

Einfluss schwerer hadronischer Zustände
auf das QCD-Phasendiagramm
und die Ausfrierbedingungen
in einem hadronischen chiralen Modell

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften

vorgelegt beim Fachbereich Physik
der Johann Wolfgang Goethe-Universität
in Frankfurt am Main

von
Gebhard Zeeb
aus Schorndorf (Württemberg)

Frankfurt am Main 2006
(D 30)

Vom Fachbereich Physik der Johann Wolfgang Goethe-Universität
als Dissertation angenommen.

Dekan: Prof. Dr. Wolf Aßmus

Gutachter: Prof. Dr. Stefan W. Schramm
und Prof. Dr. Horst Stöcker

Datum der Disputation: 20.10.2006

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Grundlagen	11
2.1	Chirale Symmetrie	12
2.1.1	Explizite und spontane Symmetriebrechung	13
2.1.2	Nichtlineare Darstellung der chiralen Symmetrie	17
2.1.3	Übergang von SU(2) zu SU(3)	19
2.2	Skaleninvarianz	21
2.2.1	Skalentransformationen	21
2.2.2	Kriterien für Skaleninvarianz und -brechung	21
2.2.3	Energie-Impuls-Tensor und Spur-Anomalie	22
2.2.4	Dilaton-Feld als Gluonkondensat	24
3	Das Chirale Modell	27
3.1	Der Chirale Lagrangean	29
3.2	Baryon-Meson-Wechselwirkung	31
3.2.1	Skalarkopplung und effektive Baryonenmassen	32
3.2.2	Vektorkopplung und effektive chemische Potentiale	34
3.3	Großkanonisches Potential	36
3.3.1	Feldgleichungen	37
3.3.2	Thermodynamische Größen	39
3.3.3	Effektive Massen mit erweiterten Dekuplett-Kopplungen	40
4	Phaseneigenschaften des Modells	43
4.1	Heiße Hadronische Materie	43
4.2	Phasendiagramme	50
4.2.1	Phasendiagramme analog Gitter-QCD	51
4.2.2	Thermodynamische Größen: Energiedichte	56
4.2.3	Phasendiagramme mit Phasenübergang bei $\mu = 0$	61
4.3	Realistisches Phasendiagramm mit Test-Resonanz	64

5	Teilchenzahlverhältnisse von AGS bis RHIC	79
5.1	Beschreibung experimenteller Daten	85
5.1.1	Modellierung von Teilchenzahlverhältnissen	85
5.1.2	Teilchendichten aus dem chiralen Modell	87
5.1.3	Verwendete Parametrisierungen des Modells	90
5.1.4	Verwendete experimentelle Daten	93
5.2	Exemplarische Studien	97
5.2.1	Teilchenzahlverhältnisse bei 40 A GeV	97
5.2.2	Abgleich thermischer Modelle	100
5.2.3	Einfluss der Auswahl von Teilchenzahlverhältnissen . . .	107
5.3	Ergebnisse von AGS bis RHIC	111
5.3.1	Ausfrierkurven	111
5.3.2	Effektive Massen und chemische Potentiale	127
5.3.3	Untersuchung vorgeschlagener Ausfrierkriterien	132
5.4	Isentropen und kritischer Endpunkt	139
6	Restauration der Skaleninvarianz	153
6.1	Dynamisches Gluonkondensat	154
6.2	Dilaton-Kopplung der Resonanzen	156
6.3	Quadratische Dilaton-Kopplung	169
6.4	Subtraktive Beiträge zu dynamisch generierten Massen	177
7	Zusammenfassung	179
	Literaturverzeichnis	187

Abbildungsverzeichnis

2.1	Potential ohne und mit spontaner Symmetriebrechung.	15
4.1	Temperaturabhängigkeit der chiralen Kondensate.	48
4.2	Thermodynamisches Potential vs. σ zu verschiedenen T	49
4.3	Phasendiagramm der QCD (aus Ref. [16]).	50
4.4	Phasendiagramme zu verschiedenen Vektorkopplungen.	52
4.5	Parameterraum $m_{\text{Dec}}-r_V$ zum Phasenübergangsverhalten bei $T = 0$ und endlichem μ	54
4.6	Phasendiagramm mit stabiler Kernmaterie.	55
4.7	Energiedichte e/T^4 als Funktion der Temperatur T	59
4.8	Energiedichte e/T^4 vs. T im Vergleich zum QGP.	60
4.9	Phasendiagramme mit Phasenübergang bei $\mu = 0$	61
4.10	Skalares Kondensat σ vs. Temperatur zu verschiedenen chemi- schen Potentialen bei starker skalarer und vektorieller Kopplung.	63
4.11	Kritische Temperatur in Abhängigkeit vom expliziten Massen- term der Test-Resonanz.	67
4.12	Phasendiagramm mit Endpunkt entsprechend zu lQCD.	68
4.13	Latente Wärme und Sprung der skalaren Dichten entlang der Phasenübergangslinie.	75
4.14	Anfangsbedingungen aus dem Überlapp-Modell im $e-\rho_B$ - Phasendiagramm.	76
4.15	Isentropen zu Anfangsbedingungen im $e-\rho_B$ -Diagramm.	77
4.16	Isentropen im $T-\mu_q$ -Phasendiagramm.	78
5.1	Darstellung der verwendeten Modell-Parametrisierungen.	96
5.2	Beispiel für Teilchenzahlverhältnisse (SPS, 40 A GeV).	98
5.3	Teilchenzahlverhältnisse in relativer Darstellung.	99
5.4	Konturlinien zur Beschreibungsqualität (SPS, 40 A GeV).	104
5.5	Ableich thermischer Modelle bei $E_{\text{Lab}}/A = 158$ GeV (SPS).	105
5.6	Verschiedene Ausfrierkriterien im μ_B-T -Diagramm (aus Ref. [151]), ergänzt um Punkte des Modells IG _{FFM}	106

5.7	Ausfrierkurven und Beschreibungsqualität für Zustandsgleichungen ohne Phasenübergang bei höheren Dichten.	112
5.8	Ausfrierkurven und Beschreibungsqualität für Zustandsgleichungen mit Phasendiagramm ähnlich zu IQCD-Vorhersagen.	113
5.9	Ausfrierparameter aller Zustandsgleichungen.	116
5.10	Anregungsfunktion der Beschreibungsqualität für homogenes und inhomogenes Ausfrieren (aus Ref. [137]).	119
5.11	Anregungsfunktionen der Ausfrierparameter für Zustandsgleichungen ohne Phasenübergang bei hohen Dichten.	125
5.12	Anregungsfunktionen der Ausfrierparameter für Zustandsgleichungen mit Phasendiagramm ähnlich zu IQCD.	126
5.13	Anregungsfunktionen für die effektiven Massen.	130
5.14	Anregungsfunktionen für das effektive chemische Potential.	131
5.15	Ausfrierkriterium konstante Energie pro Hadron.	133
5.16	Kriterien Brutto-Baryondichte und normierte Entropie.	137
5.17	Konstante effektive Hadronenmassen als charakteristisches Ausfrierkriterium für das chirale Modell.	138
5.18	Isentropen zu den Ausfrierpunkten in der T - μ -Ebene für Parametersätze ohne und mit geringen Medium-Effekten.	148
5.19	Isentropen zu den Ausfrierpunkten in der T - μ -Ebene für Parametersätze ohne Phasenübergang bei hohen Dichten.	149
5.20	Isentropen zu den Ausfrierpunkten in der T - μ -Ebene für Parametersätze mit Phasenübergang bei hohen Dichten.	150
5.21	Isentropen zu den Ausfrierpunkten in der T - μ -Ebene für den Parametersatz mit extrem steil abfallender kritischer Linie.	151
5.22	Vergleich der Isentropen mit und ohne vervollständigtem hadronischen Massenspektrum.	152
6.1	Temperaturabhängigkeit der skalaren Kondensate mit und ohne dynamischem Gluonkondensat bei $\mu = 0$	154
6.2	Dichteabhängigkeit der Kondensate mit und ohne dynamischem Gluonkondensat in Abhängigkeit vom chemischen Potential.	156
6.3	Kondensate vs. Temperatur mit und ohne Dilaton-Kopplung.	159
6.4	Temperaturabhängigkeit des Drucks und der Kondensate.	160
6.5	Potential Ω/V vs. χ zu verschiedenen Temperaturen.	162
6.6	Potential Ω/V vs. χ mit und ohne Dilaton-Kopplung.	163
6.7	Kondensate vs. Temperatur für verschiedene Kopplungsstärken.	166
6.8	Druck vs. Temperatur für verschiedene χ -Kopplungen.	168
6.9	Vergleich verschieden großer konstanter Massenterme bei Druck vs. Temperatur.	169

6.10 Potential vs. χ für lineare und quadratische χ -Kopplung. . . . 171

6.11 Kondensate vs. Temperatur für lineare und quadratische
Dilaton-Kopplung verschiedener Stärke. 174

6.12 Druck vs. Temperatur für lineare und quadratische Dilaton-
Kopplung verschiedener Stärke. 175

Tabellenverzeichnis

5.1 Einfluss verschiedener Sätze von Teilchenzahlverhältnissen auf die Ausfrierparameter.	110
---	-----

Kapitel 1

Einleitung

Der Gegenstand dieser Arbeit ist die Beschreibung der starken Wechselwirkung anhand des hadronischen chiralen $SU(3)$ Modells. Der Schwerpunkt liegt dabei auf Untersuchungen und Vorhersagen zum Phasenübergangsverhalten. Neben grundsätzlichen Studien hierzu soll das Modell vor allem auch auf das QCD-Phasendiagramm und zur Beschreibung von Teilchenzahlverhältnissen aus Schwerionen-Experimenten angewendet werden.

Dazu wird der Einfluss der *baryonischen Resonanzen* – im Sinne von zusätzlichen schweren baryonischen Zuständen mit großer Entartung – effektiv studiert, indem die Kopplungsparameter zusätzlicher Freiheitsgrade variiert werden und die daraus resultierenden Phasendiagramme analysiert werden.

Im Vergleich mit gegenwärtigen Vorhersagen aus der Gitter-QCD soll ferner überprüft werden, ob es möglich ist, ein entsprechendes Phasendiagramm zu erhalten, und wenn, welche Einschränkungen dadurch an das Modell bzw. an die betreffenden Kopplungsparameter gemacht werden können.

Außerdem soll untersucht werden, wie gut experimentell bestimmte Teilchenzahlverhältnisse mit verschiedenen Sätzen von Kopplungsparametern des Modells beschrieben werden können und ob sich dabei *universelle* Aussagen, die also von den Parametern unabhängig sind, für das Ausfrieren (den *Freeze-out*) bei Schwerionen-Experimenten ableiten lassen.

Die Hoffnung dabei ist, dass das Modell auf diese Weise verbessert wird – also der Physik näher kommt, die modelliert werden sollte – oder umgekehrt, dass Rückschlüsse auf die Eigenschaften von hadronischer Materie gezogen werden können und deren Verständnis verbessert werden kann.

Die starke Wechselwirkung

Die starke Wechselwirkung¹ ist zum einen verantwortlich für den Zusammenhalt der Atomkerne, als *Kernkraft* bindet sie die Protonen und Neutronen – die Kernbausteine oder *Nukleonen* – aneinander. Darüber hinaus ist diese Kraft auch verantwortlich für den Zusammenhalt der Nukleonen selbst, welche ihrerseits aus jeweils drei *Quarks* aufgebaut sind. Quarks sind Elementarteilchen mit Spin $1/2$, sind also Fermionen. Vermittelt wird die starke Kraft durch die *Gluonen* als Austauscheteilchen der Wechselwirkung.

Teilchen, die wie die Nukleonen aus drei Quarks aufgebaut sind, werden *Baryonen* genannt; sie haben halbzahligen Spin. Die Nukleonen sind die leichtesten Baryonen. Teilchen, die hingegen aus nur zwei Quarks – einem Quark und einem Antiquark, welche ebenfalls durch die starke Wechselwirkung zusammengehalten werden – bestehen, werden *Mesonen* genannt; sie haben ganzzahligen Spin. Die leichtesten Mesonen sind die Pi-Mesonen bzw. *Pionen*. Ferner erwartet man auch Bindungszustände von Gluonen, welche keine Quarks enthalten, so genannte *Glueballs*; diese können als exotische Mesonen betrachtet werden. Zusammen bilden Baryonen und Mesonen die *Hadronen*, diejenigen Teilchen, die der starken Wechselwirkung unterliegen. (Etwas sauberer formuliert ist oben lediglich die Anzahl der *Konstituentenquarks* oder *Valenzquarks* angegeben, welche in Baryonen oder Mesonen enthalten sind, denn gemäß der Unschärferelation tragen auch weitere Quark-Antiquark-Paare (*Sea-Quarks*) wesentlich zu den Eigenschaften der Hadronen bei.)

Es gibt eine Vielzahl von Hadronen, die sich nach Quarkinhalt und anderen Quantenzahlen klassifizieren lassen, und mit zunehmender Masse nimmt in der Regel auch die Entartung zu.² Die meisten der schwereren Hadronen haben eine sehr kurze Lebensdauer ($\tau \approx 1 \text{ fm}/c = 0.33 \cdot 10^{-23} \text{ s}$) und gehen durch starken Zerfall in leichtere Hadronen über, sie werden deshalb als hadronische *Resonanzen* bezeichnet. Eine kurze Lebensdauer entspricht nach der Unschärferelation einer großen *Zerfallsbreite*; allerdings wird diese Eigenschaft der Resonanzen in der vorliegenden Arbeit nicht betrachtet.

Man kann nun die Eigenschaften von großen Kernen, wie z.B. eines Bleikerns, auf noch größere Systeme extrapolieren und so (unendliche) *Kernmaterie* konstruieren. Dabei werden Oberflächen-Effekte oder Einflüsse durch

¹Der Nobelpreis in Physik des Jahres 2004 wurde für die 'asymptotische Freiheit' bzw. *asymptotic Freedom* [1, 2, 3, 4] verliehen, welche ein ganz wesentlicher Aspekt der starken Wechselwirkung ist (siehe unten).

²siehe dazu auch die Anmerkung zum Statistischen Bootstrap Modell im Folgenden.

die elektrische Abstoßung der Protonen vernachlässigt, und es verbleiben die *Bulk Properties* (Masseneigenschaften), wie die Dichte, die Bindungsenergie pro Nukleon oder die Kompressibilität. Die Eigenschaften dieser Kernmaterie sind dann ebenfalls durch die starke Wechselwirkung bestimmt, bleiben aber übersichtlicher als die Eigenschaften endlicher Kerne. Solche Materie wird z.B. im Inneren von kompakten Sternen erwartet [5].

Experimentelle Untersuchung

Aufgrund ihrer reichhaltigen Phänomenologie ist die Erforschung der starken Wechselwirkung besonders reizvoll: Nicht nur für endliche Kerne bzw. Nuklide oder für das (Massen-)Spektrum der Hadronen ist sie von tragender Bedeutung, auch bei der Modellierung von kosmischen Strahlen oder der Beschreibung von kompakten Sternen und nicht zuletzt bei der Erforschung der ersten Momente der Entstehung unseres Universums spielt sie eine Schlüsselrolle. Die Untersuchung der starken Wechselwirkung ist also von fundamentalem Interesse, sie stellt direkte Grundlagenforschung dar.

Wegen der kleinen Abstände und der Stärke der involvierten Kräfte sind hohe Energien notwendig zur experimentellen Untersuchung von stark wechselwirkenden Objekten. Wichtig ist hierbei besonders die Physik der *Schwerionen*, d.h. Schwerionen-Kollisionen und ihre theoretische Beschreibung [6, 7, 8, 9, 10, 11, 12]. Im Experiment werden schwere, hochionisierte Kerne wie Blei oder Gold auf relativistische Energien beschleunigt, beim Aufprallen auf andere Kerne verdichtet sich die Kernmaterie und heizt sich auf. Es entsteht für kurze Zeit ein sog. *Feuerball* [13]. Dieser Feuerball zerfällt dann explosionsartig, wobei eine Vielzahl der ursprünglich vorhandenen Teilchen zusätzlich gebildet werden. (Man spricht mitunter vom kleinen Urknall im Labor.)

Solche Experimente werden in großen Teilchenbeschleuniger-Anlagen am BNL (Brookhaven National Laboratory) in Upton/NY, USA, am CERN (Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire) in Genf, Schweiz, oder auch an der GSI (Gesellschaft für Schwerionenforschung) in Darmstadt durchgeführt.

Theoretische Formulierung

Die gemeinhin akzeptierte Theorie der starken Wechselwirkung ist die Quanten-Chromodynamik (QCD), die quantisierte Eichfeldtheorie der *Farbladung*³ – in Analogie zur elektrischen Ladung in der Quanten-Elektrodynamik (QED).

³*chromos*: griechisch für Farbe.

Die Freiheitsgrade der QCD sind die bereits genannten Quarks als Teilchen und die *Gluonen* als *Eichbosonen*, die die Wechselwirkung vermitteln. Sowohl Quarks als auch Gluonen tragen eine Farbladung, was dazu führt, dass die Gluonen auch untereinander wechselwirken. Dies ist einer der wesentlichen Unterschiede zur QED, wo das *Photon* als Eichboson elektrisch neutral ist und nur mit den elektrisch geladenen Elektronen wechselwirken kann. Gruppentheoretisch formuliert ist die QED eine abelsche Eichtheorie, die QCD hingegen eine nicht-abelsche.

Es gibt drei unterschiedliche Farbladungen bzw. Farben, die man per Konvention als *rot*, *blau*, *grün* bezeichnet – und die zugehörigen Anti-Farben *anti-rot*, *anti-blau*, *anti-grün*. Der Einfluss der starken Wechselwirkung zeigt sich nun darin, dass in der Natur nur Zustände auftreten, die farbneutral⁴ oder auch *weiß* sind: Baryonen mit drei Quarks unterschiedlicher Farbe und Mesonen, bei denen Quark und Antiquark dann Farbe und Anti-Farbe tragen. Dies motiviert die Bezeichnung *Farbe* für die starken Ladungen.

Die Quarks treten in sechs verschiedenen Sorten oder *Flavor* ('Geschmack') auf: *up*, *down*, *strange*, *charm*, *top* und *bottom* sowie den zugehörigen Anti-Flavors. Quarks der letzten drei Flavors sind sehr schwer im Vergleich zum Pion als leichtestes Meson, sie spielen erst bei extrem hohen Energien eine Rolle und sind deshalb für diese Arbeit nicht von Bedeutung. *Seltsame* bzw. *strange* Quarks haben eine Masse von vergleichbarer Größe wie das Pion, während Quarks der ersten beiden Flavors sehr leicht sind. Diese drei Flavors werden in dem Modell berücksichtigt, welches in dieser Arbeit verwendet wird, oder anders formuliert: Das hier verwendete Modell beruht auf einer SU(3)-Flavor-Symmetrie. Die zugehörigen Hadronen als Bindungszustände der Quarks lassen sich in SU(3)-Multipletts einordnen, wie zuerst von Gell-Mann [14] mit dem *Eightfold Way* ('achtfacher Weg') für die Oktetts – als niedrigste Multipletts der SU(3) – vorgeschlagen wurde.

Das leichteste Baryonen-Multiplett gehört zu Spin 1/2 und ist ein *Oktett*, es enthält das Proton und das Neutron sowie weitere Baryonen mit einem oder zwei seltsamen Quarks, welche *Hyperonen* genannt werden. Das nächste Multiplett gehört zu Spin 3/2 und ist ein *Dekuplett*, welches aus (baryonischen) Resonanzen besteht. Die leichtesten Mesonen werden in *Nonetts* (Oktett mit Singulett) eingeordnet.

Die (starke) Kraft zwischen den Quarks ist anziehend und verhältnismäßig klein für Abstände in der Größenordnung des Durchmessers von

⁴Auf die Existenz dieser nicht offen auftretenden Ladung kam man durch die Entdeckung eines Baryons mit drei gleichen Quarks und Spin 3/2 – es musste also noch eine weitere, verborgene Quantenzahl geben, sonst wären die Quarks in diesem Baryon alle im gleichen Quantenzustand und damit das Pauli-Prinzip verletzt.

Baryonen oder Mesonen ($\approx 1 \text{ fm} \equiv 10^{-15} \text{ m}$). Bei größeren Abständen nimmt sie nicht ab, sondern nähert sich einem konstanten Wert, so dass das Potential bei großen Abständen linear zunimmt und Quarks folglich nicht isoliert werden können. Dies wird als *Confinement* bezeichnet.

Modellierung

Die QCD besitzt eine *laufende* Kopplungskonstante, d.h. ihr Wert hängt vom jeweiligen Impulsübertrag der betrachteten Prozesse ab. Bei großen Impulsüberträgen oder *harten* Prozessen ist die Kopplungskonstante klein, so dass störungstheoretische Methoden angewendet werden können, wie in der QED. Im T - μ -Phasendiagramm der QCD sind diese Bereiche bei sehr hohen Temperaturen T und/oder bei sehr hohen chemischen Potentialen μ zu finden. Mit zunehmendem Impulsübertrag strebt die Kopplungskonstante gegen Null, so dass sich Quarks und Gluonen dann wie freie Teilchen verhalten. Dies ist die asymptotische Freiheit (*asymptotic Freedom*), siehe z.B. [15] oder die eingangs erwähnten Referenzen zum Nobelpreis 2004. Der erwartete Materiezustand, in dem Quarks und Gluonen dann (nahezu) frei sind, wird Quark-Gluon-Plasma oder kurz *QGP* genannt.

Bei kleinen Impulsüberträgen oder *weichen* Prozessen ist die Kopplungskonstante hingegen groß und die Störungstheorie versagt. In diesem Bereich niedriger Energien bzw. verhältnismäßig kleiner T - und μ -Werte stehen also keine analytischen Methoden zur Lösung der QCD zur Verfügung. Andererseits ist dies aber gerade der – z.B. durch die genannten Schwerionen-Kollisionen – experimentell zugängliche Bereich.

Für die Beschreibung von QCD-Materie sind hier also andere Methoden notwendig. Im Wesentlichen stehen dafür zwei Zugänge zur Verfügung, die sich grundsätzlich voneinander unterscheiden:

- Die numerische Lösung der QCD-Gleichungen auf einem Gitter von diskretisierten Raum-Zeit-Punkten, genannt Gitter-QCD bzw. *Lattice QCD* oder kurz: *lQCD*. (Die lQCD gehört somit nicht zu den Modellen im eigentlichen Sinn.)
- Die Verwendung von so genannten *effektiven Modellen*, die wichtige Eigenschaften der QCD in z.T. vereinfachter Form (daher *effektiv*) beinhalten und an gemessene Eigenschaften der Hadronen bzw. Kernmaterie, oder auch an weitere Freiheitsgrade, angepasst werden.

Berechnungen aus der lQCD bei verschwindendem chemischem Potential ($\mu = 0$) sagten schon vor einigen Jahren einen Phasenübergang bei hohen Temperaturen T von hadronischer Materie zu einer Phase, in der Quarks und

Gluonen die dominierenden Freiheitsgrade der Materie sind, vorher. Aber erst seit wenigen Jahren können auch Vorhersagen bei endlichen chemischen Potentialen ($\mu > 0$) gemacht werden, insbesondere über die kritische Linie, also der Phasenübergangstemperatur bzw. *kritischen Temperatur* als Funktion des chemischen Potentials, $T_{\text{crit}}(\mu)$. Damit gibt es konkrete, quantitative Anhaltspunkte zum QCD-Phasendiagramm. Gegenwärtig sind die Unterschiede in den zugehörigen Vorhersagen verschiedener IQCD-Methoden noch groß (siehe z.B. Ref. [16]), und auch die einzelnen Methoden selbst sind noch mit Unsicherheiten behaftet: kleine Gittergrößen und große Gitterabstände, unphysikalisch große Quark- bzw. Pionmassen sowie systematische Unsicherheiten bei den verwendeten Methoden und der Extrapolation zum Kontinuum. Im Bereich von endlichen chemischen Potentialen kann die IQCD somit zwar eine Orientierung bieten, aber umfassende oder verbindliche quantitative Aussagen sind derzeit noch nicht in Sicht. Ferner gewähren diese Ergebnisse wenig direkten Einblick in die Mechanismen, die für bestimmte Phänomene verantwortlich sind, wie etwa für das Phasenübergangsverhalten.

Die effektiven Modelle stellen einen zur Gitter-QCD komplementären Ansatz dar. Die ursprünglichen Freiheitsgrade und die Wechselwirkung der QCD werden – mehr oder weniger stark – vereinfacht nachmodelliert. Anstatt der Quarks z.B. können *effektiv* die Hadronen verwendet werden als Bindungszustände der Quarks. Und die Wechselwirkung zwischen diesen Hadronen kann *effektiv* durch Austausch von Mesonen beschrieben werden (anstelle der Wechselwirkung von Quarks oder Hadronen mit Gluonen bzw. der Gluonen untereinander). Abhängig davon, welche Mechanismen in einem solchen Modell miteinbezogen werden, lässt sich hier nun der Einfluss konkret untersuchen, den diese auf die anvisierten Phänomene haben, also z.B. gerade auf das Phasenübergangsverhalten.

Als einfachstes effektives Modell kann das ideale Hadronengas-Modell angesehen werden. Hier wird die Wechselwirkung vollständig absorbiert im – aus dem Experiment bestimmten – Massenspektrum der Hadronen. Dahinter steckt die Idee, dass die starke Wechselwirkung verantwortlich ist für die Bildung der Hadronen und hadronischen Resonanzen mit eben den experimentell bestimmbareren Massen, und dass die Wechselwirkung folglich auch *effektiv* modelliert werden kann, wenn dieses hadronische Massenspektrum (so vollständig wie möglich!) verwendet wird [17]. Mit dieser Annahme schloss Hagedorn darauf, dass die Dichte dieses Spektrums exponentiell zunimmt und kam so schon Mitte der 1960er Jahre [18] im Rahmen seines Statistischen Bootstrap Modells auf eine *Grenztemperatur* (in der selben Größenordnung wie sie sich erst Jahrzehnte später aus IQCD-Rechnungen ergab!), oberhalb welcher hadronische Freiheitsgrade keine passende Beschreibung mehr liefern.

Im Vergleich dazu führt die Verwendung von *effektiven* Lagrange-Dichten oder Lagrangeans auf deutlich verfeinerte Modelle. Auf feldtheoretischer Basis – wie die QCD selbst – werden bekannte Eigenschaften der QCD in das Modell miteinbezogen, hauptsächlich Symmetrien des QCD-Lagrangeans. Ein solcher effektiver Lagrangean bildet die Grundlage für das in dieser Arbeit untersuchte Modell.

Zum Hadronischen Chiralen SU(3) Modell

Das Hadronische chirale SU(3) Modell, oder kürzer, das *chirale Modell*, wurde hier an der Universität Frankfurt im Verlauf der Diplom- und Doktorarbeiten von P. Papazoglou [19, 20] und D. Zschesche [21, 22] entwickelt. Der Lagrangean des chiralen Modells [23, 24] basiert auf zwei wesentlichen – in der Natur näherungsweise erfüllten – Symmetrien des QCD Lagrangeans: auf der *chiralen Symmetrie* und der *Skaleninvarianz*, welche im folgenden Kapitel vorgestellt werden. Da in der QCD beide Symmetrien sowohl spontan als auch explizit durch die endlichen Quarkmassen bzw. auf Quanten-Ebene⁵ gebrochen sind, werden diese Symmetriebrechungen ebenfalls nachmodelliert, wie in Kapitel 2 und 3 näher ausgeführt wird.

Die Freiheitsgrade des Modells sind hadronischer Art, in das Modell gehen also Baryonen und Mesonen bzw. Mesonenfelder ein, anstelle von Quarks und Gluonen. Wie bereits erwähnt, sind nur Hadronen enthalten, die aus up-, down- oder strange-Quarks bestehen.⁶ Um einen Bindungszustand für Kernmaterie zu ermöglichen, werden neben den attraktiven skalaren Mesonenfeldern auch die repulsiven vektoriellen Mesonenfelder berücksichtigt.

Mit diesem Ansatz gelingt eine gute Beschreibung von hadronischen Vakuummassen und Kernmaterie im Grundzustand [24] sowie von endlichen Kernen, Hyperkernen (Kerne, die Hyperonen enthalten) und deformierten Kernen [26, 27, 28]. Außerdem wurde das Modell auf die Beschreibung von heißer und kalter nicht-seltsamer und seltsamer hadronischer Materie [29, 30], auf die Struktur von rotierenden Neutronensternen [31] und auf verschiedene Observablen in Schwerionen-Kollisionen [32, 33] erfolgreich angewendet.

Bei hohen Temperaturen und/oder Dichten tritt bei diesem Modell ein chiraler Phasenübergang zu einer (chiral) restaurierten Phase auf [29, 32]. Die Eigenschaften dieses Phasenübergangs hängen dabei wesentlich davon ab, wie

⁵Die Brechung einer Symmetrie durch Quanten-Effekte (Fluktuationen) wird als *Anomalie* bezeichnet, siehe auch Abschnitt 2.2.3; hier ist die Spur-Anomalie der QCD gemeint.

⁶Siehe [25] für eine Erweiterung des Modells um charm-Quarks, also zu SU(4).

viele Freiheitsgrade (Teilchenspezies) an die mesonischen Felder gekoppelt werden und wie stark diese Kopplungen sind, analog zu den Studien [34, 35].

Wichtig für diese Arbeit ist, dass sich nur dann ein Phasenübergang erster Ordnung ergibt, wenn neben dem baryonischen Oktett noch zusätzliche baryonische Freiheitsgrade wie das (leichteste) Dekuplett an die Felder gekoppelt werden [29, 32]. Andernfalls geht die chirale Restaurierung nur mit einem Crossover vonstatten. Die baryonischen Resonanzen, also die hadronischen Zustände mit höheren Massen und Entartungen, haben also einen direkten Einfluss auf das Phasenübergangsverhalten des Modells.

Obwohl die schweren hadronischen Zustände aufgrund ihrer Masse unterdrückt sind, leisten sie einen wichtigen Beitrag zur Energiedichte bei höheren Temperaturen [36]. Außerdem gelingt bereits eine akzeptable Beschreibung der Temperatur- und Dichteabhängigkeit thermodynamischer Größen (unterhalb des Phasenübergangs) aus IQCD-Rechnungen mit einem idealen Hadronengas-Modell, bei welchem das hadronische Massenspektrum entsprechend der in IQCD-Rechnungen verwendeten höheren Quark- bzw. Pionenmasse skaliert wurde [37, 38]. Wie zuvor angedeutet, ist es beim idealen Hadronengas grundsätzlich wichtig, ein möglichst vollständiges Massenspektrum, d.h. möglichst viele Hadronen und hadronische Resonanzen, zu verwenden.

Andererseits wurde in Ref. [39] gezeigt, dass die kritische Temperatur bei $\mu = 0$ in einem linearen σ -Modell, welches keine Baryonen enthält, stark von der Pionenmasse abhängt, während diese Abhängigkeit in IQCD Rechnungen nur schwach ist. Es ist jedoch zu erwarten, dass sich diese starke Abhängigkeit der kritischen Temperatur im σ -Modell durch die zusätzliche Berücksichtigung von schwereren Hadronen vermindern lässt [36].

Zusammenfassend legt diese Gegenüberstellung also nahe, dass der Einfluss der hadronischen Resonanzen auf das Phasenübergangsverhalten der QCD entscheidend ist. Umgekehrt motiviert dies die Verwendung des chiralen Modells für entsprechende Untersuchungen, da in diesem Modell das Phasenübergangsverhalten gerade durch die Ankopplung der enthaltenen Resonanzen, nämlich des baryonischen Dekupletts, bestimmt wird.

Wir wollen also in dieser Arbeit die Beiträge des Resonanzenspektrums effektiv studieren, wobei die Dekuplett-Baryonen als Stellvertreter aller Resonanzen bzw. hadronischer Zustände mit höheren Massen und Entartungen dienen sollen. In diesem Sinne werden die Begriffe baryonische *Resonanzen* und Dekuplett-Baryonen z.T. synonym verwendet werden.

Im Gegensatz zum baryonischen Oktett, dessen Ankopplung im Mo-

dell durch die Vakuummassen und Grundzustandseigenschaften festgelegt ist, gibt es beim Dekuplett eine gewisse Freiheit bei der Wahl der Kopplungsstärken und -schemata.

In dieser Arbeit soll daher zunächst grundsätzlich untersucht werden, wie bestimmte Parametersätze der Dekuplett-Kopplung das Phasenübergangsverhalten bzw. das resultierende Phasendiagramm des chiralen Modells beeinflussen.

Darüber hinaus soll aber auch speziell untersucht werden, wie die Forderung nach guter Beschreibung des lQCD-Phasendiagramms einerseits und von experimentellen Teilchenzahlverhältnissen andererseits die Ankopplung der Dekuplett-Baryonen einschränken – und so Hinweise darauf geben, welche Parameter zu einer realistischeren Beschreibung führen bzw. wie das Modell im physikalischen Sinne verbessert werden kann.

Aufbau der Arbeit

Im folgenden Kapitel 2 werden einige theoretische Grundlagen zusammengetragen, die für das chirale Modell wichtig sind.

Das Modell selbst wird in Kapitel 3 vorgestellt, die Ergebnisse dieser Arbeit folgen in den Kapiteln 4 bis 6.

Im Kapitel 4 werden die Phasenübergangseigenschaften des Modells für unterschiedliche Kopplungsparameter (des baryonischen Dekupletts) bzw. die Zusammenhänge zwischen diesen Parametern und dem jeweils resultierenden T - μ -Phasendiagramm untersucht, gerade auch im Bezug auf Gitter-QCD-Rechnungen. Am Ende wird ein erster Ansatz zur effektiven Berücksichtigung des hadronischen Massenspektrums durch Ankopplung einer schweren Test-Resonanz vorgestellt, welcher dann zu einem Phasendiagramm führt, das quantitativ mit Vorhersagen aus der Gitter-QCD übereinstimmt.

Als Beispiel für die Anwendung auf experimentelle Daten werden dann in Kapitel 5 verschiedene Kopplungsparameter-Sätze des Modells auf die Beschreibung von Teilchenzahlverhältnissen angewandt. Dabei soll studiert werden, welchen Einfluss die jeweiligen Phasenübergangseigenschaften auf die Qualität der Beschreibung haben und ob sich Ergebnisse ableiten lassen, die nicht oder nur wenig von den Parametersätzen abhängen und somit universell sind.

Ferner wird in Kapitel 6 der Zusammenhang zwischen unterschiedlichen Kopplungsvarianten des Dilaton-Felds an das baryonische Dekuplett und einer möglichen Restauration der Skaleninvarianz im Modell untersucht.

Die Ergebnisse dieser Arbeit werden schließlich in Kapitel 7 zusammengefasst, wo auch ein Ausblick auf zukünftige Untersuchungen mit dem chiralen Modell gegeben wird.

Anmerkungen

Wie bereits in diesem Kapitel geschehen, werden auch in den weiteren Kapiteln mitunter *englische* Fachbegriffe verwendet. Da die Wissenschaftssprache der aktuellen Forschung Englisch ist, gibt es für manche Begriffe schlicht keine deutsche Übersetzung, wie z.B. für *Quark*. Oft ist aber auch die englische Form wesentlich gebräuchlicher als die deutsche Form, wie z.B. bei *Flavor* anstelle von Geschmack.

Ferner werden – aus technischen Gründen – Dezimalzahlen in den Schaubildern mit dem englischen *Dezimalpunkt* dargestellt, anstelle des im Deutschen gebräuchlichen *Kommas*. Der Konsistenz wegen wird deshalb im Text ebenfalls diese Schreibweise angewandt.

In dieser Arbeit werden die so genannten *natürlichen Einheiten* verwendet, d.h., die Naturkonstanten \hbar , c und k_B werden zu eins gesetzt. Das führt dazu, dass z.B. Zeiten und Längen sowie Energien und Massen jeweils in den gleichen Einheiten ausgedrückt werden – wie es der speziellen Relativitätstheorie entspricht – und auch Temperaturen und Energien haben dann die gleiche Einheit. Diese Festlegung hat sich als sehr geeignet erwiesen für die Hochenergiephysik, die typischen Größenordnungen für (Hadronen-) Massen sind hier MeV bis GeV sowie fm für Längen und MeV für Temperaturen.

Die verwendeten Konventionen für die relativistisch kovariante Schreibweise (metrischer Tensor, γ -Matrizen usw.) entsprechen denen von Björken und Drell [40]. Außerdem gilt die Einsteinsche Summenkonvention, nach welcher über doppelt auftretende Indizes summiert wird. Dabei stehen griechische Buchstaben für Lorentz-Indizes und laufen von 0 bis 3 während lateinische Buchstaben von 1 bis 3 laufen, wenn nicht anders angegeben.

Kapitel 2

Grundlagen

In diesem Kapitel sollen die beiden Symmetrien erläutert werden, die die Grundlage für das chirale Modell bilden: die namensgebende chirale Symmetrie und die Skaleninvarianz.

Symmetrien spielen grundsätzlich eine wichtige Rolle in der Physik, denn sie charakterisieren und vereinfachen ein System. Somit sind in der Regel starke Aussagen über die Dynamik möglich, ohne dass dazu die Bewegungsgleichungen bekannt sein müssen.

Im Lagrange-Formalismus kann einer Symmetrie jeweils eine Erhaltungsgröße zugeordnet werden, diese Zuordnung ist durch das Noether-Theorem [40, 41] gegeben. Ein Beispiel ist die Drehimpuls-Erhaltung, die aus der Rotationsinvarianz eines Systems folgt, also aus der Invarianz des Systems unter Drehungen.)

Eine Feldtheorie – charakterisiert durch ihren Lagrangean \mathcal{L} – ist symmetrisch unter einer Transformation, wenn die Wirkung S bei einer infinitesimalen Transformation unverändert bleibt, also $\delta S = \int dx^4 \delta \mathcal{L} = 0$. Dabei kann direkt die Variation des Lagrangeans verschwinden, $\delta \mathcal{L} = 0$, wie bei der chiralen Symmetrie in Abschnitt 2.1. Es genügt aber auch, wenn nur das Integral selbst verschwindet, $\delta S = 0$ bei $\delta \mathcal{L} \neq 0$, wie es bei der Skaleninvarianz in Abschnitt 2.2 der Fall sein wird.

Ein phänomenologischer Ansatz für das Vielteilchen-System Kernmaterie ist die relativistische Mesonen-Feldtheorie, insbesondere das phänomenologisch erfolgreiche σ - ω -Modell, siehe z.B. [42, 43]. Die hier durch das ω repräsentierte repulsive Vektormeson-Wechselwirkung ist ein dritter wesentlicher Bestandteil des chiralen Modells, welcher notwendig ist, um einen Bindungszustand für Kernmaterie beschreiben zu können.

2.1 Chirale Symmetrie

Chirale Transformationen

Für den QCD-Lagrangian ist die chirale Symmetrie *näherungsweise* erfüllt, nämlich im Grenzfall verschwindender Quarkmassen. Der Quark-Lagrangian für verschiedene Quark-Flavor i ist dann

$$\mathcal{L}_q = \bar{\psi}_i i\gamma_\mu \partial^\mu \psi_i . \quad (2.1)$$

Es lässt sich leicht zeigen, dass dieser Lagrangian invariant ist unter den so genannten vektoriellen (V) und axialen Transformationen (A),

$$V : \psi \rightarrow \psi' = \exp(-i\theta_V^a G_a) \psi \approx (1 - i\theta_V^a G_a) \psi \quad (2.2)$$

$$A : \psi \rightarrow \psi' = \exp(-i\gamma_5 \theta_A^a G_a) \psi \approx (1 - i\gamma_5 \theta_A^a G_a) \psi , \quad (2.3)$$

siehe z.B. Ref. [44]. Die Entwicklung gilt jeweils nur für kleine Transformationsparameter θ_V^a und θ_A^a . Die G_a sind die Generatoren der betrachteten Symmetriegruppe. Bei drei Quark-Flavors ($i = u, d, s$) sind das die Gell-Mann-Matrizen λ_a ($a = 1, \dots, 8$), die Generatoren der SU(3). Und im Fall von zwei Quark-Flavors ($i = u, d$) sind es die (Pauli-) Isospin-Matrizen τ_a ($a = 1, 2, 3$) als Generatoren der SU(2).

Der Lagrangian (2.1) hat also eine vektorielle und eine axiale Symmetrie, die zusammen die chirale Symmetrie bilden ($SU(N_f)_V \times SU(N_f)_A$, wobei N_f die Flavor-Anzahl ist). Die erhaltenen Ströme sind die Vektorströme $V_\mu^a = \bar{\psi} \gamma_\mu G^a \psi$ und die Axialvektorströme $A_\mu^a = \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 G^a \psi$.

Im SU(2)-Fall rotieren die vektoriellen Transformationen pseudoskalare bzw. π -artige Zustände $\vec{\pi} \equiv \bar{\psi} i\vec{\tau} \gamma_5 \psi$ untereinander und lassen skalare bzw. σ -artige Zustände $\sigma \equiv \bar{\psi} \psi$ unverändert; axiale Transformationen hingegen mischen π - und σ -artige Zustände [44]. Die Summe der Quadrate bleibt aber jeweils unverändert unter den beiden Transformationen

$$V, A : \sigma^2 + \vec{\pi}^2 \rightarrow (\sigma')^2 + (\vec{\pi}')^2 = \sigma^2 + \vec{\pi}^2 \quad (2.4)$$

und wird deshalb *chirale Invariante* genannt.¹

Auch der kinetische Term (2.1) ist wie erwähnt invariant, und so kann aus diesen beiden Bausteinen schon ein einfaches, chiral symmetrisches Modell mit Quark-Freiheitsgraden, $\psi \equiv (u, d)^T$, zusammengesetzt werden,

$$\mathcal{L}_{\text{NJL}} = \bar{\psi} i \partial_\mu \gamma^\mu \psi + g \left[(\bar{\psi} \psi)^2 + (\bar{\psi} i \vec{\tau} \gamma_5 \psi)^2 \right] . \quad (2.5)$$

¹Die Invarianten einer Symmetriegruppe werden *Casimir*-Operatoren genannt. Die SU(2) z.B. besitzt genau einen Casimir-Operator, die SU(3) dagegen drei.

Es entspricht in seiner Form dem *Nambu-Jona-Lasinio-Modell* [45, 46] oder kurz NJL-Modell, welches Anfang der 1960er Jahre ursprünglich für Baryonen entwickelt wurde. Der Lagrangean (2.5) enthält nur eine Kopplungskonstante g , weil die skalaren und pseudoskalaren Zustände durch die chirale Symmetrie miteinander verknüpft sind.

Links-Rechts-Zerlegung

Die fermionischen Wellenfunktionen lassen sich in zwei Anteile zerlegen, einen linkshändigen bzw. linken (L) und einen rechtshändigen bzw. rechten (R) Anteil,

$$\psi_L \equiv \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi \equiv P_L \psi \quad (2.6)$$

$$\psi_R \equiv \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi \equiv P_R \psi, \quad (2.7)$$

wobei P_L und P_R die entsprechenden Projektionsoperatoren sind (für die adjungierte Wellenfunktion gilt dann z.B. $\bar{\psi}_L = (P_L \psi)^\dagger \gamma_0 = \bar{\psi} P_R$). Diese Wellenfunktionen transformieren sich dann jeweils nur im linken oder rechten Teilraum

$$\psi_L \rightarrow \psi'_L = \exp(-i\theta_L^a G_a) \psi_L \equiv L \psi_L \quad (2.8)$$

$$\psi_R \rightarrow \psi'_R = \exp(-i\theta_R^a G_a) \psi_R \equiv R \psi_R. \quad (2.9)$$

Die Transformationsparameter ergeben sich nach $\theta_L = (\theta_V + \theta_A)$ und $\theta_R = (\theta_V - \theta_A)$. Die linken und rechten Transformationen, L und R , ersetzen die vektoriellen und axialen Transformationen. Die Symmetriegruppe ist damit $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R$.

In dieser Darstellung wird die Chiralität bzw. *Händigkeit* besonders deutlich, denn bei chiral invarianten Termen, wie z.B. \mathcal{L}_q (2.1), entkoppeln linkshändige und rechtshändige Anteile

$$\mathcal{L}_q = \bar{\psi}_L i\gamma_\mu \partial^\mu \psi_L + \bar{\psi}_R i\gamma_\mu \partial^\mu \psi_R. \quad (2.10)$$

2.1.1 Explizite und spontane Symmetriebrechung

Explizite Symmetriebrechung

Die Massen der so genannten Stromquarks oder *current* Quarks der drei leichtesten Quark-Flavor ergeben sich aus Experimenten [47] zu

$$m_u = 1.5 - 4 \text{ MeV}, \quad m_d = 4 - 8 \text{ MeV} \quad \text{und} \quad m_s = 80 - 130 \text{ MeV}. \quad (2.11)$$

Sie sind damit zwar deutlich von Null verschieden, aber im Vergleich zur Nukleonenmasse ($m_N \approx 940 \text{ MeV}$) sehr klein.

Führt man dementsprechend im Lagrangean (2.5) einen Massenterm

$$\mathcal{L}_m = m \bar{\psi} \psi \quad (2.12)$$

ein, bleibt die vektorielle Symmetrie erhalten, nicht aber die axiale Symmetrie. Dies ist ein Beispiel für eine *explizite Symmetriebrechung*: ein zusätzlicher Term führt dazu, dass eine zuvor vorhandene Symmetrie des Lagrangeans verloren geht bzw. *gebrochen* wird. Hier bricht der Massenterm die axiale Symmetrie explizit.

In der Darstellung mit linken und rechten Quarks zeigt sich diese Symmetriebrechung im Lagrangean darin, dass beim Massenterm linke und rechte Anteile mischen,

$$\mathcal{L}_m = m (\bar{\psi}_L \psi_R + \bar{\psi}_R \psi_L) , \quad (2.13)$$

wohingegen bei den chiral symmetrischen kinetischen Termen (2.10) die Anteile jeweils getrennt auftreten.

Spontane Symmetriebrechung

Eine explizite Symmetriebrechung in der Größenordnung der u - und d -Quarkmassen ($5 - 10 \text{ MeV}$) reicht jedoch bei weitem nicht aus, um die vielfach größere Nukleonen-Masse ($\approx 940 \text{ MeV}$) zu erklären. Dazu wird ein anderer Mechanismus benötigt, die dynamische oder *spontane Symmetriebrechung*.

