

$H_{0A1:}$ $2\mu_1 - \mu_2 - \mu_3 + 2\mu_4 - \mu_5 - \mu_6 = 0$ und $H_{0A2:}$ $\mu_2 - \mu_3 + \mu_5 - \mu_6 = 0$

$$\text{ALH}: \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \\ \mu_5 \\ \mu_6 \end{bmatrix} = 0$$

$$\mathbf{Cb} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \\ 1 \\ 4 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{CC'} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$Q_h = n_z (\mathbf{Cb})' (\mathbf{CC'})^{-1} (\mathbf{Cb}) = 3 \cdot \begin{bmatrix} -20 & -10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{12} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -20 \\ -10 \end{bmatrix} = 175$$

$F = \dfrac{175/2}{42/12} = 25$ $\qquad F_{krit;\,\alpha=0{,}01;\,dfh=2;\,dfe=12} = 6{,}93$ $\qquad F_{emp} > F_{krit} \Rightarrow H_1$

Mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von <1% kann man davon ausgehen, daß die Anzahl der Fahrfehler in der Population in Abhängigkeit von der Dosierung verschieden ist.

4) $H_{0B}$: Die Anzahl der Fahrfehler von Introvertierten und Extravertierten unterscheiden sich nicht (kein Haupteffekt B).

$$H_{0B}: \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = \mu_4 + \mu_5 + \mu_6$$

Da die Stichprobendaten (die empirischen Mittelwerte) nicht von dieser Nullhypothese abweichen (3+5+8=1+4+11=16), enthalten sie keinerlei Hinweis darauf, daß sich die durchschnittlichen Fahrfehler für Extravertierte und Introvertierte unterscheiden. Da ein in den Daten nicht vorhandener Unterschied keinesfalls ein signifikanter Unterschied sein kann, ist die Nullhypothese beizubehalten.

5) $H_{0(AxB)}$: Die Unterschiede der Fahrfehleranzahl in Abhängigkeit von der Dosierung sind bei Introversion und Extraversion gleich (keine Wechselwirkung).

$H_{0(A1xB)}: \mu_1 - \frac{\mu_2 + \mu_3}{2} = \mu_4 - \frac{\mu_5 + \mu_6}{2}$ und $H_{0(A2xB)}: \mu_2 - \mu_3 = \mu_5 - \mu_6$

$$\text{ALH}: \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \\ \mu_5 \\ \mu_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Cb} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \\ 1 \\ 4 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{CC'} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ -1 & -1 \\ -2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$Q_h = 3 \cdot \begin{bmatrix} 6 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{12} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} = 21$$

$$F = \frac{21/2}{42/12} = 3$$

$$F_{krit;\,\alpha=0{,}05;dfh=2;dfe=12} = 3{,}89$$

$$F_{emp} < F_{krit} \Rightarrow H_0$$

Der empirische F-Wert ist kleiner als der kritische, also kann man nicht davon ausgehen, daß die Unterschiede in der Fahrfehleranzahl, die in Abhängigkeit von der Dosierung auftreten, in der Population bei Introversion/Extraversion verschieden sind.

6) $H_0$: Bei Introvertierten unterscheiden sich die Unfallzahlen mit 10mg nicht von den Unfallzahlen mit 25mg des Medikaments.

$$H_0 : \mu_2 = \mu_3$$

$$\text{ALH}: \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \\ \mu_5 \\ \mu_6 \end{bmatrix} = 0$$

$$\mathbf{Cb} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \\ 1 \\ 4 \\ 11 \end{bmatrix} = -3 \qquad \mathbf{CC'} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 2$$

$$Q_h = 3 \cdot (-3) \cdot \frac{1}{2} \cdot (-3) = 13{,}5$$

$$F = \frac{13{,}5/1}{42/12} = 3{,}857 \qquad F_{krit} = 9{,}33 \qquad F_{emp} < F_{krit} \Rightarrow H_0$$

Die Hypothese, daß die Fahrfehleranzahl von Introvertierten bei 10mg und die bei 25mg gleich ist, wird beibehalten.

