Kann Fermats so genannter letzter Satz auf Grund einfacher Überlegungen verstanden werden?

Martin Trömel

Institut für Anorganische und Analytische Chemie

Max von Laue-Strasse 7, D-60438 Frankfurt am Main

troemel@chemie.uni-frankfurt.de

Summary: It is considered whether Fermat's so called Last Theorem can be understood by substituting variables by polynomials and discussing their properties. The same substitution yields a survey of the Pythagorean Triples.

Schlüsselwörter: Fermats letzter Satz, Pythagoreische Tripel.

Einleitung

Pierre de Fermat (1601-1665) formulierte in seinem Exemplar einer lateinischen Übersetzung der „Arithmetica" des Diophantos (3. Jh. n.Chr.?), die 1621 im Druck erschienen war, als Randnotizen achtundvierzig mathematische Theoreme ohne Beweis. Sein Sohn veröffentliche diese Notizen 1670 in einer Ausgabe dieses Werkes, in das die Randbemerkungen eingetragen waren. Spätere Mathematiker bewiesen die Richtigkeit dieser Theoreme[1]. Eins davon, dessen Beweis Andrew Wiles erst 1994 führen konnte, wird deshalb als „Fermats letzter Satz" bezeichnet. Tietze[2] behandelt es unter der Bezeichnung „Das große Fermatsche Problem". Es lautet in der Übersetzung von Cantor[3]:

> Es ist ganz unmöglich, einen Kubus in zwei Kuben, ein Biquadrat in zwei Biquadrate und allgemein irgend eine Potenz ausser dem Quadrate in zwei Potenzen von demselben Exponenten zu zerfällen. Hierfür habe ich einen wahrhaft wunderbaren Beweis entdeckt, aber der Rand ist zu schmal, ihn zu fassen[4].

Lateinischer Text:

> Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos & generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est diuidere cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet[5].

Der Beweis dieses Satzes durch Andrew Wiles (1994, veröffentlicht 1995) auf Grund neuerer Erkenntnisse der Zahlentheorie[6] wirft ein wissenschaftshistorisches Problem auf. Wie gelangte Fermat angesichts des Entwicklungsstandes der Mathematik im 17. Jahrhundert zu seinem Beweis? Die Frage lässt sich nicht durch Rekonstruktion von Fermats Beweisführung beantworten, „da alle uns erhaltenen und in Frage kommenden Briefe und Schriften aus dem Nachlaß [Fermats] längst auf das eingehendste durchforscht sind“[7]. Zudem haben sich alle achtundvierzig Randbemerkungen Fermats später als richtig erwiesen. So muss auch angenommen werden, dass ihm Beweise dieser Sätze bekannt waren. Cantor schrieb dazu: „... sicher ist, dass Fermat sie besessen hat oder besessen zu haben glaubte“[4] und sah sich an einem anderen Beispiel in der Überzeugung bestärkt, „dass Fermat, ... wo er von thatsächlich geführten Beweisen sprach, auch wirklich solche, die ihm tadellos erschienen, besessen haben muss“[8]. Daher stellt sich, nachdem das mathematische Problem gelöst ist, um so dringlicher die Frage, wie es möglich war, mit den mathematischen Mitteln des 17. Jahrhunderts zu einem Beweis des Satzes zu gelangen.

Überlegungen zu einem einfachen Beweis für Fermats letzten Satz

Die Gleichung, deren Lösung die Zerlegung einer Potenz in zwei Potenzen mit gleichen Exponenten darstellt, ist mit natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ... für x, y, z und n

(1) $$z^n = x^n + y^n$$

Sie hat mit n = 1 Lösungen für alle z, die grösser sind als 1. Ihre Lösungen mit n = 2, die pythagoreischen Zahlentripel (x,y,z), sind die ganzzahligen Seitenlängen x, y und z rechtwinkliger Dreiecke entsprechend dem Satz des Pythagoras.

Werden die Variablen x und y durch $x = z - u$ und $y = z - v$ ersetzt, so ergibt sich als Bedingungsgleichung für die ganzzahlige Zerlegung

(2) $$z^n = (z - u)^n + (z - v)^n$$

Die ganzen rationalen Funktionen $f(z,u) = (z - u)^n$ und $f(z,v) = (z - v)^n$ sind Polynome n-ten Grades der Form

(3) $$f(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot z^i$$

Die Bedingungsgleichung erfordert

(4) $$(z - u)^n = z^n - (z - v)^n = g(z,v)$$

und wegen der Vertauschbarkeit von x und y in Gl. (1) zugleich

(5) $$(z - v)^n = z^n - (z - u)^n = g(z,u)$$

In der Polynomdarstellung der ganzen rationalen Funktionen g(z,u) und g(z,v) sind die Koeffizienten a_n gleich Null, und für n > 2 ergeben sich Polynome vom Grad n – 1. Sofern die Polynomdarstellung ganzer rationaler Funktionen eindeutig ist, also jede ganze rationale

Funktion nur durch genau ein Polynom dargestellt werden kann[9,10], sind f(z,u) und f(z,v) als Polynome n-ten Grades mit g(z,v) und g(z,u) als Polynomen des Grades n – 1 unverträglich:

(6) $f(z,u) \neq g(z,v)$

(7) $f(z,v) \neq g(z,u)$

Da z, u und v ganzzahlig definiert sind, können in Gl. (6) und (7) neben z nur u oder v, jedoch nicht beide ganzzahlig sein. Entsprechendes gilt für x und y in Gl. (1).