Bei der spontanen Symmetriebrechung hat der Lagrangean eine bestimmte Symmetrie, die aber im Grundzustand des Systems nicht realisiert, also gebrochen ist. Dies tritt auf, wenn der zugehörige symmetrische Zustand eine höhere Energie hat als der energetisch günstigste Zustand des Systems. Aufgrund der Symmetrie des Lagrangeans muss letzterer entartet sein und diese entarteten Zustände lassen sich durch Symmetrietransformationen ineinander überführen (Nambu-Goldstone-Moden). Das System wird als Grundzustand dann nicht den symmetrischen Zustand annehmen, sondern einen bestimmten Zustand unter den (energetisch günstigeren) entarteten Zuständen auswählen. Dieser Zustand ist dann nicht symmetrisch, er bricht die Symmetrie *spontan*.

Das zugehörige Potential für ein solches System ist z.B. das so genannte *Mexican-Hat-Potential* in Abb. 2.1 (b) mit der (idealisierten) Form eines Mexikanischen Sombrero. Dieses Potential ist radial-symmetrisch in den Koordinaten σ und $\pi \equiv |\vec{\pi}|$, wobei die energetisch günstigsten Zustände auf einem Kreis unten in der Hutkrempe liegen und damit tiefer als der symmetrische Zustand oben auf der Hutmitte.

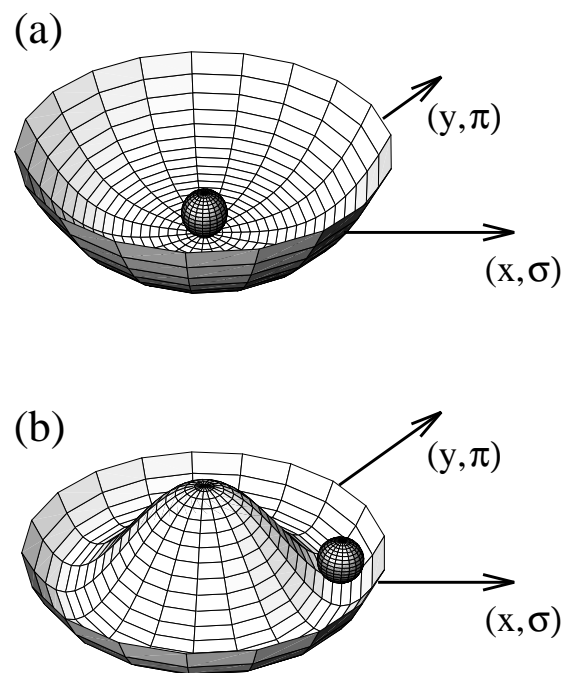


Abbildung 2.1: Potential ohne und mit spontaner Symmetriebrechung.

Beispiele für radial-symmetrische Potentiale oben ohne und unten mit spontaner Symmetriebrechung; aus V. Koch, "Aspects of chiral symmetry" [44].

Mit Hilfe der chiralen Invarianten (2.4) von oben lautet ein Potential mit spontaner Symmetriebrechung (SSB) beispielsweise

$$\mathcal{V}_{\text{SSB}} \equiv \mathcal{V}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2) = \frac{\mu^2}{2} (\sigma^2 + \vec{\pi}^2) + \frac{\lambda}{4} (\sigma^2 + \vec{\pi}^2)^2 . \quad (2.14)$$

Hier liegen für $\mu^2 < 0$ die Minima des Potentials auf dem Kreis $(\sigma^2 + \vec{\pi}^2) = -\mu^2/\lambda$, während das Potential bei $\sigma = |\vec{\pi}| = 0$ ein Maximum hat.

Da das Vakuum eine definierte Parität hat, muss der Erwartungswert für die Pionen verschwinden, also ist die natürliche Wahl der Vakuumerwartungswerte

$$\vec{\pi} = \vec{\pi}_0 \equiv \vec{0} \quad \text{und} \quad \sigma = \sigma_0 \equiv \sqrt{-\mu^2/\lambda} . \quad (2.15)$$

Eine solche Auswahl stellt nun die *eigentliche* spontane Symmetriebrechung dar, weil hier ein bestimmter Grundzustand ausgewählt wird, der nicht die volle Symmetrie des Systems hat.

Wenn jetzt das Nukleon Ψ an das Skalarfeld σ gekoppelt wird, kann nun aufgrund des endlichen Vakuumerwartungswerts σ_0 die große Nukleonenmasse erklärt werden. Durch die Ankopplung wird die Nukleonenmasse durch das Skalarfeld somit *dynamisch* generiert.

Diese Vorgehensweise führt auf das *Lineare sigma-Modell* ($L\sigma\text{M}$ oder LSM) [48, 49]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{LSM}} = & \bar{\Psi} i \partial_\mu \gamma^\mu \Psi + \frac{1}{2} \partial_\mu \vec{\pi} \partial^\mu \vec{\pi} + \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma \\ & - g \bar{\Psi} (\sigma + i \vec{\tau} \vec{\pi} \gamma_5) \Psi - \frac{\mu^2}{2} (\sigma^2 + \vec{\pi}^2) - \frac{\lambda}{4} (\sigma^2 + \vec{\pi}^2)^2 . \end{aligned} \quad (2.16)$$

Es ist – per Konstruktion – ein chiral symmetrisches Modell für Nukleonen und Mesonen mit spontaner Symmetriebrechung. Die Vakuumerwartungswerte der Mesonen werden nach Gl. (2.15) zu $\sigma = \sigma_0$ und $\vec{\pi} = \vec{0}$ gewählt (für $\mu^2 < 0$), womit sich für die dynamisch generierte Nukleonenmasse dann $m_N = g\sigma_0$ ergibt. Die Mesonenmassen sind $m_\sigma^2 > 0$ aber $m_\pi^2 = 0$, denn die Pionen sind die Nambu-Goldstone-Bosonen der spontan gebrochenen Symmetrie; sie entsprechen tangentialen Anregungen in Abb. 2.1, welche keine Energie kosten.

Um den endlichen Quarkmassen Rechnung zu tragen, kann man noch eine kleine explizite Symmetriebrechung \mathcal{L}_m (2.13) einführen. Dadurch wird das Potential gekippt und die Zustände in der 'Hutkrempe' sind nicht mehr entartet, was zwei wichtige Folgen hat: Zum einen entsteht ein bestimmter energetisch günstigster Zustand, und zum anderen kosten Anregungen entlang des Kreises in der 'Hutkrempe' jetzt Energie, d.h. die Pionen erhalten eine (kleine) Masse.

2.1.2 Nichtlineare Darstellung der chiralen Symmetrie

Die chirale Invariante $(\sigma^2 + \vec{\pi}^2)$ ist eine Kreisgleichung in σ und $|\vec{\pi}|$, es bietet sich also der Übergang zu Polarkoordinaten bzw. zur Exponential-Darstellung an,

$$M \equiv \sigma + i\vec{\tau}\vec{\pi} \equiv (v + S) e^{i\vec{\tau}\vec{p}/v} \equiv (v + S) U \quad \text{mit } U \equiv e^{i\vec{\tau}\vec{p}/v}, \quad (2.17)$$

wobei $v = \sigma_0$ der räumlich konstante Erwartungswert des skalaren Kondensats ist, und $S \ll v$ bzw. $\vec{p} \approx \vec{0}$ sind die Fluktuationen des neuen σ - bzw. $\vec{\pi}$ -Felds. In der Kreisgleichung (2.17) steht der skalare Anteil $(v + S)$ für die radiale Richtung, während der pseudoskalare Anteil $\vec{\tau}\vec{p}/v$ für die Winkelrichtung steht. Die beiden Darstellungen stimmen in niedrigster Ordnung überein:

$$\sigma + i\vec{\tau}\vec{\pi} \equiv (v + S) \cos \frac{\vec{\tau}\vec{p}}{v} + i(v + S) \sin \frac{\vec{\tau}\vec{p}}{v} \approx v + i\vec{\tau}\vec{p}. \quad (2.18)$$

Die Terme höherer Ordnungen sind die namensgebenden *nichtlinearen*.

Die chirale Invariante kann jetzt geschrieben werden als

$$(\sigma^2 + \vec{\pi}^2) = \frac{1}{2} \text{Spur } M^\dagger M = (v + S)^2, \quad (2.19)$$

da $U^\dagger U = 1$ gilt. In der nichtlinearen Darstellung hängt die Invariante nur noch vom skalaren Anteil ab, die pseudoskalare Abhängigkeit ist verschwunden. Dies trifft somit auch für das Potential zu, welches eine Funktion der chiralen Invarianten ist.

Die kinetische Terme der Mesonen werden umgeschrieben als

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \partial_\mu \vec{\pi} \partial^\mu \vec{\pi} + \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma &= \frac{1}{4} \text{Spur } \partial_\mu M^\dagger \partial^\mu M & (2.20) \\ &= \frac{1}{4} \text{Spur } \partial_\mu (v + S) U^\dagger \partial^\mu (v + S) U \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu S \partial^\mu S + (v + S)^2 \frac{1}{4} \text{Spur } \partial_\mu U^\dagger \partial^\mu U \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu S \partial^\mu S + \frac{1}{2} \partial_\mu \vec{p} \partial^\mu \vec{p} + o(S^2/v^2). & (2.21) \end{aligned}$$

Und die neue Form der Wechselwirkung zwischen Nukleonen und Mesonen wird zu

$$\begin{aligned} -g \bar{\Psi} (\sigma + i\vec{\tau}\vec{\pi}\gamma_5) \Psi &= -g (v + S) (\bar{\Psi}_L U \Psi_R + \bar{\Psi}_R U^\dagger \Psi_L) \\ &= -g (v + S) (\bar{N}_L N_R + \bar{N}_R N_L), & (2.22) \end{aligned}$$

wobei die Nukleon-Wellenfunktionen umtransformiert wurden zu

$$N_L \equiv \xi^\dagger \Psi_L, \quad N_R \equiv \xi \Psi_R \quad \text{mit} \quad \xi \xi \equiv U, \quad \xi = e^{i\vec{\tau}\vec{p}/2v}. \quad (2.23)$$

Diese neuen Wellenfunktionen N_L und N_R transformieren sich nun *beide* vektoriell

$$N_L \rightarrow V N_L, \quad N_R \rightarrow V N_R \quad (2.24)$$

anstatt chiral, d.h. linkshändig und rechtshändig getrennt wie im linearen Fall analog Gl. (2.6). Aus diesem Grund stellt die Mischung der beiden Händigkeiten bei der obigen σ -Kopplung kein Problem dar und die Anteile N_L und N_R können wieder zu $N = N_L + N_R$ zusammengefasst werden.

Wegen der Ortsabhängigkeit von ξ (2.23) ist nun ein modifizierter Ableitungsoperator für die Nukleonen N erforderlich,

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + i\bar{V}_\mu \quad \text{mit} \quad \bar{V}_\mu \equiv \frac{i}{2}(\xi^\dagger \partial_\mu \xi + \xi \partial_\mu \xi^\dagger), \quad (2.25)$$

welcher eine Abhängigkeit von den Pionen \vec{p} enthält. Der kinetische Term der Nukleonen wird damit zu

$$\begin{aligned} \bar{\Psi} i \partial_\mu \gamma^\mu \Psi &= \bar{\Psi}_L i \partial_\mu \gamma^\mu \Psi_L + \bar{\Psi}_R i \partial_\mu \gamma^\mu \Psi_R \\ &= \bar{N} (i D_\mu \gamma^\mu - \bar{A}_\mu \gamma^\mu \gamma_5) N. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Zur Kompensation zusätzlicher Terme muss hier noch $\bar{A}_\mu \equiv \frac{i}{2}(\xi^\dagger \partial_\mu \xi - \xi \partial_\mu \xi^\dagger)$ eingeführt werden.

Schließlich ergibt sich das *Nichtlineare sigma-Modell* (NLSM) [50]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{NLSM}} &= \bar{N} (i D_\mu \gamma^\mu - \bar{A}_\mu \gamma^\mu \gamma_5 - g(v + S)) N \\ &\quad + \frac{1}{2} \partial_\mu \vec{p} \partial^\mu \vec{p} + \frac{1}{2} \partial_\mu S \partial^\mu S - \frac{\mu^2}{2} (v + S)^2 - \frac{\lambda}{4} (v + S)^4. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Lineare und nichtlineare Darstellung chiraler Symmetrie

Eine wichtige Unzulänglichkeit des linearen σ -Modells ist die direkte Kopplung der Pionen an die Nukleonen, was zu Schwierigkeiten bei der Beschreibung von Daten zur π - N -Streuung führt.

Offenbar treten die Probleme im Wechselspiel zwischen den Nukleonen als schweren Teilchen und der chiralen Symmetrie auf, welche für die leichten Pionen eine geeignete Beschreibung liefert. In den Referenzen [50, 51] wurde von Weinberg die nichtlineare Darstellung der chiralen Symmetrie eingeführt, mit welcher es möglich ist, schwere Teilchen anzukoppeln, ohne die chirale Symmetrie zu beeinträchtigen. Dieses Konzept wurde dann von Coleman,

Callan, Wess und Zumino [52, 53] von $SU(2)$ auf beliebige kompakte Gruppen erweitert.

In der nichtlinearen Darstellung entfallen die Schwierigkeiten des linearen Zugangs.² Die Pionen haben nun eine differentielle Kopplung an die Nukleonen und dadurch transformieren sich die Nukleonen nicht mehr chiral, also getrennt für links- und rechtshändige Anteile, sondern nur noch vektoriell und damit für beide Anteile gleich.

2.1.3 Übergang von $SU(2)$ zu $SU(3)$

Bisher haben wir den $SU(2)$ -Fall betrachtet, oder anders formuliert, wir haben nur Hadronen beschrieben, die aus u - und d -Quarks aufgebaut sind. Mit der Definition der Mesonenmatrix (2.17) wurde zudem Isospin-Symmetrie angenommen, d.h. isospinbedingte Massenunterschiede von Neutron und Proton oder unter den Pionen wurden vernachlässigt.

Nun soll die Seltsamkeit miteinbezogen, also die Erweiterung von $SU(2)$ auf $SU(3)$ vollzogen werden. Da das seltsame s -Quark wie erwähnt deutlich schwerer ist als u - und d -Quark, kann hier der Massenunterschied nicht vernachlässigt werden. Wir führen deshalb ein weiteres Quarkkondensat für die seltsamen Quark-Antiquark-Paare ein, $\zeta \sim \langle \bar{s}s \rangle$, um diese Symmetriebrechung (der $SU(3)_V$) von vornherein modellieren zu können.

Die Baryonen und Mesonen lassen sich als hadronische Multipletts in 3×3 -Matrizen einordnen. Aus der $SU(2)$ -Mesonenmatrix (2.17) wird in $SU(3)$ beispielsweise [24]

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{a=0}^8 (\sigma_a + i\pi_a) \lambda^a = \Sigma + i\Pi = U(X + iY)U \equiv M. \quad (2.28)$$

Hier steht Σ bzw. Π für die skalaren bzw. pseudoskalaren Mesonen der linearen Darstellung. In der nichtlinearen Darstellung ist X das skalare Nonett, Y das pseudoskalare Singulett [54], und die Mesonen des pseudoskalaren Oktetts π_a definieren die lokale Transformation $U \equiv \exp[-i\pi_a(x)\lambda^a/2]$. Die λ^a sind die bereits erwähnten Gell-Mann-Matrizen, die Generatoren der $SU(3)$. Speziell hier verbleiben als Vakuumerwartungswerte nur die Beiträge der Kondensate,

$$\langle M \rangle = \langle X \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_0 \lambda^0 + \sigma_8 \lambda^8) \equiv \text{diag} \left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}, \frac{\sigma}{\sqrt{2}}, \zeta \right), \quad (2.29)$$

²Weinberg schreibt in [50] dazu pragmatisch:

“The trouble with the σ model stems from its nonderivative $\bar{\Psi}\gamma_5 i\vec{\tau}\vec{\pi}\Psi$ and $\sigma\vec{\pi}^2$ interactions; therefore, let us transform them away.”

worin sich die oben angesprochene Symmetriebrechung zwischen dem nicht-seltsamen und dem seltsamen Sektor widerspiegelt. Für die Vektormesonen lässt sich eine entsprechende Matrix V angeben [24].

Die Matrix des baryonischen Oktetts lässt sich in linearer Darstellung schreiben als [22]

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{a=0}^8 \Psi_a \lambda^a , \quad (2.30)$$

und für die nichtlineare Darstellung gilt [26]

$$B_L = U^\dagger \Psi_L U , \quad B_R = U \Psi_R U^\dagger . \quad (2.31)$$

Die expliziten Formen der Matrizen Σ bzw. X sowie Π , V und Ψ bzw. B finden sich in den Referenzen [24, 26].

Für das Dekuplett wurde in Ref. [30] nicht nach einer Matrix-Darstellung gesucht, stattdessen wurden die Kopplungen direkt anhand von Clebsch-Gordan-Koeffizienten [55] bestimmt, siehe dazu auch Abschnitt 3.2.

Chirale Invarianten der $SU(3)$ in nichtlinearer Darstellung

Ein wesentlicher Vorteil der nichtlinearen Darstellung der chiralen Symmetrie gegenüber der linearen Darstellung liegt darin, dass es mehr Möglichkeiten gibt, chirale invariante Kopplungsterme zu bilden [26]. Es lässt sich explizit zeigen, dass in der $SU(3)$ nur jeweils drei³ der Invarianten voneinander unabhängig sind (denn die Gruppe $SU(3)$ besitzt gerade drei Casimir-Operatoren). Als Invarianten können beispielsweise gewählt werden

$$I_0 = \det X , \quad I_1 = \text{Spur } X , \quad I_2 = \text{Spur } X^2 , \quad (2.32)$$

mit der Matrix (2.29) der skalaren Mesonen. Weitere Invarianten der Form $I_n = \text{Spur } X^n$ mit $n > 2$ können durch diese drei ausgedrückt werden [26].

Das mesonische Potential des chiralen Modells \mathcal{L}_0 (3.4) in Abschnitt 3.1 des nächsten Kapitels ist aus den drei Invarianten I_0 , I_2 und $I_4 = \text{Spur } X^4$ aufgebaut, welche ebenfalls als eine Basis für chiral invariante Terme in $SU(3)$ verwendet werden können.

³In der $SU(2)$ gab es mit $(\sigma^2 + \vec{\pi}^2)$ aus Gl. (2.19) nur eine einzige Invariante, weil die Gruppe $SU(2)$ nur einen Casimir-Operator besitzt, wie zuvor erwähnt.

2.2 Skaleninvarianz

Die Invarianz unter Skalentransformationen oder *Skaleninvarianz* einer Theorie ist gegeben, wenn keine dimensionsbehafteten Kopplungskonstanten, wie etwa Massen, in die Theorie eingehen. Denn in diesem Fall ist keine Größe vorhanden, die eine (Energie-)Skala fixieren könnte.

Umgekehrt führen explizite Teilchenmassen zwangsläufig zu einer Brechung der Skaleninvarianz bzw. zu einer *Skalenbrechung*. Diese sollte allerdings mit zunehmender Energie abnehmen, weil die Massen dann weniger wichtig werden in Relation zur jeweiligen Energieskala.

2.2.1 Skalentransformationen

Transformationen bei denen die Raum-Zeit-Koordinaten nach

$$x_\mu \rightarrow x'_\mu \equiv \lambda x_\mu \quad (\lambda \text{ reell}) \quad (2.33)$$

transformiert bzw. *skaliert* werden, werden *Dilatationen* oder *Skalentransformationen* genannt [56]. Da sowohl die Orts- als auch die Zeitkoordinaten skaliert werden, bleibt die Lichtgeschwindigkeit unverändert.

Mit der Annahme, dass die Skalentransformation linear auf das Feld wirkt, lässt sich die allgemeine Transformation für ein Feld η wie folgt darstellen (siehe z.B. [20]),

$$\eta(x_\mu) \rightarrow \eta'(x_\mu) \equiv f(\lambda) \eta(\lambda x_\mu) = \lambda^d \eta(\lambda x_\mu) , \quad (2.34)$$

wobei d die Energie-Dimension des Feldes angibt. Also ist beispielsweise $d = 1$ für ein Skalarfeld bzw. Bose-Feld und $d = 3/2$ für Fermi-Felder; bei Produkten von Feldern addieren sich die Dimensionen entsprechend auf. Die Transformationen zu festem d bilden eine Gruppe mit dem Gruppenparameter λ .

Die infinitesimale Transformation ist

$$\delta\eta = (d + x^\mu \partial_\mu) \eta . \quad (2.35)$$

Sie ist gegeben durch den Term proportional zu $\delta\lambda$ der Taylor-Entwicklung von η' (2.34) um den Punkt $\lambda = 1$. Der Faktor $\delta\lambda$ kann entfallen, weil die Vorschrift für beliebige λ gilt bzw. gelten soll.

2.2.2 Kriterien für Skaleninvarianz und -brechung

Der Lagrangean einer Theorie wird nach Gl. (2.35) im Allgemeinen nicht invariant sein unter Skalentransformationen, sondern es gilt

$$\delta\mathcal{L} = (d + x^\mu \partial_\mu) \mathcal{L} . \quad (2.36)$$

Für die Invarianz einer Theorie muss die Variation der Wirkung verschwinden, die durch die Transformation erzeugt wird,

$$\delta S = \int d^4x \delta \mathcal{L} = 0 . \quad (2.37)$$

Im vorliegenden Fall ist dies gegeben, wenn $\delta \mathcal{L}$ (2.36) eine totale Divergenz ist und so das letzte Integral in ein Oberflächenintegral umgewandelt und zum Verschwinden gebracht werden kann.

Die totale Divergenz von $x^\mu \mathcal{L}$ entspricht aber gerade der Gl. (2.36) für den Fall $d = 4$:

$$\partial_\mu (x^\mu \mathcal{L}) = (4 + x^\mu \partial_\mu) \mathcal{L} \equiv \delta \mathcal{L} |_{d=4} . \quad (2.38)$$

Folglich sind alle Lagrangean-Terme *invariant* unter Skalentransformationen, die Felder (und Ableitungen) mit einer gesamten Dimension von $d = 4$ haben. Beispiele dafür sind

$$\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi , \quad i \bar{\psi} \gamma_\mu \partial^\mu \psi , \quad g \phi^4 , \quad g_\sigma \bar{\psi} \sigma \psi , \quad (2.39)$$

während Terme wie

$$m_\phi^2 \phi^2 , \quad m_\psi \bar{\psi} \psi , \quad g_3 \phi^3 \quad (2.40)$$

zu einer *Skalenbrechung* führen bzw. die Skaleninvarianz brechen.

Um die Skaleninvarianz wieder herzustellen, kann das skalare Dilaton-Feld χ (ein chirales Singulett) eingeführt werden [56]. Die obigen Terme werden dann mit geeigneten Potenzen von χ/χ_0 multipliziert

$$m_\phi^2 \frac{\chi^2}{\chi_0^2} \phi^2 , \quad m_\psi \frac{\chi}{\chi_0} \bar{\psi} \psi , \quad g_3 \frac{\chi}{\chi_0} \phi^3 , \quad (2.41)$$

so dass die ursprünglich dimensionsbehafteten Kopplungskonstanten (m_ϕ^2 , m_ψ , g_3) in Einheiten von χ_0 ausgedrückt werden und die neuen Kopplungskonstanten ($(m'_\phi)^2 \equiv m_\phi^2/\chi_0^2$, $m'_\psi \equiv m_\psi/\chi_0$, $g'_3 \equiv g_3/\chi_0$) damit dimensionslos sind.

Der jeweiligen Theorie müssen außerdem ein kinetischer Term für χ und ein Potentialterm, der durch spontane Symmetriebrechung (analog Abschnitt 2.1.1) einen Vakuumerwartungswert χ_0 erzeugt, hinzugefügt werden.

2.2.3 Energie-Impuls-Tensor und Spur-Anomalie

Der *kanonische* Energie-Impuls-Tensor ist definiert als

$$T_{\mu\nu} \equiv -g_{\mu\nu} \mathcal{L} + \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \eta_i)} \partial_\nu \eta_i , \quad (2.42)$$

mit allen Feldern η_i , von denen \mathcal{L} abhängt.

Aus der Skaleninvarianz einer Theorie folgt die Erhaltung des *Skalenstroms*,

$$J_{\text{Skal}}^\mu = x_\nu \Theta^{\mu\nu} , \quad (2.43)$$

jenes Noether-Stroms, der mit Skalenänderung assoziiert ist (siehe z.B. [56, 57]). Dabei ist $\Theta^{\mu\nu}$ ein gegebenenfalls *modifizierter* Energie-Impuls-Tensor, der aus der Vorschrift (2.42) hervorgeht, wenn dem Lagrangean \mathcal{L} eine geeignete totale Divergenz hinzugefügt wurde [58].

Dann bedeutet Skaleninvarianz oder Erhaltung des Skalenstroms aber, dass die Spur des Energie-Impuls-Tensors verschwindet

$$0 = \partial_\mu J_{\text{Skal}}^\mu = \Theta_\mu{}^\mu + \partial_\mu \Theta^{\nu\mu} = \Theta_\mu{}^\mu , \quad (2.44)$$

denn der Energie-Impuls-Tensor ist selbst erhalten, $\partial_\mu \Theta^{\nu\mu} = 0$, aufgrund der Zeit- und Translationsinvarianz bzw. der Energie- und Impulserhaltung.

Eine ausführliche Veranschaulichung zum modifizierten Energie-Impuls-Tensor findet sich im Anhang von [59] und auch in der Diplomarbeit [19].

Spur-Anomalie des Energie-Impuls-Tensors

Nach den bisherigen Betrachtungen sollte die QCD für masselose Quarks skaleninvariant sein, weil sie keine dimensionsbehafteten Größen beinhaltet. Allerdings gelten diese Betrachtungen nur für klassische Felder [56]. Auf Quanten-Ebene wird die Skaleninvarianz jedoch gebrochen. Die Impulse, welche in den dann zu berücksichtigenden Schleifen- bzw. *Loop*-Diagrammen umlaufen (Quantenfluktuationen), fixieren zwangsläufig eine Skala, und die Spur des Energie-Impuls-Tensors kann deshalb nicht mehr zum Verschwinden gebracht werden.

Ein solches Phänomen wird *Anomalie* genannt: Die Brechung einer Symmetrie durch Quanten-Effekte, die bei klassischer Betrachtung vorhanden wäre.⁴

Bei der Renormierung einer Quantenfeldtheorie muss ein *Cut-off*-Parameter eingeführt werden. In Folge dessen sind die Matrix-Elemente des Energie-Impuls-Tensors im Allgemeinen abhängig von diesem Parameter. Dies bedeutet, dass bei physikalischen Observablen jeweils sichergestellt werden muss, dass sie nicht vom entsprechenden Cut-off abhängen, weil das Ergebnis sonst willkürlich wäre.

⁴Eine weitere Anomalie der QCD ist die $U(1)_A$ -Anomalie, die dazu führt, dass das $\eta'(958)$ -Meson als pseudoskalares Singulett eine unerwartet große Masse besitzt im Vergleich zu den (anderen) pseudoskalaren Mesonen des Oktetts.

Durch Modifizieren des Energie-Impuls-Tensors nach Ref. [58] gelingt es, die Abhängigkeit vom Cut-off zu eliminieren. Die Spur des jeweils resultierenden Energie-Impuls-Tensors ist proportional zu Termen mit dimensionsbehafteten Kopplungskonstanten [60], sie verschwindet also im Falle der Skaleninvarianz.

Mit Hilfe dieser Modifikation kann nun die Spur des Energie-Impuls-Tensors der QCD angegeben werden [61],

$$\langle \Theta_{\mu}^{\mu} \rangle = \frac{\beta_{\text{QCD}}}{2g} \langle G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} \rangle + (1+d) \sum_{a=1}^{N_f} m_a \langle \bar{q}_a q_a \rangle . \quad (2.45)$$

Sie setzt sich zusammen aus einem Term für die Spur-Anomalie und einem Term, der die endlichen Quarkmassen berücksichtigt, welche selbstredend eine weitere Skalenbrechung bewirken.

Hier steht N_f für die Zahl der eingehenden Quark-Flavors, d für die *anomale* Dimension [61] des $\bar{q}q$ -Operators und $G_{\mu\nu}$ ist der gluonische Feldstärke-Tensor bzw. $\langle G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} \rangle$ das Gluonkondensat. Die β -Funktion (Renormierungsgruppen-Funktion) der QCD ist in niedrigster Ordnung gegeben durch

$$\beta_{\text{QCD}}(g) = -\frac{g^3}{16\pi^2} \left(11 - \frac{2N_f}{3} \right) + \mathcal{O}(g^5) , \quad (2.46)$$

wobei die Selbstwechselwirkung der Gluonen auf den ersten (negativen) Anteil führt und der Beitrag der Quark-Antiquark-Paare auf den zweiten, zu N_f proportionalen (positiven) Anteil.

2.2.4 Dilaton-Feld als Gluonkondensat

Nun soll im Rahmen eines effektiven Modells das Skalenverhalten der QCD – genauer gesagt die Spur-Anomalie – in niedrigster Ordnung nachmodelliert und dabei gezeigt werden, dass bei diesem Ansatz das Dilaton-Feld mit dem Gluonkondensat identifiziert werden kann.

Wir verwenden den einfachen Ansatz von Ref. [59], das Potential als eine Summe aus skaleninvariantem und skalenbrechendem Anteil darzustellen, $V = V_0 + V_{\text{SB}}$. Terme in V_0 werden ggf. mit Potenzen von χ/Λ_{χ} so ergänzt, dass sich die Dimensionen der dynamischen Felder zu vier aufaddieren. (Für den Skalenparameter Λ_{χ} kann der Vakuumerwartungswert χ_0 des Dilaton-Feldes eingesetzt werden.)

Der Term V_{SB} hingegen soll derart konstruiert sein, dass er nach der Vorschrift [19, 59]

$$\langle \Theta_{\mu}^{\mu} \rangle = 4V_{\text{SB}} - \sum_i \eta_i \frac{\partial V_{\text{SB}}}{\partial \eta_i} \quad (2.47)$$

auf eine Spur analog zu (2.45) führt.

Der skalenbrechende Term kann wiederum zusammengesetzt werden aus einem Beitrag durch die endlichen Quarkmassen und einem Beitrag, der die Anomalie repräsentiert, $V_{\text{SB}} = V_{\text{Quark}} + V_{\text{Anom}}$. Der Potentialbeitrag $V_{\text{Quark}} \equiv V_{\text{ESB}}$ wird in Abschnitt 3.1 diskutiert, hier wollen wir uns auf den Beitrag V_{Anom} konzentrieren.

In Referenz [62] wurde gezeigt, dass bestimmte logarithmische Terme der chiralen Invarianten und des Dilaton-Felds geeignet sind, um die *Spur-Anomalie* auf *Tree-level* bzw. in niedrigster Ordnung⁵ nachzubilden. Ein solcher Ausdruck ist

$$V_{\text{Anom}} = \frac{1}{4}\chi^4 \ln \frac{\chi^4}{\Lambda_\chi^4} - \frac{\delta}{3}\chi^4 \ln \frac{\sigma^2 \zeta}{\Lambda_\sigma^2 \Lambda_\zeta}, \quad (2.48)$$

wobei die Λ_i Skalenparameter der Dimension einer Masse sind. Der zweite Term, der die Quarkkondensate miteinbezieht, wurde in [63, 64] für den SU(2)-Fall vorgeschlagen und in Ref. [24] auf SU(3) erweitert.

Das Potential V_{Anom} (2.48) ergibt nach der Vorschrift (2.47) einen Beitrag für die Spur des Energie-Impuls-Tensors von

$$\langle \Theta_\mu^\mu \rangle = -\chi^4 (1 - \delta). \quad (2.49)$$

Nun zeigt der Vergleich mit der Spur (2.45), dass sich im Rahmen dieses Ansatzes das Dilaton-Feld mit dem Gluonkondensat identifizieren lässt:

$$-\chi^4 (1 - \delta) \equiv \frac{\beta_{\text{QCD}}}{2g} \langle G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} \rangle. \quad (2.50)$$

Offensichtlich liefern die beiden logarithmischen Terme im Potential (2.48) jeweils die bei Gl. (2.46) angesprochenen Beiträge von gluonischer Selbstwechselwirkung bzw. Quark-Antiquark-Paaren – mit entsprechendem Vorzeichen – zur niedrigsten Ordnung der β -Funktion. Dabei ergibt sich $\delta = 2/11$ für den SU(3)-Fall bzw. bei drei Quark-Flavor, was als Richtwert angesehen werden kann [24].

⁵Hierzu ein *Bonmot* von Schechter und Ueda [62]:
“Good approximations should yield reasonable results in lowest order.”

Kapitel 3

Das Chirale Modell

In diesem Kapitel wird zuerst das grundlegende Modell vorgestellt und im Anschluss werden die Modellerweiterungen eingeführt, anhand welcher in den folgenden Kapiteln das Phasenübergangsverhalten des Modells untersucht werden wird.

Das Hadronische Chirale $SU(3)$ Modell, kurz: *das chirale Modell*, wurde hier in Frankfurt am Main, vor allem im Rahmen der Diplom- und Doktorarbeiten von Panajotis Papazoglou [19, 20] und Detlef Zschiesche [21, 22], entwickelt. Die vorliegende Doktorarbeit beschäftigt sich hauptsächlich mit der Untersuchung der angesprochenen Erweiterungstermen und der Konsequenzen, die sich aus ihnen ergeben.

Die ausführliche theoretische Fundierung und Konstruktion sowie Motivation und Diskussion der Modellbestandteile finden sich in den erwähnten Arbeiten und auch in den darin angegebenen Referenzen [23, 24, 26, 30], die im Folgenden kurz umrissen werden sollen.

Ausgangspunkt ist in Ref. [23] ein chirales σ - ω -Modell mit Baryonen und Mesonen als Freiheitsgraden. Es beinhaltet zudem eine Dilaton-Wechselwirkung – einerseits um gebrochene Skaleninvarianz zu modellieren im Sinne von Ref. [62], aber andererseits auch um eine stabile chiral-restaurierte Phase nach dem Vorbild von Ref. [65] zu erhalten.

Das Modell wird dann in Ref. [24] um die seltsamen Freiheitsgrade, also von $SU(2)$ auf $SU(3)$ erweitert. Mit diesem Modell können dann, zusätzlich zu den Eigenschaften von gebundener Kernmaterie, nichtseltsame und seltsame Hadronen beschrieben werden: das baryonische Oktett und die mesonischen Nonetts zu Spin 0 und 1.

Aufgrund der der chiralen Symmetrie ist ausschließlich eine symmetrische Kopplung der Baryonen an die skalaren Mesonen möglich, während die Kopplung an die Vektormesonen fast ausschließlich antisymmetrisch [20] ist. Dadurch kann im seltsamen Sektor keine Balance zwischen attraktiver ska-

larer Kopplung und repulsiver vektorieller Kopplung erreicht werden, was sich in unrealistisch großen Potentialtiefen für Hyperonen niederschlägt. Um dies zu korrigieren, werden (chiral invariante) nichtlineare Kopplungsterme verwendet.

Alternativ wird in [24] noch der Übergang zu einer anderen Realisierung der chiralen Symmetrie vorgestellt, der *nichtlinearen Realisierung* (vgl. Abschnitt 2.1.2). Diese Darstellung erlaubt eine natürlichere Ankopplung der schweren Baryonen, insbesondere die antisymmetrische Kopplung an die skalaren Mesonen, was u.a. realistische Hyperon-Potentialtiefen ergibt.

In Ref. [26] wird dann gezeigt, dass mit dem Modell in der nichtlinearen Realisierung chiraler Symmetrie eine gute Beschreibung endlicher Kerne möglich ist, nicht jedoch mit den zuvor in Ref. [24] eingeführten nichtlinearen Baryon-Meson-Kopplungstermen (in der linearen Realisierung chiraler Symmetrie). Für das Dilaton-Feld stellt sich heraus, dass es bei $T = 0$ kaum Einfluss auf die Baryonendichte hat bzw. von dieser kaum beeinflusst wird [26]. Es kann also in guter Näherung konstant (auf dem Vakuum Erwartungswert $\chi \equiv \chi_0$) gehalten werden.

Die Erweiterung des Modells um baryonische Resonanzen, konkret: um das leichteste baryonische Dekuplett, erfolgt schließlich in Ref. [30]. Dort wird die resultierende Dichteabhängigkeit (bei $T = 0$) untersucht. Das Dilaton-Feld wird aufgrund der vorigen Ergebnisse direkt als konstant angenommen, $\chi \equiv \chi_0$, wie auch in den darauf folgenden Studien. Dass in diesem Modell nun bei *hohen Temperaturen* ein Phasenübergang auftritt, wenn – und nur wenn – die Resonanzen mit einbezogen werden, war in Ref. [29] schon kurz gezeigt worden.

Dieses Modell ermöglicht auch die Untersuchung und Beschreibung z.B. von Hyperkernen und deformierten Kernen [27, 28], oder der Struktur von rotierenden Neutronensternen [31]. Ferner wird es in hydrodynamischen Simulationen [32] und zur Beschreibung von relativen Teilchenhäufigkeiten und weiteren Observablen [33, 66, 67] von bzw. bei Schwerionen-Kollisionen verwendet.

Ferner wurde das chirale Modell in den Ref. [68, 69] über die Mean-Field-Näherung hinaus um die Beiträge der baryonischen Dirac-See erweitert (Hartree-Näherung).

Der Schwerpunkt *dieser* Arbeit liegt auf eingehenden Studien zum Phasenübergangsverhalten des Modells. Mit Hilfe des baryonischen Dekupletts als Stellvertreter – und konkret anhand der verbleibenden Freiheiten bei dessen Ankopplung –, wollen wir *effektiv* den Einfluss des Resonanzspektrums auf das Phasenübergangsverhalten studieren. In diesem Sinne werden die Be-

griffe baryonische *Resonanzen* und Dekuplett-Baryonen z.T. synonym verwendet werden.

3.1 Der Chirale Lagrangean

Der Lagrangean des Chiralen Modells in Mean-Field-Näherung [30] kann formal angegeben werden als

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{kin}} + \mathcal{L}_{\text{BM}} + \mathcal{L}_{\text{BV}} + \mathcal{L}_{\text{vec}} + \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{ESB}} . \quad (3.1)$$

Das allgemeine Modell beinhaltet die niedrigsten SU(3)-Multipletts der Baryonen (Oktett und Dekuplett) und der Mesonen (Nonetts der skalaren, pseudoskalaren und axialen Mesonen sowie der Vektormesonen, jeweils zusammengefasst aus Singulett und Oktett).

Bei der *Mean-Field*-Näherung [42, 43] werden die fermionischen Baryonen als quantenmechanische Einteilchen-Operatoren behandelt, um deren Fermi-Dirac-Statistik zu erhalten. Die bosonischen Feldoperatoren werden durch ihre Vakuumerwartungswerte ersetzt und die Fluktuationen vernachlässigt. Dadurch ergeben sich die Mesonen als klassische Hintergrundfelder, und speziell bei den Vektormesonen verschwinden die raumartigen Komponenten durch die Forderung nach Rotationsinvarianz. Die Eigenschaft des Vakuums, eine definierte Parität zu haben, führt zum Verschwinden der Erwartungswerte der pseudoskalaren und axialen Mesonen. Eine ausführlichere Darstellung der Mean-Field-Näherung beim chiralen Modell findet sich in [21, 24, 30], weiterführende Referenzen sind zudem in [22] angegeben.

In dieser Arbeit wird nur (isospin-)symmetrische Kernmaterie betrachtet. Die dafür relevanten Mesonenfelder sind die Quark-*Kondensate* bzw. Skalarfelder, das nichtseltsame $\sigma \sim \langle \bar{u}u + \bar{d}d \rangle$ und das seltsame Kondensat, welches in dieser Arbeit als $\zeta \sim \langle \bar{s}s \rangle$ bezeichnet werden soll,¹ sowie die Vektorfelder bzw. deren jeweilige zeitartige Komponente, das nichtseltsame $\omega \equiv \omega_0$ und das seltsame $\phi \equiv \phi^0$. Alle weiteren Mesonenfelder bzw. Mesonen werden im Folgenden als freie Teilchen behandelt, d.h. insbesondere, dass sie nicht in die Feldgleichungen eingehen. Um das gewünschte Skalenverhalten zu erzeugen, wird außerdem noch das (skalare) Dilaton-Feld benötigt, was mit dem Gluonkondensat identifiziert werden kann, $\chi^4 \sim \langle G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} \rangle$, wie in Abschnitt 2.2 erläutert wurde.

¹Letzteres kann mit dem beobachteten $f_0(980)$ -Teilchen identifiziert werden, das Erstere mit dem $f_0(600)$ -Teilchen [47].

Der erste Term in Gl. (3.1) enthält die Beiträge der kinetischen Energie der Hadronen, \mathcal{L}_{kin} .

Die Wechselwirkung zwischen Baryonen Ψ_i und skalaren Mesonen (BM) bzw. Vektormesonen (BV) ist

$$\mathcal{L}_{\text{BM}} + \mathcal{L}_{\text{BV}} = - \sum_{i \in B} d_i \bar{\Psi}_i \left(m_i^*(\sigma, \zeta) + [g_{i\omega} \gamma_0 \omega^0 + g_{i\phi} \gamma_0 \phi^0] \right) \Psi_i, \quad (3.2)$$

wobei die Summe i über alle implementierten Baryonen B läuft, Oktett (N, Λ , Σ , Ξ) und Dekuplett (Δ , Σ^* , Ξ^* , Ω), und d_i die jeweilige Spin-Isospin-Entartung angibt, also die inneren Freiheitsgrade bzw. Quantenzahlen zusammenfasst. Die effektiven Baryonenmassen m_i^* werden im folgenden Abschnitt diskutiert.

Der Term \mathcal{L}_{vec} enthält die Massenterme und die quartische Selbstwechselwirkung der Vektormesonen (vec)

$$\mathcal{L}_{\text{vec}} = \frac{1}{2} m_\omega^2 \frac{\chi^2}{\chi_0^2} \omega^2 + \frac{1}{2} m_\phi^2 \frac{\chi^2}{\chi_0^2} \phi^2 + g_4^4 (\omega^4 + 2\phi^4). \quad (3.3)$$

Der Selbstwechselwirkungs-Term der skalaren Mesonen lautet

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 = & -\frac{1}{2} k_0 \chi^2 (\sigma^2 + \zeta^2) + k_1 (\sigma^2 + \zeta^2)^2 + k_2 \left(\frac{1}{2} \sigma^4 + \zeta^4 \right) + k_3 \chi \sigma^2 \zeta \\ & - k_4 \chi^4 - \frac{1}{4} \chi^4 \ln \frac{\chi^4}{\chi_0^4} + \frac{\delta}{3} \chi^4 \ln \frac{\sigma^2 \zeta}{\sigma_0^2 \zeta_0}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

es ist der skalare Potentialterm mit $\mathcal{V}_0(\sigma, \zeta, \chi) \equiv -\mathcal{L}_0$. Die Selbstwechselwirkung führt zur spontanen Brechung der chiralen Symmetrie (erste Zeile in Gl. (3.4)) und der Skaleninvarianz (zweite Zeile) mit den Vakuumerwartungswerten σ_0 , ζ_0 und χ_0 für die Kondensate. Da dieser Term aus chiralen Invarianten (vgl. Abschnitt 2.1.3) aufgebaut ist, ist er chiral symmetrisch. Ferner ist er skaleninvariant bis auf den Term $\chi^4 \ln [\chi^4/\chi_0^4]$, wie in Abschnitt 2.2 erläutert wurde. Man beachte, dass genau dieser Term auch die spontane Symmetriebrechung der chiralen Symmetrie induziert, indem er einen nichtverschwindenden Vakuumerwartungswert χ_0 bewirkt. Dadurch ist der Vorfaktor des k_0 -Terms negativ (für $k_0 > 0$) und es ergibt sich ein Potential analog (2.14).

Der letzte Term in Gl. (3.1) enthält schließlich die *explizite* Symmetriebrechung (ESB),

$$\mathcal{L}_{\text{ESB}} \equiv -\mathcal{V}_{\text{ESB}} = -\frac{\chi^2}{\chi_0^2} \left[m_\pi^2 f_\pi \sigma + \left(\sqrt{2} m_K^2 f_K - \frac{1}{\sqrt{2}} m_\pi^2 f_\pi \right) \zeta \right], \quad (3.5)$$

um die nichtverschwindenden Quark-Massen der QCD zu modellieren. Dieser Term bricht die chirale Symmetrie explizit. Darüber hinaus bricht er die Skaleninvarianz, indem seine Skalendimension nicht 4 ist, sondern dem Quark-Massenterm des QCD-Lagrangeans angepasst wurde [23, 24, 62], der die Dimension 3 hat.

Die mesonischen Lagrangean-Terme in Gl. (3.1) können als Ganzes zu einem Potential zusammengefasst werden, dem mesonischen Baumgraphen- oder *Tree-Level-Potential*,

$$\mathcal{V}_{\text{Meson}} \equiv -\mathcal{L}_{\text{vec}} - \mathcal{L}_0 - \mathcal{L}_{\text{ESB}} . \quad (3.6)$$

3.2 Baryon-Meson-Wechselwirkung

In der nichtlinearen Realisierung der chiralen Symmetrie transformieren sich die Baryonen ausschließlich unter (lokalen) Vektortransformationen, die Transformationseigenschaften ihrer linken und rechten Wellenfunktionen sind hier also gleich. Dadurch sind die Kopplungen der Baryonen an die Mesonen nicht mehr eingeschränkt durch die chirale Symmetrie wie in der linearen Realisierung (siehe z.B. [24]). In Folge dessen ist sowohl die symmetrische als auch die antisymmetrische Kopplung (SU(3) *d*- bzw. *f*-Kopplung) möglich für die Baryon-Meson-Wechselwirkung, ohne dass dadurch die axialen Eigenschaften des Modells (Pion- oder Kaon-Zerfallskonstanten bzw. PCAC-Relation) verändert werden.

Um eine chiral symmetrische Baryon-Meson-Wechselwirkung² zu erhalten, müssen die zugehörigen Kopplungsterme [22] jeweils zu chiralen Singulets gekoppelt werden, damit sich (nach der Mean-Field-Näherung) die endgültige Form \mathcal{L}_{BM} und \mathcal{L}_{BV} (3.2) ergibt. In den Nonetts W der skalaren Mesonen bzw. Vektormesonen sind jeweils SU(3)-Singulett und SU(3)-Oktett zusammengefasst. Somit ergibt sich für das baryonische Oktett Ψ_O bzw. für Terme analog $\bar{\Psi}_O W \Psi_O$,

$$[8] \times [1] \times [8] \equiv [8] \times [8] = [1] + 2[8] + [10] + [\bar{10}] + [27] \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} [8] \times [8] \times [8] &= [8] \times ([1] + 2[8] + [10] + [\bar{10}] + [27]) \\ &= 2[1] + 8[8] + 4[10] + 4[\bar{10}] \\ &\quad + 6[27] + 2[35] + 2[\bar{35}] + [64] , \end{aligned} \quad (3.8)$$

wobei $[\bar{8}] \equiv [8]$ gilt.