# Teil B: Prüfungsaufgaben

**7. Klausurbeispiele**

*Aufgabe I:*

In einem großen Betrieb, dessen Name nicht genannt werden soll, erfolgt die Auswahl neuer Mitarbeiter traditionell mit einem vom Vorgesetzten durchgeführtem Interview, auf dessen Basis die Kandidaten auf einer Skala von 1-10 (10 = sehr gut) bewertet werden, sowie neuerdings mit Hilfe eines psychologischen Eignungstests, bei dem hohe Punktwerte hoher Eignung entsprechen.

Sie werden als externer Evaluator gebeten, die Effizienz des Einstellungsverfahrens des Betriebes zu prüfen. Sie sollen herausfinden, ob einerseits die verwendeten Einstellungskriterien zu einer optimalen Besetzung freier Stellen führen und ob andererseits eventuelle Einsparungsmöglichkeiten beim Einstellungsverfahren bestehen. Als Kriterium für den Erfolg der Personalauswahl ziehen Sie die betriebsinterne Leistungsbeurteilung am Arbeitsplatz nach einem Jahr heran (Punktwerte von 1-20) und erhalten für die neun zuletzt eingestellten Mitarbeiter folgende Daten:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Testergebnis ($x_1$) | 5 | 8 | 7 | 3 | 7 | 10 | 3 | 7 | 13 |
| Interview ($x_2$) | 3 | 5 | 7 | 4 | 6 | 8 | 7 | 6 | 9 |
| Leistungsbeurteilung (y) | 7 | 9 | 15 | 5 | 11 | 19 | 6 | 12 | 20 |

<u>Fragen:</u>

a) Wieviel der Varianz der Leistung wird durch die beiden Prädiktoren erklärt?

b) Wie breit ist das 95%ige Konfidenzintervall ?

c) Prüfen Sie, ob in der Population eine Vorhersage der Leistung aufgrund des Interviews und des Tests möglich ist ($\alpha = 0.01$).

d) Prüfen Sie, wie gut die Vorhersage mit Hilfe des psychologischen Tests alleine möglich wäre ($\alpha = 0.05$).

e) Was würden Sie sagen? Kann auf das Interview ohne signifikanten Informationsverlust verzichtet werden? Betrachten Sie beide Prädiktoren im Kontext des Gesamtmodells und geben Sie eine inferenzstatistische Begründung ($\alpha = 0.05$).

**Wichtige Hinweise:**

- *Formulieren Sie alle Nullhypothesen sowohl formal als auch inhaltlich.*
- *Benutzen Sie im folgenden die unten angegebene Kofaktorenmatrix und Determinante von **X'X.***
- *Runden Sie Ihre Ergebnisse (nicht zu früh) auf drei Nachkommastellen genau.*

$$\mathbf{K}_{X'X} = \begin{bmatrix} 16171 & -5 & -2431 \\ -5 & 260 & -297 \\ -2431 & -297 & 738 \end{bmatrix} \qquad |\mathbf{X'X}| = 11519$$

*Aufgabe II:*

Die Polizei hat ein neues Verhaltenstraining für Polizeibeamte entwickelt. Die Inhalte des einwöchigen Kurses richten sich auf folgende Bereiche: Kommunikation, Konfliktverhalten, Stressbewältigung, Taktik/Eigensicherung und Interventionstechnik. Ziel des Trainings ist es, dass die Polizisten lernen, auch in bedrohlichen Situationen nicht unter Stress zu geraten, sondern angemessen zu reagieren.

Zur Überprüfung der Wirksamkeit des Trainings wurden Polizisten herangezogen, die entweder erstmalig oder bereits dreimal an dem Training teilgenommen haben, sowie zur Kontrolle Polizisten, die noch kein Training besucht haben. Dabei wurde das Verhalten der Polizisten in Rollenspielen beobachtet und auf einer Skala von 0-10 dahingehend bewertet, ob die Inhalte des Trainings erfolgreich in typischen Situationen angewendet werden können, in denen entweder das Leben der Polizisten selbst, oder das Leben anderer Personen bedroht ist. Zum Vergleich dienen Situationen, in denen keine Bedrohung enthalten ist.