Anmerkungen zu den pythagoreischen Zahlentripeln

Im Falle n = 2 sind g(z,u) und g(z,v) keine Polynome, sondern lineare Funktionen von z.
Die Gleichung

(2) $z^2 = (z - u)^2 + (z - v)^2$

lässt sich dann umformen in

(8) $z^2 - 2 \cdot z \cdot (u + v) + (u^2 + v^2) = 0$

Durch Addition von $2 \cdot u \cdot v$ auf beiden Seiten ergibt sich die quadratische Gleichung

(9) $(z - u - v)^2 = 2 \cdot u \cdot v$

$2 \cdot u \cdot v$ ist eine gerade Quadratzahl. Mit $w = \sqrt{(2 \cdot u \cdot v)}$, $x = v + w$, $y = u + w$ und $z = u + v + w$ führt jede Zerlegung des Produkts $u \cdot v$ in Faktoren (einschliesslich des Faktors 1) auf ein pythagoreisches Tripel (x,y,z):

2·u·v	u·v	u	>	v	w	x	y	z
4	2	2		1	2	3	4	5
16	8	8		1	4	5	12	13
16	8	4		2	4	6	8	10
36	18	18		1	6	7	24	25
36	18	9		2	6	8	15	17
36	18	6		3	6	9	12	15

usw.

Ermöglicht die lineare Abhängigkeit der g(z,u) und g(z,v) von z die ganzzahlige Zerlegung, so sollten Flächenzahlen allgemein zerlegbar sein, und die Quadratzahlen $q(z) = z^2$ wären lediglich ein Sonderfall. In der Tat sind Dreieckszahlen $t(z) = (z^2 + z)/2$ und Fünfeckszahlen $p(z) = (3 \cdot z^2 - z)/2$ ganzzahlig zerlegbar. Die kleinsten quasi-pythagoreischen Tripel sind bei den Dreieckszahlen (5,6,8), entsprechend 15 + 21 = 36, und bei den Fünfeckszahlen (4,7,8), entsprechend 22 + 70 = 92.

Diskussion

Wesentliche Punkte der obigen Überlegungen sind die Darstellung ganzer rationaler (auch ganzrationale genannter[10]) Funktionen durch Polynome sowie die Eindeutigkeit dieser Darstellung. Sollte Fermats Beweis ähnlich geführt worden sein, so könnte die Bezeichnung „wahrhaft wunderbar" sich auf die Einfachheit und die eigenartige logische Struktur des Schlusses auf die Nichtzerlegbarkeit dritter oder höherer Potenzen beziehen, da die eine Bedingungsgleichung auf zwei Gleichungen führt, welche Ganzzahligkeit nur für x oder y zulassen.

Literatur

1 Singh, Simon: Fermats letzter Satz. Die abenteuerliche Geschichte eines mathematischen Rätsels. dtv, München 2000.

2 Tietze, Heinrich: Gelöste und ungelöste mathematische Probleme aus alter und neuer Zeit, Band II. Verlag C.H. Beck, München 1959.

3 Cantor, Moritz: Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Band II. Verlag von B.G. Teubner, Leipzig 1913.

4 Cantor, S. 774.

5 Faksimile-Wiedergabe: Singh, Abb. 6, S. 90.

6 Singh, Kap. 6, S. 237 ff.

7 Tietze, S. 113 f.; Literatur ebenda, S. 248, Anmerkung 15. Nach Singh, S. 108 ff., führte Leonhard Euler 1753 den Beweis für n = 3 auf Grund von Fermats Notizen. Die dabei angewandte Methode des unendlichen Abstiegs findet sich auch in dem Fragment einer Schrift von Fermat; vgl. Cantor, S. 778 f.

8 Cantor, S. 778.

9 Bronstein, Ilja Nikolajewitsch und Semendjajew, Konstantin Adolfowitsch: Taschenbuch der Mathematik, 22. Auflage, Harri Deutsch, Frankfurt am Main und Thun 1979, S. 168.

10 Gellert, W., Küstner, H., Hellwich, M. und Kästner, H. (Hrsg.): Großes Handbuch der Mathematik. Buch und Zeit Verlagsgesellschaft, Köln 1969, S. 139 f.