²Die axialen Mesonen bzw. Pseudovektormesonen und die pseudoskalaren Mesonen haben wie bereits erwähnt einen verschwindenden Erwartungswert in der Mean-Field-Näherung, deshalb werden deren Kopplungen hier nicht weiter besprochen.

Für das Dekuplett Ψ_D bzw. für Terme analog $\bar{\Psi}_D W \Psi_D$ ergibt sich

$$[\bar{10}] \times [1] \times [10] \equiv [\bar{10}] \times [10] = [1] + [8] + [27] + [64] \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} [\bar{10}] \times [8] \times [10] &= [8] \times ([1] + [8] + [27] + [64]) \quad (3.10) \\ &= [1] + 4[8] + 2[10] + 2[\bar{10}] + 4[27] \\ &\quad + 2[35] + 2[\bar{35}] + 3[64] + [81] + [\bar{81}] + [125] . \end{aligned}$$

Diese Multiplett-Kopplungen können anhand von Young-Tableaus³ ermittelt werden.⁴ Die Clebsch-Gordan-Koeffizienten, welche jeweils für die Kopplung zum Singulett benötigt werden, sind in Ref. [55] angegeben.

Aus den Relationen (3.7) und (3.8) ergeben sich drei Möglichkeiten zu einem chiralen Singulett zu koppeln und damit jeweils drei Kopplungskonstanten für die Wechselwirkungsterme zwischen dem baryonischen Oktett und den Mesonen W , g_1^W für die mesonischen Singulets g_1^W sowie g_8^W und α^W für die mesonischen Oktetts [26]. Die Konstante α^W steht dabei für das jeweilige Mischungsverhältnis zwischen d - und f -Kopplung.

Für das baryonische Dekuplett gibt es in den Relationen (3.9) und (3.10) nur zwei Möglichkeiten zu einem chiralen Singulett zu koppeln und entsprechend jeweils zwei Kopplungskonstanten [30, 22], also $g_{1,D}^W$ und $g_{8,D}^W$ – mit dem zusätzlichen Index D für Dekuplett. Die Spin-3/2-Baryonen des Dekupletts werden wie Spin-1/2-Teilchen eingebunden, jedoch mit der Entartung zu Spin 3/2 [30].

3.2.1 Skalarkopplung und effektive Baryonenmassen

Aus der Wechselwirkung zwischen Baryonen und skalaren Mesonen \mathcal{L}_{BM} (3.2) resultieren die effektiven Massen der Baryonen, sie lassen sich allgemein schreiben als

$$m_i^*(\sigma, \zeta) = g_{i\sigma} \sigma + g_{i\zeta} \zeta + m_{0,i} . \quad (3.11)$$

Diese effektiven Massen werden dynamisch generiert durch Kopplung an die skalaren Mesonen bzw. an die chiralen Kondensate σ und ζ , welche aufgrund der spontanen Symmetriebrechung der Selbstwechselwirkung in \mathcal{L}_0 (3.4) endliche Vakuumerwartungswerte haben (vgl. dazu auch Abschnitt 2.1.1). Die

³Für eine Einführung siehe z.B. Ref. [70].

⁴Folgende Relationen werden benutzt:

$$\begin{aligned} [8] \times [10] &= [8] + [10] + [27] + [35] , & [8] \times [\bar{10}] &= [8] + [\bar{10}] + [27] + [\bar{35}] , \\ [8] \times [27] &= [8] + [10] + [\bar{10}] + 2[27] + [35] + [\bar{35}] + [64] , \\ [8] \times [64] &= [27] + [35] + [\bar{35}] + 2[64] + [81] + [\bar{81}] + [125] . \end{aligned}$$

Kopplungskonstanten $g_{i\sigma}$ und $g_{i\zeta}$ setzen sich nach den Symmetriebedingungen aus den oben genannten g_1^S , g_8^S , α^S für das Oktett [26] bzw. aus $g_{1,D}^S$, $g_{8,D}^S$ für das Dekuplett [30] zusammen. Der Term $m_{0,i} = \text{const.}$ ist ein expliziter Massenterm, der für die Massen der Stromquarks oder *Current*-Quarks steht (siehe auch Gl. 2.11), und mit dessen Hilfe die Massenaufspaltung der baryonischen Multipletts modelliert werden kann.

Für die Hyperonen des Oktetts wird ein solcher expliziter Massenterm $m_{0,i} = m_{0,i}(\sigma_0, \zeta_0)$ eingeführt [26], um die Tiefe des relativistischen Zentralpotentials in Einklang mit den experimentellen Daten zu bringen.⁵ Die resultierenden effektiven Massen des baryonischen Oktetts sind dann

$$m_N^* = \frac{1}{\sqrt{3}} g_1^S [\sqrt{2}\sigma + \zeta] - \frac{1}{3} g_8^S (4\alpha_S - 1) (\sqrt{2}\zeta_0 - \sigma_0) \quad (3.12)$$

$$m_\Lambda^* = \frac{1}{\sqrt{3}} g_1^S [\sqrt{2}\sigma + \zeta] - \frac{2}{3} g_8^S (\alpha_S - 1) (\sqrt{2}\zeta_0 - \sigma_0) \quad (3.13)$$

$$m_\Sigma^* = \frac{1}{\sqrt{3}} g_1^S [\sqrt{2}\sigma + \zeta] + \frac{2}{3} g_8^S (\alpha_S - 1) (\sqrt{2}\zeta_0 - \sigma_0) \quad (3.14)$$

$$m_\Xi^* = \frac{1}{\sqrt{3}} g_1^S [\sqrt{2}\sigma + \zeta] + \frac{1}{3} g_8^S (2\alpha_S + 1) (\sqrt{2}\zeta_0 - \sigma_0) . \quad (3.15)$$

Mit den drei Kopplungsparametern werden diese vier Baryonenmassen des Oktetts an die experimentell gemessenen Vakuummassen [47] angepasst.

Die effektiven Massen des baryonischen Dekupletts⁶ sind

$$m_\Delta^* = g_{DS} [(3 - \alpha_{DS})\sigma + \alpha_{DS}\sqrt{2}\zeta] \quad (3.16)$$

$$m_{\Sigma^*}^* = g_{DS} [2\sigma + \sqrt{2}\zeta] + \delta m \quad (3.17)$$

$$m_{\Xi^*}^* = g_{DS} [(1 + \alpha_{DS})\sigma + (2 - \alpha_{DS})\sqrt{2}\zeta] + \delta m \quad (3.18)$$

$$m_\Omega^* = g_{DS} [2\alpha_{DS}\sigma + (3 - \alpha_{DS})\sqrt{2}\zeta] + \delta m , \quad (3.19)$$

wobei die zwei oben genannten Kopplungsparameter $g_{1,D}^S$, $g_{8,D}^S$ durch die beiden Parameter g_{DS} , α_{DS} ausgedrückt wurden [22]. Der konstante bzw. explizite Anteil der effektiven Massen ist hier in dem Term

$$\delta m \equiv \delta m (\sigma - \sigma_0, \zeta - \zeta_0) = (\sqrt{2}(\sigma - \sigma_0) + (\zeta - \zeta_0)) m_3 \quad (3.20)$$

⁵Eine andere Alternative sind nichtlineare Kopplungsterme, wie in Ref. [24] verwendet.

⁶Man beachte, dass bei dieser Kopplungswahl eine kleine aber nichtverschwindende Kopplung des seltsamen Kondensats an das nichtseltsame Δ -Baryon vorhanden ist, wie auch oben beim Oktett das seltsame Kondensat schwach an das Nukleon koppelt [26]. Eine andere Wahl für die Kopplung, die diese Beimischung nicht enthält, wird in [26, 30, 22] untersucht.

enthalten. Diese Ergänzung führt dazu, dass die Massen der Hyperonen des Dekupletts im Allgemeinen über den entsprechenden Hyperonenmassen des Oktetts liegen.

In Ref. [32] wurde gezeigt, dass die Stärke der m_3 -Kopplung für das Dekuplett das Phasenübergangsverhalten des Modells beeinflusst. Insbesondere können ohne diese Kopplung ($m_3 = \delta m = 0$, Parameterstudie 'CIII' in [32]) zwei verschiedene Phasenübergänge auftreten, mit getrennten Sprüngen in σ und ζ . Da in dieser Arbeit der grundsätzliche Einfluss der Resonanzen untersucht werden soll, wird hier nur eine Art der m_3 -Kopplung verwendet.

Zum gegebenen $m_3 > 0$ werden die vier Baryonenmassen mit den Parametern g_{DS} und α_{DS} an die experimentell bestimmten Vakuummassen des Dekupletts angepasst. Allerdings sind hier Ergänzungen möglich, die ebenfalls die experimentellen Vakuummassen reproduzieren, ohne dass die Grundzustandseigenschaften des Modells verändert werden. Darauf werden wir in Abschnitt 3.3.3 genauer eingehen.

3.2.2 Vektorkopplung und effektive chemische Potentiale

Aus dem Universalitätsprinzip [71] und dem Vektormeson-Dominanz-Modell (VMD-Modell) kann gefolgert werden, dass der symmetrische Anteil der Vektormeson-Kopplung beim baryonischen Oktett klein sein muss. In dieser Arbeit wird eine rein antisymmetrische f -Kopplung angenommen⁷ wie in Ref. [30], also $\alpha^V = 1$. Mit der Bedingung, dass die nichtseltsamen Nukleonen und die Δ -Baryonen nicht an das seltsame Vektormeson ϕ koppeln sollen, wird jeweils eine weitere Konstante fixiert, $g_1^V \propto g_8^V$ für das Oktett und für das Dekuplett $\alpha_{DV} = 0$, so dass $g_{DV} \propto g_{1,D}^V \propto g_{8,D}^V |_{\alpha_{DV}=0}$ gilt.

Damit ergeben sich die Kopplungskonstanten [26, 30] in \mathcal{L}_{BV} (3.2) zu

$$g_{i\omega} = (n_q^i - n_{\bar{q}}^i) g_i^V \quad (3.21)$$

$$g_{i\phi} = (n_s^i - n_{\bar{s}}^i) \sqrt{2} g_i^V, \quad (3.22)$$

im Einklang mit dem additiven Quark-Modell, siehe z.B. [47]. Hier steht i für die Baryonen und Antibaryonen des Oktetts und des Dekupletts ($N, \Lambda, \Sigma, \Xi; \Delta, \Sigma^*, \Xi^*, \Omega$), und g_i^V steht entsprechend für g_8^V bzw. g_{DV} , also die zu Oktett bzw. Dekuplett gehörigen Vektorkopplungen von oben. Die Faktoren n_q^i und n_s^i geben die Anzahl an Valenzquarks des jeweiligen Baryons an, wobei q für die leichten Quarks (u und d) steht, s für das seltsame Quark, und Antiquarks entsprechend mit \bar{q} , \bar{s} bezeichnet werden.

⁷Bei endlichen Kernen gelingt eine Verbesserung für die Einteilchen-Energieniveaus von Nukleonen im Kern mit einer schwachen Beimischung von d -Kopplung [26, 28].

Die einzige verbleibende Kopplungskonstante für das Oktett, $g_8^V \propto g_1^V$, wird durch die Bindungsenergie von Kernmaterie im Grundzustand ($E/A = -16$ MeV) festgelegt. Für das Dekuplett gibt es keine solche Einschränkungen für die Δ - ω -Kopplung im Grundzustand. Es kann also eine relative Vektor-kopplung im Bezug zur Oktett-Kopplung eingeführt werden,

$$r_V = \frac{g_{DV}}{g_8^V} = \frac{g_{\Delta\omega}}{g_{N\omega}} . \quad (3.23)$$

Die Kopplungskonstante für das Dekuplett, $g_{DV} = r_V g_8^V$, wird lediglich durch die Forderung beschränkt, dass im Grundzustand bei $T = 0$ normale Kernmaterie stabil sein soll. Denn bei zu kleinem r_V , d.h. zu geringer Vektor-Repulsion, wird ein chiral-restauriertes Dichte-Isomer (Delta-Materie, auch Lee-Wick-Isomer [72, 73]) zum stabilen Grundzustand, siehe dazu auch [30, 35, 74]. Im folgenden Kapitel 4 werden wir diesen Parameter aber als frei betrachten, um seinen allgemeinen Einfluss auf das Phasenübergangsverhalten untersuchen zu können. Es wird dann jeweils angegeben, ob eine bestimmte Parameterwahl normale Kernmaterie im Grundzustand beschreiben kann oder nicht.

Die obigen Vektorkopplungskonstanten bestimmen dann die jeweiligen *effektiven chemischen Potentiale* der Baryonen μ_i^* bzw. deren Abweichung vom ursprünglichen Wert μ_i . Allgemein ist das *effektive* quark-chemische Potential definiert als

$$\mu_i^* = \mu_i - g_{i\omega}\omega - g_{i\phi}\phi . \quad (3.24)$$

(Dieser Ausdruck ergibt sich bei der Auswertung der Einteilchensummen über die Baryonen, wie im nächsten Abschnitt besprochen wird.) Das zugrunde liegende chemische Potential μ_i der Teilchenspezies i setzt sich jeweils aus den quark-chemischen Potentialen μ_q und μ_s nach

$$\mu_i = n_q^i \mu_q + n_s^i \mu_s \quad (3.25)$$

anhand der Anzahl der nichtseltsamen n_q^i ($q = u, d$) und seltsamen Quarks n_s^i bzw. Antiquarks zusammen. In der Regel wird das seltsame quark-chemische Potential μ_s des Systems dadurch festgelegt, dass der Netto-Gehalt an seltsamen Quarks im Gesamtsystem Null sein soll ($f_s = 0$ oder $\rho_{\text{strange}} = 0$).

Für die Umrechnung zu den entsprechenden baryo-chemischen Potentialen gilt

$$\mu_B \equiv 3\mu_q \quad \text{und} \quad \mu_S \equiv (\mu_q - \mu_s) . \quad (3.26)$$

3.3 Großkanonisches Potential

In einer relativistischen Feldtheorie sind aufgrund von Paarerzeugung und Paarvernichtung nicht die *Teilchenzahlen* erhalten, sondern *Ladungen* wie die Baryonenzahl oder die Seltsamkeit, was stattdessen zur Erhaltung von *Netto-Teilchenzahlen* führt. Auch kann in der Regel die Gesamtenergie eines solchen Systems nicht bestimmt werden. Deshalb bietet sich das großkanonische Ensemble an, welches durch die Temperatur T und chemische Potentiale μ als Zustandsvariablen gekennzeichnet ist [75, 76], an Stelle von Energie und Teilchenzahlen.⁸ Als zugehörige Zustandsgleichung kann der Druck p verwendet werden; aus ihm ergeben sich die Teilchendichten ρ_i und die Entropiedichte s als Zustandsfunktionen durch Differentiation nach den konjugierten Zustandsvariablen μ_i und T , wie in Abschnitt 3.3.2 explizit ausgeführt wird.

Gesucht ist also das großkanonische Potential. Es setzt sich zusammen aus den Potentialtermen \mathcal{L}_{vec} (3.3), \mathcal{L}_0 (3.4) und \mathcal{L}_{ESB} (3.5) und dem Beitrag der Baryonen aus $\mathcal{L}_{\text{BM}} + \mathcal{L}_{\text{BV}}$ (3.2). Nach Auswertung der Summe über die Einteilchenzustände⁹ in $(\mathcal{L}_{\text{BM}} + \mathcal{L}_{\text{BV}})$ erhält man die großkanonische Zustandssumme \mathcal{Z} und mit $\Omega \equiv -T \ln \mathcal{Z}$ schließlich auch das großkanonische Potential [21, 22]

$$\begin{aligned} \frac{\Omega}{V} &= -\mathcal{L}_{\text{vec}} - \mathcal{L}_0 - \mathcal{L}_{\text{ESB}} - \mathcal{V}_{\text{vac}} \\ &\quad - T \sum_{i \in B} \frac{d_i}{(2\pi)^3} \int d^3k \left\{ \ln \left[1 + e^{-\frac{E_i^*(k) - \mu_i^*}{T}} \right] + \ln \left[1 + e^{-\frac{E_i^*(k) + \mu_i^*}{T}} \right] \right\} \\ &\quad + T \sum_{j \in M} \frac{d_j}{(2\pi)^3} \int d^3k \ln \left[1 - e^{-\frac{E_j^*(k) - \mu_j}{T}} \right]. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Damit das Potential Ω/V im Vakuum verschwindet, wird hier die Vakuumenergie \mathcal{V}_{vac} abgezogen (der Wert des Potentials bei $T = 0$ und verschwindender Baryonendichte $\rho_B = 0$).

Die Summe läuft über alle Baryonen $B = \{N, \Lambda, \Sigma, \Xi; \Delta, \Sigma^*, \Xi^*, \Omega\}$ (die zugehörigen Antibaryonen sind über den zweiten Integranden explizit berücksichtigt) und über die pseudoskalaren Mesonen und die Vektormesonen $M = \{\eta, \eta', \pi, K, \bar{K}; \omega, \phi, \rho, K^*, \bar{K}^*\}$, wobei d_l die jeweilige Spin-Isospin-Entartung angibt.

⁸Für einen kompakten Abriss der thermodynamischen Potentiale und Ensembles mit ihren charakteristischen Zustandsvariablen und den verknüpfenden Legendre-Transformationen siehe z.B. die Diplomarbeit des Verfassers [77].

⁹Die Feldoperatoren ergeben sich aus den Lösungen der baryonischen Bewegungsgleichungen (Dirac-Gleichungen). Mit ihnen werden der Teilchenzahl-Operator und der Hamilton-Operator des Modells bestimmt, welche nach Auswertung der baryonischen Anzahl-Operatoren [21] auf die statistische Dichte-Matrix [76] führen.

Die effektiven quark-chemischen Potentiale der Baryonen μ_i^* wurden im vorigen Abschnitt mit Gl. (3.24) bereits vorweggenommen. Die $E_l^*(k) = \sqrt{k^2 + m_l^{*2}}$ sind die jeweiligen Einteilchen-Energien mit den effektiven Baryonenmassen m_i^* ($i \in B$) und den effektiven Mesonenmassen m_j^* ($j \in M$). Erstere sind in Abschnitt 3.2.1 aufgeführt, während letztere über die zweite Ableitung des mesonischen Potentials $\mathcal{V}_{\text{Meson}}$ (3.6) am Minimum (gegeben durch Gl. (3.29) von unten) definiert sind,

$$m_j^{*2} = \frac{\partial^2}{\partial \xi_j^2} \mathcal{V}_{\text{Meson}} , \quad \xi_j = \eta', \eta, \pi, K, \bar{K}; \omega, \phi, \rho, K^*, \bar{K}^* , \quad (3.28)$$

wie zum Beispiel in Ref. [68] angegeben.

3.3.1 Feldgleichungen

Das großkanonische Potential (3.27) muss nun minimiert werden bezüglich der einzelnen Felder,

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} \frac{\Omega}{V} = 0 , \quad \vartheta = \sigma, \zeta, \chi, \omega, \phi . \quad (3.29)$$

Dies liefert ein selbstkonsistentes System von fünf gekoppelten nichtlinearen Gleichungen, den Feldgleichungen bzw. den Bewegungsgleichungen für die jeweiligen Felder, die dann simultan gelöst werden müssen.

Aus der Extremalbedingung (3.29) ergeben sich die Feldgleichungen der skalaren Felder zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{ESB}})}{\partial \sigma} &= -k_0 \chi^2 \sigma + 4k_1 (\sigma^2 + \zeta^2) \sigma + 2k_2 \sigma^3 + 2k_3 \chi \sigma \zeta \\ &\quad + \frac{2\delta}{3} \frac{\chi^4}{\sigma} - \frac{\chi^2}{\chi_0^2} m_\pi^2 f_\pi \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$= \sum_{i \in B} g_{i\sigma} \rho_i^{\text{sc}} + \sum_{j \in M} g_{j\sigma} \rho_j^{M, \text{sc}} ; \quad g_{l\sigma} \equiv \frac{\partial m_l^*}{\partial \sigma}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{ESB}})}{\partial \zeta} &= -k_0 \chi^2 \zeta + 4k_1 (\sigma^2 + \zeta^2) \zeta + 4k_2 \zeta^3 + k_3 \chi \sigma^2 \\ &\quad + \frac{\delta}{3} \frac{\chi^4}{\zeta} - \frac{\chi^2}{\chi_0^2} \left(\sqrt{2} m_K^2 f_K - \frac{1}{\sqrt{2}} m_\pi^2 f_\pi \right) \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$= \sum_{i \in B} g_{i\zeta} \rho_i^{\text{sc}} + \sum_{j \in M} g_{j\zeta} \rho_j^{M, \text{sc}} ; \quad g_{l\zeta} \equiv \frac{\partial m_l^*}{\partial \zeta}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\mathcal{L}_{\text{vec}} + \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{ESB}})}{\partial\chi} &= m_\omega^2 \frac{\chi}{\chi_0^2} \omega^2 + m_\phi^2 \frac{\chi}{\chi_0^2} \phi^2 \\
&\quad - k_0 \chi (\sigma^2 + \zeta^2) + k_3 \sigma^2 \zeta \\
&\quad - 4k_4 \chi^3 - \chi^3 \left(1 + \ln \frac{\chi^4}{\chi_0^4} \right) + \frac{4\delta}{3} \chi^3 \ln \frac{\sigma^2 \zeta}{\sigma_0^2 \zeta_0} \\
&\quad - \frac{2\chi}{\chi_0^2} \left[m_\pi^2 f_\pi \sigma + \left(\sqrt{2} m_K^2 f_K - \frac{1}{\sqrt{2}} m_\pi^2 f_\pi \right) \zeta \right] \\
&= \sum_{i \in B} g_{i\chi} \rho_i^{\text{sc}} + \sum_{j \in M} g_{j\chi} \rho_j^{M, \text{sc}} \quad ; \quad g_{l\chi} \equiv \frac{\partial m_l^*}{\partial \chi}
\end{aligned} \tag{3.32}$$

und die Feldgleichungen der Vektorfelder zu

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{vec}}}{\partial \omega} &= m_\omega^2 \frac{\chi^2}{\chi_0^2} \omega + 4g_4^4 \omega^3 \\
&= \sum_{j \in M} g_{j\omega} \rho_j^{M, \text{sc}} + \sum_{i \in B} g_{i\omega} \rho_i \quad ; \quad g_{j\omega} \equiv \frac{\partial m_j^*}{\partial \omega}, \quad g_{i\omega} \equiv -\frac{\partial \mu_i^*}{\partial \omega}
\end{aligned} \tag{3.33}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{vec}}}{\partial \phi} &= m_\phi^2 \frac{\chi^2}{\chi_0^2} \phi + 8g_4^4 \phi^3 \\
&= \sum_{j \in M} g_{j\phi} \rho_j^{M, \text{sc}} + \sum_{i \in B} g_{i\phi} \rho_i \quad ; \quad g_{j\phi} \equiv \frac{\partial m_j^*}{\partial \phi}, \quad g_{i\phi} \equiv -\frac{\partial \mu_i^*}{\partial \phi} .
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Die m_l^* sind die effektiven Mesonenmassen aus Gl. (3.28) für $l \in M$ bzw. die effektiven Baryonenmassen aus Abschnitt 3.2.1 für $l \in B$, und die μ_i^* sind die effektiven chemischen Potentiale der Baryonen aus Gl. (3.24).

Die skalare Dichte ρ_i^{sc} und die Nettoteilchendichte ρ_i der Baryonenspezies i sind hier

$$\rho_i^{\text{sc}} = \frac{d_i}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{m_i^*}{E_i^*} (f_{k,i} + \bar{f}_{k,i}) \tag{3.35}$$

$$\rho_i = \frac{d_i}{(2\pi)^3} \int d^3k (f_{k,i} - \bar{f}_{k,i}) , \tag{3.36}$$

während

$$\rho_j^{M, \text{sc}} = \frac{d_j}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{m_j^*}{E_j^*} f_{k,j} \tag{3.37}$$

die skalare Dichte der Mesonenspezies j ist. Dabei sind die fermionischen Verteilungsfunktionen der Baryonen bzw. der Antibaryonen wie folgt definiert

$$f_{k,i} \equiv f_i(k; T, \mu_i^*) = \frac{1}{e^{\frac{1}{T}[E_i^*(k) - \mu_i^*]} + 1} \quad (3.38)$$

$$\bar{f}_{k,i} \equiv \bar{f}_i(k; T, \mu_i^*) = \frac{1}{e^{\frac{1}{T}[E_i^*(k) + \mu_i^*]} + 1} \quad , \quad (3.39)$$

und die bosonischen Verteilungsfunktionen der Mesonen sind definiert als

$$f_{k,j}^M \equiv f_j^M(k; T, \mu_j) = \frac{1}{e^{\frac{1}{T}[E_j^*(k) - \mu_j]} - 1} \quad . \quad (3.40)$$

Die *Quellen der skalaren Felder* sind die skalaren Dichten ρ_i^{sc} und $\rho_j^{M, \text{sc}}$ der Baryonen und Mesonen. (Speziell das χ -Feld hat nur dann Quellen, wenn die effektiven Massen von χ abhängen – und für die Näherung $\chi = \chi_0$ entfällt die Bewegungsgleichung von χ ganz.) Die *Quellen der vektoriellen Felder* sind die Nettoteilchendichten oder Vektordichten ρ_i der verschiedenen Baryonenspezies.

Die mesonischen Feldgleichungen hängen also davon ab, wie viele Freiheitsgrade angekoppelt sind bzw. wie viele Hadronen mit ihren skalaren Dichten oder Teilchendichten auf den rechten Seiten beitragen, gleichzeitig aber auch davon, wie stark die zugehörigen Kopplungen sind.

3.3.2 Thermodynamische Größen

Wenn das großkanonische Potential (3.27) bezüglich aller Felder minimiert ist bzw. alle Feldgleichungen simultan gelöst sind, können die thermodynamischen Größen aus dem großkanonischen Potential oder auch direkt aus dem Druck bestimmt werden, denn es gilt

$$p(T, \mu_q) \equiv -\frac{\partial}{\partial V} \Omega(T, \mu_q, V) = -\frac{\Omega}{V} \quad . \quad (3.41)$$

Das seltsame quark-chemische Potential μ_s taucht hier nicht auf, weil es in dieser Arbeit nicht als freie Variable behandelt wird, vgl. die Bemerkung zu Gl. (3.25).

Die Teilchendichten (oder Vektordichten) der einzelnen Baryonenspezies ergeben sich durch Differentiation nach den jeweiligen chemischen Potentialen (3.25),

$$\rho_i(T, \mu_q) \equiv \frac{\partial}{\partial \mu_i} p(T, \mu_q) = \frac{d_i}{(2\pi)^3} \int d^3k (f_{k,i} - \bar{f}_{k,i}) \quad , \quad (3.42)$$

wie bereits oben in Gl. (3.36) eingeführt. Die gesamte Baryonendichte, also die Nettodichte aller Baryonen, ist dann

$$\rho_B = \sum_{i \in B} \rho_i . \quad (3.43)$$

Die Teilchendichten der Mesonen ergeben sich entsprechend durch Differentiation nach dem jeweiligen chemischen Potential (analog der Gl. 3.25) der Mesonenspezies

$$\rho_j^M(T, \mu_q) \equiv \frac{\partial}{\partial \mu_j} p(T, \mu_q) = \frac{d_j}{(2\pi)^3} \int d^3k f_{k,j}^M , \quad (3.44)$$

mit der mesonischen Verteilungsfunktion $f_{k,j}^M$ (3.40) von oben, siehe auch Ref. [22]. (Bei Mesonen mit verschwindendem chemischen Potential wird der Wert $\mu_j = 0$ erst nach dem Differenzieren eingesetzt.) Die gesamte Teilchendichte der Mesonen ist damit

$$\rho^M = \sum_{j \in M} \rho_j^M . \quad (3.45)$$

Die Entropiedichte ergibt sich aus

$$s(T, \mu_q) \equiv \frac{\partial}{\partial T} p(T, \mu_q) , \quad (3.46)$$

und die Energiedichte folgt aus der Euler-Gleichung

$$\begin{aligned} e(T, \mu_q) \equiv & T s(T, \mu_q) - p(T, \mu_q) \\ & + \sum_{i \in B} \mu_i \rho_i(T, \mu_q) + \sum_{j \in M} \mu_j \rho_j^M(T, \mu_q) . \end{aligned} \quad (3.47)$$

3.3.3 Effektive Massen mit erweiterten Dekuplett-Kopplungen

Die Kopplungsparameter des baryonischen Oktetts werden durch die Symmetrie-Eigenschaften, den hadronischen Vakuummassen und die Bindungsenergie E/A im Grundzustand bei $T = 0$ festgelegt, wie in Abschnitt 3.2.1 und 3.2.2 besprochen wurde. Diese Parameter sollen in dieser Arbeit unverändert beibehalten werden.

Bei den weiteren Freiheitsgraden, wie den Dekuplett-Baryonen, gibt es jedoch eine gewisse Freiheit bei der Wahl der Kopplungsterme und der Kopplungsstärken, und eben *diese Freiheit soll in der vorliegenden Arbeit genutzt*

werden, um das Phasenübergangsverhalten des Modells näher zu untersuchen. Die Idee ist dabei zunächst das grundsätzliche Studium, wie sich veränderte Kopplungen auf das Phasenübergangsverhalten des Modells bzw. das daraus folgende Phasendiagramm auswirken.

Konkret soll aber auch untersucht werden, unter welchen Bedingungen das resultierende Phasendiagramm in wesentlichen Eigenschaften mit den Vorhersagen aus Gitter-QCD-Rechnungen übereinstimmt. Dadurch gelingt es, die Kopplungsparameter einzuschränken und das Modell so zu verbessern, dass es der Physik – die modelliert wird – näher kommt. Umgekehrt können dann auch Rückschlüsse auf die Eigenschaften von hadronischer Materie gezogen und deren Verständnis verbessert werden.

In diesem Sinne wird das Modell (3.1) nun erweitert, indem zweierlei Erweiterungen für die Baryonen des Dekupletts Ψ_D eingeführt werden. Der erste ist ein expliziter Massenterm

$$\mathcal{L}_{\text{Dec}} = -m_{\text{Dec}} \bar{\Psi}_D \Psi_D . \quad (3.48)$$

Mit dem konstanten Parameter m_{Dec} ist es möglich, systematisch zu untersuchen, wie die Stärke der skalaren Kopplung der Resonanzen, vertreten durch die Dekuplett-Baryonen, sich auf die Eigenschaften der hadronischen Materie resp. auf die diesbezüglichen Modellvorhersagen auswirkt.

Der zweite Term koppelt das Dilaton-Feld an die Resonanzen (wieder: Dekuplett-Baryonen)

$$\mathcal{L}_{\text{Dec},\chi} = -\bar{\Psi}_D g_{\text{Dec},\chi} \chi \Psi_D . \quad (3.49)$$

Hier ist es die Kopplungsstärke $g_{\text{Dec},\chi}$, die variiert wird, und so der Einfluss der Dilaton-Ankopplung auf das Modellverhalten studiert werden kann.

Der erste Term (3.48) kann unabhängig davon untersucht werden, ob das Dilaton-Feld als konstant angenommen wird, $\chi \equiv \chi_0$, wie in den Studien seit Ref. [26] geschehen (siehe Überblick am Anfang des Kapitels). Dagegen ist die Untersuchung des zweiten Terms (3.49) nur sinnvoll, wenn das Gluonkondensat gerade *nicht* konstant gehalten wird, sondern als *dynamisches* Feld in das Modell eingeht, andernfalls unterscheidet er sich nicht von dem ersten Term.

Mit diesen beiden Erweiterungen werden aus den ursprünglichen Formeln (3.16) – (3.19) für die effektiven Baryonenmassen des Dekupletts

$$m_{\Delta}^* = m_{\text{Dec}} + g_{\text{Dec},\chi} \chi + g_{DS} \left[(3 - \alpha_{DS}) \sigma + \alpha_{DS} \sqrt{2} \zeta \right] \quad (3.50)$$

$$m_{\Sigma^*}^* = m_{\text{Dec}} + g_{\text{Dec},\chi} \chi + m_3(\sqrt{2}(\sigma - \sigma_0) + \zeta - \zeta_0) + g_{DS} [2\sigma + \sqrt{2}\zeta] \quad (3.51)$$

$$m_{\Xi^*}^* = m_{\text{Dec}} + g_{\text{Dec},\chi} \chi + m_3(\sqrt{2}(\sigma - \sigma_0) + \zeta - \zeta_0) + g_{DS} [(1 + \alpha_{DS})\sigma + (2 - \alpha_{DS})\sqrt{2}\zeta] \quad (3.52)$$

$$m_{\Omega}^* = m_{\text{Dec}} + g_{\text{Dec},\chi} \chi + m_3(\sqrt{2}(\sigma - \sigma_0) + \zeta - \zeta_0) + g_{DS} [2\alpha_{DS}\sigma + (3 - \alpha_{DS})\sqrt{2}\zeta] . \quad (3.53)$$

Da sich auch mit den Zusatztermen die experimentell gemessenen Vakuummassen der Dekuplett-Baryonen ergeben sollen, müssen für gegebene Parameter m_{Dec} und $g_{\text{Dec},\chi}$ jeweils die Kopplungsparameter g_{DS} und α_{DS} für $T = 0$ und $\mu = 0$ entsprechend neu angepasst werden. Das bedeutet, dass ein vergrößertes m_{Dec} dann eine verringerte *attraktive* skalare Kopplung der chiralen Kondensate σ und ζ an die Resonanzen zur Folge hat. Dies ist u.a. Gegenstand der Untersuchungen von Kapitel 4.

Ein vergrößertes g_{χ} bedeutet zum einen eine stärkere Ankopplung von χ an die Resonanzen, zum anderen verringert sich jedoch auch hier die attraktive skalare Ankopplung der chiralen Kondensate. Ob die χ -Kopplung diesen Effekt aufwiegen kann, hängt von der daraus resultierenden Dynamik des χ -Feldes ab, was im Kapitel 6 eingehend untersucht wird.

Am Ende des Kapitels 4 wird in Abschnitt 4.3 noch eine andere Erweiterung des Modells eingeführt und untersucht. Das Dekuplett wird dort ersetzt durch eine effektive Test-Resonanz mit höherer Masse, wobei das Kopplungsschema der ersten Erweiterung von oben entspricht.

Ferner wird am Ende des Kapitels 6 die zweite Erweiterung von oben variiert, wie im entsprechenden Abschnitt 6.3 näher ausgeführt wird.

Kapitel 4

Phaseneigenschaften des Modells

Nachdem das Modell im vorigen Kapitel vorgestellt wurde, wollen wir in diesem Kapitel seine Eigenschaften bei hohen Temperaturen oder bzw. und hohen Dichten untersuchen. Dazu wird die skalare und vektorielle Ankopplung zusätzlicher baryonischer Freiheitsgrade variiert und deren Einfluss auf Phasenübergangsverhalten des Modells untersucht [78, 79]. Der Wichtigkeit der schweren hadronischen Zustände bei der Modellierung des Phasenübergangsverhaltens der QCD wurde bereits in der Einleitung (Kapitel 1) diskutiert.

In diesem Kapitel soll das qualitative Verständnis des Zusammenhangs zwischen der Stärke dieser Kopplungen und dem resultierenden Phasenübergangsverhalten im Vordergrund stehen, deshalb werden der Einfachheit halber zwei Näherungen gemacht: Zum einen die anfangs in Kapitel 3 erwähnte Näherung des eingefrorenen Gluonkondensats ($\chi \equiv \chi_0$), und zum anderen werden für die Mesonen anstelle von effektiven Massen die Vakuummassen verwendet, so dass die Mesonen nicht an die Feldgleichungen koppeln. Die letztere Näherung bewirkt keine qualitative Veränderung des Phasenübergangsverhaltens, während der Einfluss eines dynamischen Gluonkondensats in Kapitel 6 gesondert behandelt wird.

4.1 Heiße Hadronische Materie

Zuerst sollen die Eigenschaften des Modells bei verschwindendem baryochemischem Potential, also bei $\mu = 0$, untersucht werden. In diesem Fall bilden sich bei hohen Temperaturen T die Baryonen und ihre Antiteilchen in jeweils gleicher Anzahl, so dass die einzelnen Baryondichten ρ_i verschwinden. Da die Vektormesonen nur an die Baryondichten an koppeln – siehe

Gl. (3.2) bzw. (3.33, 3.34) – haben sie in diesem Fall *keinen* Einfluss und der Einfluss der skalaren Kopplung kann hier für sich untersucht werden.

Das Phasenübergangsverhalten bei $\mu = 0$ wird also in unserem Modell nur durch den Massenterm der Dekuplett-Baryonen $m_{\text{Dec}} = \text{const.}$ bestimmt, unabhängig von der relativen Stärke ihrer Vektorkopplung r_V (3.23).

Die skalare Kopplung muss zusammen mit dem expliziten Massenterm m_{Dec} aus Gl. (3.48) für die Massen (3.50–3.53) jeweils die Vakuumwerte liefern, wie bereits in Abschnitt 3.3.3 ausgeführt. Folglich bedeuten große Werte $m_{\text{Dec}} \approx m_\Delta$ eine stark reduzierte skalare (attraktive) Kopplung, während ein kleiner Wert $0 \approx m_{\text{Dec}} \ll m_\Delta$ für eine kaum verminderte skalare Ankopplung der Resonanzen steht, wo deren Massen fast vollständig durch die skalaren Felder generiert werden.

Chirale Kondensate

Wenden wir uns zuerst den chiralen Kondensaten zu, den Skalarfeldern σ und ζ . Sie sind die Ordnungsparameter des chiralen Phasenübergangs, auch wenn ihre Werte oberhalb des Phasenübergangs nicht exakt zu Null werden können: zum einen wegen dem explizit symmetriebrechenden Term \mathcal{L}_{ESB} (3.5), welcher die nichtverschwindenden Quarkmassen und Pionmassen modelliert, zum anderen aber auch wegen des Terms $\propto \ln \sigma^2 \zeta$ aus \mathcal{L}_0 (3.4), der aus der Modellierung des Skalenverhaltens stammt. Somit stehen große Werte von σ und ζ (nahe der Vakuum Erwartungswerte σ_0, ζ_0) für eine spontane Brechung der chiralen Symmetrie und kleine Werte für eine weitgehend restaurierte chirale Symmetrie.

Eine starke Veränderung dieser Ordnungsparameter signalisiert einen Phasenübergang. Sprünge in den Kondensaten zeigen den Phasenübergang erster Ordnung¹ an – je kleiner der Sprung desto schwächer der Phasenübergang. An einem kontinuierlichen Phasenübergang, der *Crossover* genannt wird, fallen die Kondensate ohne Diskontinuität; hier ist beispielsweise die kritische Temperatur (die Phasenübergangstemperatur des kontinuierlichen Phasenübergangs) dann durch die stärkste Veränderung der Kondensate gegeben.

In den Bildern 4.1 sind das chirale Kondensat σ (oben) und das seltsame chirale Kondensat ζ (unten) als Funktion der Temperatur T dargestellt für verschiedene m_{Dec} . Bei kleinen Werten $m_{\text{Dec}} < 260$ MeV oder starker skalarer

¹Allgemein ist die Ordnung n eines Phasenübergangs dadurch definiert, dass bei der n -ten Ableitung des jeweiligen thermodynamischen Potentials zum ersten Mal eine Diskontinuität auftritt, siehe z.B. Ref. [75].

Kopplung ergibt sich ein Phasenübergang erster Ordnung, erkennbar an dem Sprung zu niedrigen Werten von σ bzw. ζ (bei $T \approx 155$ MeV für $m_{\text{Dec}} = 0$).

Dieser Phasenübergang entsteht durch die vermehrte Bildung von Teilchen-Antiteilchen-Paaren bei hohen Temperaturen, auch besonders von Delta-Resonanzen. Da die skalaren Dichten der Baryonen nach der Feldgleichung (3.30) die Quellen des σ -Felds sind, führt dies zu einer Absenkung von σ und damit auch zu einer Absenkung der Baryonenmassen, die durch σ dynamisch generiert werden. Dadurch können die Delta-Resonanzen wiederum leichter produziert werden, es kommt zu einem sprunghaften Anstieg der Produktion von Teilchen-Antiteilchen-Paaren und gleichzeitigem Abfall des σ -Felds. Der Mechanismus dieses Phasenübergangs ähnelt damit jenem aus Ref. [34].

Oberhalb des Phasenübergangs sind die Freiheitsgrade des Modells allerdings ebenfalls hadronisch, das Modell beschreibt dort Baryonen mit extrem stark abgesenkten effektiven Massen aber unverändert großer Entartung. Andere Studien [80, 81] geben Hinweise darauf, dass hadronische Freiheitsgrade in der Nähe des Phasenübergangs noch durchaus eine Berechtigung haben können; hadronische Eigenschaften bleiben noch teilweise erhalten, beispielsweise weil sich die Valenzquarks der ursprünglichen Hadronen noch in räumlicher Nähe zueinander befinden.

Das Abfallen von ζ ist deutlich schwächer als jenes von σ in den Abb. 4.1, denn es werden oberhalb dieses Phasenübergangs hauptsächlich Teilchen-Antiteilchen Paare von Delta-Resonanzen produziert, Paare von seltsamen Baryonen dagegen weniger. Letztere erfahren durch den σ -Abfall zwar auch eine Massenabsenkung, der ζ -Abfall ist sozusagen durch das Abfallen von σ induziert. Diese Massenabsenkung ist aber nicht stark genug für eine plötzliche Restaurierung im seltsamen Sektor. Bei höheren Temperaturen, $T \approx 175$ MeV, sind die skalaren Dichten der seltsamen Baryonen dann soweit angewachsen, dass auch ζ auf restaurierte Werte absinkt – allerdings kontinuierlich also mit einem Crossover.²

Schon bei $m_{\text{Dec}} = 300$ MeV ist dieser Abfall nicht mehr stufenförmig, sondern kontinuierlich. Die skalare Kopplung ist nicht mehr stark genug dafür, dass das Wechselspiel von Teilchen-Antiteilchen Paarproduktion und Absenkung von σ bzw. der effektiven Massen zu einem Sprung in σ führt. Der Phasenübergang wird also zu einem Crossover, der dann für zunehmendes m_{Dec} bzw. abnehmender skalarer Kopplung immer schwächer

²Dieser zweite Phasenübergang in ζ wird von dem Parameter m_3 (3.20) beeinflusst, wie in Ref. [32] gezeigt wurde. Hier soll aber der Einfluss der Baryonen-Resonanzen im Allgemeinen untersucht werden, deshalb beschränken wir uns in dieser Arbeit auf lediglich eine Wahl von m_3 .

wird.

Für verschwindende Baryonendichte ($\mu = 0$) ergibt sich also erwartungsgemäß ein direkter Zusammenhang zwischen der Stärke der skalaren Kopplung und Stärke des Phasenübergangs. Bei starker skalarer Kopplung bzw. kleinem expliziten Massenterm ($m_{\text{Dec}} < 260 \text{ MeV}$) zeigt sich ein Phasenübergang erster Ordnung in σ . Ist die skalare Kopplung schwächer bzw. der explizite Massenterm größer, zeigt sich für σ ein Crossover.

Bei sehr schwacher skalarer Ankopplung der Resonanzen tragen diese kaum zu den Feldgleichungen bei, was effektiv einem Modell ohne baryonische Resonanzen entspricht. Damit wird klar, dass die Resonanzen maßgeblich für das Auftreten eines Phasenübergangs erster Ordnung verantwortliche sind, wie schon Ref. [29] gezeigt wurde.

Effektives Potential

Dieses Verhalten lässt sich gut am effektiven Potential verdeutlichen. Zu jedem T und μ ist das effektive Potential ³ bzw. das thermodynamische Potential gegeben durch Gl. (3.27), und dessen Minima bzgl. der Felder charakterisieren die verschiedenen Phasen, die im System vorhanden sind. An diesen Minima entspricht das Potential dann gerade dem negativen Druck, $\Omega/V|_{\text{Minimum}} = -p$, und die Position des Minimums gibt den Wert des betrachteten Feldes zu gegebenem T und μ an. Die stabile Phase ist also jeweils diejenige mit dem größten Druck, d.h. mit dem tiefsten Minimum.

In den Abbildungen 4.2 oben und unten sieht man das effektive Potential als Funktion von σ bei einem Phasenübergang erster Ordnung (aufgrund starker skalarer Kopplung, $m_{\text{Dec}} = 0$) und einem Crossover (aufgrund reduzierter skalarer Kopplung, $m_{\text{Dec}} = 300 \text{ MeV}$). Dargestellt ist jeweils der Verlauf für verschiedene Temperaturen in der Nähe des Phasenübergangs bzw. der stärksten Feldänderung beim Crossover. (Das ζ -Feld ist dabei jeweils so gewählt, dass das Potential zu gegebenem σ minimal wird.)

Die Kurven zu höheren Temperaturen haben ein niedrigeres Potential, denn der Druck steigt mit zunehmender Temperatur. Die Position des tiefsten Minimums entspricht dann für die jeweilige Temperatur dem σ -Wert aus Abb. 4.1 oben (zum jeweils entsprechenden Wert von m_{Dec}).

³Der Begriff *effektives Potential* steht hier im Gegensatz zu den zusammengefassten Potentialtermen \mathcal{V} des Lagrangeans (3.1), denn das thermodynamische Potential (3.27) enthält zusätzlich auch Beiträge durch die Einteilchenzustände der Hadronen.

Beim Phasenübergang erster Ordnung (Abb. 4.2 oben) erhält man zwei wohlseparierte Minima zwischen den beiden Spinodal-Temperaturen, $T_{\text{Sp},1} = 153.2$ MeV und $T_{\text{Sp},2} = 157.0$ MeV, welche bei der Phasenübergangstemperatur ($T_{\text{P.T.}} = 154.7$ MeV) den gleichen Potential-Wert haben. Oberhalb dieser Temperatur springt dann das Feld (von großen σ Werten) auf kleine bzw. restaurierte Werte.

Aufgrund des Terms proportional zu $\ln \sigma$ aus \mathcal{L}_0 (3.4) divergiert das Potential bei kleinen σ -Werten – zumindest solange $\chi \neq 0$ gilt, wie wir in Kapitel 6 sehen werden. Somit nähert sich σ der Null nur asymptotisch.