Die Werte der n = 36 Polizisten sind in der Tabelle dargestellt (hohe Werte stehen für angemessenes Verhalten ohne Stress, niedrige Werte für unangemessenes Verhalten mit Stress).

| | | Faktor A (Training) | | |
|---|---|---|---|---|
| | | erstmalig | dreimalig | kein Training |
| Faktor B (Bedrohung) | des Polizisten selbst | 6,4,4,6 $\boxed{1}$ | 7,5,6,6 $\boxed{4}$ | 0,2,4,4 $\boxed{7}$ |
| | einer anderen Person | 4,5,6,7 $\boxed{2}$ | 6,8,7,7 $\boxed{5}$ | 2,5,4,3 $\boxed{8}$ |
| | keine | 7,5,9,7 $\boxed{3}$ | 9,8,6,9 $\boxed{6}$ | 5,3,7,5 $\boxed{9}$ |

- **Formulieren Sie im folgenden alle Hypothesen sowohl formal als auch inhaltlich!**
- **Runden Sie nicht zu früh auf 3 Stellen hinter dem Komma!**

Fragen:

a. Gibt es einen Haupteffekt des Faktors A (Training)? ($\alpha = 0.05$)
b. Gibt es einen Haupteffekt des Faktors B (Bedrohung)? ($\alpha = 0.05$)
c. Gibt es eine Wechselwirkung zwischen den beiden Faktoren? ($\alpha = 0.05$)
d. Sind Polizeibeamte mit erstmaligem Training besser als solche ohne Training?
   ($\alpha = 0.05$)
e. In welchen Grenzen würde mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% der Wert für einen Polizisten ohne Training liegen, der sich in einer für ihn selbst bedrohlichen Situation befindet?

*Aufgabe III:*

Ein Kommilitone braucht Ihre Hilfe! Er muss dringend seine Untersuchungsergebnisse abgeben, hat allerdings Kaffee über die Arbeit gekippt, so dass das Blatt mit der Tafel der Varianzanalyse nicht mehr lesbar ist. Ihr Kommilitone hat keine Möglichkeit mehr, nach Hause zu fahren, um die Daten noch mal zu beschaffen, er kann sich aber zum Glück noch an einige Details der Untersuchung erinnern.

An der Untersuchung nahmen 140 Personen teil und es wurde eine vollständig gekreuzte zweifaktorielle Varianzanalyse durchgeführt, wobei jeder Faktorstufenkombination 7 Probanden zugeteilt wurden. Ihr Kommilitone erinnert sich außerdem, dass $Q_{hA}= 50$ war und die determinierte Quadratsumme 305. Zur Überprüfung des Haupteffekts B wurden 3 Kontraste formuliert, der F-Wert für Faktor A war 18,75 und betrug das 1,5 fache des F-Wertes von Faktor B.

Helfen Sie Ihrem Kommilitonen, die vollständige Tafel der Varianzanalyse wieder herzustellen.

Begründen Sie bitte die einzelnen Schritte!

### 7.1 Musterlösungen

*Aufgabe I:*

**a)** $R^2 = \frac{Q_d}{Q_t}$ $\quad Q_t = \mathbf{y'y} - n\bar{y}^2$ $\quad Q_d = \mathbf{b'X'y} - n\bar{y}^2$ $\quad Q_e = Q_t - Q_d$

$$b = (\mathbf{X'X})^{-1} \cdot \mathbf{X'y}$$

$$\mathbf{X'y} = \begin{bmatrix} 104 \\ 856 \\ 703 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \frac{1}{11519} \cdot \begin{bmatrix} 16171 & -5 & -2431 \\ -5 & 260 & -297 \\ -2431 & -297 & 738 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 104 \\ 856 \\ 703 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2{,}734 \\ 1{,}150 \\ 1{,}021 \end{bmatrix}$$

$Q_d = 216{,}049$

$Q_t = 240{,}222$

$Q_e = 24{,}173$

Der Zusammenhang zwischen Prädiktoren und der Leistung ergibt sich also als:

$R^2 = \frac{216{,}049}{240{,}222} = 0{,}899$, die Prädiktoren erklären also ungefähr 90% der Kriteriumsvarianz.

**b)** Zur Berechung des Konfidenzintervalls benötigt man den Standardmessfehler $\hat{\sigma}_e = \sqrt{\frac{Q_e}{df_e}}$ ;

eingesetzt: $= \sqrt{\frac{24{,}173}{6}} = 2{,}007$ , wobei $df_e$ = n - Anzahl der Spalten von **X,** also 9 -3 = 6.

Die Breite des Konfidenzintervalls berechnet sich als:

$2 \cdot t_{\alpha/2,\, dfe} \cdot \hat{\sigma}_e$ ; mit $t_{(0,025;\ 6)} = 2{,}447$.

Also: $2 \cdot 2{,}447 \cdot 2{,}007 = 9{,}822$ .

**c)** In der Nullhypothese geht man davon aus, dass keinerlei Zusammenhang besteht zwischen den Leistungen der Mitarbeiter und den Prädiktoren Testleistung und Interview (globale $H_0$).

$H_0$: $\beta_1 = 0$ und $\beta_2 = 0$

Damit verbunden ist der folgende F-Bruch ($R_D^2$ entspricht bei der globalen Nullhypothese $R_U^2$):

$$F = \frac{R_D^2/df_h}{(1 - R_U^2)/df_e} = \frac{0{,}899/2}{0{,}101/6} = 26{,}703$$

Bei einem kritischen F-Wert von 10,92 kann also mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.01$ davon ausgegangen werden, dass auch in der Population ein Zusammenhang zwischen den Einstellungskriterien und dem Kriterium der Leistung besteht.

**d)** $R_U^2 = r_{x1,y}^2 = 0{,}832$

Das Testergebnis alleine kann 83,2 % der Varianz des Kriteriums erklären.

Die Nullhypothese besagt nun, dass es in der Population keinen Zusammenhang zwischen dem Testergebnis und der späteren Leistung gibt.

$H_0$: $\beta_1 = 0$.

Der F-Bruch für dieses uneingeschränkte Modell mit nur **einer** Prädiktorvariable lautet wegen $R_D^2 = R_U^2$:

$$F = \frac{R_D^2/df_h}{(1-R_U^2)/df_e} = \frac{0{,}832/1}{0{,}168/7} = 34{,}667 > F_{krit} = 5{,}59 \rightarrow H_1$$

Mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von < $\alpha = 0{,}05$ kann man davon ausgehen, dass auch in der Population ein Zusammenhang zwischen den Ergebnissen im psychologischen Test und der späteren Arbeitsleistung besteht.

**e)**

Überprüfung von $x_2$ zusätzlich zu $x_1$:

Die Nullhypothese besagt, dass der Verzicht auf $x_2$ (Interview) zu keiner signifikanten Verschlechterung der Vorhersage der Leistung führt.

$H_0$: $\beta_2 = 0$ und $\beta_1$ = beliebig

$R_E^2 = r_{x1,y}^2 = 0{,}832$

$R_D^2 = 0{,}899 - 0{,}832 = 0{,}067$

$df_h = 1$; $df_e = 9 - 3 = 6$

$$F = \frac{0{,}067/1}{0{,}101/6} = 3{,}98$$

Bei einem kritischen F-Wert von 5,99 kann man nicht davon ausgehen, dass das Interview zusätzlich zum Test eine genauere Beurteilung der späteren Leistung erbringt.

*Aufgabe II:*

**a)**

In der Nullhypothese wird behauptet, dass sich die Mittelwerte der Variablen „Angemessenheit des Verhaltens“ in der Population auf den Stufen des Faktors Training nicht unterscheiden.