Im Crossover Fall (Abb. 4.2 unten) gibt es dagegen zu jeder Temperatur nur ein Minimum. Der Übergang von großen zu kleinen σ -Werten ist hier kontinuierlich und wegen der reduzierten skalaren Kopplung auch deutlich langsamer: restaurierte Werte von $|\sigma| \approx 30$ MeV werden erst bei $T = 166$ MeV erreicht, während beim Phasenübergang erster Ordnung das σ -Feld schon bei $T_{\text{P.T.}} \approx 155$ MeV auf deutlich unter 30 MeV gefallen ist. Auch fällt die Potentialtiefe im Minimum langsamer ab, der Druck steigt hier also langsamer mit zunehmender Temperatur.

Die Kenntnis des Potentials als Funktion der Felder und seiner Form in der Umgebung der Minima ist beispielsweise auch für Untersuchungen zur Nichtgleichgewichts-Dynamik des Phasenübergangs [82, 83] von großer Wichtigkeit.

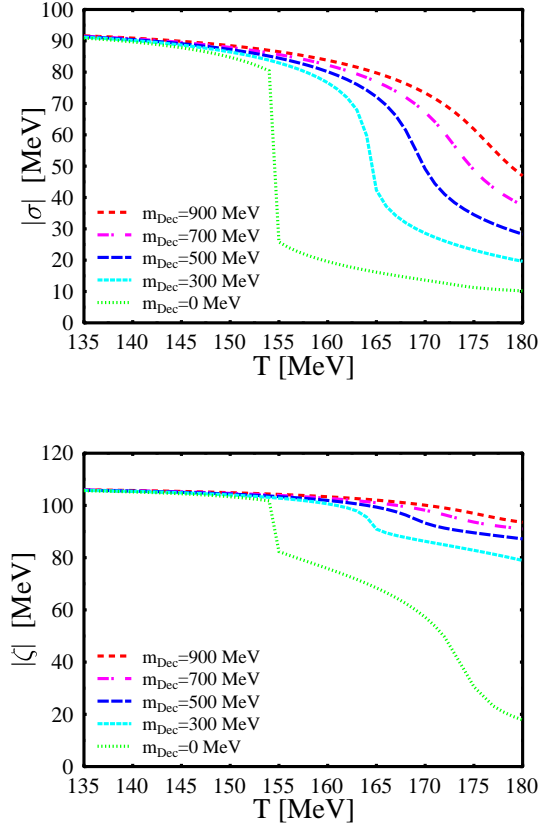


Abbildung 4.1: Temperaturabhängigkeit der chiralen Kondensate.

Dargestellt sind das nichtseltsame chirale Kondensat σ (oben) und das seltsame chirale Kondensat ζ (unten) bei verschwindender Baryonen-Dichte ($\mu = 0$) für verschiedene Werte des expliziten Massenterms $m_{\text{Dec}} = 0$ bis 900 MeV. Dies entspricht maximal starker bis schwacher skalarer Ankopplung der Resonanzen, was sich in der Stärke des Phasenübergangs bzw. des Crossovers zeigt.

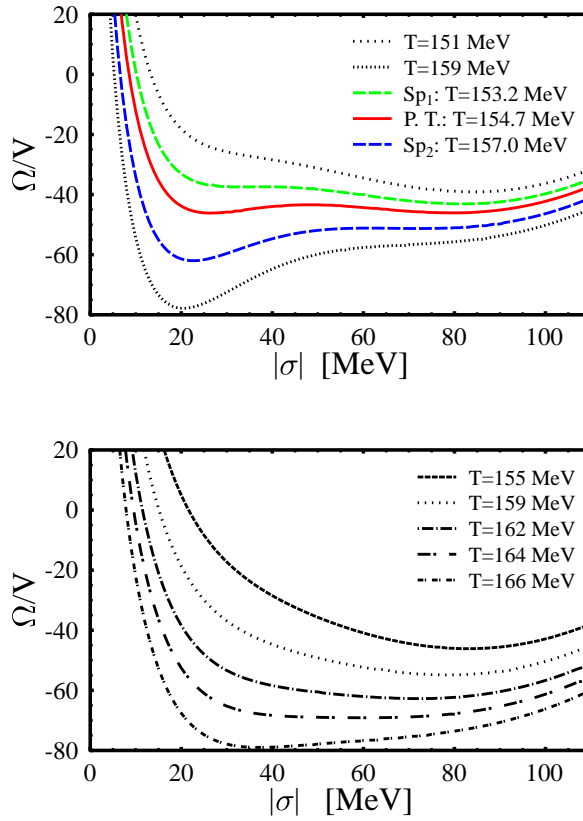


Abbildung 4.2: Thermodynamisches Potential vs. σ zu verschiedenen T .

Beispiele für einen Phasenübergang erster Ordnung aufgrund starker Skalarkopplung ($m_{\text{Dec}} = 0$, oben) und für einen Crossover aufgrund mittlerer skalarer Ankopplung der Resonanzen ($m_{\text{Dec}} = 300$ MeV, unten) bei verschwindender Baryonendichte, $\mu = 0$. Das Feld ζ ist so gewählt, dass das Potential Ω/V für jedes σ minimal wird.

4.2 Phasendiagramme

Nun sollen die Untersuchungen auf endliche μ ausgeweitet werden, wo die (Netto-)Baryondichte nicht mehr Null ist und deshalb die repulsive Wechselwirkung der Vektormesonen Einfluss hat. Es wird also jetzt die T - μ -Ebene studiert, insbesondere das T - μ -Phasendiagramm zum jeweiligen Parametersatz.

Berechnungen aus der Gitter-QCD oder IQCD (kurz für *Lattice QCD*) mit 2+1-Flavor sagen bei $\mu = 0$ einen Crossover zu einer chiralen restaurierten Phase bei hohen Temperaturen vorher, siehe z.B. [84]. Die Angaben zur zugehörigen Temperatur streuen allerdings noch von $T \approx 160$ bis 190 MeV [84, 85]. (Für einen Überblick zum aktuellen Stand von IQCD-Vorhersagen zum QCD-Phasendiagramm siehe z.B. [86].)

Aufgrund theoretischer Modellstudien erwartet man andererseits bei niedrigen Temperaturen $T \approx 0$ und hohe Dichten einen Phasenübergang erster Ordnung [16]. Dazwischen wird eine kritische Linie erwartet, beispielsweise als Funktion der Phasenübergangstemperatur in Abhängigkeit von μ parametrisiert, also $T_c(\mu)$. Diese beginnt auf der μ -Achse (bei $T = 0$) und endet vor der T -Achse in einem kritischen Endpunkt, wo der Übergang erster Ordnung zu einem Phasenübergang zweiter Ordnung wird. Für kleinere μ ergibt sich dann ein Crossover bis hin zur T -Achse (bei $\mu = 0$).

Eine sowohl schematische als auch semi-quantitative Darstellung dazu ist die Abbildung 4.3, entnommen aus Ref. [16]. Diese zeigt neben dem

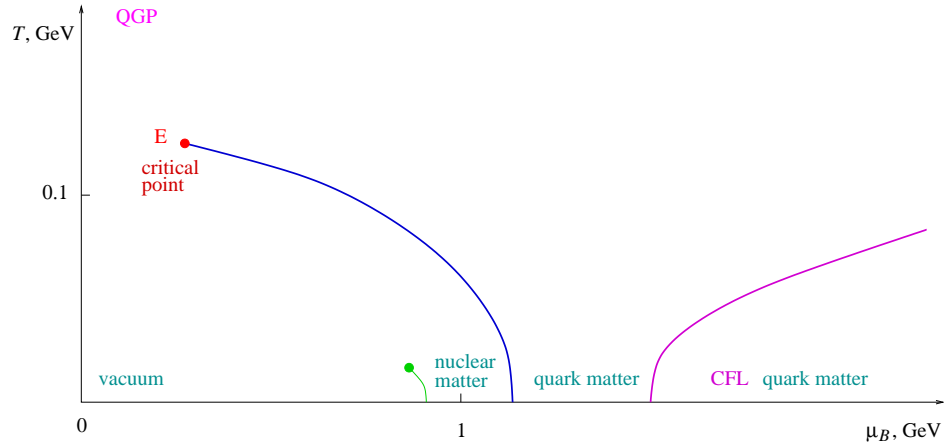


Abbildung 4.3: Phasendiagramm der QCD (aus Ref. [16]).

Schematisches μ_B - T -Phasendiagramm der QCD, entnommen aus der Ref. [16].

diskutierten chiralen Phasenübergang (blaue Linie) auch den Flüssig-Gas-

Phasenübergang (grüne Linie), welcher im Zusammenhang mit gebundener Kernmaterie auftritt, und deshalb nur in Modellen enthalten ist, die die Sättigung von Kernmaterie beschreiben. Im Sigma-Modell oder dem NJL-Modell kann dagegen nur der chirale Phasenübergang untersucht werden.

Bei sehr hohen chemischen Potentialen wird ein weiterer Phasenübergang (rosa Linie) erwartet mit einem Wechsel von ungeordneter zu geordneter Quark-Materie aufgrund von Flavor-Farb-Kräften (*Color-Flavor-Locking*). Referenzen dazu sind u.a. in [16] angegeben.

Die eingangs diskutierten Ergebnisse aus IQCD Rechnungen sind mit einigen Unsicherheiten behaftet, wie z.B. kleine Gittergrößen und endliche Gitterweiten oder unphysikalisch große Quark- bzw. Pionmassen. So gibt es auch Studien [87], welche auf Zweifel an der Crossover-Vorhersage bei $\mu = 0$ hindeuten. Dagegen wurden vor kurzem Ergebnisse für 2+1 Flavor und 'staggered' Quarks präsentiert mit physikalischen Massen für Pionen sowie Kaonen [88]. Die Extrapolation zum Kontinuum-Limes scheint hier endgültig auf einen Crossover bei $\mu = 0$ hinzuweisen. Wichtig ist aber auch hier trotzdem noch die Bestätigung durch unabhängige und verfeinerte Methoden bzw. Rechnungen.

Vor diesem Hintergrund werden in Abschnitt 4.2.3 auch Parametersätze mit einem Phasenübergang erster Ordnung bei $\mu = 0$ untersucht.

4.2.1 Phasendiagramme analog Gitter-QCD

In diesem Abschnitt soll jetzt untersucht werden, ob es Parameter-Kombinationen gibt, die im Einklang sind mit den Vorhersagen aus IQCD-Studien wie [84] und qualitativ mit dem Phasendiagramm aus Abb. 4.3 übereinstimmen (betreffend die blaue Linie der chiralen Phasenübergänge). Dazu werden die Parameter m_{Dec} und r_V variiert, welche die skalare und die vektoriellen Kopplungen der Dekuplett-Resonanzen bestimmen.

Wie im vorigen Abschnitt besprochen, ergibt sich ein Crossover bei $\mu = 0$ für $m_{\text{Dec}} > 260$ MeV, wir verwenden daher zunächst $m_{\text{Dec}} = 300$ MeV um der Crossover-Vorhersage aus der IQCD Rechnung zu tragen. Die höchste Temperatur für den kritischen Endpunkt T_E erhält man dann für die schwächste Vektorkopplung, $r_V = 0$. Das zugehörige Phasendiagramm ist Abb. 4.4 links, mit einem kritischen Endpunkt $T_E \approx 155$ MeV und $\mu_{q,E} \approx 70$ MeV. Dieser Punkt liegt in dem von der IQCD [84] vorhergesagten Bereich. Jedoch fällt die kritische Linie (rote durchgezogene Kurve, 'critical line') zu großen μ viel steiler ab als in den IQCD Vorhersagen.

Erhöht man nun die Vektorkopplung, nimmt T_E ab bei zunehmendem $\mu_{q,E}$. Beispiele für $r_V = 0.2$ und $r_V = 0.4$ sind in den Abb. 4.4 Mitte bzw.

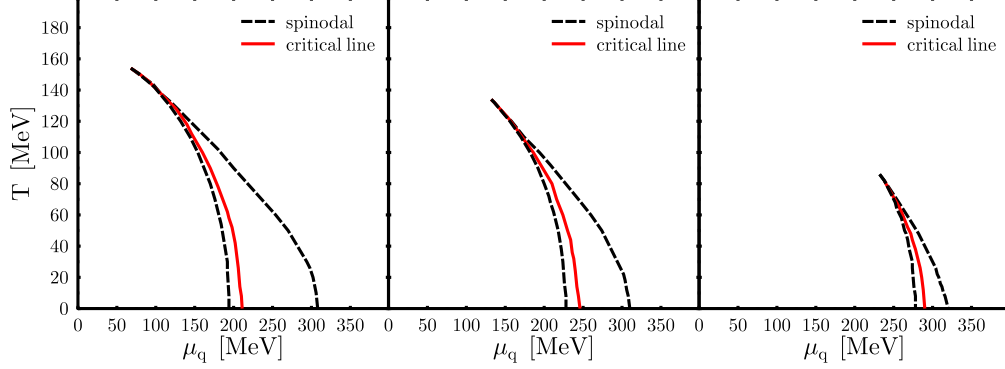


Abbildung 4.4: Phasendiagramme zu verschiedenen Vektorkopplungen.

Phasendiagramme zu von links nach rechts zunehmende Werte der Dekuplett-Vektorkopplung ($r_V = 0, 0.2, 0.4$) für $m_{\text{Dec}} = 300$ MeV. Neben der kritischen Linie ('critical line') sind jeweils auch die beiden Spinodalen ('spinodal'), zwischen welchen jeweils zwei Phasen im System vorhanden sind.

rechts zu sehen. Die gestrichelten Linien ('spinodal') in den Abbildungen 4.4 geben jeweils die beiden Spinodalen an, zwischen welchen jeweils zwei Phasen im System vorhanden sind.

Wenn man, anstatt die Vektorkopplung zu erhöhen, den expliziten Massenterm m_{Dec} erhöht und damit die skalare Kopplung verringert, ergeben sich ganz ähnliche Phasendiagramme. Offensichtlich reagiert das Modell – ab einem gewissen Grenzwert $m_{\text{Dec}} \approx 300$ MeV – auf eine stärkere Repulsion (durch größeres r_V) ganz ähnlich wie auf eine schwächere Attraktion (durch größeres m_{Dec}). Im Fall der Entartung der Vektorkopplung von Oktett und Dekuplett, d.h. $r_V = 1$, und in dem Grenzfall $m_{\text{Dec}} = m_\Delta$ ist jeweils kein Phasenübergang mehr im Phasendiagramm vorhanden.

Wie schon zuvor bei $\mu = 0$ wird auch hier deutlich, dass nur aufgrund der Resonanzen bzw. einer hinreichend attraktiven Ankopplung derselben, ein Phasenübergang auftreten kann.

Betrachten wir nun den Phasenübergang bei hohem μ . Der Grundzustand von Kernmaterie befindet sich bei $T = 0$ und $\mu_B = \mu_0 \equiv m_N + E/A \approx 923$ MeV. Bei geringfügig niedrigerem chemischem Potential wird der Flüssig-Gas-Phasenübergang erwartet, dessen kritische Linie schon bei sehr niedrigen Temperaturen endet, wie bereits bei Abb. 4.3 angesprochen. Die Phasendiagramme aus Abb. 4.4 zeigen hingegen die kritischen Linien eines *chiralen* Phasenübergangs, jenseits dessen das Modell baryonische Materie mit stark

abgesenkten effektiven Massen beschreibt. Dieser darf sinnvollerweise erst bei chemischen Potentialen deutlich oberhalb von $\mu_0 \approx 923$ MeV oder $\mu_q \approx 308$ MeV einsetzen, weil das Modell dort sonst chiral restaurierte Kernmaterie (Dichte-Isomer) vorhersagt und somit keine *normale* Kernmaterie mehr beschreiben kann.

Genau dies ist aber nicht der Fall bei den Phasendiagrammen aus Abb. 4.4, der Phasenübergang bei $T = 0$ liegt jeweils bei quark-chemischen Potentialen unter $\mu_q = 300$ MeV. Damit wäre für diese Parameter chiral-restaurierte Materie stabil, anstelle von normaler Kernmaterie!

Das bedeutet, dass das Modell in der vorliegenden Form nicht in der Lage ist, ein Phasendiagramm mit einem kritischen Endpunkt in dem von der IQCD vorhergesagten Bereich und gleichzeitig stabile normale Kernmaterie im Grundzustand zu beschreiben. Dies hängt unmittelbar mit dem bereits erwähnten steilen Abfallen der kritischen Linie $T_c(\mu)$ zusammen, was durch die Parameter m_{Dec} und r_V nicht wesentlich beeinflusst werden kann.

Trotzdem lassen sich Parameterkombinationen finden, die für den Grundzustand stabile normale Kernmaterie liefern. Die Abb. 4.5 zeigt die verschiedenen Varianten für einen Phasenübergang bei $T = 0$. Sind der Massenterm m_{Dec} und die Vektorkopplung r_V klein, entsprechend starker skalarer und schwacher vektorieller Ankopplung der Resonanzen, ist die chiral restaurierte Phase stabil (hellgrauer Bereich, 'stable chirally restored phase'). Bei mittleren Werten von m_{Dec} und r_V , also mittlerer skalarer Attraktion bzw. vektorieller Repulsion, ergibt sich stabile normale Kernmaterie (weißer Bereich, 'stable normal nuclear matter'). Wird die Repulsion für die Resonanzen zu stark und Attraktion zu schwach, entsprechend großer m_{Dec} und r_V , bleibt zwar die normale Kernmaterie stabil, aber der chirale Phasenübergang bei $T = 0$ verschwindet (dunkelgrauer Bereich, 'no phase transition').

Sucht man nun ein Phasendiagramm zu stabiler normaler Kernmaterie mit einer möglichst hohen Endtemperatur T_E , sind Parameter an der unteren Grenze des weißen Bereichs zu wählen. Für einen expliziten Massenterm von $m_{\text{Dec}} = 300$ MeV wie in Abb. 4.4, findet man auf diese Weise $r_V = 0.5$. Das zugehörige Phasendiagramm ist in Abb. 4.6 zu sehen, mit einem Endpunkt bei $T_E \approx 50$ MeV und $\mu_{q,E} \approx 290$ MeV.

Nun ist die gute Beschreibung von normaler Kernmaterie einer der Vorzüge des Modells. Unter dieser Bedingung ergeben sich Endpunkte bei maximal $T_E = 50$ MeV. Man muss hier also feststellen, dass es mit dem Modell in der gegenwärtigen Form *nicht* möglich ist, *ein Phasendiagramm mit einem kritischen Endpunkt in dem von der Gitter-QCD vorhergesagten Bereich zusammen mit stabiler normaler Kernmaterie zu erhalten.*

Dies ist eine Eigenschaft, die andere effektive Modelle wie σ -Modelle

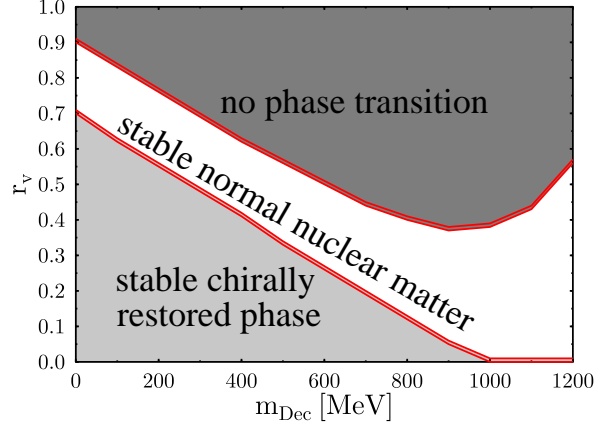


Abbildung 4.5: Parameterraum $m_{\text{Dec}}-r_V$ zum Phasenübergangsverhalten bei $T = 0$ und endlichem μ .

Angegeben sind diejenigen Bereiche in m_{Dec} und r_V als weißes Band ('stable normal nuclear matter'), die für $T = 0$ einen Phasenübergang bei endlichem μ und gleichzeitig stabile Kernmaterie ergeben. Oberhalb ist der Bereich der keinen Phasenübergang bei endlichem μ liefert (dunkelgrau, 'no phase transition'). Und im Bereich unterhalb findet der Phasenübergang bereits bei $\mu_B < \mu_0$ (oder $\mu_q < \frac{1}{3}\mu_0$) statt, so dass bei $T = 0$ nicht normale Kernmaterie stabil wäre, sondern die Phase, in der die chiralen Felder bereits restaurierte Werte haben (hellgrau, 'stable chirally restored phase').

oder NJL-Modelle, jedoch von vornherein nicht erfüllen. Trotzdem ergibt sich auch bei diesen Modellen typischerweise ein kritischer Endpunkt mit Temperaturen im Bereich von ≈ 50 bis 100 MeV, siehe Ref. [16], also deutlich unterhalb der IQCD-Vorhersage aus [84] mit ≈ 160 MeV.

Andererseits stellt die Forderung, ein Phasendiagramm zu erzeugen, dass qualitativ und quantitativ mit IQCD-Vorhersagen übereinstimmt, eine starke Einschränkung an die Parameter des Modells dar. Die 'Observable' Phasendiagramm gibt also wichtige Orientierung bei zusätzlichen bzw. zukünftigen Modellerweiterungen (vergleiche auch Abschnitt 4.3).

Schließlich wollen wir noch kurz auf den Mechanismus des chiralen Phasenübergangs bei $T = 0$ und endlichen μ eingehen. Wie im vorigen Abschnitt

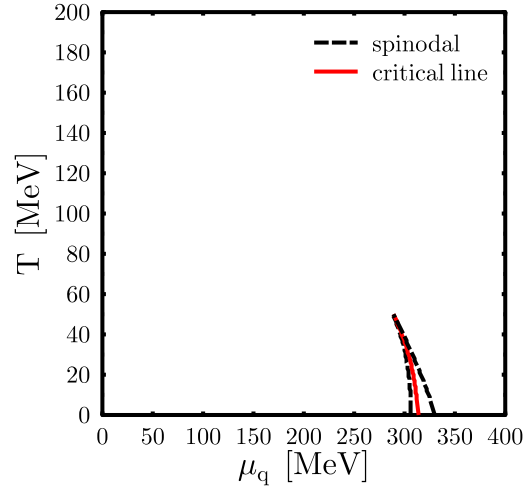


Abbildung 4.6: Phasendiagramm mit stabiler Kernmaterie.

Beispiel eines Phasendiagramms mit möglichst hohem kritischem Endpunkt T_E , dass nach Fig. 4.5 stabile normale Kernmaterie liefert: Parameter sind $r_V = 0.5$ und $m_{Dec} = 300$ MeV.

bei $\mu = 0$ liegt auch hier eine vermehrte Teilchenproduktion zu Grunde, allerdings handelt es sich hier nur um Baryonen nicht um Paare von Teilchen und Antiteilchen. Hier steigt also die Vektordichte – wieder hauptsächlich der Δ -Resonanzen – stark an, und mit ihr zwangsläufig auch die skalare Dichte, welche nach Gl. 3.30 die Quelle des σ -Felds ist. Dies führt wiederum auf das Wechselspiel der Absenkung des σ -Felds und damit Absenkung der effektiver Δ -Massen einerseits und dadurch erleichterte Produktion der Δ -Baryonen andererseits.

4.2.2 Thermodynamische Größen: Energiedichte

Als Beispiel für thermodynamische Größen soll nun noch die Temperaturabhängigkeit der Energiedichte e untersucht werden. Ein Phasenübergang erster Ordnung zeigt sich im Druck p lediglich als Knick, aber die beteiligten Teilchendichten – und damit auch die Energiedichte – müssen einen Sprung aufweisen am Phasenübergang.

In den Abbildungen 4.7 ist die (normierte) Energiedichte e/T^4 als Funktion der Temperatur dargestellt, einmal oben für $\mu = 0$ und einmal unten für endliche Baryonendichte, $\mu_q = 170$ MeV. Die Abbildungen zeigen also den Verlauf der Energiedichte entlang senkrechter Linien in Phasendiagrammen wie Abb. 4.4 links. Zum Vergleich ist jeweils auch das ideale Hadronengas ('Ideal Hadron Gas') als schwarze Linie und zusätzlich der Stefan-Boltzmann-Limes ('S.B. Limit', siehe auch unten) mit schwarzen Punkten angegeben.

Für $\mu = 0$ spielt die Vektorkopplung wie gehabt keine Rolle und das Phasenübergangsverhalten hängt nur von der skalaren Kopplungsstärke ab, siehe obere Abbildung. Für mittlere skalare Kopplung ($m_{\text{Dec}} = 300$ MeV, hellblaue Striche) erkennt man den Crossover bei $T \approx 165$ MeV deutlich an dem Abschnitt mit größerer Steigung. Wird die skalare Kopplung nun schwächer gewählt ($m_{\text{Dec}} = 700$ MeV, rosa Strichpunkte), ist der Crossover weniger ausgeprägt und setzt erst bei höheren Temperaturen ein ($T > 170$ MeV). Das Verhalten ist dem idealen Hadronengas umso ähnlicher, je schwächer die skalare Kopplung bzw. die Attraktion im Modell ist.

Der wechselseitige Einfluss von vektorieller und skalarer Kopplung kann bei endlicher Baryonendichte untersucht werden, wie in der unteren Abbildung 4.7 zu sehen ist. Für mittlere skalare Kopplung bei gleichzeitig verschwindender Vektorkopplung für die Dekuplett-Resonanzen ($m_{\text{Dec}} = 300$ MeV und $r_V = 0$, hellblaue Striche) springt die Energiedichte bei $T \approx 90$ MeV. Es ist die Phasenübergangstemperatur, die sich aus dem Phasendiagramm in Abb. 4.4 links für $\mu_q = 170$ MeV ergibt.

Wie schon zuvor bei den Phasendiagrammen diskutiert, sieht man auch hier wieder, dass es qualitativ einen ähnlichen Effekt hat, wenn man entweder die skalare Kopplung der Resonanzen reduziert ($m_{\text{Dec}} = 700$ statt 300 MeV, rosa Strichpunkte) oder deren Vektorkopplung erhöht (orange Punkte, $r_V = 0.4$ statt 0). Die zugehörigen Kurven liegen nahe beisammen, in beiden Fällen wird der Phasenübergang erster Ordnung abgeschwächt zu einem Crossover, der zu höheren Temperaturen verschoben ist.

Der Vergleich des Modells mit dem idealen Hadronengas (schwarze Linie, 'Ideal Hadron Gas') ergibt in beiden Abb. 4.7 völlige Übereinstimmung bei niedrigen Temperaturen. Erst kurz vor und dann besonders bei dem jeweiligen Phasenübergang oder Crossover zeigen sich die Unterschiede – und zwar

umso drastischer, je stärker die Attraktion bzw. schwächer die Repulsion im Modell ist.

Vergleich mit dem Bag-Modell

Die Energiedichte erreicht nach dem Phasenübergang bzw. nach dem Crossover sehr hohe Werte, besonders extrem für den Phasenübergang erster Ordnung. Es soll deshalb untersucht werden, was über den Gültigkeitsbereich des Modells ausgesagt werden kann.

Bei Temperaturen, die *sehr weit* über der Phasenübergangstemperatur T_{crit} liegen, sind die Freiheitsgrade des hadronischen chiralen Modells in jedem Fall nicht mehr passend, denn hier sagt das Modell Hadronen mit stark reduzierten Massen aber unverändert hoher Entartung voraus. Für sehr hohe Temperaturen wird das Deconfinement erwartet und es sollte stattdessen das Quark-Gluon-Plasma (QGP) der stabile Materie-Zustand sein. Dort ist es daher notwendig Quarks und Gluonen zu betrachten, anstelle von Hadronen.

Der maximale Druck wird erreicht mit der Annahme von *masselosen* Quarks und Gluonen, was einem ultrarelativistischen idealen Bosonen- und Fermionen-Gas entspricht. Dieser Grenzfall wird als Stefan-Boltzmann-Limes bezeichnet. Er wird IQCD-Rechnungen (für $\mu = 0$) zufolge jedoch selbst bei Temperaturen von $T \approx 4T_{\text{crit}}$ noch nicht erreicht [89, 90]; neuere Berechnungen bestätigen dies [91]. Das bedeutet, dass auch bei Temperaturen weit oberhalb von T_{crit} das System noch Wechselwirkung enthält, und es sich nicht um ein freies Gas aus Quarks und Gluonen handelt.

Andererseits bedeutet dies aber auch, dass eine Modellvorhersage deutlich unter dem Stefan-Boltzmann-Limes des QGP bleiben muss, um realistisch zu sein.

Nach dem Bag-Modell [92] ist der Druck im QGP für Gluonen (masselose Bosonen) und Quarks (masselose Fermionen)

$$p_{\text{QGP}} = d_{\text{Bose}} \frac{\pi^2}{90} T^4 + d_{\text{Fermi}} \left(\frac{7}{4} \frac{\pi^2}{90} T^4 + \frac{1}{12} \mu_q^2 T^2 + \frac{1}{24\pi^2} \mu_q^4 \right) - B, \quad (4.1)$$

mit der Bag-Konstante B , siehe z.B. Abschnitt 1.2.1 in Ref. [89]. Für die Energiedichte ergibt sich nach $e = Ts - p + \mu_q \rho_q \equiv T \partial p / \partial T - p + \mu_q \partial p / \partial \mu_q$ somit

$$e_{\text{QGP}}/T^4 = \left(d_{\text{Bose}} + d_{\text{Fermi}} \frac{7}{4} \right) \frac{\pi^2}{30} + d_{\text{Fermi}} \left(\frac{1}{4} \frac{\mu_q^2}{T^2} + \frac{1}{8\pi^2} \frac{\mu_q^4}{T^4} \right) + \frac{B}{T^4}. \quad (4.2)$$

Um die Werte mit den Vorhersagen des chiralen Modells zu vergleichen, sind die Entartungen d für $N_f = 3$ Quark-Flavor zu berechnen, und zwar mit dem physikalischen Fall von $N_c = 3$ Farben. Es ergibt sich für die Gluonen (2 Polarisierungen) bzw. Quarks (2 Spin-Projektionen)

$$d_{\text{Bose}} = 2(N_c^2 - 1) = 16 \quad \text{bzw.} \quad d_{\text{Fermi}} = 2N_c N_f = 6N_f = 18. \quad (4.3)$$

Der Stefan-Boltzmann-Limes für die Energiedichte ist für $N_f = 3$ damit

$$\left. \frac{e_{\text{QGP}}}{T^4} \right|_{N_f=N_c=3} = \frac{95\pi^2}{60} + \frac{9}{2} \frac{\mu_q^2}{T^2} + \frac{9}{4\pi^2} \frac{\mu_q^4}{T^4} + \frac{B}{T^4}. \quad (4.4)$$

In den Abbildungen 4.8 ist noch einmal die Energiedichte wie in den vorigen Abb. 4.7 dargestellt, hier nun in einem erweiterten Bereich. Zusätzlich sind die obigen Limiten vom reinen QGP ($B = 0$) mit schwarzen Punkten und vom Bag-Modell mit blauen Strichen eingezeichnet (für hohe T fallen sie zusammen, weil dann B/T^4 verschwindet). Im Fall $\mu = 0$ (obere Abb.) übersteigen die Zustandsgleichungen zwischen $T \approx 160$ MeV ($m_{\text{Dec}} = 300$ MeV, hellblaue Striche) und ≈ 220 MeV (Ideal Hadron Gas, schwarze Linie) die QGP-Limiten. Und bei $\mu_q = 170$ MeV findet dieses Übersteigen schon deutlich früher statt, bei den chiralen Zustandsgleichungen mit dem jeweiligen Phasenübergang, $T \approx 90$ bis 140 MeV, beim idealen Hadronengas entsprechend später ($T \approx 175$ MeV).

Da das QGP der stabile Zustand ist im Grenzfall beliebig hoher Temperaturen, sind die eingezeichneten Linien die Obergrenzen der maximal sinnvollen Energiedichte – und entsprechen damit auch dem maximal sinnvollen Druck. Ein physikalisches Modell muss mit seinen Vorhersagen also deutlich unter jenem Druck bzw. unter diesen Energiedichten bleiben. Deshalb geben die Schnittpunkte in den Abbildungen die Temperaturen an, bei denen die jeweiligen Zustandsgleichungen *definitiv* nicht mehr sinnvoll sind – weil sie eine höhere Energiedichte ergeben als dem stabilen Zustand entspricht.

Der Grund dafür sind die falschen hadronischen Freiheitsgrade bzw. die daraus folgenden zu hohe Entartung. In Ref. [93] wurde ein Modell vorgeschlagen, welches das thermodynamische Verhalten am Phasenübergang (bei $\mu = 0$) aus lQCD-Rechnungen beschreiben kann, indem die Baryonenmassen am Phasenübergang zunehmen – im Gegensatz zur Massendynamik der Baryonen im chiralen Modell.

Diese Betrachtung soll eine einfache Orientierung vermitteln, für ein vollständiges Bild wäre natürlich auch der Druck zu untersuchen.

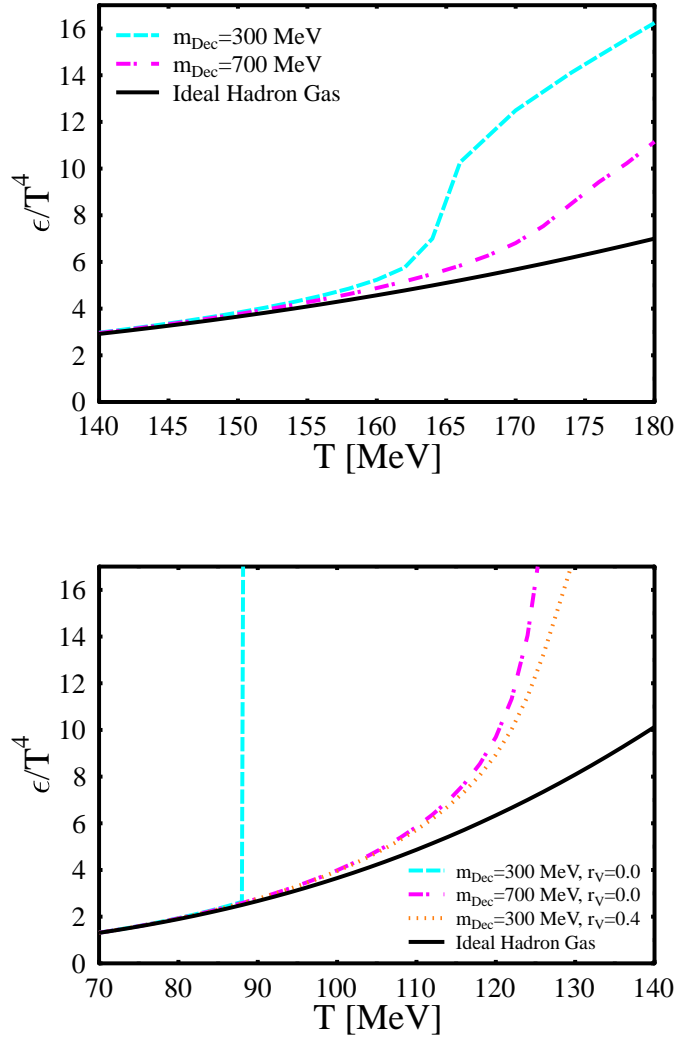


Abbildung 4.7: Energiedichte e/T^4 als Funktion der Temperatur T .

Dargestellt ist die Energiedichte in Einheiten von T^4 bei $\mu = 0$ (oben) und bei $\mu_q = 170$ MeV (unten) für verschiedene skalare und vektorielle Kopplungsstärken. Zum Vergleich sind jeweils auch die Kurven des idealen Hadronengases angegeben.

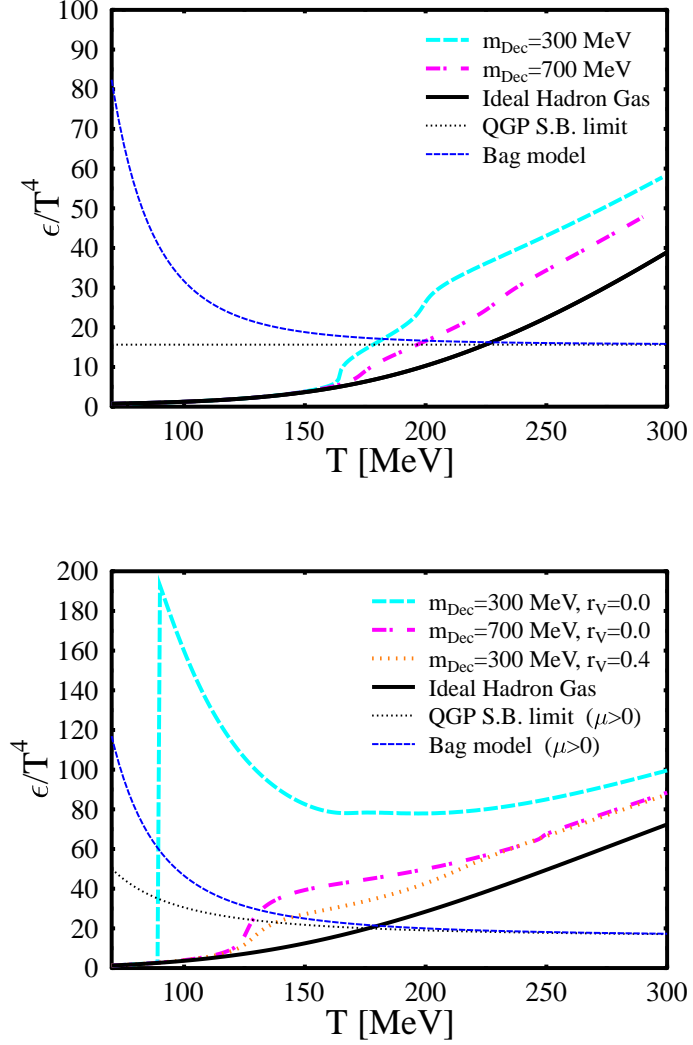


Abbildung 4.8: Energiedichte e/T^4 vs. T im Vergleich zum QGP.

Dargestellt ist die Energiedichte in Einheiten von T^4 bei $\mu = 0$ (oben) und $\mu_q = 170$ MeV (unten) analog zur vorigen Abbildung 4.7. Als obere Grenze sind hier der Stefan-Boltzmann-Limes für das QGP (ideales Gas masseloser Gluonen und Quarks mit 3 Flavor) und das Bag-Modell angegeben, siehe Gl. (4.1–4.4) und Diskussion dazu.

4.2.3 Phasendiagramme mit Phasenübergang bei $\mu = 0$

Als Abschluss dieser Phasendiagramm-Studien wollen wir auch noch Parameterkombinationen betrachten, die bei $\mu = 0$ einen Phasenübergang erster Ordnung ergeben. Aktuellste Rechnungen aus der IQCD sagen dort zwar einen Crossover vorher [88], aber wegen der in Abschnitt 4.2 genannten grundsätzlichen Unsicherheiten von IQCD-Berechnungen sowie der dort angeführte Studie in Ref. [87], wo die Crossover-Vorhersage bei $\mu = 0$ in Zweifel gezogen wird, soll auch untersucht werden, welche Phasendiagramme ohne diese Einschränkung aus unserem Modell resultieren.

Einen Phasenübergang erster Ordnung bei $\mu = 0$ ergibt sich für starke skalare Kopplung der Resonanzen, genauer gesagt für $m_{\text{Dec}} < 270$ MeV. Die Abbildung 4.9 zeigt Phasendiagramme zu maximaler Skalarkopplung, also zu $m_{\text{Dec}} = 0$ MeV, mit sehr unterschiedlicher und zum Teil neuartiger Struktur. Im linken Bild sieht man das Phasendiagramm ganz ohne Repulsion für die

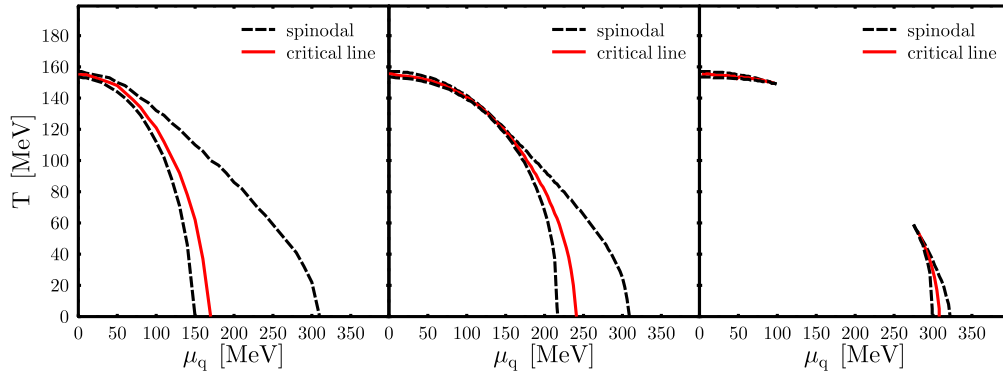


Abbildung 4.9: Phasendiagramme mit Phasenübergang bei $\mu = 0$.

Phasendiagramme für $m_{\text{Dec}} = 0$ MeV und von links nach rechts zunehmende Werte der Vektorkopplung ($r_V = 0, 0.4, 0.7$).

Resonanzen bzw. ohne Vektorkopplung, $r_V = 0$. Die kritische Linie $T_c(\mu)$ (wieder die rote durchgezogene Linie, 'critical line') geht von der μ -Achse in einem Bogen zur T -Achse hoch. Der Phasenübergangsbereich, also der Bereich zwischen den beiden Spinodalen (schwarze Striche, 'spinodal'), wo zwei Phasen im System vorhanden sind, ist bei kleinen T sehr breit.

Eine mittlere Repulsion bzw. Vektorkopplung ($r_V = 0.4$, mittleres Bild) ergibt immer noch einen durchgehenden Bogen für die kritische Linie. Allerdings ist der Phasenübergangsbereich schon merklich schmaler geworden, besonders bei Temperaturen um $T = 120$ MeV bzw. chemischen Potentialen

um $\mu_q = 150$ MeV.

Wird die Repulsion nun noch weiter erhöht, in dem die Vektorkopplung auf $r_V > 0.5$ verstärkt wird, geht die kritische Linie nicht mehr durch, sondern wird bei mittleren T bzw. μ_q unterbrochen. Die Abbildung 4.9 rechts zeigt mit $r_V = 0.7$ ein Beispiel dafür.

Der obere Teil der kritischen Linie rührt von der starken skalaren Kopplung her ($m_{\text{Dec}} = 0$ MeV) und bleibt von erhöhter Vektorkopplung unbenommen. Er erstreckt sich von $\mu = 0$ bis ungefähr $\mu_q = 100$ MeV, wo aus dem Phasenübergang erster Ordnung dann ein Crossover wird.

Bei großen μ_q verhält sich das Phasendiagramm ähnlich wie im vorigen Abschnitt besprochen, die kritische Linie beginnt bei $T = 0$ und hat einen kritischen Endpunkt bei umso größeren μ_q und umso niedrigeren T , je stärker die Repulsion bzw. die Vektorkopplung ist. Erst für Vektorkopplungen über $r_V = 0.9$ verschwindet die kritische Linie bei großen μ_q ganz, siehe dazu auch den $m_{\text{Dec}}-r_V$ -Parameterraum für einen chiralen Phasenübergang bei $T = 0$ aus der Abbildung 4.5.

Wiederum ergibt sich die Problematik mit der Stabilität von normaler Kernmaterie. Die kritischen Linien zu schwacher Vektorkopplung beginnen für $T = 0$ bei zu kleinen μ_q , erst ab $r_V = 0.7$ ergibt sich stabile normale Kernmaterie im Grundzustand (siehe wieder Abb. 4.5). Das Phasendiagramm dazu ist also gerade die Abb. 4.9 rechts, mit einem (*ersten*) kritischen Endpunkt bei $T_E \approx 60$ MeV und $\mu_{q,E} \approx 275$ MeV. Diese Phasendiagrammstruktur unterscheidet sich *ganz erheblich* von den Vorhersagen aus der IQCD.

Schließlich soll noch veranschaulicht werden, wie sich dieses Verhalten im skalaren Kondensat σ , dem Ordnungsparameter des betrachteten Phasenübergangs, widerspiegelt. In Abb. 4.10 ist für diese Kopplungsstärken ($m_{\text{Dec}} = 0$ MeV, $r_V = 0.7$) die Temperaturabhängigkeit von σ zu verschiedenen μ_q dargestellt, also der σ -Verlauf entlang senkrechter Linien im Phasendiagramm Abb. 4.9 rechts.

Für kleine μ_q (0 und 100 MeV) ergibt sich ein Phasenübergang erster Ordnung bzw. ein Sprung auf niedrige σ -Werte bei hohen Temperaturen ($T = 160$ bzw. 150 MeV), welcher bei mittleren μ_q (200 MeV) zum Crossover bzw. zum kontinuierlichen Abfallen wird. Und bei großen μ_q (290 und 300 MeV) taucht der Phasenübergang erster Ordnung wieder auf, das Kondensat fällt stufenförmig auf niedrige Werte, hier natürlich schon bei viel niedrigeren Temperaturen ($T = 45$ bzw. 30 MeV).

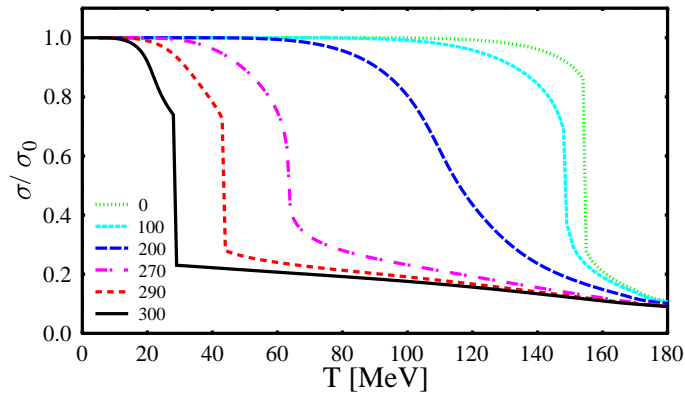


Abbildung 4.10: Skalares Kondensat σ vs. Temperatur zu verschiedenen chemischen Potentialen bei starker skalarer und vektorieller Kopplung.

Temperaturabhängigkeit des nichtseltsamen skalaren Kondensates σ (normiert auf den Vakuumwert σ_0) für maximale skalare Kopplung und starke Vektorkopplung ($m_{\text{Dec}} = 0$ MeV und $r_V = 0.7$, entsprechend Abb. 4.9 rechts). Dargestellt sind Kurven zu verschiedenen chemischen Potentialen $\mu_q = 0$ bis 300 MeV, wobei der Phasenübergang erster Ordnung nur für kleine und große μ auftaucht, für mittlere μ wird er zu einem Crossover.

4.3 Realistisches Phasendiagramm mit Test-Resonanz

Zum Abschluss dieses Kapitels soll der Einfluss von sehr schweren hadronischen Zuständen auf das Phasendiagramm und auf die Position des Endpunkts untersucht werden. Im Vordergrund steht dabei die Frage, ob und wie die Probleme der vorigen Abschnitte gelöst werden können: eine Zustandsgleichung zu finden, die ein Phasendiagramm mit einem Endpunkt in guter Übereinstimmung mit der IQCD-Vorhersage von Fodor und Katz (2004, Ref. [84]) ergibt und *gleichzeitig* eine gute Beschreibung von normaler Kernmaterie liefert.