1. Kontrast:

$H_{0A1}$: $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = \dfrac{\mu_4 + \mu_5 + \mu_6 + \mu_7 + \mu_8 + \mu_9}{2}$

2. Kontrast:

$H_{0A2}$: $\mu_4 + \mu_5 + \mu_6 = \mu_7 + \mu_8 + \mu_9$

$$\text{ALH: } \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \\ \mu_5 \\ \mu_6 \\ \mu_7 \\ \mu_8 \\ \mu_9 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{C} \quad \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\delta}$$

Zur Bestimmung der Hypothesenquadratsumme:

$$Q_h = n_z(\mathbf{Cb})'(\mathbf{CC'})^{-1}(\mathbf{Cb})$$

$$\mathbf{Cb} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 5{,}5 \\ 7 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 2{,}5 \\ 3{,}5 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{CC'} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & -1 \\ -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$Q_{hA} = 4 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{18} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \end{bmatrix} = 68{,}667$$

$Q_e = Q_t - Q_d$

$Q_t = \mathbf{y'y} - n\bar{y}^2 \rightarrow 1238\text{-}36 \cdot (5{,}5)^2 = 149$

$Q_d = n_z\mathbf{b'b} - n\bar{y}^2 \rightarrow 4*296{,}75 - 1089 = 98$

$Q_e = 149 - 98 = 51$

$$F = \frac{68{,}667/2}{51/27} = 18{,}177 > F_{krit} = 3{,}35$$

Mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit < $\alpha = 0.05$ kann gesagt werden, dass die Stufen des Faktors Training auch in der Population zu unterschiedlich angemessenem Verhalten führen.

**b)**

In der Nullhypothese wird behauptet, dass sich die Mittelwerte der Variablen „Angemessenes Verhalten“ in der Population auf den Stufen des Faktors Bedrohung nicht unterscheiden.

1. Kontrast:

$H_{0B1}$: $\mu_1 + \mu_4 + \mu_7 = \frac{\mu_2 + \mu_5 + \mu_8 + \mu_3 + \mu_6 + \mu_9}{2}$

2. Kontrast:

$H_{0B2}$: $\mu_2 + \mu_5 + \mu_8 = \mu_3 + \mu_6 + \mu_9$

$$\text{ALH: } \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \\ \mu_5 \\ \mu_6 \\ \mu_7 \\ \mu_8 \\ \mu_9 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{C} \quad \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\delta}$$

Zur Bestimmung der Hypothesenquadratsumme:

$$Q_h = n_z(\mathbf{Cb})'(\mathbf{CC}')^{-1}(\mathbf{Cb})$$

$$\mathbf{Cb} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 5{,}5 \\ 7 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 2{,}5 \\ 3{,}5 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{CC}' = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$Q_{hB} = 4 \cdot \begin{bmatrix} -9 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{18} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -9 \\ -4 \end{bmatrix} = 28{,}667$$

$$F = \frac{28{,}667/2}{51/27} = 7{,}588 > F_{krit}\ 3{,}35$$

Mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit < $\alpha$ = 0.05 kann gesagt werden, dass die Stufen des Faktors Bedrohung auch in der Population zu unterschiedlich angemessenem Verhalten führen.

**c)**

In der Nullhypothese wird behauptet, daß in der Population kein Wechselwirkungseffekt vorliegt. Das bedeutet, die Wirkung des Faktors A ("Training") ist auf den drei Stufen des Faktors B ("Bedrohung") gleich groß.

1. Kontrast: $\mu_1 - \frac{\mu_2 + \mu_3}{2} = \frac{\left(\mu_4 - \frac{\mu_5 + \mu_6}{2} + \mu_7 - \frac{\mu_8 + \mu_9}{2}\right)}{2}$

$$4\mu_1 - 2\,\mu_2 - 2\,\mu_3 - 2\,\mu_4 + \mu_5 + \mu_6 - 2\,\mu_7 + \mu_8 + \mu_9 = 0$$

2. Kontrast: $\mu_2 - \mu_3 = \left(\frac{(\mu_5 - \mu_6) + (\mu_8 - \mu_9)}{2}\right)$

$$2\,\mu_2 - 2\,\mu_3 - \mu_5 + \mu_6 - \mu_8 + \mu_9 = 0$$

3. Kontrast: $\mu_4 - \frac{(\mu_5 + \mu_6)}{2} = \mu_7 - \frac{(\mu_8 + \mu_9)}{2}$

$$2\,\mu_4 - \mu_5 - \mu_6 - 2\,\mu_7 + \mu_8 + \mu_9 = 0$$

4. Kontrast: $\mu_5 - \mu_6 = \mu_8 - \mu_9$

$$\mu_5 - \mu_6 - \mu_8 + \mu_9 = 0$$

ALH: $$\begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 & -2 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \\ \mu_5 \\ \mu_6 \\ \mu_7 \\ \mu_8 \\ \mu_9 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{C} \quad \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\delta}$$