Eine Einschränkung des Modells, wie es in den vorigen Abschnitten verwendet wurde, ist, dass nur ein vergleichsweise kleiner Anteil der schweren Hadronen dynamisch an das Modell gekoppelt sind – nämlich lediglich das baryonische Dekuplett – zusätzlich zum Oktett.

In der Einleitung (Kapitel 1) wurde bereits die Wichtigkeit der schweren hadronischen Zustände diskutiert, was hier rekapituliert werden soll. Zum einen ist es bei einem idealen Hadronengas-Modell grundsätzlich wichtig, ein möglichst vollständiges hadronisches Massenspektrum zu verwenden (in der Regel bis $m_{\text{Hadron}} \approx 2 \text{ GeV}$). Unabhängig davon wurde in Ref. [36] gezeigt, dass die schweren Zustände – trotz der Unterdrückung aufgrund ihrer Masse – mit zunehmender Temperatur bedeutende Beiträge zur Energiedichte leisten. Speziell wurde in [37, 38] gezeigt, dass unterhalb des Phasenübergangs eine akzeptable Beschreibung thermodynamischer Größen aus IQCD-Rechnungen bereits mit einem idealen Hadronengas-Modell gelingt, bei welchem das Massenspektrum entsprechend skaliert wurde.

Ferner können schwere Zustände [36] auch die starke Abhängigkeit der kritischen Temperatur (bei $\mu = 0$) von der verwendeten Pionmasse reduzieren, wie sie in einem linearen σ -Modell (welches keine Baryonen enthält) beobachtet wurde [39]; bei IQCD-Rechnungen zeigt sich nur eine schwache Abhängigkeit der kritischen Temperatur von der Pionmasse.

Außerdem ist das in den vorigen Abschnitten beobachtete Phänomen, dass die Temperatur des Endpunkts wesentlich tiefer liegt als die IQCD-Vorhersagen, offenbar eine typische Eigenschaft von Modellen, deren Phasenübergang nur von der Dynamik des Ordnungsparameters getrieben wird (etwa σ -Modell oder NJL-Modell), ohne dass weitere schwere Zustände angekoppelt sind, siehe die bereits erwähnte Zusammenstellung in Ref. [16].

Zusammenfassend wäre es also erstrebenswert, auch schwerere Resonanzen als das Dekuplett dynamisch an das Modell zu koppeln. Eine Erweiterung des Modells auf das vollständige bekannte Massenspektrum führt auf die Problematik, die große Zahl der dadurch hinzukommenden Kopplungsparameter (und möglichen Kopplungsschemata) sinnvoll festzulegen.

Erweiterung des Modells um eine Test-Resonanz

Als ein erster, vereinfachender Schritt in diese Richtung kann das hadronische Spektrum der Resonanzen⁴ mithilfe eines einzigen *effektiven* Zustandes – einer *Test-Resonanz* – modelliert werden. Auf diese Weise bleibt die Anzahl der hinzukommenden Parameter überschaubar.

Eine solche zusätzliche Resonanz kann auch als ein schwerer Test-Zustand angesehen werden, um die unphysikalisch hohen Mesonen- bzw. Quarkmassen in IQCD-Rechnungen bei $\mu > 0$ effektiv zu berücksichtigen, anstelle einer Skalierung aller in das chirale Modell eingehenden dynamischen Massen. Eine Erniedrigung der Masse dieses Test-Zustands kann dann Orientierung geben, in welcher Weise sich das IQCD-Phasendiagramm mit kleineren Quarkmassen verändern würde.

Anstelle des baryonischen Dekupletts führen wir nun im Modell-Lagrangean (3.1) den Term

$$\mathcal{L}_R = -d_R \left(\bar{\Psi}_R m_R^* \Psi_R + \bar{\Psi}_R g_{R\omega} \gamma^0 \omega_0 \Psi_R \right) \quad (4.5)$$

ein (sowie einen entsprechenden kinetischen Term). Hier gibt d_R die Entartung der Test-Resonanz an, welche in Anlehnung an die Δ -Baryonen zu $d_R = d_\Delta \equiv 16$ gewählt wird. Bei den folgenden Untersuchungen verwenden wir effektive Mesonenmassen (vgl. Abschnitt 3.3), für eine kurze Diskussion zum Einfluss dieser Näherung siehe 5.1.2.

Die effektive Masse der Test-Resonanz aus \mathcal{L}_R wird festgelegt wie folgt

$$m_R^* = m_0 + g_{R\sigma} \sigma . \quad (4.6)$$

Sie setzt sich also zusammen aus einem expliziten Massenterm $m_0 = \text{const.}$ und einem dynamischen Anteil, der durch das nichtseltsame Quarkkondensat generiert wird. Die Vakuummasse dieses Zustands ist dann

$$m_R \equiv m_R^*(\sigma_0; g_{R\sigma}, m_0) = m_0 + g_{R\sigma} \sigma_0 . \quad (4.7)$$

⁴Auch hier wird die Bezeichnung 'Resonanz' wieder als Synonym für einen schweren hadronischen Zustand mit hoher Entartung verwendet, wobei die für Resonanzen typischen Zerfallsbreiten vernachlässigt werden.

Die Vektorkopplung der Test-Resonanz, die sich aus \mathcal{L}_R (4.5) ergibt, kann wieder (wie zuvor beim Dekuplett) in Bezug gesetzt werden zur Vektorkopplung des baryonischen Oktetts,

$$g_{R\omega} = r_V g_{N\omega} \quad \text{bzw.} \quad r_V = g_{R\omega}/g_{N\omega} . \quad (4.8)$$

Grenzfälle bei verschwindender Baryondichte ($\mu = 0$)

Bei verschwindender Baryondichte oder verschwindendem chemischen Potential $\mu = 0$ hängt das Phasenübergangsverhalten der QCD von der Anzahl der Quark-Flavors und den Quarkmassen ab [16]: In der so genannten *quenched* lQCD, welche einem System ohne Quarks bzw. mit unendlich schweren Quarkmassen entspricht (auch *pure-gauge* genannt), ergibt sich für die kritische Temperatur ein Wert von $T_c \approx 260$ MeV [94]. Bei der Verwendung von kleineren Quark- oder Pionmassen reduziert sich die kritische Temperatur [95]. Rechnungen aus der lQCD auf der Basis von zwei bzw. drei leichten Quark-Flavor ergeben kritischen Temperaturen von $T_c \approx 175$ MeV bzw. $T_c \approx 155$ MeV. Jedoch wurde vor einiger Zeit ein Wert von $T_c \approx 190$ MeV angegeben [85] für den Fall von 2+1-Flavor bei vergleichsweise kleinen Quarkmassen (und weiteren technischen Verbesserungen).

Für zwei Quark-Flavor unterstützen lQCD Vorhersagen einen kontinuierlichen Phasenübergang [94], in Übereinstimmung mit Symmetrie-Betrachtungen. Für drei *masselose* Quark-Flavor wird ein Phasenübergang erster Ordnung erwartet, welcher aber bei einer Pionmasse von $m_\pi \approx 70 - 260$ MeV [94] zu einem Crossover abgeschwächt wird.

Aus dem vorliegenden Modell ergeben sich bei verschwindender (Netto-) Baryondichte kritische Temperaturen⁵ im Bereich von 140 – 190 MeV, was in akzeptabler Übereinstimmung mit den angeführten Werten aus lQCD-Rechnungen ist. Die kritische Temperatur steigt mit zunehmendem expliziten Massenterm m_0 verhältnismäßig schwach an, wie in Abb. 4.11 dargestellt ist. Dieser explizite Massenterm vermittelt einen Eindruck für den Einfluss⁶ des QCD-Quarkmassenterms. Außerdem wird der Phasenübergang erster Ordnung bei kleinem expliziten Massenterm zu einem Crossover, wenn dieser Massenterm einen bestimmten Wert für m_0 übersteigt.

Wenn die Hyperonen des Oktetts vernachlässigt werden, was im Wesentlichen dem Fall mit nur zwei Quark-Flavor ($SU(2)_{\text{Flavor}}$) entspricht, ergibt sich ein Crossover und die kritische Temperatur erhöht sich. Andererseits kann

⁵Damit ist hier diejenige Temperatur gemeint, bei welcher der Ordnungsparameter σ die größte Änderung zeigt.

⁶Für eine genauere Analyse müssten auch die anderen effektiven Hadronenmassen, besonders diejenigen der Nukleonen und der Pionen, entsprechend skaliert werden.

4.3. REALISTISCHES PHASENDIAGRAMM MIT TEST-RESONANZ 67

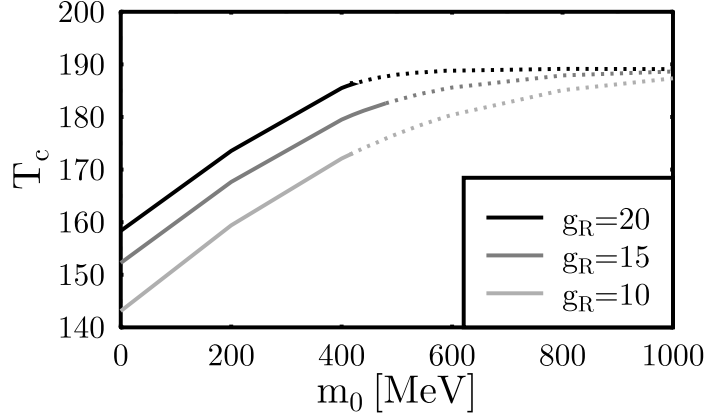


Abbildung 4.11: Kritische Temperatur in Abhängigkeit vom expliziten Massenterm der Test-Resonanz.

Kritische Temperatur T_c bei verschwindendem chemischem Potential ($\mu = 0$) in Abhängigkeit vom expliziten Massenterm m_0 für verschiedene Werte der skalaren Kopplung g_R aus Gleichung (4.6 bzw. 4.7). Durchgezogene Linien stehen für einen Phasenübergang erster Ordnung und gepunktete Linien für einen Crossover.

die zusätzliche (Test-) Resonanz auch dem ganzen baryonischen Dekuplett ($SU(3)_{\text{Flavor}}$) zugeordnet und dann der Fall mit drei entarteten Quark-Flavor untersucht werden. Hier ergibt sich wiederum ein Phasenübergang erster Ordnung und die kritische Temperatur sinkt um etwa 30 MeV.

Das Modellverhalten stimmt also in den geschilderten Grenzfällen qualitativ gut mit den oben beschriebenen Ergebnissen aus IQCD-Rechnungen überein.

Phasendiagramm in der $T-\mu_q$ -Ebene

Nun wird die Untersuchung auf endliche (Netto-) Baryonendichten ausgeweitet. Für einen bestimmten Bereich der Kopplungsparameter sowie des Massenterms der Test-Resonanz ergibt sich ein Phasendiagramm, dessen kritischer Endpunkt vergleichsweise nahe an den Vorhersagen der IQCD [96, 84] liegt. Diese Übereinstimmung steht im deutlichen Gegensatz zu effektiven Modellen, bei welchen keine schweren (hadronischen) Freiheitsgrade miteinbezogen werden und welche typischerweise Endpunkte mit deutlich zu niedrigen Temperaturen ergeben, siehe z.B. die Zusammenstellung in Ref. [16].

Die Abbildung 4.12 zeigt das Phasendiagramm für die Parameterwahl

$$m_R \equiv m_R^*(\sigma_0) = 2 \text{ GeV} , \quad m_0 = 0.57 \text{ GeV} \quad \text{und} \quad r_V = 0.4 , \quad (4.9)$$

wobei dann $g_{R\sigma} = (m_R - m_0)/\sigma_0$ gilt. Die Linie mit Phasenübergängen erster Ordnung endet hier bei $T_E \approx 180$ MeV und $\mu_{q,E} \approx 115$ MeV. Diese Tem-

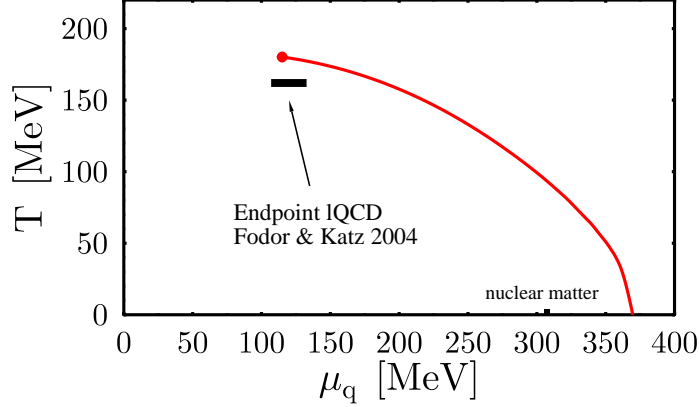


Abbildung 4.12: Phasendiagramm mit Endpunkt entsprechend zu IQCD.

Dargestellt ist die Linie (rot) der Phasenübergänge erster Ordnung in der T - μ_q -Ebene zur Parameterwahl $m_R \equiv m_R^*(\sigma_0) = 2$ GeV, $m_0 = 0.57$ GeV und $r_V = 0.4$. Der Endpunkt befindet sich nahe bei der IQCD-Vorhersage (schwarzer Balken) aus Ref. [84]. Die Phasenübergangslinie endet bei $T = 0$ deutlich oberhalb von μ_0 , so dass diese Zustandsgleichung also gleichzeitig auch normale Kernmaterie beschreiben kann.

peratur liegt damit etwa 20 MeV über der Vorhersage von Fodor und Katz (2004) mit $T_E = 162 \pm 2$ MeV, $\mu_{q,E} = 120 \pm 13$ MeV, siehe Ref. [84]. In dieser IQCD-Rechnung wurden allerdings noch unphysikalisch große Pionmassen (und damit auch Quarkmassen) verwendet und außerdem kleine Gitter, ohne dass zum Kontinuum-Limes extrapoliert wurde. Alles in allem ist also zu erwarten, dass zukünftige IQCD-Rechnungen mit physikalischeren Bedingungen mehr oder weniger stark von diesem Wert abweichen werden. (Man vergleiche allein die großen Unterschiede zwischen dem Endpunkt aus [84] und der Vorhersage aus der vorgehenden Studie dieser Gruppe [97].)

Bei $\mu = 0$ ergibt sich für die genannten Parameter eine kritische Temperatur des Crossovers von $T_c = 185.6$ MeV, in guter Übereinstimmung mit aktuellen IQCD-Ergebnissen bei verschwindender Netto-Baryondichte [85].

Wird ein kleinerer Wert für den expliziten Massenterm m_0 gewählt, wandert der Endpunkt näher zur T -Achse, wobei schließlich der Crossover bei $\mu = 0$ zu einem Phasenübergang erster Ordnung wird, wenn m_0 einen kritischen Wert unterschreitet, vergleiche Abb. 4.11. Für größere Werte des

4.3. REALISTISCHES PHASENDIAGRAMM MIT TEST-RESONANZ 69

Massenterms m_0 wandert der Endpunkt näher zur μ_q -Achse, ebenso wenn die Vektorkopplung r_V erhöht wird – in Analogie zu den Ergebnissen der vorigen Abschnitte in diesem Kapitel.

Allerdings ist der Phasenübergangsbereich vom Endpunkt bis $\mu_q \approx 200$ MeV für die Parameterwahl (4.9) sehr eng, die Spinodal-Temperaturen liegen hier nur wenige keV auseinander. Dadurch wandert der Endpunkt bei etwas vergrößertem Massenterm oder etwas verstärkter Vektorkopplung nicht kontinuierlich zu kleineren T und größeren μ_q wie in den vorigen Abschnitten, sondern er springt dann zu Werten, die bei merklich tieferen T und wesentlich größeren μ_q liegen. Mit anderen Worten: Der Phasenübergang verschwindet dann in einem großen zusammenhängenden Bereich, wenn die Parameter gewisse Grenzen übersteigen. Weiteres Vergrößern der Parameter ergibt dann anschließend wieder ein kontinuierliches Verschieben des Endpunktes.

Eine Vergrößerung des Entartungsfaktors d_R aus Gl. (4.5) führt dazu, dass sich die Phasenübergangslinie zu niedrigeren Temperaturen bzw. zu kleineren chemischen Potentialen hin verschiebt, und infolgedessen ein Crossover bei $\mu = 0$ sich zu einem Phasenübergang erster Ordnung verstärken kann.

Schließlich soll betont werden, dass bei dieser Zustandsgleichung der Phasenübergang bei $T = 0$ deutlich *oberhalb* von $\mu_q = \mu_0/3$ liegt, also bei einem chemischen Potential jenseits von Kernmaterie im Grundzustand bzw. bei einer Baryonendichte oberhalb der Grundzustandsdichte. *Damit gelingt mit der vorliegenden Erweiterung des Modells jetzt eine zufriedenstellende Beschreibung von sowohl dem Endpunkt der Phasenübergangslinie im T - μ_q -Phasendiagramm als auch von Kernmaterie im Grundzustand ($T = 0$), im Gegensatz zu den Zustandsgleichungen, die in den vorigen Abschnitten untersucht wurden. Offenbar löst also eine effektive höhere Masse der Resonanzzustände die dort diskutierten Probleme, und es zeigt sich auch hier die Wichtigkeit der schweren hadronischen Zustände für das Phasenübergangsverhalten.*

Am Phasenübergang erster Ordnung springt der Ordnungsparameter (hier σ) und ebenfalls Baryonendichte und Energiedichte. Der Unterschied der Energiedichte zwischen gebrochener und restaurierter Phase wird *latente Wärme* Δe genannt. Die Abbildung 4.13 oben zeigt die latente Wärme (rote Linie) als Funktion des chemischen Potentials entlang der Phasenübergangslinie (vgl. Abb. 4.12). Die latente Wärme setzt sich nach $\Delta e = \mu_B \Delta \rho_B + T \Delta s$ aus zwei Beiträgen zusammen, welche in der Abbildung mit schwarzen Strichen ($\mu_B \Delta \rho_B$) und blauen Punkten ($T \Delta s$) angegeben sind.

Zuerst steigt die latente Wärme mit wachsendem chemischen Potential.

Allerdings sinkt sie dann ab $\mu_q \approx 150$ MeV zunächst wieder und zeigt ein lokales Minimum bei $\mu_q \approx 200$ MeV, bevor sie schließlich – ohne weitere Unterbrechung – zunimmt. (Der Bereich von $\mu_q \approx 100$ MeV bis 200 MeV mit einer geringen latenten Wärme von $\Delta e \approx 200$ MeV/fm³ ist auch genau der oben angesprochene Bereich, in welchem der Phasenübergang erster Ordnung zum Crossover wird bei entsprechender Veränderung der Parameter.) Der nichtmonotone Verlauf der latenten Wärme ist offensichtlich auf den Entropie-Anteil zurückzuführen, während der Anteil (durch den Sprung in) der Baryondichte kontinuierlich ansteigt mit zunehmendem chemischen Potential – zuerst schwach und dann ab $\mu_q \approx 200$ MeV stärker.

Das unerwartete nichtmonotone Verhalten der latenten Wärme hat seine Ursache in einem Wechsel der vorherrschenden Freiheitsgrade. In der Abbildung 4.13 unten ist der jeweilige Sprung der skalaren Dichten⁷ am Phasenübergang dargestellt (Unterschied zwischen den beiden Phasen). Bei $\mu_q \approx 120 - 150$ MeV tragen die Nukleonen (rosa Punkte) dominant zur Diskontinuität in den skalaren Dichten bei, für größere chemische Potentiale geht dieser Beitrag aber merklich zurück und wird oberhalb von $\mu_q \approx 250$ MeV unbedeutend klein. Im Gegensatz dazu steigt der Beitrag durch die Resonanzen zunächst schwach an, dann aber – ab $\mu_q \approx 200$ MeV – stark und anhaltend; dieser Beitrag dominiert dann ab etwa $\mu_q = 175$ MeV. Also ist der Wechsel des führenden Beitrags die Ursache für die kleine Senke in der latenten Wärme bei $\mu_q \approx 200$ MeV. Die Summe der beiden Beiträge zur skalaren Dichte (blaue Linie) hat qualitativ den gleichen Verlauf wie der Entropie-Anteil an der latenten Wärme im oberen Teil der Abbildung.

Das nichtmonotone Verhalten der latenten Wärme ist weniger überraschend, wenn man berücksichtigt, dass IQCD-Rechnungen bei $\mu_q \approx 0$ eine *gemeinsame* Temperatur für den chiralen und den Confinement-Phasenübergang vorhersagen (gemeinsame Spitze der Suszeptibilitäten). Und im Gegensatz dazu springt bei $T = 0$ zunächst die Nukleonendichte am Flüssig-Gas-Phasenübergang von Kernmaterie ($\mu_B \approx \mu_0$), während die chirale Restauration – verursacht durch zusätzlich bevölkerte, schwerere Freiheitsgrade – erst bei größeren chemischen Potentialen erwartet wird [98].

Man vergleiche auch das Verhalten der latenten Wärme in einer zusammengesetzten Zustandsgleichung mit Phasenübergang aus Ref. [99]; dort ergibt sich für manche Parametersätze ebenfalls ein nichtmonotoner Verlauf.

⁷Skalare Dichten sind ein Maß für die Gesamtzahl der Teilchen im System und damit in gewisser Weise auch für die Entropie. Sie verhalten sich ähnlich (aber nicht identisch!) wie Brutto-Baryondichten.

Um Phasendiagrammstudien wie die vorliegende überprüfen zu können, wäre es hilfreich, zukünftig Vorhersagen aus der IQCD zur latenten Wärme (entlang der kritischen Linie) zu erhalten.

Isentrope Expansion bei Schwerionen-Kollisionen

Im Rahmen des geplanten Beschleunigerzentrums FAIR (Facility for Antiproton and Ion Research, [101]) an der GSI Darmstadt ist das CBM-Experiment (Compressed Baryonic Matter, [102]) der Erforschung des Phasendiagramms von Kernmaterie und im Besonderen der Suche nach jenem Phasenübergang gewidmet. Durch Verändern experimenteller Parameter wie z.B. der Einschussenergie, hofft man mittels Schwerionen-Kollisionen Phasenübergänge verschiedener Stärke bzw. latenter Wärme untersuchen zu können, und im bestmöglichen Fall sogar den kritischen Endpunkt (mit Phasenübergang zweiter Ordnung) im Phasendiagramm bestimmen zu können.

Bei Schwerionen-Kollisionen wird die Ausdehnung des Feuerballs bis zum Ausfrieren als eine adiabatische Expansion erwartet, d.h. die Entropie des Systems bleibt dabei erhalten. Auch die (Netto-)Baryonenzahl darf sich nicht ändern, weil sie eine Erhaltungsgröße ist. Damit kann eine adiabatische Expansion charakterisiert werden durch ein konstantes Verhältnis aus Entropie und Baryonenzahl oder eben aus Entropiedichte und Baryondichte, $S/A = s/\rho_B = \text{const.}$ (S/A wird auch spezifische Entropie genannt). Dies entspricht der Expansions-Trajektorie einer idealen Flüssigkeit.

Um die Anfangsbedingungen für eine solche Expansion zu bestimmen, kann ein einfaches geometrisches Überlapp-Modell zur Abschätzung der anfänglichen (*initial*) Baryondichte und Energiedichte verwendet werden,

$$\rho_B^{\text{ini}} = 2 \rho_0 \gamma_{\text{c.m.}} \quad \text{mit} \quad \gamma_{\text{c.m.}} = \sqrt{E_{\text{Lab}}/A/2m_N + 1} \quad (4.10)$$

$$e^{\text{ini}} = \sqrt{s} \rho_B^{\text{ini}}/2 = \sqrt{s} \rho_0 \gamma_{\text{c.m.}} = 2 m_N \rho_0 \gamma_{\text{c.m.}}^2, \quad (4.11)$$

welche *unabhängig* von der verwendeten Zustandsgleichung sind. Auch wird in diesem einfachen Modell die Phase der Verdichtung offenkundig nicht dynamisch behandelt, sondern es wird schlicht angenommen, dass die gesamte Einschuss-Energie und Baryonenzahl in einem Lorentz-kontrahierten Volumen, welches durch die Überlappung von Projektil und Target im Schwerpunktsystem ('c.m.') gegeben ist, äquilibriert. Dieses Modell gibt also eine obere Grenze für die zu erwartende Verdichtung, in realistischeren Modellen werden geringere Werte erreicht⁸ – hauptsächlich weil zum Zeitpunkt

⁸Hiermit sind *nicht* die Werte der frühen Phase der Reaktion in hydrodynamischen

des maximalen Überlapps von Projektil und Target das System noch nicht äquilibriert ist.

Trotz seiner Einfachheit reproduziert dieses Modell die *spezifische Entropie* S/A von realistischeren hydrodynamischen 3-Flüssigkeiten-Modellen [103, 104] vergleichsweise gut im Energiebereich des erwähnten CBM-Experiments ($E_{\text{Lab}} = 2$ bis 25 oder 30 A GeV), der hier untersucht werden soll. Obwohl die Modellvorhersagen zu den konkreten Werten von Baryonen- und Energiedichte eher als Orientierungswerte anzusehen sind, stellt die aus ihnen resultierende spezifische Entropie eine gute Abschätzung dar.

Die Abbildung 4.14 zeigt die Anfangsbedingungen aus dem Überlapp-Modell zu Einschussenergien von $E_{\text{Lab}} = 5$ bis 25 A GeV in der e - ρ_B -Ebene, zusammen mit der Zustandsgleichung aus der Abb. 4.12 (in Einheiten der Grundzustandsdichten ρ_0 und $e_0 = W_0 \rho_0$ von Kernmaterie). Im e - ρ_B -Phasendiagramm wird aus der kritischen Linie des T - μ_q -Diagramms ein Phasenkoexistenzgebiet (grauer Bereich), in dem das System anteilig aus Phasen mit restaurierter und gebrochener (chiraler) Symmetrie besteht. Die Grenzen dieses Gebiets zeigen den Sprung in Energie- und Baryondichte am Phasenübergang; in der e - ρ_B -Darstellung hat es eine keulenförmige Ausbuchtung, welche das oben diskutierte nichtmonotone Verhalten der latenten Wärme widerspiegelt. (Hier ist es die keulenförmige Ausbuchtung, die bei entsprechend veränderten Parametern auf einmal weg bricht, wie oben angesprochen.) Je größer die Einschussenergie ist, desto weiter liegen die Punkte der zugehörigen Anfangsbedingungen von diesem Phasenübergangsgebiet entfernt.

Schwarz dargestellt ist der Bereich unterhalb von $e(\rho_B)$ zu $T = 0$, die von der Zustandsgleichung nicht angenommen werden können (für $T = 0$ und $\mu > 0$ ergeben sich endliche Werte für Baryonen- und Energiedichte).

Anhand der Zustandsgleichung können den Anfangsbedingungen für ρ_B (4.10) und e (4.11) Werte für T und μ_q zugeordnet werden und damit $S/A = s/\rho_B$ und weitere Größen bestimmt werden. Die Isentropen oder Adiabaten (Isolinien für $s/\rho_B = \text{const.}$) für die ideale Expansion mit den genannten Anfangsbedingungen sind in der Abbildung 4.15 dargestellt. Die Zustandsgleichung liefert spezifische Entropien von $S/A = s/\rho_B = 7.1, 9.9, 11.9, 13.4$ und 14.7 für $E_{\text{Lab}} = 5$ bis 25 A GeV. Es zeigt sich, dass Energien von $E_{\text{Lab}} = 5 - 10 A$ GeV innerhalb des Modells ausreichend sind, um

Modellen und Transport-Modellen gemeint, die z.T. wesentlich höher sind als die Anfangsbedingungen des Überlapp-Modells. Zu diesen Zeiten ist das System aber noch nicht äquilibriert, so dass es sich bei den entsprechenden Werten sozusagen um geometrische Dichten handelt, und nicht um Baryonen- und Energiedichten, die durch eine Zustandsgleichung (für einen Gleichgewichtszustand!) zu verknüpfen wären.

4.3. REALISTISCHES PHASENDIAGRAMM MIT TEST-RESONANZ 73

das Phasenkoexistenzgebiet bzw. das Phasenübergangsgebiet zu überschließen. Im Energiebereich von $5 - 25 A$ GeV führt die adiabatische Expansion durch das Phasenkoexistenzgebiet bzw. durch einen Phasenübergang erster Ordnung hindurch – zurück zu einem Zustand mit gebrochener chiraler Symmetrie – mit einer latenten Wärme von ungefähr $120 - 160 \text{ MeV/fm}^3$. Im Phasenkoexistenzgebiet besteht das System nach der Maxwell-Konstruktion aus einem Gemisch von restaurierter und gebrochener Phase, so dass die Isentropen hier als Geraden verlaufen müssen.

Höhere Einschussenergien führen zu schwächeren ('kritischeren') Phasenübergängen erster Ordnung mit entsprechend kleineren Werten für die latente Wärme. Der kritische Endpunkt der Linie mit Phasenübergängen erster Ordnung wird schließlich erreicht bei einer Energie um $E_{\text{Lab}} = 60 A$ GeV und mit einer spezifischen Entropie von $S/A = s/\rho_B = 20.5$.

Die selben Isentropen oder Adiabaten können auch im $T-\mu_q$ -Phasendiagramm dargestellt werden, siehe Abb. 4.16; die Farben und Linienstile sind die selben wie zuvor. Diese Zuordnung geschieht anhand der Zustandsgleichung. Damit sind speziell die obigen Anfangsbedingungen, welche in e und ρ_B unabhängig von der Zustandsgleichung sind, in μ_q und T jetzt von ihr abhängig.

Der Verlauf der verschiedenen Isentropen spiegelt das Phasendiagramm der zugrunde liegenden Zustandsgleichung wider: An der Phasenübergangslinie zeigen die Isentropen einen Versatz – das so genannte 'bending' oder 'focusing' [105] zum kritischen Endpunkt hin – in Richtung kleinerer chemischer Potentiale und gleichzeitig geringfügig erhöhter Temperaturen, wie schon z.B. in den Refs. [106, 99] für zusammengesetzte Zustandsgleichungen mit Phasenübergang diskutiert wurde.

Wie im $e-\rho_B$ -Phasendiagramm geht auch hier die Isentrope zu $E_{\text{Lab}} = 60 A$ GeV bzw. $S/A \approx 20$ durch den kritischen Endpunkt, höhere Werte für die spezifische Entropie oder für die Einschussenergie entsprechen dann einem Crossover. Und auch hier liegen die Punkte der Anfangsbedingungen umso weiter vom Phasenübergang entfernt, je größer die Einschussenergie ist.

Die Isentropen verlaufen oberhalb des Phasenübergangs annähernd diagonal, von rechts oben in Richtung links unten im $T-\mu$ -Diagramm, wie bei einem idealen masselosen Gas (Bag-Modell).⁹ Direkt unterhalb des Phasenübergangs verlaufen sie zunächst weiterhin diagonal, aber nun etwas

⁹Es lässt sich zeigen, dass die spezifische Entropie eines masselosen Bose-Fermi-Gases nur vom Quotienten μ/T abhängt, konkret müssen die Isentropen des Bag-Modells im $T-\mu$ -Diagramm deshalb diagonal verlaufen.

flacher, bevor sie senkrecht nach unten umbiegen. Im Anschluss biegen die Isentropen dann weiter um, bis sie diagonal in Richtung rechts unten verlaufen – in der Darstellung von Abb. 4.16 nur angedeutet –, wie es für ein ideales Gas mit massiven Teilchen typisch ist (ideales Hadronengas-Modell). Der Bereich um den Phasenübergang herum entspricht der Region, in dem die Massenabsenkung der Baryonen im Modell groß ist, was das Verhalten ähnlich zum Bag-Modell erklärt.

Die Isentropen aus z.B. Transportmodell-Rechnungen [107, 108] ähneln mehr dem Verhalten eines Hadronengases, was darauf zurückzuführen sein sollte, dass dort keine Medium-Massen verwendet werden.

Auch aus aktuellen IQCD-Rechnungen [109] ergeben sich Isentropen. Diese zeigen einen leichten Knick in dem Bereich, wo der Phasenübergang erster Ordnung bzw. der Crossover erwartet wird, und unterhalb des Phasenübergangsbereichs verlaufen sie fast senkrecht nach unten. Allerdings handelt es sich hierbei um 2-Flavor Rechnungen und die Fehler unterhalb des Phasenübergangs sind sehr groß, so dass sich der Isentropen-Verlauf unseres Modells in Abb. 4.16 allein hierdurch kaum falsifizieren lässt.

In der Nähe des eingezeichneten IQCD-Endpunkts liegen verschiedenen Isentropen sehr dicht beieinander. Deshalb ist es nicht sinnvoll, anhand dieses Punktes den kritischen Wert für S/A oder die entsprechende Einschussenergie zu bestimmen, weil schon ein Parametersatz mit einem geringfügig anders platzierten Endpunkt sehr wahrscheinlich einen deutlich anderen S/A -Wert für den IQCD-Endpunkt ergeben würde.

Eine etwas verlässlichere Aussage kann hingegen zum 'experimentellen Fenster' für z.B. gerade das CBM-Experiment gemacht werden: Einschussenergien von $E_{\text{Lab}} = 5$ bis $25 A$ GeV testen offensichtlich einen T - μ_q -Bereich von $T = 150 - 200$ MeV und $\mu_q = 100 - 200$ MeV. Wichtig wäre hier ein Vergleich mit anderen Parametersätzen und auch mit grundsätzlich verschiedenen Modellen, um feststellen zu können, welche Aussagen bzw. Observablen stark vom jeweiligen Modell abhängen und welche andererseits wenig modellabhängig und damit robuster sind.

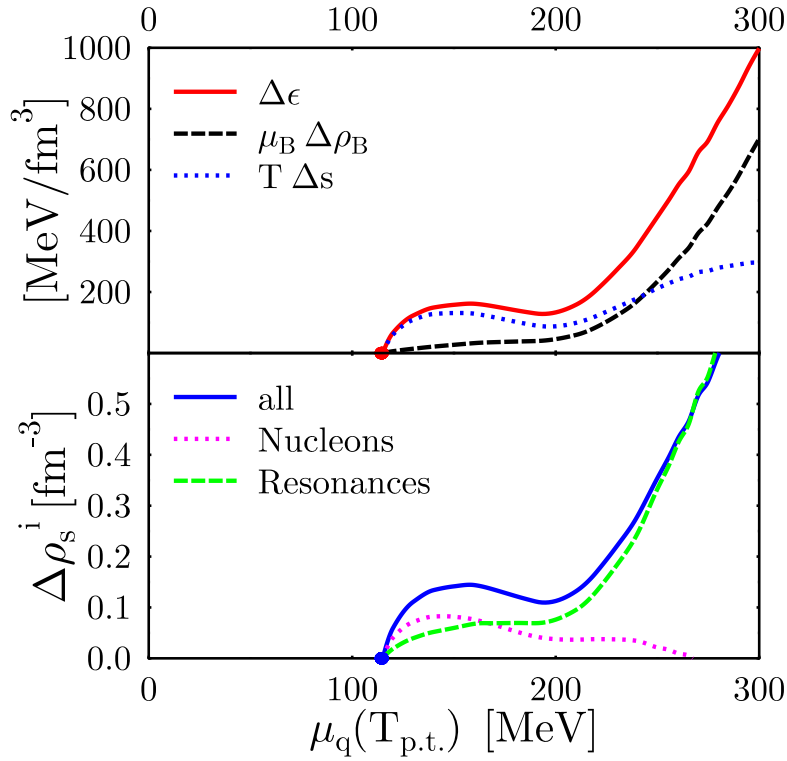


Abbildung 4.13: Latente Wärme und Sprung der skalaren Dichten entlang der Phasenübergangslinie.

Oben: Latente Wärme und die beiden Anteile aus der Diskontinuität in der Entropie ($T \Delta S$) und in der Baryondichte ($\mu_B \Delta\rho_B$) in Abhängigkeit vom Quark-chemischen Potential $\mu_q(T_{p.t.})$ entlang der Phasenübergangslinie (siehe vorige Abbildung).

Unten: Unterschied der skalaren Dichten $\Delta\rho_s^i$ zwischen den beiden Phasen am Phasenübergang in Abhängigkeit vom Quark-chemischen Potential $\mu_q(T_{p.t.})$.

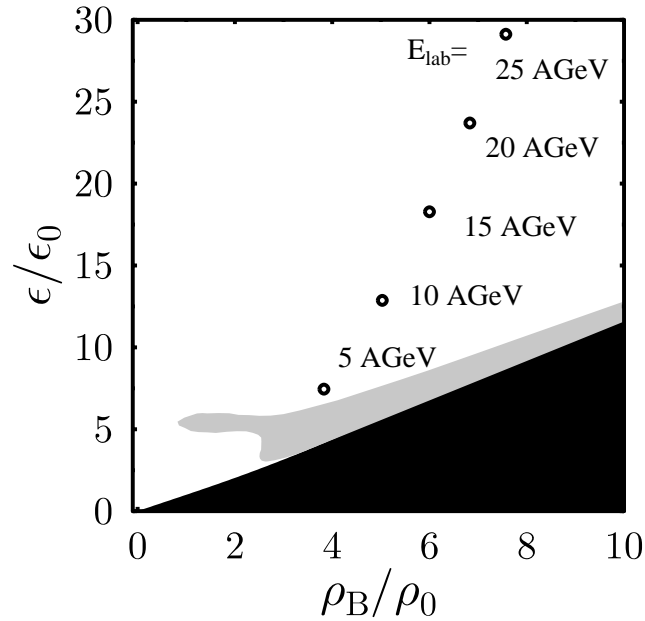


Abbildung 4.14: Anfangsbedingungen aus dem Überlapp-Modell im e - ρ_B -Phasendiagramm.

Dargestellt sind die (von der Zustandsgleichung unabhängigen!) Anfangsbedingungen der Baryondichte ρ_B und der Energiedichte e , wie sie sich zu verschiedenen Einschuss-Energien E_{Lab} aus einem einfachen Überlapp-Modell ergeben; jeweils normiert auf die entsprechende Grundzustandsdichte ρ_0 bzw. $e_0 = W_0 \rho_0$. Zusätzlich ist das Phasendiagramm der Zustandsgleichung aus der Abb. 4.12 angegeben: Der graue Bereich zeigt die gemischte Phase bzw. das Gebiet der Phasenkoexistenz und der schwarze Bereich ist das Gebiet unterhalb der $e(\rho_B)$ -Linie zu $T = 0$, Werte aus diesem Bereich können also von der Zustandsgleichung nicht angenommen werden.

4.3. REALISTISCHES PHASENDIAGRAMM MIT TEST-RESONANZ77

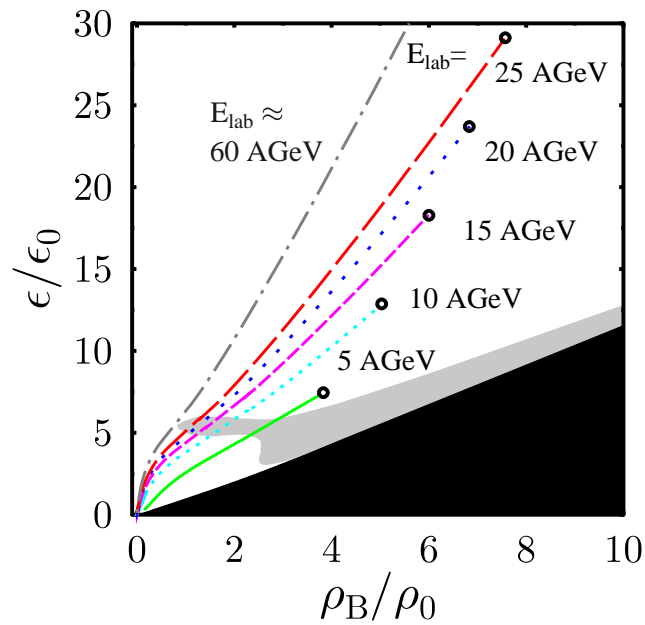


Abbildung 4.15: Isentropen zu Anfangsbedingungen im e - ρ_B -Diagramm.

Isentropen zu verschiedenen Einschuss-Energien $E_{\text{Lab}} = 5$ bis 25 A GeV sowie die Isentrope durch den kritischen Endpunkt, welche einer Energie von ungefähr $E_{\text{Lab}} = 60$ A GeV entspricht. (Die zugehörigen Werte für $S/A = s/\rho_B$ sind 20.5, 14.7, 13.4, 11.9, 9.9 und 7.1 von oben nach unten.)

Zu den Anfangsbedingungen und der Zustandsgleichung siehe vorige Abbildung.

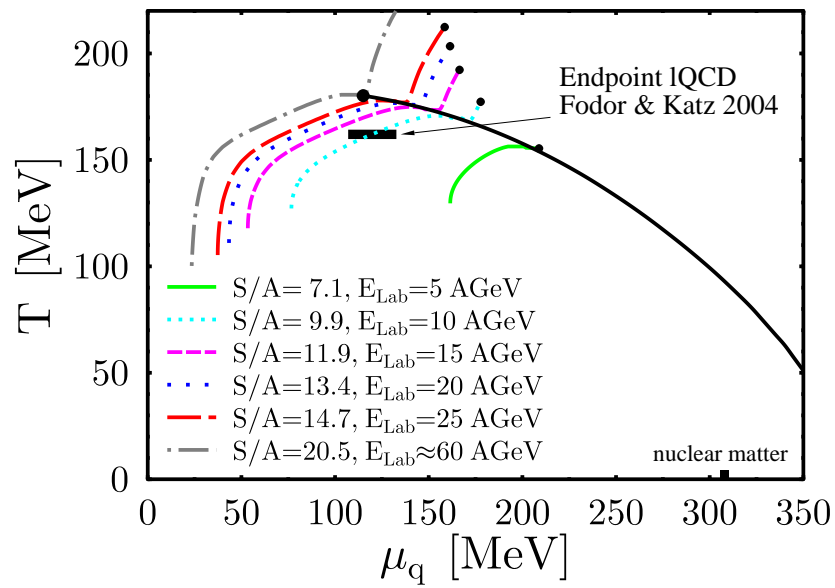


Abbildung 4.16: Isentropen im T - μ_q -Phasendiagramm.

Dargestellt sind die selben Isentropen wie in der vorherigen Abbildung hier im T - μ_q -Diagramm (statt in e - ρ_B wie zuvor). Der schwarze Balken gibt zusätzlich die Vorhersage zum Endpunkt aus Ref. [84] für 2+1-Flavor IQCD an.

Kapitel 5

Teilchenzahlverhältnisse von AGS bis RHIC

Schwerionen-Kollisionen und Teilchenzahlverhältnisse

Nachdem im vorigen Kapitel die Eigenschaften des Modells im Bezug auf das Phasenübergangsverhalten und auf das resultierende Phasendiagramm hin untersucht wurden, soll das Modell in diesem Kapitel auf die Beschreibung von experimentellen Daten angewendet werden, um die Vorhersagen zum Phasenübergangsverhalten und zum kritischen Endpunkt mit dem Experiment zu vergleichen. Der hierfür entscheidende Bereich im QCD-Phasendiagramm – hohe Temperaturen T und kleine bis mittlere Baryondichten bzw. baryo-chemische Potentiale μ_B – ist im Labor durch hochenergetische Kollisionen von Elementarteilchen oder Kernen zugänglich, wobei mittlere und höhere Baryondichten ($\rho_B \gg \rho_0$ beim Ausfrieren) nur durch Kollisionen von Schwerionen erzeugt werden können, elementare Kollisionen ergeben verschwindende bis geringe Baryondichten ($0 \leq \rho_B \ll \rho_0$ beim Ausfrieren).

Wenn dabei die Kollisionsenergie verändert wird (oder entsprechend andere experimentelle Parameter), erwartet man, dass die Reaktionen entlang unterschiedlicher Pfade im μ - T -Diagramm verlaufen, und dass so die Phasengrenzkurve (vgl. die Abb. 4.3) in verschiedenen Bereichen getestet – und im besten Fall sogar der kritische Endpunkt beobachtet werden kann, an dem ein Phasenübergang zweiter Ordnung erwartet wird.

Das experimentell messbare Ergebnis solcher Schwerionen-Kollisionen sind die vielen, größtenteils neu gebildeten Teilchen mit ihren Eigenschaften (Massen, Impulse, Quantenzahlen). Ein vereinfachtes Bild zur Teilchenproduktion ist das *Feuerball*-Modell: Die schweren Kerne prallen mit rela-

tivistischen Impulsen aufeinander und die Kernmaterie in der Reaktionszone heizt sich dabei auf und verdichtet sich, z.B. aufgrund von Stoßwellen (auch Schockwellen genannt) [110, 111, 112, 113] und der damit verbundenen Entropieproduktion. Dieser Feuerball zerfällt dann in viele Teilchen, hauptsächlich Hadronen. Das so entstandene heiße, dichte Hadronengas expandiert und kühlt ab, bis schließlich keine inelastischen Reaktionen mehr stattfinden, bei denen sich die Anzahl der jeweiligen Teilchensorten, also die *chemische* Zusammensetzung des Gases, ändert; dies wird chemisches *Ausfrieren* oder *Freeze-out* genannt. Unmittelbar anschließend (oder mit kurzer Verzögerung) erfolgt dann das *kinetische* Ausfrieren, nach welchem auch keine elastischen Reaktionen mehr stattfinden.

Die einfachste Modellannahme dazu ist, dass das Ausfrieren aus einem Zustand des thermodynamischen *Gleichgewichts* heraus geschieht und zwar mit den gleichen Ausfrierparametern für das ganze System. Die Beschreibung bzw. Berechnung von hadronischer Teilchenproduktion aus hochenergetischen Teilchen- und Kern-Kollisionen mit diesem Ansatz hat eine lange Tradition [13, 114, 115, 116, 117, 8, 10, 118, 119, 120, 121, 122].

In diesem Zusammenhang sind die grundlegenden Observablen aus dem Experiment die produzierten Teilchenanzahlen (oder *Multiplizitäten*), sowie deren Verhältnisse (Teilchenzahlverhältnisse oder englisch: *Ratios*). Bei den Teilchenzahlverhältnissen können sich gewisse Effekte heraus kürzen: unerwünschte (siehe hierfür z.B. [123]), wie spezielle Korrekturen durch die endliche Größe der Teilchen, überlagerte Feuerbälle oder Detektor-Eigenschaften – aber im Zweifelsfall durchaus auch gewünschte Effekte, also physikalische Informationen. Diese Observablen charakterisieren das chemische Ausfrieren, während das kinetische Ausfrieren durch z.B. Impulsverteilungen der Teilchen bestimmt wird (für einen kompakten und kritischen Überblick hierzu siehe Ref. [124]). Weitere Observablen zur Reaktionsdynamik, wie etwa der *Flow*¹ [112, 125, 6] oder zum mikroskopischen Verhalten, erfordern hydrodynamische Modelle [126, 127, 103] (für einen historischen Überblick siehe [104]) oder Transport-Modelle [128, 129, 130, 131, 132, 133] welche jedoch deutlich aufwendiger sind und weitere Annahmen erfordern.

In den meisten Fällen gelingt eine zufriedenstellende Beschreibung der gemessenen Teilchenanzahlen oder Teilchenzahlverhältnisse bereits mit einem einfachen statistischen bzw. *thermischen Modell* eines idealen Hadronengases.² Wie oben angedeutet, wird dazu eine thermalisierte Quelle angenommen, deren Ausfrieren durch *eine* Temperatur und *ein* baryo-

¹Englisch für *der Fluss, das Fließen*, hier: der (kollektive) Fluss der heißen und verdichteten Kernmaterie im Verlauf von Schwerionen-Kollisionen.

²Siehe auch die Bemerkungen aus Kapitel 1 zum idealen Hadronengas und zur Wichtigkeit des hadronischen Massenspektrums bei diesem Ansatz.

chemisches Potential (für das ganze System, also 'global') bestimmt ist. Dabei ist es notwendig, die möglichen Zerfälle – hauptsächlich hadronische und elektro-magnetische, aber auch schwache – nach dem Ausfrieren (auf dem Weg zum Detektor) zu berücksichtigen. Der Begriff 'thermisches Modell' wird gemeinhin und auch hier im Sinne von 'im thermodynamischen Gleichgewicht' verwendet; wir werden in dieser Arbeit nur das chemische Ausfrieren untersuchen, nicht das thermische (somit wäre 'chemisches Modell' in gewisser Weise die passendere Wortwahl).

In Studien wie [118, 142] wurde argumentiert, dass die gute Beschreibung von Teilchenzahlverhältnissen aus Schwerionen-Kollisionen durch das thermische Modell darauf schließen lasse, dass die Annahmen des Modells gerechtfertigt sind und sich das System vor dem Ausfrieren weitestgehend im thermodynamischen Gleichgewicht befunden haben muss.

Allerdings ist ein solches thermisches Modell nicht der einzige Ansatz, der auf eine vernünftige Beschreibung von experimentellen Daten aus Schwerionen-Kollisionen führt. So wurden in Ref. [134] gezeigt, dass sich die gemessenen Teilchenzahlen auch als Mittelwerte über eine *zeitlich veränderliche* Teilchenproduktion verstehen lassen. Ferner wurde in Ref. [135] gezeigt, dass keine äquilibrierte Impulsraumverteilung erforderlich ist um experimentelle Daten zu erklären.

Außerdem zeigt sich, dass mit der Annahme einer *inhomogenen* Verteilung von Temperatur und chemischem Potential – anstelle der gebräuchlichen *homogenen* Verteilung, d.h. einer einheitlichen Temperatur und eines einheitlichen chemischen Potentials – beim Ausfrieren [136, 137] zum Teil eine große bessere Beschreibung gelingt.

Schließlich kann das freie Gas nur eine erste Näherung sein, da sowohl bei Temperaturen nahe des Phasenübergangs als auch im dichten Medium eine Veränderung der Teilchenproduktion zu erwarten ist [117, 34, 138, 139], wie sie insbesondere auch vom chiralen Modell vorhergesagt wird [33, 66, 67].

Andererseits gibt es auch eine Reihe von Verfeinerungen des thermischen Modells, welche nicht den Ansatz in Frage stellen, und jeweils zu spezifischen Verbesserungen führen. Zum einen ist es wichtig, die kurzreichweitige Abstoßung der Hadronen zu berücksichtigen, um unrealistisch hohe Teilchendichten zu vermeiden. Dazu werden Van-der-Waals-Eigen volumen-Terme [140] eingeführt, was in den Ref. [141, 142] auf ein zweikomponentige und in [143, 144] auf eine mehrkomponentige Realisierung erweitert wurde. Bei der Verhältnisbildung von Teilchenzahlen kürzt sich dieser Effekt jedoch weitestgehend

heraus.³

Ferner wurde ein so genannter 'Seltsamkeits-Unterdrückungs-Faktor' oder 'Seltsamkeits-Sättigungs-Faktor', γ_s , vorgeschlagen, welcher die Brutto-Anzahl der seltsamen Quarks regelt [9, 145] (das seltsame chemische Potential regelt hingegen nur die Netto-Zahl der seltsamen Quarks). Ein entsprechender Faktor γ_q [146] lässt sich auch für die leichten Quarks einführen.

Außerdem wurde der Einfluss von Resonanzbreiten untersucht, siehe z.B. [147], oder der Einfluss von skalierten Hadronenmassen sowie der unterschiedlicher Behandlung des hadronischen Massenspektrums und schwacher Zerfälle [148, 149].

Der Umfang der verfügbaren Messergebnisse zu Multiplizitäten und Teilchenzahlverhältnisse hat sich in den letzten Jahren stark vergrößert. Zum einen gibt es seit einigen Jahren Teilchenzahlverhältnisse zu besonders hohen Reaktionsenergien aus Gold-auf-Gold-Kollisionen (Au+Au) am RHIC (Relativistic Heavy Ion Collider, BNL) zu $\sqrt{s_{\text{NN}}} = 130$ GeV und seit wenigen Jahren sogar zu $\sqrt{s_{\text{NN}}} = 200$ GeV. Wichtig ist auch der Zuwachs an 4π -Daten, also Daten für den vollen Raumwinkelbereich: Multiplizitäten von der NA49-Kollaboration am SPS (Super Proton Synchrotron, CERN) zu Blei-auf-Blei-Kollisionen (Pb+Pb) bei Einschussenergien⁴ von $E_{\text{Lab}}/A = 20, 30, 40, 80$ und 158 GeV, wobei in den letzten Jahren besonders Daten bei den niedrigen Einschussenergien hinzugekommen sind. Zusammen mit den 4π -Multiplizitäten von Au+Au am AGS (Alternating Gradient Synchrotron, BNL) zu $E_{\text{Lab}}/A = 11.6$ MeV, sind nun Untersuchungen zur Bestimmung der chemischen (d.h. zum chemischen Ausfrieren gehörenden) Ausfrierparameter $T^{\text{f.-o.}}$ und $\mu_{\text{B}}^{\text{f.-o.}}$ möglich geworden – sowohl über einen *sehr weiten* Energiebereich, als auch weitgehend auf der Basis von *konsistenten* experimentellen Daten (vorwiegend 4π und aus ähnlichen Kollisions-Systemen: Pb+Pb oder Au+Au).

Das thermische Modell beschreibt die globale Teilchenproduktion und ist deshalb im eigentlichen Sinn nur auf 4π -Daten anwendbar. Vorhersagen zu Messdaten aus einem eingeschränkten Bereich der *Rapidität*⁵ bzw. des

³In der Boltzmann-Näherung, also bei Vernachlässigung der Quantenstatistik, kürzt sich der Effekt von Eigenvolumen oder *Excluded Volumes* bei der Verhältnisbildung sogar exakt heraus. Dies ändert sich sobald unterschiedliche Radius-Parameter verwendet werden, wie in [142] aber auch in [141] untersucht wurde. Allerdings verwenden beide keine korrekten Formeln für den mehrkomponentigen Fall, wie in [144] ausgeführt wird.

⁴Zum Vergleich: $E_{\text{Lab}}/A = 11.6$ GeV entspricht $\sqrt{s_{\text{NN}}} = 5.0$ GeV, $E_{\text{Lab}}/A = 40$ GeV entspricht $\sqrt{s_{\text{NN}}} = 8.9$ GeV und $E_{\text{Lab}}/A = 158$ GeV entspricht $\sqrt{s_{\text{NN}}} = 17.3$ GeV.

⁵Die Rapidität stammt aus der relativistischen Kinematik und ist ein Maß für die

Raumwinkels sind innerhalb des Modells nicht direkt möglich sondern erfordern weitere Annahmen zur Raumwinkel-Abhängigkeit der Teilchenproduktion. Bei den genannten Teilchenzahlverhältnisse vom RHIC stehen allerdings keine Daten aus 4π zur Verfügung. Man muss sich hier mit der Annahme behelfen, dass die Teilchenanzahlen, welche in die Teilchenzahlverhältnisse eingehen, jeweils eine ähnliche Häufigkeitsverteilung im gemessenen Rapidityintervall haben. Unter dieser Bedingung kürzt sich dann die Einschränkung des Raumwinkels (durch die Detektor-Geometrie) heraus und das Teilchenzahlverhältnis ergibt den gleichen Wert wie es für eine 4π -Messung ergeben würde. (Bei experimentellen Datensätzen mit Messwerten aus stark unterschiedlichen Rapidityintervallen stellt sich die grundsätzliche Frage, ob es sinnvoll ist, diese gleichzeitig mit einem Modell zu beschreiben.)

Messergebnisse zu Multiplizitäten haben gegenüber Teilchenzahlverhältnissen den Vorteil, dass nicht von vornherein relevante Informationen durch die Verhältnisbildung fehlen (heraus gekürzt sind). Zum einen erlauben sie, Modellvorhersagen direkt zu Multiplizitäten zu machen: hier gehen alle Messpunkte dann gleichberechtigt und unabhängig ein, zudem erhält man eine Vorhersage zum Ausfrieren. Darüber hinaus können auf der Basis von Multiplizitäten auch Modellvorhersagen zu Teilchenzahlverhältnissen überprüft werden, wobei dann zusätzlich der Einfluss von verschiedenen Auswahlen bei der Verhältnisbildung untersucht werden kann (siehe Abschnitt 5.2.2 für ein Beispiel). In diesem Sinne sind die 4π -Multiplizitäten Messdaten von besonders 'guter' Qualität.

Die Ausfrierparameter, für welche die verschiedenen thermischen Modelle eine gute Beschreibung der Teilchenzahlverhältnisse liefern, liegen in einem vergleichsweise stark eingegrenzten Band in der μ_B - T -Ebene, siehe z.B. Ref. [151] bzw. die aus dieser Studie entnommene Abbildung 5.6. Bei hohen SPS-Energien und bei RHIC befinden sich diese Ausfrierpunkte nahe am erwarteten Phasenübergang (erster Ordnung oder kontinuierlich) [16]. Folglich sollten deutliche Effekte vorhanden sein aufgrund jenes Phasenübergangs, d.h. aufgrund der Medium-Modifikationen, die diesen Phasenübergang charakterisieren oder sogar hervorrufen. Da solche – nur durch Wechselwirkung verursachte – Effekte im idealen Hadronengas-Modell per Konstruktion nicht

Geschwindigkeit, im Gegensatz zu relativistischen Geschwindigkeiten sind relative Rapidityen *additiv*, siehe z.B. [150].

Bei Schwerionen-Kollisionen wird die Rapidity $y = 1/2 \ln[(E + p_z)/(E - p_z)]$ zur Angabe der Geschwindigkeit in Strahlrichtung z verwendet: positive oder vorwärtige Rapidity entspricht dem ungebremsten Strahl, negative oder rückwärtige Rapidity dem ruhenden Target (oder dem gegenläufigen Strahl) während mittlere Rapidity $y \approx 0$ dem Schwerpunktsystem zugeordnet ist.

enthalten sind, ist dieses Modell nicht für Untersuchungen des Phasenübergangs geeignet.

Deshalb soll hier das hadronische chirale Modell verwendet werden, was gerade solche Medium-Modifikationen enthält – welche den Phasenübergang bestimmen und hervorrufen, und zwar in einem Bereich, der zumindest qualitativ gut mit den Erwartungen übereinstimmt (siehe Kapitel 4). Die Grundannahmen des thermischen Modells werden dabei übernommen: Teilchenproduktion erfolgt aus einem thermalisierten System heraus und lässt sich global mit den beiden Ausfrierparametern Temperatur und baryo-chemisches Potential charakterisieren. Anstelle der freien Teilchendichten des idealen Hadronengases treten nun aber die Teilchendichten des chiralen Modells (3.42), welche Medium-Effekte in Form von effektiven Hadronenmassen und effektiven chemischen Potentialen enthalten.

In [33, 67] wurde bereits gezeigt, dass das chirale Modell – mit seinen effektiven Massen und effektiven chemischen Potentialen – Teilchenzahlverhältnisse gut beschreiben kann. Hier soll deshalb hauptsächlich untersucht werden, ob und wie sich verschiedene Parametrisierungen bzw. Phaseneigenschaften des Modells auf die Beschreibung von Teilchenzahlverhältnissen auswirken: in wie weit sich also Unterschiede in der Modell-Parametrisierung in den Vorhersagen zu Teilchenzahlverhältnisse widerspiegeln – ob z.B. eine Zustandsgleichung mit einem bestimmten Phasendiagramm zu einer deutlich besseren oder schlechteren Beschreibung der experimentellen Daten führt.

Interessant ist in diesem Zusammenhang aber auch eine umgekehrte Fragestellung, nämlich wie gut die Untersuchung von Teilchenzahlverhältnissen überhaupt dazu geeignet ist, Aussagen über die Phasenübergangseigenschaften des verwendeten Modells zu machen. Denn es ist ja gerade eines der großen Ziele der Schwerionen-Physik, die Phasenübergangseigenschaften der stark wechselwirkenden Materie bei hohen Temperaturen und großen Dichten zu erforschen.

Im Hinblick auf die oben angeführten kritischen Alternativen [134, 135] zum thermischen Ansatz soll hier nicht dessen Gültigkeit untersucht oder rechtfertigt werden, sondern der Ansatz wird in diesem Kapitel schlicht verwendet: der Einfachheit halber – aber auch um auf gemeinsamer Basis mit anderen Studien vergleichen zu können. In diesem Sinn soll die Verwendung des thermischen Ansatzes auch als erste Näherung angesehen werden. Demzufolge sind Untersuchungen zum Einfluss unterschiedlicher Zustandsgleichungen bei den genannten Alternativen zweifellos vielversprechende Projekte; sie übersteigen jedoch den Rahmen dieser Arbeit. Ebenso wenig stehen die oben erwähnten Verfeinerungen des thermischen Ansatzes im

Vordergrund der Arbeit, stattdessen wird dieser Ansatz hier als Rahmen verwendet, um verschiedene Zustandsgleichungen und die resultierenden Effekte zu untersuchen.

Als weiterer Punkt soll getestet werden, inwieweit einige in der Literatur vorgeschlagene universelle Ausfrierkriterien für die Vorhersagen des chiralen Modells erfüllt sind oder wodurch sich Abweichungen ergeben – und ob sich modellspezifische universelle Kriterien aus den Ergebnissen ableiten lassen.

Schließlich werden am Ende des Kapitels die ermittelten Ausfrierparameter auch als Ausgangspunkt verwendet, um die verschiedenen Parametersätze anhand von Isentropen zu untersuchen, analog dem Abschnitt 4.3.

5.1 Beschreibung experimenteller Daten

5.1.1 Modellierung von Teilchenzahlverhältnissen

Die so genannten Teilchen-*Ratios* oder Teilchenzahlverhältnisse sind das Verhältnis zwischen den Teilchenanzahlen bzw. Teilchendichten einer Hadronen-Spezies und einer anderen, die bei Schwerionen-Kollisionen produziert und gemessen werden, wie im vorigen Abschnitt erläutert wurde.

Im Rahmen des thermischen Modells – also unter der Annahme des globalen Ausfrierens eines äquilibrierten Systems – hängt die Anzahl der *insgesamt* produzierten bzw. *gemessenen* Teilchen N_i^{total} einer Hadronen-Spezies i von zwei Beiträgen ab. Zum einen trägt natürlich die thermische bzw. *direkte* Teilchendichte $\rho_i^{\text{direkt}} \equiv \rho_i$ der jeweiligen Spezies bei. Der andere nicht weniger wichtige Beitrag kommt von den Teilchendichten jener schweren Hadronen, bei deren *Zerfall* die betrachtete (leichtere) Hadronen-Spezies i entstehen kann. So stammen z.B. bei hinreichend hohen Temperaturen deutlich mehr Pionen aus Zerfällen von schweren Hadronen, als direkt produziert werden.

Die *totale* Teilchendichte einer Spezies i ist somit

$$\rho_i^{\text{total}} = \rho_i^{\text{direkt}} + \rho_i^{\text{Zerfall}} \equiv \rho_i + \sum_{i \neq j} \alpha_{i,j} \rho_j, \quad (5.1)$$

wobei $\alpha_{i,j}$ die Wahrscheinlichkeit dafür angibt, dass beim Zerfall eines Teilchens der Spezies j ein Teilchen der Spezies i entsteht. Diese so genannten *branching Ratios*⁶ müssen aus Experimenten ermittelt werden und gehen als feste Parameter in das Modelle ein. Da diese zum Teil, hauptsächlich für schwere Resonanzen, nicht genau bestimmt werden können, treten hier

⁶Englischer Ausdruck für *Zerfallswahrscheinlichkeiten*.

mögliche Abweichungen zwischen verschiedenen Realisierungen des thermischen Modells auf.

Die *totale* Teilchenanzahl N_i^{total} , der Teilchen-*Yield*, ist dann proportional zur totalen Teilchendichte nach $N_i^{\text{total}} = \rho_i^{\text{total}} V$. Hier ist V das Ausfriervolumen, also das Volumen des Feuerballs zum Zeitpunkt des Ausfrieren oder *Freeze-out*.

Ein Teilchenzahlverhältnis oder eine Teilchen-*Yield-Ratio* ist nun das Verhältnis der Teilchen-Yields, also das Verhältnis von insgesamt produzierten Teilchenanzahlen bzw. von totalen Teilchendichten.⁷ Für die Yield-Ratio r der Hadronen-Spezies i und k gilt dann

$$r = \frac{\rho_i^{\text{total}}}{\rho_k^{\text{total}}} = \frac{\rho_i + \sum_{j \neq i} \alpha_{j,i} \rho_j}{\rho_k + \sum_{l \neq k} \alpha_{l,k} \rho_l}. \quad (5.2)$$

Das χ^2 als Maß für gute Beschreibung

Um ein Modell auf die Beschreibung von Experimenten anzuwenden, werden die freien Parameter x des Modells so variiert, dass sich eine bestmögliche Übereinstimmung von Modellvorhersage und experimentellen Daten ergibt, man spricht vom *Fitten* (also: Anpassen⁸) der Daten. Beim idealen Hadronengas-Modell z.B. sind die freien Parameter x die Temperatur T und das baryo-chemische Potential μ_B , während die eingehenden Hadronenmassen zwar die Modelleigenschaften bestimmen und auch als Parameter zu betrachten sind, aber beim Fitten (meist) nicht verändert werden.

Ein Kriterium für die Qualität der Beschreibung experimenteller Daten, also für die Qualität des *Fits*, stellt das χ^2 dar, mit

$$\chi^2(x) = \sum_i \left(\frac{r_i^{\text{Modell}}(x) - r_i^{\text{Exp}}}{\sigma_i^{\text{Exp}}} \right)^2. \quad (5.3)$$

In diesem Ausdruck ist $r_i^{\text{Modell}}(x)$ der Wert (hier: die Teilchen-*Yield-Ratio*), der sich für den oder die Parameter x als Vorhersage aus dem Modell ergibt, r_i^{Exp} ist der Messwert (hier also die experimentell gemessene bzw. aus den experimentellen Daten bestimmte *Yield-Ratio*) und σ_i^{Exp} ist der zugehörige Fehler der experimentellen Daten. Die quadratische Abweichung von Messwert und Modellvorhersage wird also jeweils mit dem Fehler-Quadrat

⁷Im Experiment können zwangsläufig nur Teilchen-Yields gemessen werden, denn im Detektor kann nicht von vornherein unterschieden werden, ob ein Teilchen direkt produziert wurde oder aus einem Zerfall stammt. Deshalb ist der Begriff *Teilchen-Ratio* nicht sinnvoll als das Verhältnis von lediglich thermischen Teilchenanzahlen bzw. -dichten ohne Beiträge von Zerfällen, sondern nur als Synonym zu Teilchen-Yield-Ratio.

⁸To fit: englisch für *anpassen* (hier: an experimentelle Daten).

des Messwerts gewichtet, so dass auch die Genauigkeit der experimentellen Daten berücksichtigt wird.

In Gleichung (5.3) wird über alle betrachteten Datenpunkte bzw. Teilchenzahlverhältnisse summiert; das χ^2 wird folglich im Allgemeinen umso größer, je mehr Datenpunkte in den Fit eingehen. Häufig wird deshalb auch $\chi^2/N_{\text{D.o.F.}}$ angegeben, also durch die Anzahl der Freiheitsgrade geteilt.⁹ Die Zahl der Freiheitsgrade $N_{\text{D.o.F.}}$ ist gegeben durch die Zahl der Datenpunkte abzüglich der Zahl der freien Parameter, die für den Fit variiert wurden, wobei die Annahme gemacht wurde, dass die Datenpunkte unabhängig voneinander sind. Erst dieses Kriterium erlaubt dann, auch sinnvoll die Qualität von Fits mit *unterschiedlichen* Anzahlen von Datenpunkten zu vergleichen.

Gesucht wird nach der *besten* Übereinstimmung von Modellvorhersagen und experimentellen Daten, dem so genannten *Best-Fit*: Dieser ist durch diejenigen freien Parameter x' bestimmt, die auf das *minimale* χ^2 bzw. $\chi^2/N_{\text{D.o.F.}}$ führen. Werte von $\chi^2/N_{\text{D.o.F.}} \approx 1$ stehen dabei für eine gute Beschreibung der Daten, die Abweichungen zwischen Experiment und Modellvorhersage liegt hier (im Mittel) innerhalb der experimentellen Fehler. Größere Werte stehen für eine schlechtere Beschreibung (also für ein unzulängliches Modell!), während Werte deutlich unterhalb von 1 meist unrealistisch sind und z.B. darauf zurückzuführen, dass die verwendeten Datenpunkte voneinander abhängen.

5.1.2 Teilchendichten aus dem chiralen Modell

Entsprechend dem oben beschriebenen thermischen Modell, sind die *freien* Parameter x unseres Modells die Temperatur T und das quark-chemische Potential μ_q (mit $\mu_q \equiv \mu_B/3$). Sie legen – bei gegebener Parametrisierung bzw. bei festgelegten Eigenschaften des Modells – die Teilchendichten eindeutig fest. (Das seltsame quark-chemische Potential $\mu_s \equiv (\mu_B/3 - \mu_S)$ wird gemäß der Seltsamkeitserhaltung dadurch bestimmt, dass die Netto-Seltsamkeit insgesamt verschwinden muss, $f_s = 0$.)

Aus dem Modell ergeben sich – aufgrund der Wechselwirkung – temperatur- und dichteabhängige effektive Hadronenmassen m^* und effektive chemische Potentiale μ^* , wie sie bereits in den Referenzen [117, 34, 138, 139, 148] vorgeschlagen und untersucht wurden. Zu gegebenen T und μ weichen die vorhergesagten Dichten bzw. Teilchenzahlverhältnisse von den Vorhersagen von idealen Hadronengas-Modellen ab [152], welche per Konstruktion keine explizite Wechselwirkung bzw. Mediumabhängigkeit der Teilcheneigenschaften enthalten. Umgekehrt führt die Beschreibung expe-

⁹D.o.F. als Abkürzung von *Degrees of freedom*: englisch für *Freiheitsgrade*.

rimenteller Daten folglich auf abweichende Ausfrierparameter T^{f-o} und μ_q^{f-o} .

Wie schon in Ref. [66, 67] geschehen, soll auch hier das hadronische chirale Modell auf Experimente in einem breiten Energiebereich angewendet werden. Die beiden wesentlichen Neuerungen dieser Studie sind zum einen die neuen Parametersätze des chiralen Modells mit einem kritischen Endpunkt ähnlich zu Vorhersagen aus der lQCD (kurz für *Lattice* QCD), siehe Abschnitt 5.1.3. Und zum anderen sind es aktualisierte und vor allem auch zusätzliche experimentelle Daten, die bei den vorigen Untersuchungen [66, 67] noch nicht vorlagen: besonders im unteren SPS-Bereich und bei der höchsten RHIC-Energie, siehe Abschnitt 5.1.4.

Das Modell enthält in der hier verwendeten Form keine Isospin-Freiheitsgrade und kann daher nur (Isospin-)symmetrische Systeme beschreiben (insbesondere auch nicht die Asymmetrie in π^+/π^-). Aus diesem Grund werden hier keine Experimente mit Energien unterhalb vom $E_{\text{Lab}}/A = 11.6$ GeV (AGS) wie z.B. von SIS (Schwerionen Synchrotron, GSI) untersucht, denn bei niedrigeren Energien wird die Isospin-Asymmetrie bzw. der Isospin-Freiheitsgrad zunehmend wichtiger.

Im vorigen Kapitel haben wir die Näherung konstanter Mesonenmassen verwendet, zum einen der Einfachheit und Übersichtlichkeit wegen und zum anderen, weil die Kopplung der Mesonen an die Feldgleichungen das Phasenübergangsverhalten des Modells zwar quantitativ aber nicht qualitativ ändert. Hier wollen wir aber gerade Medium-Effekte wie veränderte Massen studieren und verwenden deshalb auch für die Mesonen *effektive* Massen, wie in Abschnitt 3.3 beschrieben. Dadurch wird der Phasenübergang geringfügig abgeschwächt, denn die effektive Masse der Pionen und der Kaonen wird größer mit der Nähe zum Phasenübergang. Dies zeigt sich darin, dass die kritische Temperatur bei $\mu = 0$ und die Lage der Endpunkte bei den Phasendiagrammen aus Abb. 4.4 und den entsprechenden aus diesem Kapitel (Abb. 5.1) nicht vollständig übereinstimmen.

Am Anfang dieses Kapitels und im Einleitungskapitel wurde bereits betont, dass es unerlässlich ist, ein möglichst vollständiges hadronisches Massenspektrum zu verwenden, wenn experimentelle Daten beschrieben werden sollen. Deshalb müssen die hadronischen Zustände oberhalb der niedrigsten mesonischen und baryonischen Multipletts – welche wie in Kapitel 3 beschrieben an die Feldgleichungen des chiralen Modells gekoppelt sind und deshalb effektive Massen haben – ergänzt werden um die weiteren, schwereren und verlässlich bekannten hadronischen Zustände [47] mit Massen bis einschließ-

lich $m = 2 \text{ GeV}$,¹⁰ diese aber entsprechend als freie Teilchen also mit Vakuummassen und unveränderten chemischen Potentialen. Eine Erweiterung des chiralen Modells um zusätzliche, an die Feldgleichungen gekoppelte hadronische Zustände ist wichtig (siehe Abschnitt 4.3 und Zusammenfassung in Kapitel 7) und wird als zukünftiges Projekt angestrebt.

Für eine realistische Beschreibung ist es notwendig die Zerfälle (stark und elektro-schwach) der instabilen Teilchen zu modellieren, wie in Abschnitt 5.1.1 erläutert. Hierfür werden die Zerfalls-Tabellen des UrQMD-Modells [129, 153, 154] benutzt. Als Grundlage für die Zerfalls-Berechnungen werden dann *alle* Hadronen mit ihren Vakuummassen angesetzt. Die Vorstellung dahinter ist, dass sich die Hadronen direkt vor bzw. beim Ausfrieren zwar noch im Medium befinden und somit modifizierte Massen haben. Aufgrund der Expansion des Systems lässt der Einfluss des Mediums bis zum anschließenden Zerfall aber so stark nach, dass dann die Vakuummassen als gute Näherung verwendet werden können.

Effekte durch Van-der-Waals-Eigenvolumen-Terme (*Excluded Volumes*) werden hier vernachlässigt. Wie in der Einleitung dieses Kapitels erläutert, spielen diese bei der Untersuchung von Teilchenzahlverhältnissen kaum eine Rolle.

Auf diese Weise werden die totalen Teilchendichten der stabilen Hadronenspezies einschließlich der genannten Zerfälle für ein T - μ_q -Gitter ermittelt. Daraus können dann die erforderlichen Teilchenzahlverhältnisse $r_i^{\text{Modell}}(T, \mu_q)$ nach Gl. (5.2) gebildet und das resultierende χ^2 mit Gl. (5.3) bestimmt werden. Die beste Beschreibung der experimentellen Daten durch das Modell ist dann jeweils durch diejenigen Werte von T und μ_q gegeben, die auf das kleinste χ^2 führen, wodurch schließlich die Ausfrierparameter $T^{\text{f.-o.}}$ und $\mu_q^{\text{f.-o.}}$ bestimmt sind.

Trotz der Tatsache, dass die Vorhersagen eines Modells im Rahmen des thermischen Ansatzes augenscheinlich nur durch zwei Parameter festgelegt werden, den Ausfrierparametern $T^{\text{f.-o.}}$ und $\mu_q^{\text{f.-o.}}$, gibt es einige weitere, Unbekannte bei thermischen Modellen. Diese sind unter anderem die Einbindung von Hadronen, deren Eigenschaften (Massen und besonders zugehörige Zerfälle, wie bereits erwähnt) nicht ausreichend genau bekannt sind, oder auch die Behandlung von großen Resonanzbreiten der betreffenden hadronischen Zuständen; vergleiche dazu z.B. die Diskussion in Ref. [155]. Ein wichtiger Punkt ist außerdem die Berücksichtigung der Beiträge aus *schwachen*

¹⁰Der Einfluss einer niedrigeren Grenze für die berücksichtigten Hadronenmassen bzw. hadronischen Zustände wurde in letzter Zeit z.B. in Ref. [149] untersucht.

Zerfällen. Dieses sog. *weak Feeding* (das 'Füttern' bestimmter gemessener Teilchenzahlen durch schwachen Zerfall) kann bei experimentellen Daten zum Teil nicht eindeutig rekonstruiert werden. Wie in [149] gezeigt, beeinflusst die unterschiedliche Berücksichtigung der schwachen Zerfälle die Beschreibungsqualität merklich (χ^2/N zwischen 0.9 und 1.8), die Ausfrierparameter aber nur innerhalb der angegebenen Fehler. Es wird hier deshalb nach Möglichkeit so gehandhabt, wie es den Messungen (siehe 5.1.3) entspricht.

5.1.3 Verwendete Parametrisierungen des Modells

Bei den Untersuchungen experimenteller Teilchenzahlverhältnisse mit dem chiralen Modell in diesem Kapitel werden mehrere, sich stark voneinander unterscheidende Parametrisierungen des Modells bzw. Zustandsgleichungen verwendet. Einerseits sollen die neuen Parametersätze aus Abschnitt 4.2.1 getestet werden, die ein Phasendiagramm mit Endpunkt ähnlich zu aktuellen IQCD-Rechnungen haben: von großem Interesse ist dabei, ob sich der Phasenübergang oder gar die Lage des Endpunkts in den Fits der Teilchenzahlverhältnisse widerspiegelt. Andererseits werden parallel dazu auch Parametersätze aus vorigen Studien zu Teilchenzahlverhältnissen mit dem chiralen Modell (einschließlich eines idealen Hadronengas-Modells) hinzugenommen um die Verbindung zu diesen Studien herstellen zu können. Darüber hinaus kann durch die Verwendung derart unterschiedlicher Parametersätze auch die Robustheit der Aussagen des Modells überprüft werden.

In den Abbildungen 5.1 werden die verschiedenen Modell-Parametrisierungen mit ihrem Phasendiagramm vorgestellt, und zwar als Konturdiagramm in σ . Wenn vorhanden, ist die Linie mit Phasenübergängen erster Ordnung durch eine dicke durchgezogene Linie dargestellt ('P.T. line', Mitte rechts sowie unten links und rechts). Die dünnen Linien (durchgezogen oder mit Punkten) geben den Wert des skalaren Kondensats σ an und charakterisieren somit die Stärke der skalaren in-Medium-Modifikationen (Massen-Absenkungen der Baryonen). Die σ -Isolinien stehen jeweils für $\sigma/\sigma_0 = 90\%$, 80% , 70% , 60% und 50% von unten nach oben. Der Bereich zwischen 70% und 50% ist schraffiert, weil hier *meistens* (aber nicht immer) der steilste Abfall in σ zu finden ist; am Phasenübergang erster Ordnung liegen diese Isolinien stets aufeinander.

Die beiden oberen Phasendiagramme zeigen zwei (der drei) Parametersätze die in Ref. [32] vorgestellt und in den Referenzen [33, 67] auf die Beschreibung von Teilchenzahlverhältnissen angewendet wurden. Das Phasendiagramm oben links ist eine Zustandsgleichung ganz ohne Resonanzen (graue Linien). Sie wurde bisher als 'CI' bezeichnet und soll

in dieser Arbeit 'without Resonances' genannt werden. Hier sind nur die Baryonen des Oktetts an die Feldgleichungen gekoppelt. Infolgedessen gibt es keinen Phasenübergang erster Ordnung und der Crossover findet erst bei Temperaturen deutlich oberhalb von $T = 180$ MeV statt. Wenn hingegen auch die Resonanzen – vertreten durch die Baryonen des Dekupletts – an die Feldgleichungen gekoppelt werden, entsteht bei kleinen chemischen Potentialen ($\mu_q \approx 100$ MeV und kleiner) ein Phasenübergang erster Ordnung, siehe oben rechts (grüne Linien). Diese Zustandsgleichung wurde bisher als 'CII' bezeichnet, in dieser Arbeit soll sie 'P.T.@ $\mu=0$ ' genannt werden, um die Diskrepanz zu IQCD-Berechnungen (siehe z.B. die Ref. [84, 88] und Abschnitt 4.2) zu betonen, nach welchen bei $\mu = 0$ gerade kein Phasenübergang erster Ordnung zu erwarten ist.

Bei der nächsten Zustandsgleichung (Mitte links, blaue Linien) ist dieser Phasenübergang nicht mehr vorhanden. Im vorigen Kapitel wurde diskutiert, wie dies durch einen, hinreichend großen, expliziten Massenterm für das baryonische Dekuplett erreicht werden kann, hier $m_{\text{Dec}} = 300$ MeV. Die Vektorkopplung ist gleich stark wie beim Oktett, $r_V = 1.0$, so dass bei chemischen Potentialen $\mu > 0$ kein Phasenübergang erster Ordnung entsteht, weshalb diese Zustandsgleichung schlicht 'no P.T.' genannt werden soll.

Um schließlich einen Phasenübergang bei größeren chemischen Potentialen zu ermöglichen, muss die Vektorkopplung des Dekupletts stark vermindert werden, wie im vorigen Kapitel besprochen. Hier tauchen allerdings Probleme mit normaler Kernmaterie auf, weil der Phasenübergang bei niedrigen Temperaturen dann bei zu kleinen chemischen Potentialen stattfindet. Da sich die Untersuchungen zu Teilchenzahlverhältnissen in diesem Kapitel jedoch auf deutlich höhere Temperaturen (und tendenziell kleinere chemische Potentiale) beschränken, werden diese Probleme mit normaler Kernmaterie vernachlässigt.¹¹ Infolgedessen wählen wir drei Zustandsgleichungen aus, deren Endpunkte bei möglichst ähnlich hohen Temperaturen liegen wie die IQCD-Vorhersage aus Ref. [84] ($T_E \approx 160$ MeV), um untersuchen zu können, welchen Einfluss ein kritischer Endpunkt in dieser Region auf die Beschreibung von Teilchenzahlverhältnissen hat.

Die erste dieser drei Zustandsgleichungen (Mitte rechts, rosa Linien) hat eine stark reduzierte Dekuplett-Vektorkopplung, $r_V = 0.4$ (bei weiterhin $m_{\text{Dec}} = 300$ MeV). Dies ergibt allerdings einen Endpunkt¹² bei lediglich

¹¹Es sei darauf hingewiesen, dass das ideale Hadronengas-Modell, welches zur Beschreibung von experimentellen Teilchenzahlverhältnissen vorwiegend verwendet wird, grundsätzlich (per Konstruktion) nicht in der Lage ist, normale Kernmaterie zu beschreiben.

¹²Aufgrund der unterschiedlichen Behandlung der Mesonenmassen weicht dieser End-

$T \approx 80$ MeV; diese Zustandsgleichung wird 'low Endpoint' genannt. Um einen höher liegenden Endpunkt zu erhalten, wird die Vektorkopplung weiter reduziert auf $r_V = 0.2$ (bei $m_{\text{Dec}} = 300$ MeV). Die zugehörige Zustandsgleichung (unten links, rote Linien) hat bereits einen Endpunkt bei $T \approx 160$ MeV (allerdings bei zu kleinen μ im Vergleich mit Ref. [84]), sie soll 'mid Endpoint' genannt werden. Die letzte dieser drei IQCD-ähnlichen Zustandsgleichungen hat schließlich gar keine Dekuplett-Vektorkopplung mehr, $r_V = 0.0$ (bei $m_{\text{Dec}} = 300$ MeV), ihr Endpunkt liegt geringfügig höher und bei etwas kleinerem chemischen Potential; sie wird 'high Endpoint' genannt.

Unabhängig von der Stärke der Vektorkopplung bleibt bei diesen drei Zustandsgleichungen der Crossover bei $\mu = 0$ eng bzw. stark. Erst im Bereich von mittleren chemischen Potentialen ($\mu_q > 100$ MeV) weitet sich der Crossover (σ -Isolinien) auf bzw. wird abgeschwächt. Bei kleinem chemischem Potential $\mu_q < 100$ MeV ist der repulsive Effekt der Vektorkopplung offensichtlich zu schwach, weshalb dort z.B. bei 'P.T.@ $\mu=0$ ' (siehe oben) trotz starker Vektor-Repulsion $r_V = 1$ noch ein Phasenübergang erster Ordnung vorhanden ist.

Die drei Phasendiagramme zu $m_{\text{Dec}} = 300$ MeV und $r_V = 0.0, 0.2$ bzw. 0.4 entsprechen jenen aus Abb. 4.4, mit dem Unterschied, dass dort die Vakuummassen für die Mesonen verwendet wurden. Dadurch weichen die Phasendiagramme zu entsprechenden Parametern r_V und m_{Dec} geringfügig voneinander ab, hauptsächlich was die Lage des Endpunkts anbetrifft (siehe auch Abschnitt 5.1.2).

Als weitere Zustandsgleichung wird ein ideales Hadronengas-Modell verwendet, welches die verlässlich bekannten Hadronen [47] mit Massen bis einschließlich $m_{\text{Hadron}} = 2$ GeV enthält. Es wird generiert [33], indem alle effektiven Massen und chemischen Potentiale im chiralen Modell auf die ursprünglichen Werte (Vakuummassen und unveränderte chemische Potentiale) gesetzt werden und dann die Zerfalls-Berechnungen aus dem UrQMD-Modell verwendet werden, wie im vorigen Abschnitt für das eigentliche chirale Modell beschrieben. Dieses – sozusagen der expliziten Wechselwirkung entledigte – Modell kann nun als direkte Referenz verwendet werden, um den Einfluss der Medium-Effekte im chiralen Modell überprüfen zu können. (Da das Modell keine Medium-Effekte beinhaltet, gibt es keinen Phasenübergang und das zugehörige Phasendiagramm ist leer; es wäre also jenseits des Phasendiagramms zu 'without Resonances' einzuordnen.) Wie bereits in den Studien [33, 67], soll es mit 'IG_{FFM}' bezeichnet werden. Die

punkt geringfügig von jenem aus Abb. 4.4 rechts zu gleichen Parametern r_V und m_{Dec} ab, siehe Abschnitt 5.1.2 für eine kurze Diskussion.

resultierenden Vorhersagen für Teilchenzahlverhältnisse sind vergleichbar mit anderen idealen Hadronengas-Modellen [33]. Eine exemplarische Untersuchung dazu wird in Abschnitt 5.2.2 vorgestellt.

In der derzeitigen Form ist es leider nicht möglich, die Zustandsgleichung mit Test-Resonanz aus Abschnitt 4.3, welche auch quantitativ mit IQCD-Vorhersagen übereinstimmt, auf Teilchenzahlverhältnisse anzuwenden. Dazu wäre es erforderlich, die Beiträge der effektiven Test-Resonanz den Beiträgen der physikalischen Teilchen zuzuordnen. Deshalb ist wichtig, in das chirale Modell – zusätzlich zum Baryonen-Dekuplett – noch das weitere Resonanzspektrum einzubinden.

Umgekehrt ist jedoch möglich bei den vorliegenden Zustandsgleichungen die Vervollständigung des Massenspektrums entfallen zu lassen und so den Kontakt zu der Zustandsgleichungen aus Abschnitt 4.3 herzustellen. Dies wird am Ende von Abschnitt 5.4 am Beispiel des Parametersatzes 'no P.T' vorgeführt.

5.1.4 Verwendete experimentelle Daten

Die Auswahl der zu beschreibenden experimentellen Daten ist danach ausgerichtet, einen weiten Energie-Bereich abzudecken und zwar auf einer möglichst konsistenten Daten-Basis. Wir verwenden experimentelle Messdaten – Multiplizitäten sofern vorhanden und sonst Teilchenzahlverhältnisse – aus symmetrischen Kollisionen möglichst ähnlicher Systeme ($^{197}\text{Au}+^{197}\text{Au}$ oder $^{208}\text{Pb}+^{208}\text{Pb}$) und wenn möglich aus dem vollen Raumwinkelbereich 4π .

Bei RHIC liegen allerdings nur Teilchenzahlverhältnisse zu mittleren Rapiditäten vor. Um die Einschränkung der Vergleichbarkeit der Daten gering zu halten, verwenden wir deshalb nur Ergebnisse von einem Detektor bzw. Experiment – nämlich von STAR (siehe unten die Referenzen zu den experimentellen Daten), weil hier die umfangreichsten Datensätze vorliegen.

Die Auswahl der experimentellen Daten *und* der Sätze an Teilchenzahlverhältnissen folgt *exakt* der Ref. [137] bis auf zwei Ausnahmen: Ergänzend zur dortigen Auswahl verwenden wir auch Daten vom AGS (Multiplizitäten und ein Verhältnis, jeweils 4π), und bei der höchsten SPS-Energie beschränken wir uns auf die 4π -Daten und verzichten auf die zusätzlichen Daten zu mittlerer Rapidität. Damit ist für die meisten der hier verwendeten Datensätze der direkte Abgleich zu dem in Ref. [137] verwendeten, von unserem Ansatz unabhängigen, idealen Hadronengas-Modell möglich.

Sowohl bei AGS als auch bei den SPS-Energien verwenden wir die 4π -Daten wie sie in Ref. [155] zusammengetragen sind. Der am wenigsten vorgezogene Fall ist das Anpassen der Ausfrierparameter direkt an Multiplizitäten (weil so alle Messdaten gleich behandelt werden), wobei dann zu Temperatur und dem chemischen Potential noch das Ausfrier Volumen als weiterer freier Parameter hinzukommt. Wir verwenden allerdings Teilchenzahlverhältnisse und bilden dazu für alle Teilchen das Verhältnis zur π^+ -Anzahl. Dadurch kann der (unter Umständen verzerrende) Einfluss durch Auswahl von speziellen Teilchenzahlverhältnissen so gering wie möglich gehalten werden, denn die Pionenzahlen sind groß und mit geringem Fehler behaftet – und sie sollten dem Ausfrier Volumen am verlässlichsten proportional sein, aufgrund ihrer großen Anzahl und aufgrund der vielen Produktionskanäle. Im Abschnitt 5.2.2 wird exemplarisch gezeigt, wie stark die Wahl der Verhältnisbildung die resultierenden Ausfrierparameter beeinflusst.

Bei AGS liegen an experimentellen Daten aus dem vollen Raumwinkelbereich (4π) lediglich fünf Multiplizitäten und ein Verhältnis (p/π^+) aus Au+Au Reaktionen bei $E_{\text{Lab}}/A = 11.6$ GeV (kurz AGS-11.6 oder auch AGS) vor. Die Quellen der experimentellen Daten hierzu sind die Referenzen [156, 157, 119, 158, 159]. Wir verwenden bei AGS folgenden Satz an Teilchenzahlverhältnissen zur Bestimmung der Ausfrierparameter

$$\frac{p}{\pi^+}, \quad \frac{K^+}{\pi^+}, \quad \frac{K^-}{\pi^+}, \quad \frac{\Lambda}{\pi^+}, \quad \frac{\bar{\Lambda}}{\pi^+}. \quad (5.4)$$

Vom SPS verwenden wir ausschließlich die 4π -Multiplizitäten der NA49-Kollaboration aus Pb+Pb bei $E_{\text{Lab}}/A = 20, 30, 40, 80$ und 158 GeV; für die Quellen der experimentellen Daten siehe die Referenzen [160, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167]. Bei den Energien $E_{\text{Lab}}/A = 20, 30$ und 80 GeV (kurz SPS-20, SPS-30 und SPS-80) können folgende Teilchenzahlverhältnisse gebildet werden

$$\frac{B - \bar{B}}{\pi^+}, \quad \frac{\pi^-}{\pi^+}, \quad \frac{K^+}{\pi^+}, \quad \frac{K^-}{\pi^+}, \quad \frac{\phi}{\pi^+}, \quad \frac{\Lambda}{\pi^+}, \quad \frac{\bar{\Lambda}}{\pi^+}. \quad (5.5)$$

Bei $E_{\text{Lab}}/A = 40$ GeV (SPS-40) kommt zusätzlich zu diesem Satz an Teilchenzahlverhältnissen noch

$$\frac{\Xi^-}{\pi^+}, \quad \frac{\Omega^- + \bar{\Omega}^+}{\pi^+} \quad (5.6)$$

hinzu und bei $E_{\text{Lab}}/A = 158$ GeV (SPS-158) kann der Satz (5.5) sogar um

$$\frac{\Xi^-}{\pi^+}, \quad \frac{\bar{\Xi}^+}{\pi^+}, \quad \frac{\Omega^-}{\pi^+}, \quad \frac{\bar{\Omega}^+}{\pi^+}, \quad \frac{K_s^0}{\pi^+} \quad (5.7)$$

ergänzt werden.

Nun zu den experimentellen Daten vom RHIC: Bei der ersten Reaktionsenergie verwenden wir die Zusammenstellung an Teilchenzahlverhältnisse zu mittlerer Rapidity aus Au+Au bei $\sqrt{s_{\text{NN}}} = 130$ GeV (RHIC-130) aus der Ref. [147], davon jedoch (wie gesagt) nur die jeweiligen Ergebnisse von der STAR-Kollaboration. Die Quellen der experimentellen Daten sind die Referenzen [168, 169, 170, 171, 172].