Zur Bestimmung der Hypothesenquadratsumme:

$$Q_h = n_z(\mathbf{Cb})'(\mathbf{CC}')^{-1}(\mathbf{Cb})$$

$$\mathbf{Cb}: \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 & -2 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 5{,}5 \\ 7 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 2{,}5 \\ 3{,}5 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}5 \\ -0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{CC}: \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 & -2 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$Q_{hAxB} = 4 \cdot \begin{bmatrix} 1{,}5 & -0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{36} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1{,}5 \\ -0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} = 0{,}667$$

$$F = \frac{0{,}667/4}{51/27} = 0{,}088 < F_{krit}\ 2{,}73$$

Aufgrund des kleinen empirschen F-Wertes wird die Nullhypothese beibehalten und es wird davon ausgegangen, daß in der Population kein Wechselwirkungseffekt zwischen den beiden Faktoren vorliegt.

**d)**

Die Polizisten ohne Training unterscheiden sich hinsichtlich der Angemessenheit ihres Verhaltens nicht von den Polizisten mit einmaligem Training.

$$H_0: \quad \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = \mu_7 + \mu_8 + \mu_9 \qquad \rightarrow \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 - \mu_7 - \mu_8 - \mu_9 = 0$$

ALH:

$$\begin{array}{ccccccccc|c} & & & & & & & & & \mu_1 \\ & & & & & & & & & \mu_2 \\ & & & & & & & & & \mu_3 \\ & & & & & & & & & \mu_4 \\ & & & & & & & & & \mu_5 \\ & & & & & & & & & \mu_6 \\ & & & & & & & & & \mu_7 \\ & & & & & & & & & \mu_8 \\ & & & & & & & & & \mu_9 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}$$

**Cb**:

$$\begin{array}{ccccccccc|c} & & & & & & & & & 5 \\ & & & & & & & & & 5{,}5 \\ & & & & & & & & & 7 \\ & & & & & & & & & 6 \\ & & & & & & & & & 7 \\ & & & & & & & & & 8 \\ & & & & & & & & & 2{,}5 \\ & & & & & & & & & 3{,}5 \\ & & & & & & & & & 5 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 6{,}5 \end{array}$$

**CC'**:

$$\begin{array}{ccccccccc|c} & & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & & -1 \\ & & & & & & & & & -1 \\ & & & & & & & & & -1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 6 \end{array}$$

$$Q_h = 4 \cdot 6{,}5 \cdot \frac{1}{6} \cdot 6{,}5 = 28{,}167 \qquad F = \frac{28{,}167/1}{51/27} = 14{,}912 > F_{krit}\ 4{,}21 \rightarrow H_1$$

Mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von < $\alpha = 0.05$ kann behauptet werden, dass ein einmaliges Training zu angemessenerem Verhalten führt als kein Training (**Interpretationsrichtung gemäß Dateninspektion**).

**e)**

Gefragt ist die Punktschätzung für Probanden aus der Bedingungskombination von Zelle 7.

In jeder Zelle fungiert der Zellenmittelwert als bester Schätzwert. Da für Zelle 7 der Mittelwert 2,5 beträgt, lautet die gesuchte Punktschätzung $\hat{y}_i$ = 2,5.

Für die Intervallschätzung benötigt man den Standardschätzfehler:

$$\hat{\sigma}_e = \sqrt{\frac{Q_e}{df_e}} = \sqrt{\frac{51}{27}} = 1{,}374 \text{ sowie } t_{\alpha/2;dfe} = 2{,}052$$

$$2{,}5 - 2{,}052 * 1{,}374 \leq y_i \leq 2{,}5 + 2{,}052 * 1{,}374$$

$$-0{,}319 \leq y_i \leq 5{,}319$$

*Aufgabe III:*

Gezeigt ist die vollständige Tafel der Varianzanalyse (**N = 140, $n_z$ = 7**):

| ***Quelle der Varianz*** | ***Quadratsumme*** | ***df*** | ***F*** | ***$R^2$*** |
|---|---|---|---|---|
| Faktor A | $Q_{hA}$ = **50** | $df_{hA} = 4$ | $F_A$ = **18,75** | $R^2_A = 0{,}1299$ |
| Faktor B | $Q_{hB} = 25$ | $df_{hB}$ = **3** | $F_B = 12{,}5$ | $R^2_B = 0{,}0649$ |
| Wechselwirkung AxB | $Q_{hAxB} = 230$ | $df_{hAxB} = 12$ | $F_{AxB} = 28{,}75$ | $R^2_{AxB} = 0{,}5974$ |
| Global | $Q_h = Q_D$ = **305** | $df_{h\ global} = 19$ | $F_{global} = 24{,}079$ | $R^2_{global} = 0{,}7922$ |
| Fehler | $Q_e = 80$ | $df_e = 120$ | - | - |
| Total | $Q_t = 385$ | $df_t = 139$ | - | - |

Lösung:

1. Vollständig gekreuzt mit 7 Probanden pro Zelle → 20 Zellen:
2. $df_e$ = N – Anzahl der Zellen des Designs: 140 – 20 = 120
3. $df_t = N - 1 = 139$
4. $df_{h\ global}$ = Anzahl der Parameterrestriktionen = 19 = $df_t - df_e$ = 19
5. $df_{hA} = 3 + x + (3x) = 19$ → x = 4
6. $df_{hAxB} = 3 \times 4 = 12$

7. $Q_e = \frac{Q_{hA} / df_{hA}}{F/df_e} = \frac{50/4}{18{,}75/120} = 80$

8. $Q_t = Q_d + Q_e = 305 + 80 = 385$

9. $Q_{hB}$: $F = \frac{Q_{hB} / df_{hB}}{Q_e / df_e} = 12{,}5 = \frac{x/3}{80/120} = \frac{x}{3} \cdot \frac{120}{80} \rightarrow x = 25$

10. $Q_{hAxB} = Q_d - Q_{hA} - Q_{hB} = 305\text{-}25\text{-}50 = 230$

11. F von Faktor B: 18,75/3*2 = 12,5

12. $F_{AxB} = \frac{Q_{hAxB}/df_{hAxB}}{Q_e/df_e} = \frac{230/12}{80/120} = 28{,}75$

13. $F_{global} = \frac{Q_d/df_{hglobal}}{Q_e/df_e} = \frac{305/19}{80/120} = 24{,}079$

14. $R^2_A = \frac{Q_{hA}}{Q_t} = \frac{50}{385} = 0{,}1299$

15. $R^2_B = \frac{Q_{hB}}{Q_t} = \frac{25}{385} = 0{,}0649$

16. $R^2_{AxB} = \frac{Q_{hAxB}}{Q_t} = \frac{230}{385} = 0{,}5974$

17. $R^2_{global} = \frac{Q_d}{Q_t} = \frac{305}{385} = 0{,}7922$

**8. Literatur**

Moosbrugger, H. (1994*). Lineare Modelle*. *Regressions- und Varianzanalysen*. Bern: Huber.

Moosbrugger, H. (2000). *Grundbegriffe der Matrixalgebra* unter Mitarbeit von U. Rabl. Frankfurt am Main: Arbeiten aus dem Institut für Psychologie der J.W. Goethe-Universität, Heft 1, 2000.

Moosbrugger, H. & Zwingmann, C. (1998). *Statistik-Arbeitsbuch. Aufgabensammlung und vollständige Lösungen zu Regressions- und Varianzanalysen*, Frankfurt am Main: Deutsch.

**Weiterführende Literatur:**

Werner, J. (1997). *Lineare Statistik – Allgemeines Lineares Modell*. Weinheim: Psychologie Verlags Union.