Damit ergibt sich der folgende Satz an Teilchenzahlverhältnissen

$$\frac{\pi^-}{\pi^+}, \quad \frac{K^+}{K^-}, \quad \frac{\bar{p}}{p}, \quad \frac{\bar{\Lambda}}{\Lambda}, \quad \frac{\bar{\Xi}^+}{\Xi^-}, \quad \frac{\bar{\Omega}^+}{\Omega^-}, \quad \frac{K^-}{\pi^-}, \quad (5.8)$$

$$\frac{K_s^0}{\pi^-}, \quad \frac{\bar{p}}{\pi^-}, \quad \frac{\Lambda}{\pi^-}, \quad \frac{K^{*0}}{\pi^-}, \quad \frac{\phi}{\pi^-}, \quad \frac{\Xi^-}{\pi^-}, \quad \frac{\Omega^-}{\pi^-}.$$

Und bei der zweiten, höheren Reaktionsenergie ($\sqrt{s_{\text{NN}}} = 200$ GeV, RHIC-200) verwenden wir die Zusammenstellung von Teilchenzahlverhältnissen zu mittlerer Rapidity von STAR aus Ref. [173], diese Verhältnisse sind

$$\frac{\pi^-}{\pi^+}, \quad \frac{K^+}{K^-}, \quad \frac{\bar{p}}{p}, \quad \frac{\bar{\Omega}^+}{\Omega^-}, \quad \frac{K^-}{\pi^-}, \quad (5.9)$$

$$\frac{\bar{p}}{\pi^-}, \quad \frac{\Lambda}{\pi^-}, \quad \frac{\bar{\Lambda}}{\pi^-}, \quad \frac{\Xi^-}{\pi^-}, \quad \frac{\bar{\Xi}^+}{\pi^-}, \quad \frac{\Omega^-}{\pi^-}.$$

Weitere Details zu $\sqrt{s_{\text{NN}}} = 200$ GeV, z.B. wie die Korrektur schwacher Zerfälle bei diesen Daten gehandhabt wurde, sind in den Referenzen [174] enthalten.

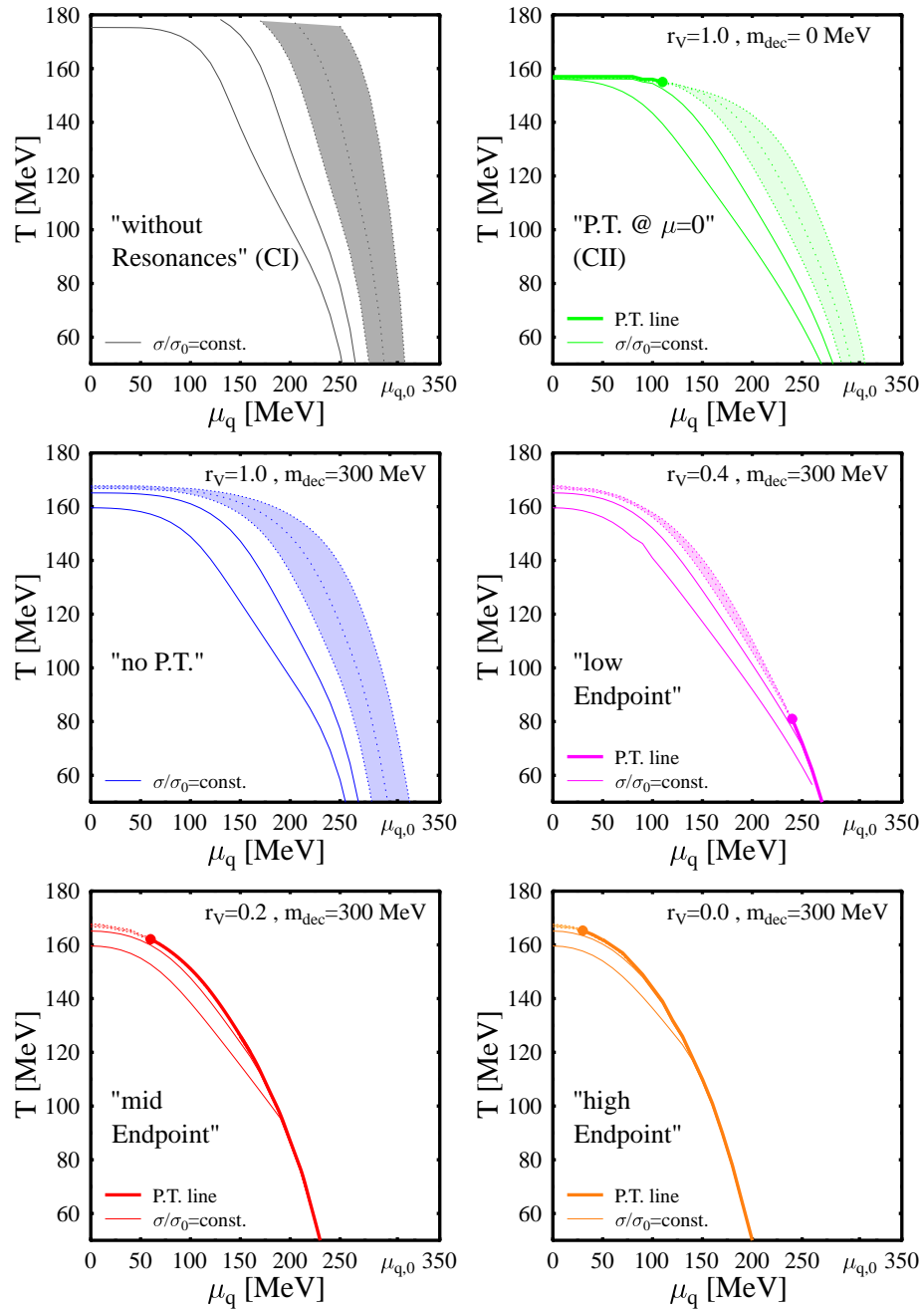


Abbildung 5.1: Darstellung der verwendeten Modell-Parametrisierungen.

Die verschiedenen Parametrisierungen sind dargestellt als Konturdiagramme von σ/σ_0 in der T - μ -Ebene. Gezeigt sind jeweils die Isolinien zu $\sigma/\sigma_0 = 0.9, 0.8, 0.7, 0.6$, und 0.5 (von unten nach oben). Der Bereich zwischen den Isolinien zu 0.7 und 0.5 ist schraffiert, weil hier in der Regel der stärkste Abfall in σ/σ_0 auftritt. Die Linie mit Phasenübergängen erster Ordnung ist, sofern vorhanden, jeweils dick dargestellt.

5.2 Exemplarische Studien

In diesem Abschnitt soll zunächst die Bestimmung der Ausfrierparameter an einem Beispiel vorgeführt werden, vergleichsweise große Datensatz vom SPS zu $E_{\text{Lab}}/A = 40$ GeV gewählt wird.

Danach wird das in dieser Arbeit verwendete ideale Hadronengas-Modell ('IG_{FFM}') exemplarisch mit einem anderen Modell aus der Literatur abgeglichen. Abschließend soll dann vorgeführt werden, wie stark die *Auswahl der Teilchenzahlverhältnisse* (von gegebenen Multiplizitäten), die Vorhersage zu Ausfrierparametern und die zugehörige Qualität der Beschreibung beeinflussen kann.

5.2.1 Teilchenzahlverhältnisse bei 40 A GeV

Dem Vorgehen folgend, welches in Abschnitt 5.1 erläutert wurde, werden nun Ausfrierparameter ermittelt, die eine bestmögliche Übereinstimmung mit den experimentellen Daten ergeben, also das kleinste $\chi^2/N_{\text{D.o.F}}$. Zu diesen Ausfrierparametern können dann die konkreten Vorhersagen der verschiedenen Zustandsgleichungen über die Teilchenzahlverhältnisse angegeben werden.

Als Beispiel dient der Satz von Teilchenzahlverhältnissen (5.5) mit (5.6) zu Messdaten von NA49 aus Pb+Pb bei $E_{\text{Lab}}/A = 40$ GeV am SPS (siehe Abschnitt 5.1.4). Die Abbildung 5.2 zeigt die Teilchenzahlverhältnisse ρ_i/ρ_{π^+} , wie sie aus den Messdaten ermittelt wurden (mit Fehlerbalken), und dazu mit großen Symbolen die Vorhersagen einiger Parametrisierungen des chiralen Modells (einschließlich der Vorhersagen des idealen Hadronengases IG_{FFM}) als Ergebnis. Die Qualität der Beschreibung ist für die einzelnen Zustandsgleichungen durch das jeweils kleinstmögliche $\chi^2/N_{\text{D.o.F}}$ angegeben.

Da die Anzahl der Pionen um bis zu drei Größenordnungen über jener der anderen Hadronen (außer $B-\bar{B}$) liegt, sind die Teilchenzahlverhältnisse in dieser Abbildung logarithmisch dargestellt. Deshalb sind die Fehlerbalken der Messdaten in den Symbolen kaum auszumachen (außer bei den sehr großen Abweichungen bei den letzten drei Verhältnissen).

Um eine bessere Auflösung der Unterschiede zwischen Experiment und Vorhersage zu erreichen, wird in der Abb. 5.3 eine relative Darstellung gewählt. Hier sind alle Werte – Teilchenzahlverhältnisse r_i^{Exp} , r_i^{Modell} und experimentelle Fehler σ_i^{Exp} – durch das zugehörige experimentelle Teilchenzahlverhältnis r_i^{Exp} geteilt worden, so dass nun die Quotienten $r_i^{\text{Modell}}/r_i^{\text{Exp}}$ mit den Fehlern $\sigma_i^{\text{Exp}}/r_i^{\text{Exp}}$ dargestellt sind, wobei $r_i^{\text{Modell}} \equiv \rho_i^{\text{Modell}}/\rho_{\pi^+}^{\text{Modell}}$ und $r_i^{\text{Exp}} \equiv \rho_i^{\text{Exp}}/\rho_{\pi^+}^{\text{Exp}}$ gelten.

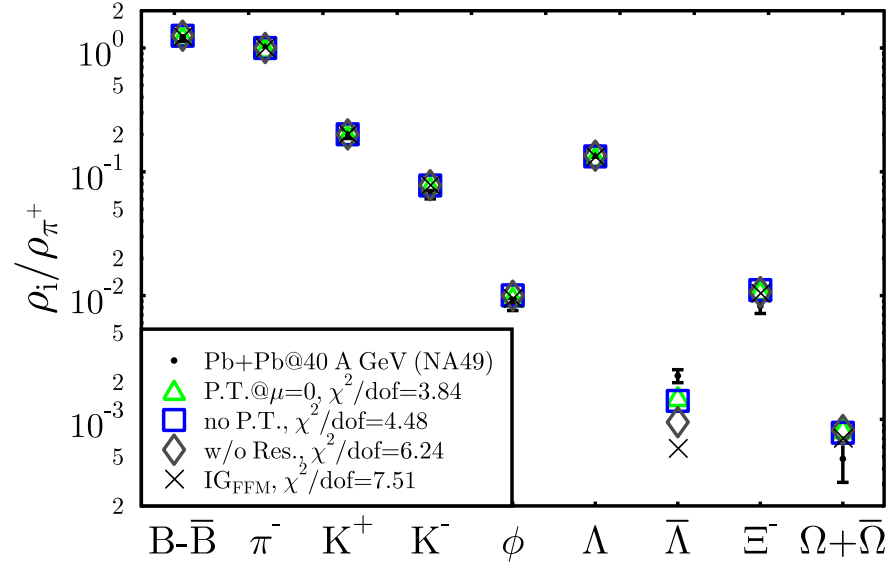


Abbildung 5.2: Beispiel für Teilchenzahlverhältnisse (SPS, 40 A GeV).

Ergebnisse mit minimalem $\chi^2/N_{D.o.F}$ zu experimentellen Daten von NA49 zu Pb+Pb am SPS bei $E_{\text{Lab}}/A = 40$ GeV für einige Parametersätze des chiralen Modells sowie für das ideale Hadronengas, jeweils im Vergleich zu den Messwerten.

(Parametersätze: s. Abb. 5.1 und Erläuterungen dazu in 5.1.3, Messdaten: s. 5.1.4.)

Die Abbildung 5.3 zeigt nun alle Parametersätze (Erläuterungen dazu s. Abb. 5.1) in relativer Darstellung, die Abweichungen zum jeweiligen Messwert sind jetzt besser zu erkennen.

Wieder sind die Werte für das minimale $\chi^2/N_{D.o.F}$ mit angegeben, welche alle deutlich *über* eins liegen; deshalb liegen auch bei allen Parametersätzen die meisten Vorhersagen *nicht* innerhalb der experimentellen Fehler (was in der vorigen Abbildung kaum zu erkennen war). Auffällig ist, dass alle Parametersätze stets in die gleiche Richtung vom Messwert abweichen, wenn auch unterschiedlich stark. Das zeigt eine gewisse Robustheit in den Vorhersagen der verschiedenen Parametersätze.

Bei dieser Abbildung sind nun auch die Ausfrierparameter T^{f-o} und μ_q^{f-o} angegeben. Die Temperaturen liegen nahe beieinander, die chemischen Potentiale streuen dagegen etwas stärker, wobei Zustandsgleichungen mit IQCD-ähnlichem Endpunkt tendenziell niedriger liegen.

Das ideale Hadronengas Modell IG_{FFM} ergibt den größten $\chi^2/N_{D.o.F}$ -Wert, was offensichtlich auf die Probleme mit dem Verhältnis $\rho_{\bar{\Lambda}}/\rho_{\pi^+}$ bei

diesem Datensatz zurückzuführen ist: Die Vorhersage liegt hier über $5\sigma^{\text{Exp}}$ entfernt vom Messwert! Interessant ist hier zu sehen, wie die Vorhersagen zunehmend besser werden für Zustandsgleichungen bzw. Phasendiagramme, die näher an ein IQCD-ähnliches Phasendiagramm kommen. Anscheinend sind die Medium-Effekte für dieses Verhältnis besonders wichtig.

An diesem Beispiel ist aber bereits ersichtlich, wie eine spezielle Verhältnisbildung das Ergebnis beeinflussen kann: Da einige Vorhersagen nach unten abweichen und andere nach oben, kann man durch geeignet gewählte Verhältnisse eine scheinbar bessere (z.B. Ξ^-/K^- , $\Lambda/\bar{\Lambda}$) oder schlechtere (z.B. Λ/Ξ^- , $\bar{\Lambda}/K^-$) Beschreibung erhalten, so dass beim minimieren von χ^2 veränderte Ausfrierparameter zu erwarten sind. Darauf werden wir in Abschnitt 5.2.3 noch einmal näher eingehen.

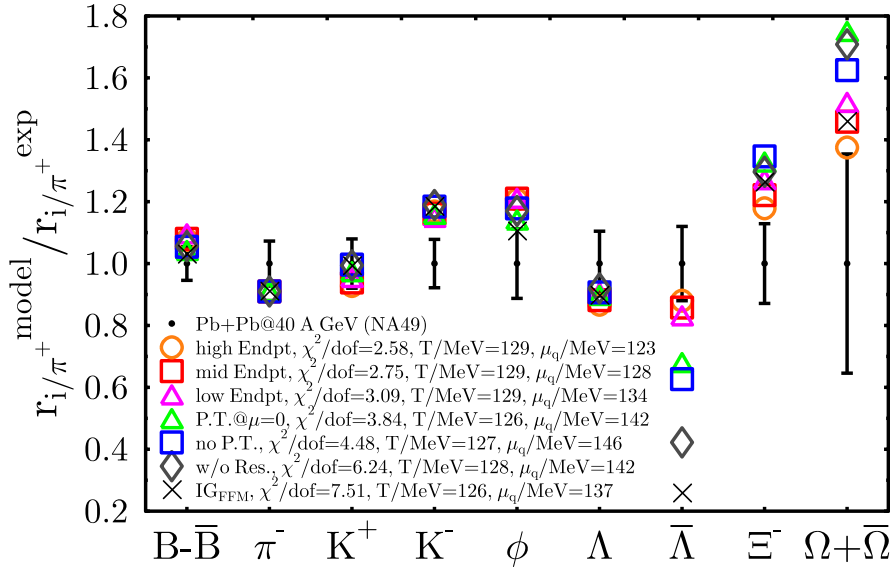


Abbildung 5.3: Teilchenzahlverhältnisse in relativer Darstellung.

Ergebnisse mit minimalem $\chi^2/N_{\text{D.o.F}}$ in relativer Darstellung, d.h. bezogen auf die Messdaten, zu experimentellen Daten von NA49 zu Pb+Pb am SPS bei $E_{\text{Lab}}/A = 40$ GeV für alle Parametersätze sowie für das ideale Hadronengas, jeweils im Vergleich zu den Messwerten.

(Parametersätze: s. Abb. 5.1 und Erläuterungen dazu in 5.1.3, Messdaten: s. 5.1.4.)

In den Abbildungen 5.4 ist die Beschreibungsqualität zu den experimentellen Daten von NA49 zu Pb+Pb am SPS bei $E_{\text{Lab}}/A = 40$ GeV im μ - T -Diagramm dargestellt. Die obere Abbildung zeigt die Konturlinien von χ^2

eines Parametersatzes des chiralen Modells ('mid Endpoint') mit einer zufriedenstellenden Beschreibung, $\chi_{\min}^2 \approx 19$ entsprechend $\chi^2/N_{\text{D.o.F}} = 2.8$. Die innerste Kontur zu $\chi^2/N_{\text{D.o.F}}+1$ (χ_{\min}^2+7) gibt eine Orientierung für die Genauigkeit der Aussage über den Ausfrierpunkt zu diesen Daten. Es ist deutlich zu erkennen, dass die Beschreibungsqualität zum Phasenübergang hin stark nachlässt bzw. das χ^2 stark ansteigt.

In der unteren Abbildung sind die χ^2 -Konturlinien des idealen Hadronengas-Modells IG_{FFM} dargestellt. Hier ist die Beschreibung wesentlich schlechter, $\chi_{\min}^2 \approx 52$ entsprechend $\chi^2/N_{\text{D.o.F}} = 7.5$ und damit nicht mehr akzeptabel. Zudem ist die innerste Kontur zu χ_{\min}^2+7 deutlich größer und somit sind die Ausfrierparameter T und μ_q weniger signifikant als im oberen Fall.

Die Werte der äußersten Konturen ($\chi^2 = 700, 567, 448, \dots$) sind die selben in beiden Schaubildern, auch hier zeigt sich, dass ein μ - T -Bereich zu entsprechender Beschreibungsqualität bei IG_{FFM} wesentlich größer ist als bei der chiralen Zustandsgleichung.

Im Vergleich fällt auch die unterschiedliche Ausrichtung der innersten Kontur auf, in der oberen Abbildung ist sie durch den nahen Phasenübergang beeinflusst und dadurch leicht diagonal ausgerichtet, wohingegen eine solche Beschränkung im unteren Fall nicht erkennbar ist.

5.2.2 Abgleich thermischer Modelle

Zur höchsten SPS-Energie ($E_{\text{Lab}}/A = 158$ GeV) gibt es schon seit mehreren Jahren eine große Anzahl von experimentellen Teilchenzahlverhältnissen (von NA44, NA49, NA50, WA97 und WA98) und demzufolge auch vielerlei Studien zur Bestimmung von Ausfrierparametern mit dem thermischen Modell, wie z.B. [175, 141, 149]. Darunter ist auch die Studie von Braun-Munzinger, Heppe und Stachel aus Ref. [142] (im Folgenden abgekürzt mit 'BHS'), mit welcher wir im Folgenden das in dieser Arbeit verwendete ideale Hadronengas-Modell IG_{FFM} abgleichen wollen.

Auf der Basis von Daten zu mittleren Rapiditäten ergeben sich bei BHS (siehe dort für Referenzen zu den experimentellen Daten) die folgenden Ausfrierparameter

$$T = 168 \text{ MeV}, \quad \mu_q = 88.7 \text{ MeV} \quad \text{und} \quad \mu_s = 17.6 \text{ MeV} \quad (5.10)$$

sowie $\mu_{I_3} = -5.0$ MeV. Die quark-chemischen Potentiale μ_q und μ_s entsprechen den Angaben $\mu_B \equiv 3\mu_q = 266$ MeV und $\mu_S \equiv (\mu_q - \mu_s) = 71.1$ MeV aus [142].

In dem BHS-Modell wurden Eigenvolumen-Korrekturen verwendet mit einem Radius-Parameter (*Hard-Core-Radius*) von $R = 0.3$ fm. Wird dieser

Hard-Core-Radius für die Pionen und die anderen Mesonen vernachlässigt, $R_{\text{Meson}} = 0$, erhöht sich beispielsweise die Pionendichte um 30% [142].

In einer unabhängigen Studie [149] wurden auf der Basis eines fast übereinstimmenden Satzes von experimentellen Daten entsprechende Ausfrierparameter bei einer ähnlichen Beschreibungsqualität gefunden.

Nun soll das IG_{FFM} -Modell auf den Datensatz von [142] angewendet werden, um einen direkten Vergleich mit dem BHS-Modell zu erhalten. Die Abbildung 5.5 zeigt die verwendeten Teilchenzahlverhältnisse, wie zuvor in relativer Darstellung, die eine wesentlich verbesserte Auflösung bringt im Vergleich zur logarithmischen Darstellung. Die experimentellen Daten (siehe dazu Referenzen in [142], inzwischen teilweise überholt) sind mit schwarzen Punkten und Fehlerbalken dargestellt, die Ergebnisse des IG_{FFM} -Modells zum minimalen χ^2 mit schwarzen Kreuzen und jene des BHS-Modells aus [142] mit blauen Kreisen.

Für diesen Datensatz erhalten wir mit dem IG_{FFM} -Modell nun ein minimales χ^2 von 19.8, und als Ausfrierparameter ergeben sich

$$T = 167 \text{ MeV}, \quad \mu_q = 81 \text{ MeV} \quad \text{und} \quad \mu_s = 21.1 \text{ MeV} \quad (5.11)$$

(bei $\mu_{I_3} = 0 \text{ MeV}$ und $R = 0 \text{ fm}$). Diese Ausfrierparameter liegen nahe an dem BHS-Ergebnis (5.10), eine merkliche Abweichung zeigt sich nur beim quark-chemischen Potential. Auch die Qualität der Beschreibung durch beide Modelle ist vergleichbar, bei dem BHS-Modell ergibt sich $\chi^2 = 17.5$ für die verwendeten Teilchenzahlverhältnisse, also eine geringfügig bessere Anpassung für BHS als für IG_{FFM} . Dies zeigt sich auch in der Abbildung: Die blauen Kreise liegen im Mittel näher an den Messwerten als die schwarzen Kreuze.

Auffällig ist, dass die Vorhersagen bei den meisten Verhältnissen (bis auf Λ/K_s^0 , K^+/K^- , Ξ^-/Λ und $(\Xi^- + \bar{\Xi}^+)/(\Lambda + \bar{\Lambda})$) in gleicher Richtung vom Experiment abweichen – vergleiche auch die entsprechende Beobachtung in 5.2.1. Dennoch liegen die Probleme der beiden Modelle oft bei unterschiedlichen Verhältnissen (z.B. Probleme mit η/π^0 oder K_s^0/h^- bei IG_{FFM} , dagegen mit $\bar{\Omega}^+/\Omega^-$ bei BHS).

Es gibt einige wichtige Unterschiede zwischen den beiden Modellen, die diese Diskrepanzen verursachen können. Zum einen hat das IG_{FFM} -Modell keine Isospin-Freiheitsgrade, weshalb allein schon das Verhältnis π^-/π^+ hier nie von 1 abweichen kann. Und zum anderen enthält das Modell keine Eigenvolumen-Korrekturen, deren Einfluss bei Teilchenzahlverhältnissen gering sein sollten wie oben erwähnt, jedoch ist die verbleibende Abweichung schwer einzuschätzen.

Ein wichtiger Einfluss stammt wahrscheinlich von der unterschiedlichen Behandlung unbekannter oder kaum bekannter Zerfälle schwerer Resonanzen (vgl. Bemerkung in Abschnitt 5.1.1) und der schwachen Zerfälle.

Zwar wurde das in Abschnitt 5.1.2 angesprochene *weak Feeding* möglichst ähnlich zu Ref. [142] bzw. zu den verwendeten Daten behandelt (so enthalten beispielsweise die mit 'x' gekennzeichneten Verhältnisse keine Feeding-Beiträge, im Gegensatz zu den entsprechenden Verhältnissen ohne 'x'). Es verbleiben jedoch Teilchenzahlverhältnisse, bei denen die Beiträge durch schwachen Zerfall nicht eindeutig rekonstruiert werden können. Für die hier verwendeten Daten wurde in der bereits erwähnten Studie [149] gezeigt, dass die unterschiedliche Berücksichtigung dieser Beiträge die Beschreibungsqualität (χ^2/N zwischen 0.9 und 1.8) und die Ausfrierparameter (innerhalb der angegebenen Fehler) verändert.

Um diese Unterschiede noch etwas näher zu untersuchen, können weitere Ausfrierparameter-Kombinationen mit dem IG_{FFM} studiert werden. Zunächst wählen wir $T^{\text{f.-o.}}$ und $\mu_q^{\text{f.-o.}}$ analog zum BHS-Ergebnis (5.10), womit zunächst der Einfluss der Anpassung (Suche nach dem minimalen χ^2 -Wert) ausgeschaltet wird; siehe die grünen Kreuze in der Abbildung. Dadurch steigt zwingenderweise der χ^2 -Wert, aber bei einigen Verhältnissen liegt die Vorhersage jetzt näher am BHS-Wert (Λ/h^- , Λ/K_s^0 , K^+/K^- , Ξ^-/Λ_x und $(\Xi^- + \bar{\Xi}^+)/(\Lambda + \bar{\Lambda})$).

Das seltsame chemische Potential wird stets durch die Bedingung fixiert, dass die Netto-Seltsamkeit im Gesamtsystem verschwinden muss, $f_s = 0$. Da schwache Zerfälle die Seltsamkeitserhaltung verletzen können, kann eine andere Behandlung dieser Zerfälle im BHS-Modell zu anderen Werten von $\mu_s^{\text{f.-o.}}$ führen. Deshalb übernehmen wir schließlich auch noch das seltsame chemische Potential von (5.10) für das IG_{FFM} -Modell, was zwangsläufig zu $f_s \neq 0$ führt (und zu einer weiteren, geringfügigen Verschlechterung von χ^2). Die Ergebnisse hierzu sind mit blaugrünen Kreuzen dargestellt. Sie liegen jetzt bei einigen Verhältnissen näher bei oder sogar fast auf den Werten von BHS (vergleiche Λ/h^- , $\bar{\Lambda}/\Lambda_x$, Ξ^-/Λ_x und besonders K^+/K^- , $\bar{\Xi}^+/\Xi^-$ und $\bar{\Omega}^+/\Omega^-$).

Auch jetzt sind noch rund die Hälfte der Verhältnisse tendenziell unterschiedlich in der Beschreibungsproblematik bei BHS und IG_{FFM} (zum Teil wechselt auch die Problematik von schwarzen über grüne zu blaugrünen Kreuzen, z.B. $(p - \bar{p})/h^-$ oder $\bar{\Xi}^+/\Xi^-$).

Die verbleibenden Abweichungen sollten auf die unterschiedliche Behandlung der nicht genau bekannten Zerfälle schwerer Resonanzen in beiden Modellen zurückführbar sein.

Abgleich bei konstanter Energie pro Teilchen

Als ein weiterer Abgleich des in dieser Arbeit verwendeten idealen Hadronengas-Modells IG_{FFM} sollen noch thermodynamische Größen des Gesamtsystems mit einem anderen Modell abgeglichen werden.

Am Anfang dieses Kapitels wurde erwähnt, dass die Ausfrierpunkte zu Schwerionen-Kollisionen in einem engen Band liegen, welches sich durch verschiedene Ausfrierkriterien charakterisieren lässt, wie in der vergleichenden Studie [151] ausgeführt wird. Die Abbildung 5.6 zeigt ein Schaubild aus dieser Studie, in welches zusätzlich drei Punkte eingezeichnet sind (grüne Kreuze bei $\mu_B \approx 300, 450$ und 600 MeV), bei denen das IG_{FFM} -Modell den Wert $\langle E \rangle / \langle N \rangle = 1.08$ GeV annimmt. Diese Punkte liegen auf (oder sehr nahe an) der durchgezogenen Linie, die sich in dem idealen Hadronengas-Modell aus Ref. [151] für die Bedingung $\langle E \rangle / \langle N \rangle = 1.08$ GeV (konstante Energie pro Teilchen beim Ausfrieren) ergibt.

Zusammenfassend hat sich aus diesen beispielhaften Untersuchungen also ergeben, dass das ideale Hadronengas-Modell IG_{FFM} in seinen Vorhersagen zu Teilchenzahlverhältnissen und bei thermodynamischen Größen des Gesamtsystems vergleichbar ist mit anderen Modellen [142, 149, 151].

Vor diesem Hintergrund kann somit das thermische Modell bzw. der thermische Ansatz in den folgenden Abschnitten als zuverlässige Einbettung (siehe 5.1.2) sowohl für das ideale Hadronengas als auch für das (nicht-ideale, weil wechselwirkende) hadronische chirale Modell verwendet werden. Insbesondere ist das ideale Hadronengas-Modell IG_{FFM} mit dieser Einbettung eine gute Referenz für Vergleiche mit verschiedenen Parametrisierungen des chiralen Modells, weil dadurch Einflüsse von unterschiedlicher Umsetzung des zugrunde liegenden thermischen Ansatzes vermieden werden können. Damit können dann unterschiedliche Vorhersagen ausschließlich auf Unterschiede der Zustandsgleichungen zurückgeführt werden.

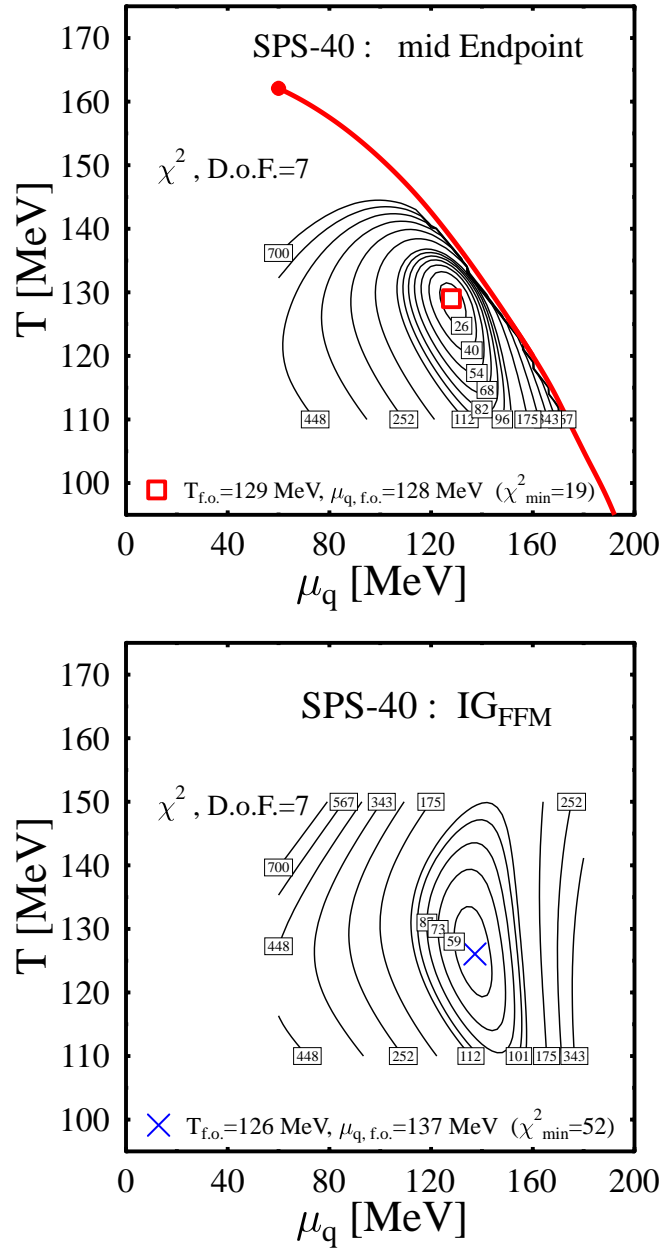


Abbildung 5.4: Konturlinien zur Beschreibungsqualität (SPS, 40 A GeV).

Konturlinien zum jeweiligen χ^2 (bei D.o.F.=7, so dass $\chi^2 = 7$ einer optimalen Beschreibung entspricht) zu experimentellen Daten von NA49 zu Pb+Pb am SPS bei $E_{\text{Lab}}/A = 40$ GeV. Oben ist der Parametersatz 'mid Endpoint' des chiralen Modells (die dicke Linie zeigt den Phasenübergang, vergleiche auch die Abb. 5.1 und Erläuterungen dazu in 5.1.3) dargestellt, und unten das ideale Hadronengas. Für die experimentellen Daten siehe Abschnitt 5.1.4.

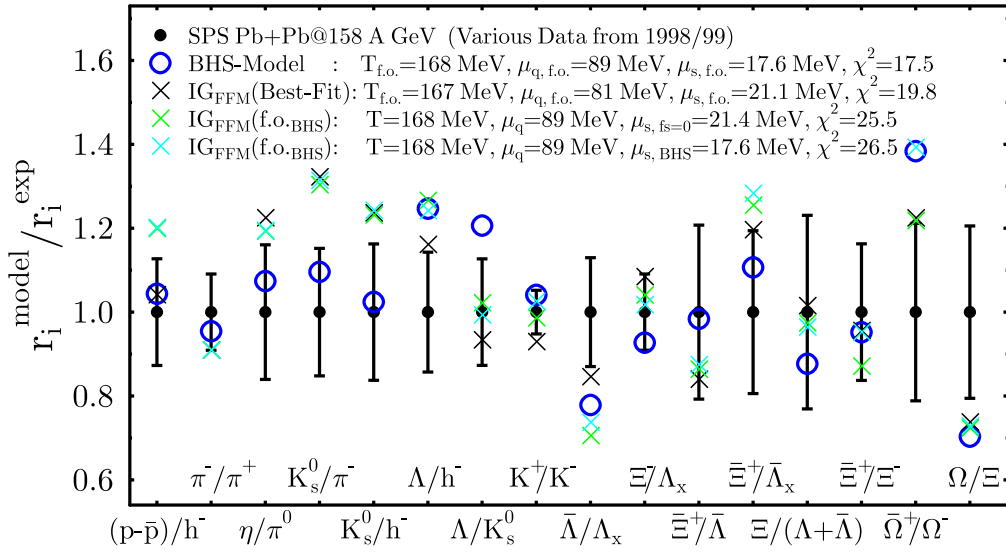


Abbildung 5.5: Abgleich thermischer Modelle bei $E_{\text{Lab}}/A = 158$ GeV (SPS).

Teilchenzahlverhältnisse aus Pb+Pb bei $E_{\text{Lab}}/A = 158$ GeV von verschiedenen Kollaborationen am SPS und Ergebnisse des Modells aus Ref. [142] (BHS) und des idealen Hadronengas-Modells, was in dieser Arbeit als Referenz verwendet wird (IG_{FFM}) mit den Ergebnissen zu minimalem χ^2 sowie den Ergebnissen zu den Ausfrierparametern von BHS (f.o.BHS). Die Modell-Ergebnisse sind relativ zu den jeweiligen experimentellen Werten dargestellt.

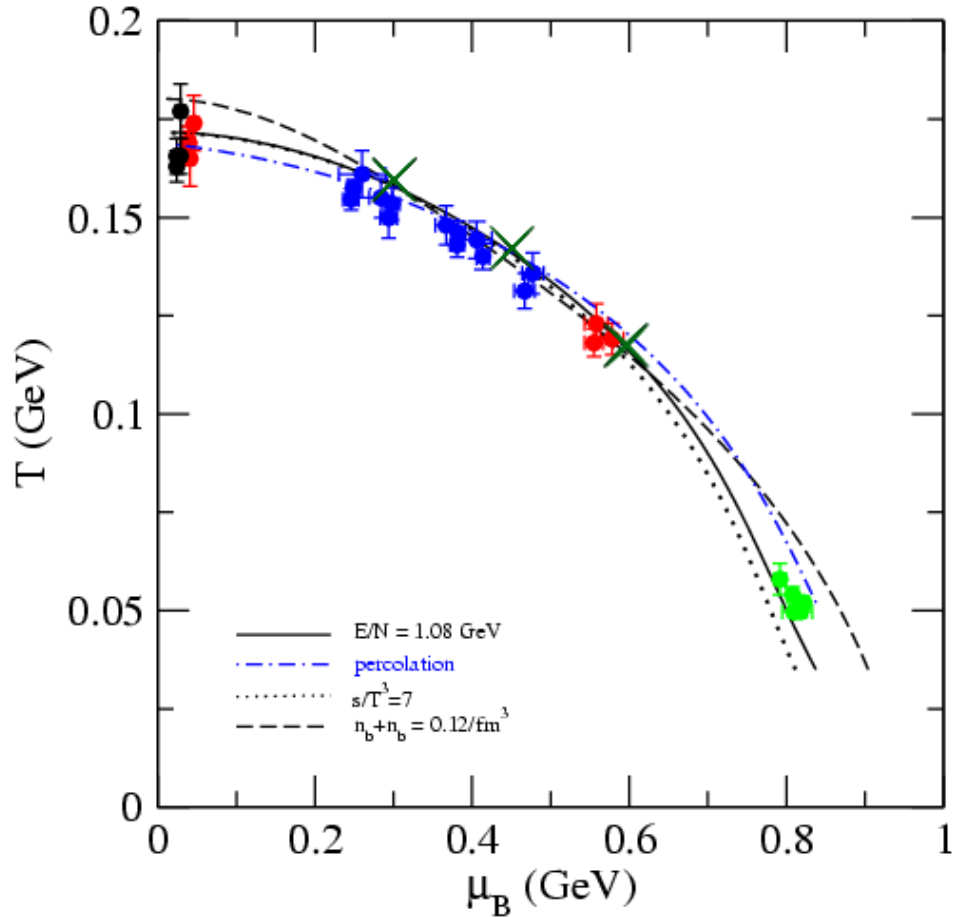


Abbildung 5.6: Verschiedene Ausfrierkriterien im μ_B - T -Diagramm (aus Ref. [151]), ergänzt um Punkte des Modells IG_{FFM} .

Dargestellt sind verschiedene Ausfrierkriterien und die Ausfrierpunkte mehrerer Modellrechnungen, entnommen aus der Ref. [151], Referenzen zu den jeweiligen Ausfrierpunkten siehe dort.

Zusätzlich sind in diesem Schaubild beispielhaft drei dunkelgrüne Kreuze eingezeichnet (bei $\mu_B \approx 300, 450$ und 600 MeV), an denen das in dieser Arbeit verwendete ideale Hadronengas-Modell IG_{FFM} den Wert $\langle E \rangle / \langle N \rangle = 1.08$ GeV ergibt; diese liegen auf der Linie des entsprechenden Ausfrierkriteriums aus Ref. [151] (durchgezogene Linie).

5.2.3 Einfluss der Auswahl von Teilchenzahlverhältnissen

Im Gegensatz zu den vorigen Ausfrierparametern erhalten wir auf Basis der aktuellen 4π -Messdaten der NA49-Kollaboration eine erheblich niedrigere Ausfrierparameter und eine schlechtere Beschreibungen bzw. ein größeres χ^2 . Mit dem idealen Hadronengas-Modell IG_{FFM} ergibt sich für den Satz von 12 Teilchenzahlverhältnissen (5.5) mit (5.7) ein χ^2 -Wert von 89.6 bei 10 Freiheitsgraden und für die Ausfrierparameter

$$T = 143 \text{ MeV}, \quad \mu_q = 77 \text{ MeV} \quad \text{und} \quad \mu_s = 38.1 \text{ MeV} \quad (5.12)$$

(sowie $\mu_{I_3} = 0 \text{ MeV}$ und $R = 0 \text{ fm}$ per Konstruktion, siehe Abschnitt 5.1.2).

Die große Abweichung zwischen den Ergebnissen (5.11) und (5.12) erklärt sich zunächst daraus, dass hier Daten aus dem vollen Raumwinkel 4π verwendet wurden, während dem ersteren Ergebnis Messdaten aus mittleren Rapiditäten zugrunde liegen (sozusagen aus dem innersten des Feuerballs), wo sich typischerweise höhere Temperaturen ergeben.

Auch andere aktuelle Studien [136, 176] bestätigen diesen Trend zu erheblich niedrigeren Ausfrierparametern und schlechteren Ergebnissen bzw. größeren $\chi^2/N_{\text{D.o.F}}$ -Werten bei Verwendung der 4π -Multiplizitäten der NA49-Kollaboration.

Diese Probleme bei der Beschreibung (große $\chi^2/N_{\text{D.o.F}}$) deuten darauf hin, dass der thermische Ansatz hier als solcher unzureichend ist. So ermöglicht z.B. der alternative 'inhomogene' Ansatz aus Ref. [137] (mit der Annahme einer inhomogenen Verteilung von Temperatur und baryo-chemischem Potential beim Ausfrieren) eine signifikant bessere Beschreibung der Daten, $\chi^2/N_{\text{D.o.F}} \approx 1$, im Bereich hoher und auch mittlerer SPS-Energien.

Andere Studien gelingt eine verbesserte Beschreibung durch das Einführen von $\gamma_s < 1$ [155], was auf eine höhere Temperatur führt ($T^{\text{f.o.}} \approx 175 \text{ MeV}$), oder zusätzlich mit einem Faktor $\gamma_q > 1$ [177], was zu einer niedrigeren Temperatur als oben führt ($T^{\text{f.o.}} \approx 135 \text{ MeV}$).

Wir wollen hier jedoch für den Abschluss der exemplarischen Studien einen anderen Zugang wählen, nämlich die Untersuchung des Einflusses der *Auswahl* von bestimmten Teilchenzahlverhältnissen. Da sich aus den experimentellen Daten, die dem Ergebnis (5.11) zugrunde liegen, kein Datensatz wie (5.5, 5.7) ableiten lässt, wird hier der umgekehrte Weg untersucht: Wir bilden aus den uns vorliegenden experimentellen Daten (4π -Multiplizitäten von NA49, siehe 5.1.4) Teilchenzahlverhältnisse derart, dass sie dem Satz aus Abb. 5.5 möglichst nahe kommen. Dabei ist es nicht notwendig diesen Satz tatsächlich exakt zu kopieren, was mit den vorliegenden Multiplizitäten auch

nicht möglich ist, sondern es geht hier um eine grundsätzliche Studie des Einflusses einzelner, spezieller Verhältnisse auf die Ausfrierparameter und die Beschreibungsqualität.

Die Ergebnisse sind in der Tabelle 5.1 dargestellt. Als Vergleich werden zunächst in der ersten Ergebnis-Zeile die Ausfrierparameter (5.11) analog Abb. 5.5, wiederholt und in der zweiten Zeile das Ergebnis (5.12) zu der Auswahl (5.5, 5.7), welche eine möglichst neutrale Auswahl darstellt.

In der dritten Ergebnis-Zeile (a) ist nun der Basis-Satz für diese Untersuchung angegeben, welcher aus jenen neun Verhältnissen des Referenz-Satzes von Abb. 5.5 besteht, die mit den verfügbaren Multiplizitäten direkt gebildet werden können. Der Referenz-Satz enthält des weiteren noch die Verhältnisse $\frac{K_s^0}{h^-}$, $\frac{p-\bar{p}}{h^-}$ und $\frac{\Lambda}{h^-}$ welche mit den ähnlichen Verhältnissen $\frac{K_s^0}{\pi^-}$, $\frac{B-\bar{B}}{\pi^-}$ und $\frac{\Lambda}{\pi^-}$ nachempfunden werden, natürlich ohne eine direkte Entsprechung darzustellen. (Hier hat $\frac{K_s^0}{\pi^-}$ eine Sonderstellung, weil im Referenz-Satz sowohl $\frac{K_s^0}{h^-}$ als auch direkt $\frac{K_s^0}{\pi^-}$ vorkommt.) Bei den folgenden Zeilen (b) – (h) kommen von diesen Verhältnissen dann jeweils ein weiteres (b, c, d), zwei weitere (e, f, g) und bei (h) schließlich alle drei hinzu. Die in den NA49-Daten enthaltene Multiplizität von ϕ kommt im Referenz-Satz aus Abb. 5.5 nicht vor und wird deshalb in dieser Untersuchung nicht verwendet.

Zunächst fällt auf, dass die resultierenden Ausfrierparameter zum Basis-Satz (a) sehr nahe am Ergebnis der ersten Zeile liegen, und auch die Beschreibung ist ähnlich gut (sogar besser, $\chi^2/N_{D.o.F} = 0.7$).

Hinzunehmen eines weiteren Verhältnisses führt entweder mit $\frac{K_s^0}{\pi^-}$ (b) zu einem dramatisch verschlechterten $\chi^2/N_{D.o.F}$ (Faktor sechs!) bei nahezu unveränderten Ausfrierparametern. Oder es ergeben sich mit $\frac{B-\bar{B}}{\pi^-}$ (c) bzw. $\frac{\Lambda}{\pi^-}$ (d) deutlich veränderte Ausfrierparameter (T über 5 MeV und μ_q über 10 MeV niedriger) bei lediglich verdoppeltem $\chi^2/N_{D.o.F}$. In den Fällen mit zwei weiteren Verhältnissen (e, f, g) verändern sich die Ausfrierparameter kaum gegenüber (c, d), allerdings ist das jeweilige $\chi^2/N_{D.o.F}$ enorm verschlechtert, wenn das Verhältnis $\frac{K_s^0}{\pi^-}$ dabei ist. Offenbar bewirkt das Verhältnis $\frac{K_s^0}{\pi^-}$ zwar grundsätzlich eine sehr starke Verschlechterung der Beschreibung, jedoch ohne gleichzeitig die Ausfrierparameter stark zu beeinflussen. Umgekehrt bevorzugen offensichtlich die beiden Verhältnisse $\frac{B-\bar{B}}{\pi^-}$ und $\frac{\Lambda}{\pi^-}$ auch unabhängig voneinander deutlich niedrigere Ausfrierparameter als bei (a). Und der vollständige Satz (h) ergibt, nach dieser Diskussion wenig überraschend, keine entscheidende Veränderung zu (e, f).

Zum Ermitteln der Anzahl der Freiheitsgrade $N_{D.o.F}$ dürfen korrekterweise nur Verhältnisse mitgezählt werden, die unabhängig voneinander aus den

zugrunde liegenden Multiplizitäten gebildet werden können. (Bei direkt gemessenen Teilchenzahlverhältnissen, wie z.B. bei den experimentellen Daten von RHIC, können diese schon eher als unabhängig voneinander angenommen werden.) In der Zeile (e) ist $N_{\text{D.o.F.}} = 7$ statt 8 angegeben, weil $\frac{K_s^0}{\pi^-}$ und $\frac{\Lambda}{\pi^-}$ über das Verhältnis $\frac{\Lambda}{K_s^0}$ aus dem Basis-Satz (a) zusammenhängen. Bemerkenswert ist hier die Tatsache, dass der Satz (e) trotzdem auf ein ganz anderes Ergebnis führt als die Sätze (b) oder (d).

Allein dieses Detail zeigt schon, wie groß der Einfluss der Auswahl von Teilchenzahlverhältnissen sein kann, und untermauert das Ziel dieser kleinen Untersuchung.

Abschließend soll betont werden, dass ausführlichere systematische Studien in solcher Art,¹³ besonders für die SPS-Daten von NA49 (z.B. die Untersuchung *aller* möglicher Verhältnis-Kombinationen aus den jeweils vorliegenden Multiplizitäten), in der Literatur bisher nicht durchgeführt wurden.¹⁴

Eine solche Untersuchung ist aber dringend notwendig, da nach der vorgehenden Studie die Wahl des Satzes an Teilchenzahlverhältnissen offensichtlich einen starken Einfluss auf die Bestimmung von Ausfrierparametern hat (Abweichungen von $\Delta T \approx 20$ MeV zwischen der Auswahl (5.5, 5.7) und dem Satz (a) aus der Tabelle sowie von $\Delta\mu_q \approx 15$ MeV zwischen (b) und (h) aus der Tabelle).

Ein Ausweg ist wie gesagt die direkte Beschreibung der Multiplizitäten. Wir haben uns in 5.1.4 mit der einheitlichen Verhältnisbildung zu π^+ für einen Kompromiss entschieden.

¹³In Ref. [176] wird auf die großen Unterschiede der Ausfrierparameter hingewiesen, die sich aus den Daten der verschiedenen Experimente am SPS ergeben und erwähnt, dass eine andere Verhältnisbildung aus den NA49-Multiplizitäten bei SPS-158 auf unterschiedliches χ^2 führt – jedoch wird nicht festgestellt, ob sich dadurch auch die Ausfrierparameter ändern.

¹⁴In [147, 178] werden einige unterschiedliche Datensätze bei RHIC-130 und 200 parallel untersucht, ohne jedoch den Einfluss der Auswahl dieser Sätze in den Vordergrund der Untersuchung zu stellen.

Teilchenzahlverhältnisse	$T^{\text{f.-o.}}/\text{MeV}$	$\mu_q^{\text{f.-o.}}/\text{MeV}$	$\frac{\chi^2}{N_{\text{D.o.F.}}}$	$N_{\text{D.o.F.}}$
<u>Zu alten Daten (aus Ref. [142]):</u> Satz wie in Abb. 5.5	167	81	19.8/ ~ 14	~ 14
<u>Zu neuen Daten (aus 5.1.4):</u> Satz (5.5, 5.7)	143	77	9.0	10
Sätze ähnlich zu Abb. 5.5:				
(a) Basis-Satz $\frac{\pi^-}{\pi^+}, \frac{\Lambda}{K_s^0}, \frac{K^+}{K^-}, \frac{\bar{\Lambda}}{\Lambda}, \frac{\Xi^-}{\Lambda}, \frac{\Xi^+}{\Lambda}, \frac{\Xi^+}{\Xi^-}, \frac{\bar{\Omega}^+}{\Omega^-}, \frac{\Omega^-}{\Xi^-}$	163	88	0.7	6
(b) Basis mit $\frac{K_s^0}{\pi^-}$	164	90	4.2	7
(c) Basis mit $\frac{B-\bar{B}}{\pi^-}$ ($\sim \frac{p-\bar{p}}{h^-}$)	156	76	1.2	7
(d) Basis mit $\frac{\Lambda}{\pi^-}$ ($\sim \frac{\Lambda}{h^-}$)	156	77	1.6	7
(e) Basis mit $\frac{K_s^0}{\pi^-}$ und $\frac{\Lambda}{\pi^-}$	154	76	5.1	7
(f) Basis mit $\frac{K_s^0}{\pi^-}$ und $\frac{B-\bar{B}}{\pi^-}$	154	76	4.2	8
(g) Basis mit $\frac{B-\bar{B}}{\pi^-}$ und $\frac{\Lambda}{\pi^-}$	155	75	1.4	8
(h) Basis mit $\frac{K_s^0}{\pi^-}, \frac{B-\bar{B}}{\pi^-}$ und $\frac{\Lambda}{\pi^-}$	153	75	4.5	8

Tabelle 5.1: Einfluss verschiedener Sätze von Teilchenzahlverhältnissen auf die Ausfrierparameter.

Einfluss der unterschiedlichen Auswahl an Verhältnissen auf die Beschreibung. Angegeben sind die Ausfrierparameter zur jeweils besten Beschreibung (*Best-Fit*) von Teilchenzahlverhältnissen aus 4π -Multiplizitäten von NA49 zu Pb+Pb bei $E_{\text{Lab}}/A = 158$ GeV am SPS durch das IG_{FFM} -Modell.

Zum Vergleich ist in der ersten Zeile das Ergebnis (5.11) zu einem umfangreicheren aber teils überholten Datensatz (aus Ref. [142]) wiedergegeben und in der zweiten Zeile das Ergebnis (5.12) zur Auswahl (5.5, 5.7), welche möglichst neutral ist.

5.3 Ergebnisse von AGS bis RHIC

In diesem Abschnitt werden nun alle in 5.1.3 vorgestellten Modell-Parametrisierungen des chiralen Modells bzw. Zustandsgleichungen auf die Beschreibung der in 5.1.4 angegebenen Sätze von Teilchenzahlverhältnissen angewendet. Analog zum Beispiel in 5.2.2 werden jeweils die Ausfrierparameter der besten Beschreibung (kleinstes χ^2) bestimmt und dann die zugehörigen Vorhersagen untersucht.

5.3.1 Ausfrierkurven

Zunächst sollen die Ausfrierparameter für alle Zustandsgleichungen und bei allen Energien (zum jeweils besten Ergebnis) gezeigt werden. Dafür verwenden wir die Darstellung als Ausfrierpunkte im T - μ -Diagramm, sie ist gebräuchlich und vermittelt einen guten und kompakten Überblick.

Aus Studien wie [179, 151] erwarten wir – zumindest für das ideale Hadronengas – dass sich die Ausfrierpunkte auf oder nahe bei einer Kurve mit konstanter Krümmung, der (vorgestellten) *Ausfrierkurve*, befinden. Mit dem chiralen Modell sollten sich im Vergleich zu IG_{FFM} veränderte Ausfrierparameter ergeben [152, 66, 67] – besonders in der Nähe eines Phasenübergangs, welcher ggf. einschränken kann, weil in der restaurierten Phase keine akzeptable Beschreibung gelingt [33]. Die jeweils beste Beschreibung mit dem chiralen Modell sollte wenig schlechter sein und kann zum Teil sogar erheblich besser werden als mit dem idealen Hadronengas [66, 67], wobei moderate Änderungen für die Hadronen-Massen und chemischen Potentiale erwartet werden.

Die Abbildung 5.7 zeigt die Ergebnisse für die ersten drei Zustandsgleichungen von Abb. 5.1, welche alle ein Phasendiagramm haben, das nicht mit den Vorhersagen der IQCD übereinstimmt (Crossover bei $\mu=0$ und Phasenübergang erster Ordnung ab mittleren μ_q , vergleiche Abb. 4.3). Und die Abbildung 5.8 stellt die Ergebnisse der anderen drei Zustandsgleichungen von Abb. 5.1 dar, die ein Phasendiagramm haben, welches qualitativ mit den Vorhersagen der IQCD übereinstimmt. Wie zuvor in 5.1 sind auch in diesen Abbildungen die Isolinien des σ -Feldes ($\sigma/\sigma_0 = 0.9, 0.8, 0.7, 0.6$ und 0.5 von unten nach oben) mit dünnen Linien bzw. Punkten eingezeichnet; diese geben eine Orientierung für die Stärke der Medium-Modifikation der Hadronenmassen. Die Linien mit Phasenübergängen erster Ordnung sind dick dargestellt, falls vorhanden.

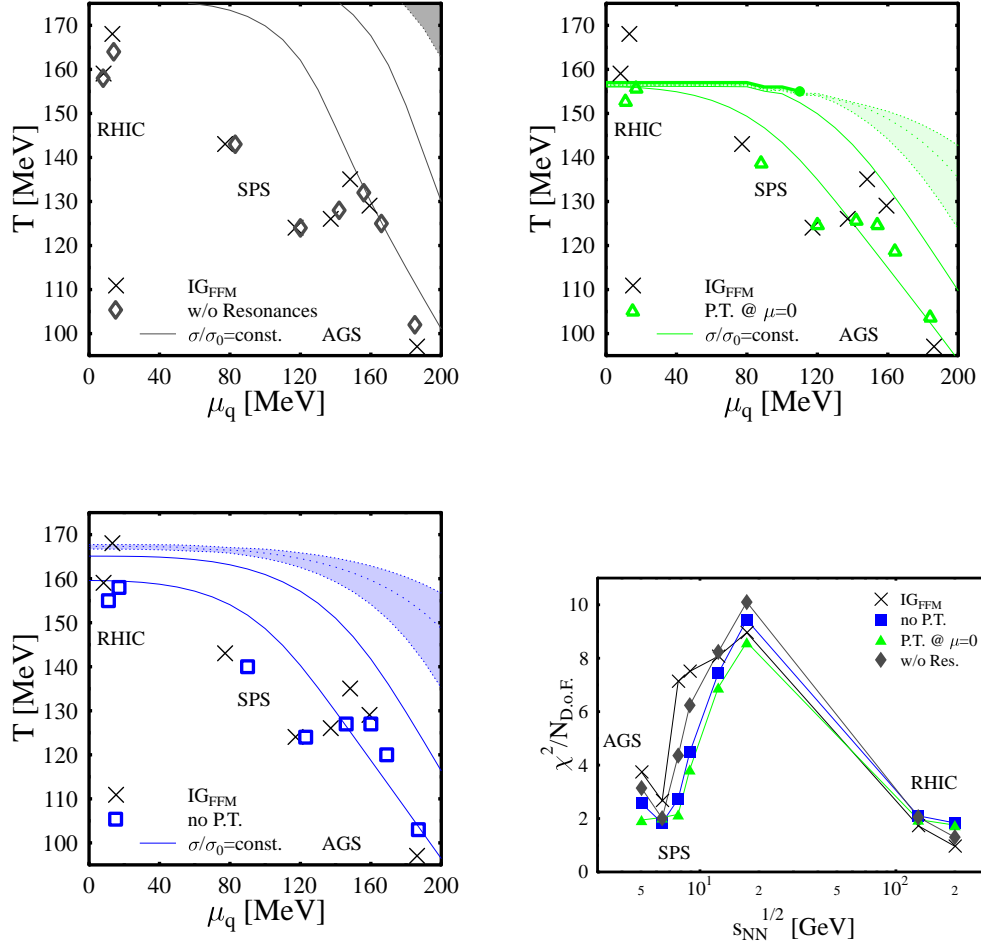


Abbildung 5.7: Ausfrierkurven und Beschreibungsqualität für Zustandsgleichungen ohne Phasenübergang bei höheren Dichten.

Ausfrierparameter zur besten Beschreibung (Best-Fit) in der T - μ -Ebene (Freeze-out-Kurve) und zugehörige Qualität der Beschreibung $\chi^2/N_{\text{D.o.F.}}$ vs. Reaktionsenergie $\sqrt{s_{\text{NN}}}$ (rechts unten) für Parametersätze mit Phasendiagramm ohne qualitative Ähnlichkeit zu IQCD-Vorhersagen. Die Ausfrierpunkte ($\mu_q^{\text{f.-o.}}$, $T^{\text{f.-o.}}$) entsprechen von links nach rechts fallenden Reaktionsenergien, so dass die Anregungsfunktion von $\mu_q^{\text{f.-o.}}$ monoton fällt, die Anregungsfunktion von $T^{\text{f.-o.}}$ jedoch nicht-monoton steigt, vergleiche die Abbildungen 5.11.

Zu den Parametersätzen und den dünnen Sigma-Isolinien siehe Abb. 5.1 und Erläuterungen dazu, die dicke Linie zeigt den Phasenübergang falls vorhanden.

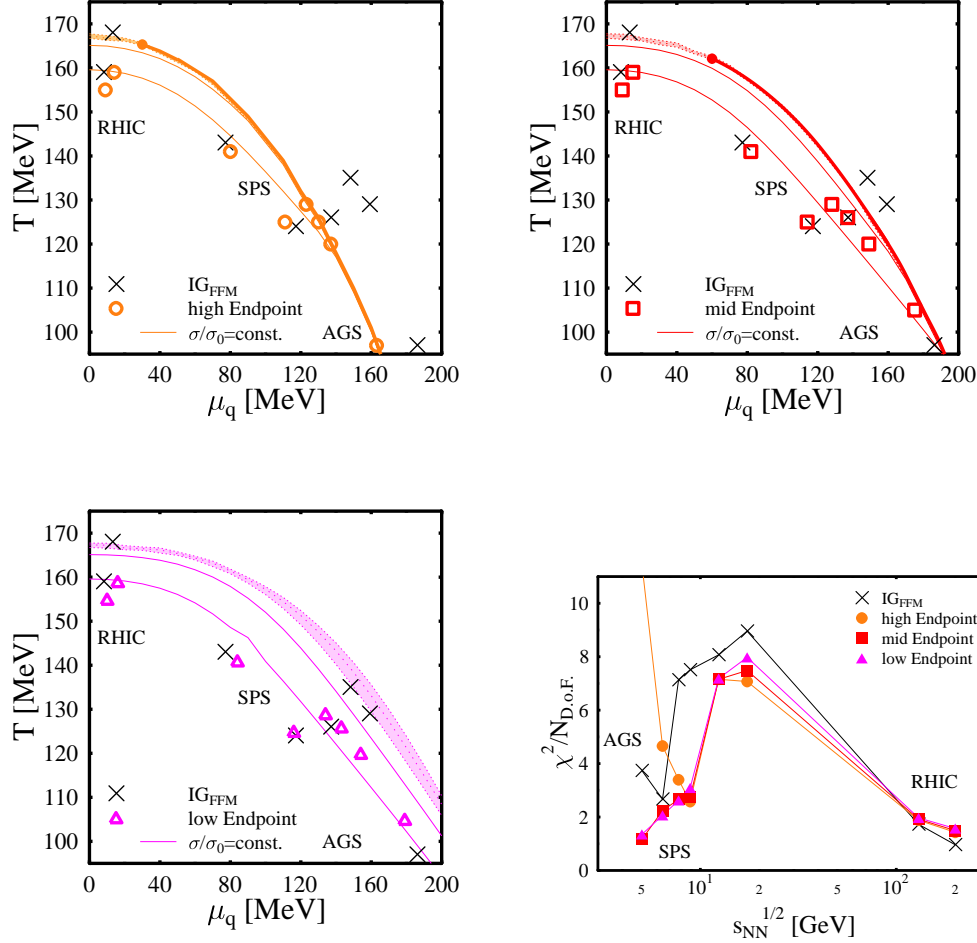


Abbildung 5.8: Ausfrierkurven und Beschreibungsqualität für Zustandsgleichungen mit Phasendiagramm ähnlich zu IQCD-Vorhersagen.

Ausfrierparameter zur besten Beschreibung (Best-Fit) in der T - μ -Ebene (Freeze-out-Kurve) und zugehörige Qualität der Beschreibung $\chi^2/N_{\text{D.o.F.}}$ vs. Reaktionsenergie $\sqrt{s_{\text{NN}}}$ (rechts unten) für Parametersätze mit Phasenübergang bei höheren Dichten und unterschiedlichen Endpunkten. Die Ausfrierpunkte ($\mu_q^{\text{f.-o.}}$, $T^{\text{f.-o.}}$) entsprechen von links nach rechts fallenden Reaktionsenergien, so dass die Anregungsfunktion von $\mu_q^{\text{f.-o.}}$ monoton fällt, die Anregungsfunktion von $T^{\text{f.-o.}}$ jedoch nichtmonoton steigt, vergleiche die Abbildungen 5.12.

Zu den Parametersätzen und den dünnen Sigma-Isolinien siehe Abb. 5.1 und Erläuterungen dazu, die dicke Linie zeigt den Phasentübergang (Endpunkt links unten liegt bei $\mu_q \approx 250$ MeV und $T \approx 80$ MeV).

Das Schaubild jeweils rechts unten in beiden Abbildungen gibt die zugehörige Qualität der Beschreibung $\chi^2/N_{\text{D.o.F.}}$ als Anregungsfunktion an, d.h. gegen die Reaktionsenergie bzw. Schwerpunktsenergie $\sqrt{s_{\text{NN}}}$.¹⁵ Die Verbindungslinien sind jeweils eingezeichnet um das Auge zu führen, nicht im Sinne einer Interpolation zwischen den verschiedenen Experimenten.

Zum Vergleich sind in allen Schaubildern der Abbildungen 5.7 und 5.8 auch stets die Ausfrierparameter bzw. $\chi^2/N_{\text{D.o.F.}}$ -Werte des idealen Hadrongas-Modells IG_{FFM} mit eingezeichnet, zusätzlich zu jenen der chiralen Zustandsgleichungen.

Das auffälligste Ergebnis ist zuerst einmal, dass die Ausfrierpunkte bei *keiner* Zustandsgleichung auf einer Kurve (mit konstanter Krümmung) liegen, entgegen der zuvor angeführten Studien – und diese Abweichung ist bei IG_{FFM} am deutlichsten. Von kleinen Energien (AGS) oder niedrigen Temperaturen her kommend, haben die Ausfrierkurven bei unteren SPS-Energien (30 oder 40 A GeV) eine mehr oder weniger stark ausgeprägte Spitze, knicken zu SPS-80 ein und steigen dann wieder zu SPS-158 hin. Etwas unerwartet ist auch, dass der RHIC Punkt zu $\sqrt{s_{\text{NN}}} = 200$ GeV bei allen Zustandsgleichungen unterhalb des Punktes zu 130 GeV liegt.

Gut erkennbar ist die Ähnlichkeit der Ergebnisse von 'w/o Resonances' zu IG_{FFM} . Dieser Parametersatz ist ja dem idealen Fall am nächsten, weil hier nur das baryonische Oktett an die Feldgleichungen koppelt und alle andere Hadronen mit ihren Vakuummassen eingehen, und gerade die Ankopplung des baryonischen Dekupletts den Phasenübergang erster Ordnung im chiralen Modell bewirkt. Die Ergebnisse der anderen Zustandsgleichungen liegen dort merklich entfernt von IG_{FFM} , wo sich die Ausfrierpunkte nahe am jeweiligen Phasenübergangsbereich befinden. Der Grund dafür ist die oben erwähnte Tatsache, dass eine Beschreibung von Teilchenzahlverhältnissen am Phasenübergang rapide schlechter wird [33] und in der restaurierten Phase jenseits des Phasenübergangs überhaupt keine Beschreibung mehr gelingt, wegen der dann extrem reduzierten effektiven Massen.

So liegen die Punkte zu RHIC bei 'P.T.@ $\mu=0$ ' unterhalb des Phasenübergangs und deshalb bei stark erniedrigten Temperaturen (6 bzw. 12 MeV tiefer als bei IG_{FFM}). Ferner sind die Ausfrierpunkte zu AGS und den niedrigeren SPS-Energien bei den lQCD-ähnlichen Zustandsgleichungen ('low Endpoint' bis 'high Endpoint') zu niedrigeren chemischen Potentialen μ_q hin verschoben. Allerdings ist dieser Bereich der betreffenden

¹⁵Der erste Eintrag zu $\sqrt{s_{\text{NN}}} = 5.0$ GeV entspricht $E_{\text{Lab}}/A = 11.6$ GeV bei AGS, die Einträge zu $\sqrt{s_{\text{NN}}} = 6.4, 7.7, 8.9, 12.4$ und 17.3 GeV entsprechen SPS bei $E_{\text{Lab}}/A = 20, 30, 40, 80$ und 158 GeV und die letzten beiden Einträge bei $\sqrt{s_{\text{NN}}} = 130$ und 200 GeV gehören zu RHIC.

Zustandsgleichungen etwas fragwürdig, denn die Phasenübergangslinie einer realistischen Zustandsgleichung, bei welcher (bei $T = 0$ und $\mu_B = \mu_0 \approx 923$ MeV) normale Kernmaterie stabil ist, muss schwächer abfallen, und man hätte im Bereich der betreffenden Ausfrierpunkte möglicherweise keine derart starken Medium-Modifikationen. (Ebenso wie der Phasenübergang, der bei 'P.T.@ $\mu=0$ ' die Ausfrierpunkte einschränkt, unrealistisch sein wird, weil er den IQCD-Vorhersagen widerspricht, nach welchen ein Crossover bei $\mu = 0$ zu erwarten ist.)

Hier zeigt sich der Einfluss der Zustandsgleichung bzw. des zugehörigen Phasendiagramms durch die Medium-Modifikationen aufgrund der Wechselwirkung im chiralen Modell. Die Lage der Ausfrierpunkte im T - μ -Diagramm wird durch die Nähe zum Phasenübergang beeinflusst, indem die Ausfrierparameter $T^{\text{f.-o.}}$ und $\mu_q^{\text{f.-o.}}$ in Phasenübergangsnähe stärker von den Werten ohne Medium- (IG_{FFM}) abweichen (vgl. RHIC sowie AGS bis SPS-40). Dabei liegen Punkte zum Teil sehr nahe am Phasenübergang aber nicht jenseits dessen (in der restaurierten Phase); insofern schränkt die jeweilige Phasenübergangslinie einer Zustandsgleichung die zugehörigen Ausfrierpunkte ein. Ein direkter Einfluss des jeweiligen *Endpunktes* der verschiedenen Zustandsgleichungen auf die Ausfrierpunkte ist dagegen nicht zu erkennen.

In diesem Rahmen entspricht die Anordnung der Ausfrierpunkte dem zuvor geschilderten qualitativen Verhalten (Minimum bei SPS-80 und Maximum bei SPS-30 oder 40 sowie bei RHIC-130), siehe dazu auch die Abbildung 5.9, welche die Ausfrierpunkte aller Zustandsgleichungen zusammen zeigt. Dieses Verhalten kann somit als eine vergleichsweise robuste (modellunabhängige) Vorhersage für die experimentellen Daten aus 5.1.4 angesehen werden.

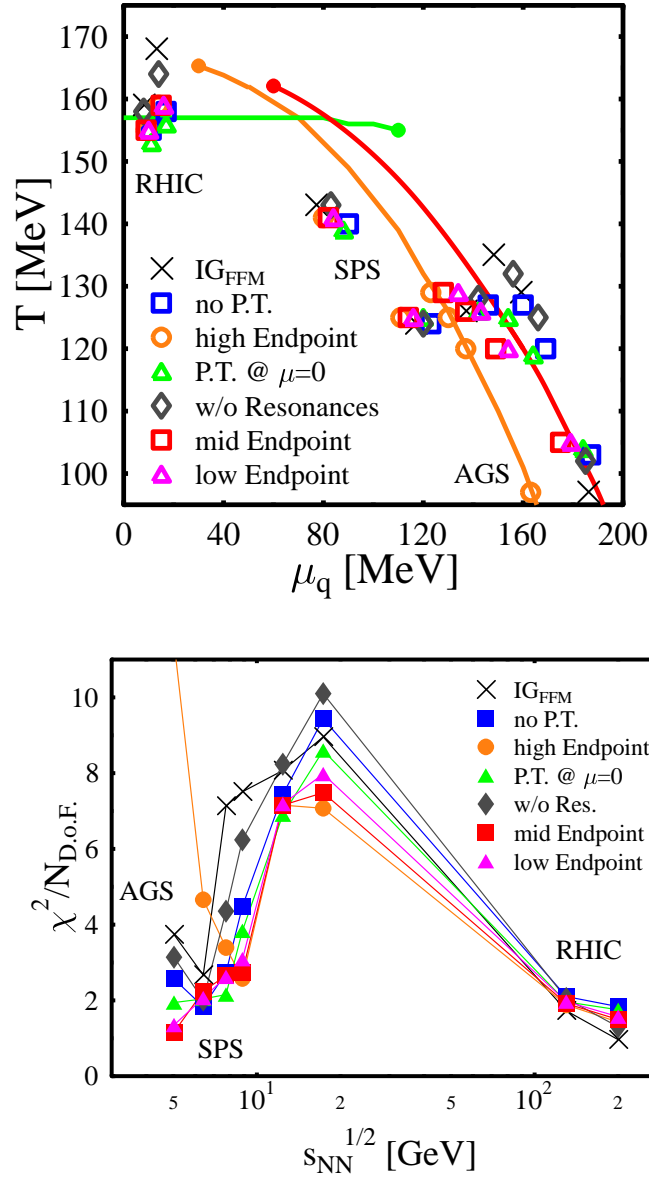


Abbildung 5.9: Ausfrierparameter aller Zustandsgleichungen.

Zusammenstellung aus den vorigen beiden Abbildungen: Ausfrierparameter zur jeweils besten Beschreibung für alle Parametersätze, oben Ausfrierpunkte (μ_q^{f-o} , T^{f-o}) in der μ_q - T -Ebene und unten Anregungsfunktion der Beschreibungsqualität $\chi^2/N_{D.o.F.}$. Die Ausfrierpunkte entsprechen jeweils von links nach rechts fallenden Reaktionsenergien.

Siehe die beiden vorigen Abbildungen 5.7 und 5.8 für weitere Erläuterungen.

Beschreibungsqualität

Ein anderer wichtiger Aspekt ist die Qualität der Beschreibung an den jeweiligen Ausfrierpunkten. Im jeweils rechten unteren Schaubild der Abbildungen 5.7 und 5.8 sind die Anregungsfunktionen von $\chi^2/N_{\text{D.o.F.}}$ dargestellt. Auch hier zeigt sich grob ein einheitliches Verhalten für alle Zustandsgleichungen: Gute Beschreibung ($\chi^2/N_{\text{D.o.F.}} \leq 2$) bei niedrigen (AGS, SPS-20) und hohen Reaktionsenergien (RHIC), bei mittleren Energien hingegen massive Probleme mit der Beschreibung ($\chi^2/N_{\text{D.o.F.}}$ bis zu 10, was einer mittleren Abweichung von über $3\sigma^{\text{Exp}}$ pro Teilchenzahlverhältnis entspricht).

Bei genauerer Betrachtung zeigt sich, dass die Zustandsgleichungen des chiralen Modells meistens eine – geringfügig bis deutlich – bessere Beschreibung der Teilchenzahlverhältnisse liefern als das ideale Hadronengas-Modell IG_{FFM} , in Übereinstimmung mit den vorigen Studien [33, 67]. Eine Ausnahme ist RHIC-200, hier ist IG_{FFM} mit einem $\chi^2/N_{\text{D.o.F.}}$ knapp unterhalb von 1 etwas besser als alle chiralen Zustandsgleichungen. Die zugehörigen Ausfrierpunkte liegen bei tieferen Temperaturen als der IG_{FFM} -Ausfrierpunkt, ein Hinweis darauf, dass die experimentellen Daten hier *höhere* Temperaturen (und geringe Massen-Modifikationen) bevorzugen. Das Ausfrieren der Teilchenzahlverhältnisse scheint bei RHIC also 'ideal' zu sein [137].

Eine weitere Ausnahme ist SPS-158: Hier gibt es zwei schlechtere Ergebnisse von chiralen Parametersätzen, 'w/o Resonances' und 'no P.T.' – allerdings ist wie gesagt die Beschreibung bei SPS-158 allgemein so schlecht, dass hier die Aussagekraft der Ergebnisse fragwürdig ist.

Wie zuvor bei den Ausfrierpunkten, ist 'w/o Resonances' auch bei der Beschreibungsqualität deutlich näher bei IG_{FFM} als die anderen chiralen Zustandsgleichungen, siehe z.B. das gute Ergebnis bei RHIC-200 oder das eher schlechte Ergebnis bei AGS (zum Ergebnis bei SPS-158 siehe unten). Als nächstes folgt 'no P.T.', denn dieser Parametersatz hat effektiv die geringste Attraktion (volle Vektor-Repulsion bei reduzierter skalarer Attraktion), und ist damit 'w/o Resonances' am ähnlichsten von all denjenigen Parametersätzen, bei denen das baryonische Dekuplett an die Feldgleichungen gekoppelt ist. Dann folgt 'P.T.@ $\mu=0$ ' (volle Vektor-Repulsion, jedoch unverminderte skalarer Attraktion), welche meist zwischen 'no P.T.' und 'low Endpoint' liegt, zum Teil aber auch besser als alle anderen Zustandsgleichungen (bei SPS-30 und SPS-80).

Diese Beziehungen zwischen den Zustandsgleichungen werden auch bei den Anordnungen der Ausfrierpunkte im T - μ -Diagramm sichtbar, siehe hierfür die Zusammenstellung in Abb. 5.9 oben.

Bei allen Zustandsgleichungen ist die Beschreibung bei SPS-158 und SPS-80 deutlich am schlechtesten: Sie liegt dort mit $\chi^2/N_{\text{D.o.F.}}$ zwischen 7 und 10 in einem Bereich, wo keine angemessene Beschreibung durch das Modell mehr gegeben ist.

Für diese Energien bzw. experimentelle Daten sind also andere Ansätze erforderlich um eine zufriedenstellende Beschreibung zu ermöglichen, wie die in Abschnitt 5.2.2 genannten Erweiterungen um den Seltsamkeits-Unterdrückungs-Faktor γ_s oder auch den entsprechenden Faktor für die leichten Quarks γ_q .

In der Ref. [155] werden diese Daten mit γ_s -Werten, die deutlich von 1 abweichen ($\gamma_s \approx 0.75$ bis 0.85) beschrieben, was zu wesentlich höheren Temperaturen führt und eine deutlich verbesserte Beschreibung der Daten erlaubt (bei SPS-158 z.B. $\chi^2/N_{\text{D.o.F.}} \approx 2$ statt 7 beim homogenen Fall in [136]). Und in der Ref. [177] wurde zusätzlich auch der Faktor γ_q verwendet, hier gelingt eine gute Beschreibung der 4π -Daten für $\gamma_q > 1$ bei SPS-40 bis SPS-158 mit gleich bleibend niedrigen Temperaturen ($T^{\text{f.-o.}} \approx 135$ MeV).

Ein weiterer Ausweg zeigt Ref. [137] mit einem idealen Hadronengas-Modell und der Annahme einer *inhomogenen* Verteilung von Temperatur und chemischem Potential beim Ausfrieren, die gerade für SPS-158 und SPS-80 zu einer dramatischen Verbesserung der Beschreibungsqualität führt, $\chi^2/N_{\text{D.o.F.}}$ -Werte um 1 anstelle von $\chi^2/N_{\text{D.o.F.}} = 8$ beim homogenen Ausfrieren. Bei SPS-40 und 30 liefert der inhomogene Ansatz immer noch eine deutliche Verbesserung, die aber geringer wird und bei SPS-20 schließlich unwesentlich ist, weil dort der homogene Ansatz ebenfalls ein gutes Ergebnis liefert. Die Ergebnisse des homogenen Ansatzes stimmen mit unseren IG_{FFM} -Ergebnissen überein. Zum besseren Vergleich sei das entsprechende Schaubild aus der Referenz [137] in Abb. 5.10 zitiert.

Interessant ist nun das Ergebnis des chiralen Modells in diesem Bereich niedriger Energien. Gerade für SPS-30 und 40 zeigt sich, dass diejenigen Zustandsgleichungen, die einen Phasenübergang in der Nähe der Ausfrierpunkte haben ('low Endpoint' bis 'high Endpoint'), eine signifikant bessere Beschreibung ergeben als der ideale Fall IG_{FFM} . Bei SPS-30 und noch niedrigeren Energien zeigt sich allerdings für 'high Endpoint' das Problem, dass aufgrund der zu steil abfallenden Phasenübergangslinie die Ausfrierpunkte auf kleinere chemische Potentiale μ_q beschränkt werden, was zu merklicher (bei SPS-20) bis fataler Verschlechterung (bei AGS) führt.

Zwar liegt IG_{FFM} bei SPS-20 ähnlich gut¹⁶ wie die chiralen Parame-

¹⁶Auch hier im Einklang mit den (homogenen) Ergebnissen aus Ref. [137], wo ein zu

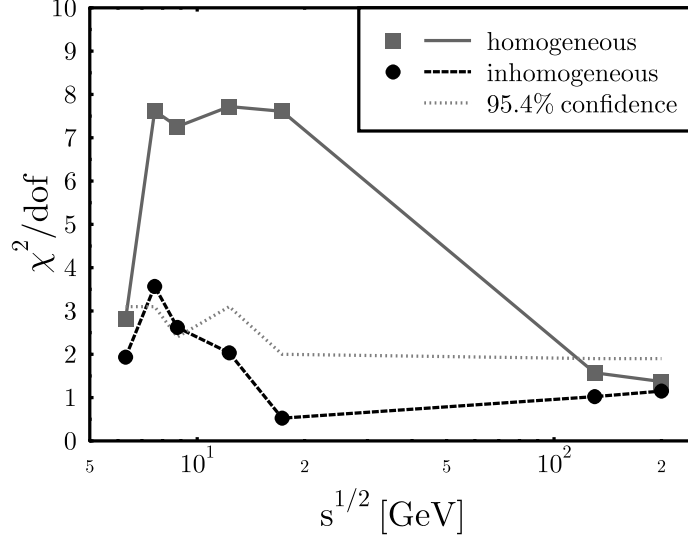


Abbildung 5.10: Anregungsfunktion der Beschreibungsqualität für homogenes und inhomogenes Ausfrieren (aus Ref. [137]).

Anregungsfunktion $\chi^2/N_{\text{D.o.F.}}(\sqrt{s_{\text{NN}}})$ für ein ideales Hadronengas mit homogener ('homogeneous') und inhomogener ('inhomogeneous') Verteilung von Temperatur und chemischem Potential beim Ausfrieren – Schaubild aus [137] entnommen. Die zugrunde liegenden Sätze an experimentellen Daten und Teilchenzahlverhältnissen sind die selben wie in dieser Arbeit (bis auf zwei Ausnahmen, siehe Abschnitt 5.1.4).

tersätze, aber bei AGS zeigen sich wieder deutliche Unterschiede: Die Zustandsgleichungen mit IQCD-ähnlichem Phasendiagramm ('low Endpoint' und 'mid Endpoint') haben eine gute Beschreibung $\chi^2/N_{\text{D.o.F.}} \approx 1$ wohingegen das ideale Hadronengas nur $\chi^2/N_{\text{D.o.F.}} \approx 4$ erreicht. Die Parametersätze mit deutlichen Medium-Modifikationen im Bereich mittlerer Temperaturen und Dichten (solange nicht zu extrem, wie etwa bei 'high Endpoint') liefern also durchgängig eine gute Beschreibung der experimentellen Teilchenzahlverhältnisse von AGS bis SPS-40 – und insbesondere eine bessere Beschreibung als das ideale Hadronengas IG_{FFM} , siehe dazu auch noch einmal die Zusammenstellung in Abb. 5.9 unten.

Insgesamt zeigen sich Auffälligkeiten in den Ergebnissen nur dort, wo die Ausfrierpunkte durch einen Phasenübergang stark eingeschränkt wer-

IG_{FFM} unabhängiges Modell für das ideale Hadronengas verwendet wird.

den. Das ist zum einen der Bereich niedriger Energien oder hoher μ_q bei dem Parametersatz 'high Endpoint'; hier würden die experimentellen Daten merklich höhere μ_q -Werte bevorzugen, was jedoch von der Phasenübergangslinie verhindert wird (eine Beschreibung jenseits eines Phasenübergangs gelingt wie gesagt nicht). Dadurch werden die χ^2 -Werte ab SPS-40 zunehmend schlechter, gleichzeitig rücken die Ausfrierpunkt bis fast direkt an den Phasenübergang heran und der Ausfrierpunkt zu AGS wird offenbar entlang der Phasenübergangslinie zu merklich niedrigeren Temperaturen verschoben.

Zum anderen ist es der Bereich hoher Energien oder kleiner μ_q bei dem Parametersatz 'P.T.@ $\mu=0$ '. Auch hier liegt ein Ausfrierpunkt direkt an der Phasenübergangslinie, so dass die Temperatur deutlich tiefer liegt als bei den anderen Zustandsgleichungen, nur verschlechtert sich hier das Ergebnis kaum (offenbar sind die RHIC-Daten diesbezüglich wenig spezifisch).

Damit wird also die Beschreibungsqualität nur im *Extremfall* (extrem unrealistisch bzw. unphysikalisch wie bei 'high Endpoint', was auch aus den genannten anderen Gründen auszuschließen wäre) vom Phasenübergangsverhalten oder vom σ -Feld *stark* bestimmt. Die verbesserte Beschreibung von SPS-40 bis AGS durch die Zustandsgleichungen mit IQCD-ähnlichem Phasendiagramm ('low Endpoint' und 'mid Endpoint') ist dagegen weniger stark, kann aber dennoch als signifikant bezeichnet werden.

Es muss jedoch festgestellt werden, dass die massiven Probleme des idealen Hadronengas-Modells (IG_{FFM} oder die anderen vorgenannten Studien [176] und 'homogen' in [137]) mit den 4π -Daten bei SPS-80 und SPS-158 nicht durch die hier verwendeten Parametersätze des chiralen Modells bzw. durch den Einfluss der resultierenden Medium-Modifikationen gelöst werden können. Hier versagt der einfache thermische Ansatz, eine zufriedenstellende Beschreibung gelingt erst mit den Erweiterungen um γ_s oder γ_q [177, 155] oder dem inhomogenen Ansatz [137], wie oben diskutiert.

Vor dem Hintergrund des Ansatzes mit inhomogenem Ausfrieren gibt es eine gewissen Berechtigung noch auf die Unterschiede zwischen den chiralen Parametersätzen mit Phasenübergang und dem idealen Hadronengas (IG_{FFM}) bei SPS-158 und SPS-80 einzugehen. Die Beschreibungsqualität ist dort zwar fragwürdig (weil extrem schlecht: $\chi^2/N_{\text{D.o.F.}} \approx 8$) aber tendenziell besser als das IG_{FFM} -Ergebnis. Allerdings gelingt mit der inhomogenen Verteilung von Temperatur und chemischem Potential beim Ausfrieren nun die entscheidende Verbesserung in diesem Bereich, während die chiralen Zustandsgleichungen gerade im daran anschließenden Bereich bei SPS-40 und SPS-30 (und bei AGS) dem IG_{FFM} deutlich überlegen sind.

Daraus folgt, dass ein *kombinierter Ansatz* von chiraler Zustandsglei-

chung mit inhomogenem Ausfrieren zu einer *durchgängig einwandfreien Beschreibung mit stets signifikanter Verbesserung gegenüber dem idealen Hadronengas* führen *könnte!* Es ist allerdings nicht von vornherein klar, ob durch Kombination beider Ansätze nur die Vorteile beider Varianten zum Tragen kommen, oder ob sich diese dann aufheben.¹⁷ (Interessant wäre an einem solchen Ansatz auch, ob sich durch die Kombination die Signifikanz für die Variation der Ausfrierparameter auf der einen Seite oder für Medium-Effekte auf der anderen Seite deutlich verändert.)

Zusammenfassend ergibt sich aus diesen Untersuchungen und den Ergebnissen mit dem inhomogenen Ansatz aus Ref. [137] das folgende übergreifende Bild zum Ausfrieren bei Schwerionen-Kollisionen (im Rahmen der Modellannahmen):

Bei niedrigen Dichten oder kleinen μ – entsprechend den höchsten untersuchten Energien (RHIC-Daten) – liefert schon das (homogene) Hadronengas eine gute Beschreibung, und es zeigt sich keine signifikante Verbesserung durch den inhomogenen Ansatz und eine geringfügige Verschlechterung bei den chiralen Parametersätzen. Dies kann so interpretiert werden, dass das Ausfrieren in deutlicher Entfernung vom erwarteten Crossover stattfindet – ohne dass Variation der Ausfrierparameter oder Medium-Modifikationen eine wichtige Rolle spielen.

Bei etwas größeren μ oder etwas niedrigeren Energien, also bei den hohen SPS-Energien (158 und 80 A GeV), bricht die Beschreibung durch das ideale Hadronengas jedoch zusammen. Die Medium-Modifikationen des chiralen Modells bringen wie gesagt keine entscheidende Verbesserung. Eine gute Beschreibung ergibt jedoch der inhomogene Ansatz¹⁸, welcher mit Fluktuationen – aufgrund des Durchlaufens eines Phasenübergangs erster Ordnung [83] – in Verbindung gebracht werden kann [137]. Dies kann so gedeutet werden, dass das System einen Phasenübergang erster Ordnung durchläuft und dann in einem Bereich ausfriert, wo Medium-Modifikationen eine untergeordnete Rolle spielen.

Bei den mittleren SPS-Energien (40 und 30 A GeV) ergeben sowohl der inhomogene Ansatz als auch die Medium-Modifikationen eine starke Verbesserung gegenüber dem idealen Hadronengas. Hier scheint das System also ebenfalls einen Phasenübergang zu durchlaufen und das Ausfrieren findet

¹⁷Bezogen auf die $\chi^2/N_{\text{D.o.F.}}$ -Werte bedeutet dies das Folgende: Durch Einführen weiterer Parameter kann sich das gesamte χ^2 nicht verschlechtern, sondern verbessert sich im Allgemeinen. Andererseits verringert sich dadurch die Anzahl der Freiheitsgrade $N_{\text{D.o.F.}}$, so dass nur bei einer signifikanten Verbesserung von χ^2 auch ein verbessertes $\chi^2/N_{\text{D.o.F.}}$ ergeben kann.

¹⁸Neben den anderen genannten Erweiterungen [177, 155] des thermischen Modells.

nun in einem Bereich statt, wo Medium-Modifikationen wichtig sind – näher am Phasenübergang oder der Phasenübergangsbereich ist breiter.

Bei der niedrigsten SPS-Energie (20 A GeV) schließlich bringen inhomogener Ansatz und Medium-Modifikationen nur eine kleine Verbesserungen mit sich, so dass sich hier keine eindeutige Signifikanz für Fluktuationen und Medium-Modifikationen gegenüber dem idealen Hadronengas zeigt.

Der Einfluss des inhomogenen Ansatzes bei AGS (11.6 A GeV) wurde noch nicht untersucht, jedoch zeigen Medium-Modifikationen eine starke Verbesserung zum idealen Hadronengas, so dass hier ein Ausfrieren im Phasenübergangsbereich – dominiert von Medium-Modifikationen – vermutet werden kann.

Anregungsfunktionen der Ausfrierparameter

Nun sollen die Ausfrierkurven aus dem vorigen Abschnitt noch als Anregungsfunktionen der einzelnen Ausfrierparameter dargestellt werden. Dazu werden die $T^{\text{f.-o.}}$ und die $\mu_q^{\text{f.-o.}}$ aus den Abb. 5.7 und 5.8 (oder aus Abb. 5.9) auf die jeweilige Reaktionsenergie projiziert. Das Ergebnis zeigen die Abbildungen 5.11 bzw. 5.12 für die Parametersätze ohne bzw. mit Phasenübergang bei hohen Dichten, jeweils oben die Temperatur $T^{\text{f.-o.}}$ und unten das quark-chemische Potential $\mu_q^{\text{f.-o.}}$ am Ausfrierpunkt.

Es zeigt sich nun noch einmal etwas konkreter und detaillierter, was wir schon zuvor bei den Ausfrierkurven festgestellt hatten: Die Ausfrierkurven sind keine gleichmäßigen Kurven. Dies spiegelt sich hier hauptsächlich im nichtmonotonen Verhalten der *Temperatur* wider (jeweils obere Schaubilder). Das quark-chemische Potential hat hingegen bei allen Parametersätzen ein nahezu gleichmäßiges Monotonie-Verhalten über dem Bereich der untersuchten Reaktionsenergien (untere Schaubilder).

Am stärksten ausgeprägt ist das nichtmonotone Verhalten der Ausfrier-temperatur beim idealen Hadronengas IG_{FFM} , und ähnlich stark beim Parametersatz 'w/o Resonances'. In der bereits erwähnten Untersuchung aus der Referenz [155] ergibt sich für den SPS-Bereich ein gleichmäßiges Temperaturverhalten mit einem idealen Hadronengas-Modell – dafür tauchen dort jedoch Sprünge in dem zusätzlich verwendeten Parameter γ_s auf!

Für IG_{FFM} zeigt sich bei SPS-30 ein Knie mit einem starken Absinken der Temperatur um knapp 10 MeV zu SPS-40 und 80, sowie ein zweites Knie bei RHIC-130, wo dann die Temperatur zu RHIC-200 wieder um fast 10 MeV (!) zurückgeht. Diese fallende Tendenz ergibt sich auch aus anderen Studien zu RHIC-Daten mit dem idealen Hadronengas [178, 147, 173]: $T^{\text{f.-o.}} \approx 165$ MeV für RHIC-130 und $T^{\text{f.-o.}} \approx 160$ MeV für RHIC-200.

Bei den weiteren Parametersätzen des chiralen Modells sind die beiden Knie deutlich weniger stark ausgeprägt, weil die Temperaturen zu SPS-20 und SPS-30 wesentlich tiefer liegen. Bei dem Parametersatz 'P.T.@ $\mu=0$ ' wird aus dem Knie bei SPS-30 sogar fast ein Plateau (bis SPS-80). Bei den Parametersätzen mit Phasenübergang bei hohen Dichten ('high Endpoint' bis 'low Endpoint') befindet sich das Knie erst bei SPS-40 statt 30. (Zu SPS-80 liegt dann die Ausfrier-temperatur sämtlicher untersuchter Zustandsgleichungen aufeinander.) Die Ausfrier-temperaturen bei SPS-158 sind geringfügig niedriger, liegen aber bei RHIC um rund 10 MeV tiefer (bei 'P.T.@ $\mu=0$ ' sogar etwas mehr) als bei IG_{FFM} .

Die quark-chemischen Potentiale an den Ausfrierpunkten im Energiebereich von AGS bis SPS-80 liegen in der Abb. 5.7 etwas über jenen von IG_{FFM}

liegen und in Abb. 5.8 etwas unterhalb davon. Der Grund ist die besprochene Einschränkung auf kleinere μ_q durch den Phasenübergang in diesem Bereich, die Abweichung ist deshalb besonders deutlich bei 'high Endpoint' ab SPS-40.

Allerdings ist hier das ursprüngliche quark-chemische Potential dargestellt, nicht das effektive quark-chemische Potential, welches der Berechnung der Teilchendichten zugrunde liegt. Dieses effektive chemische Potential wird im nächsten Abschnitt diskutiert.

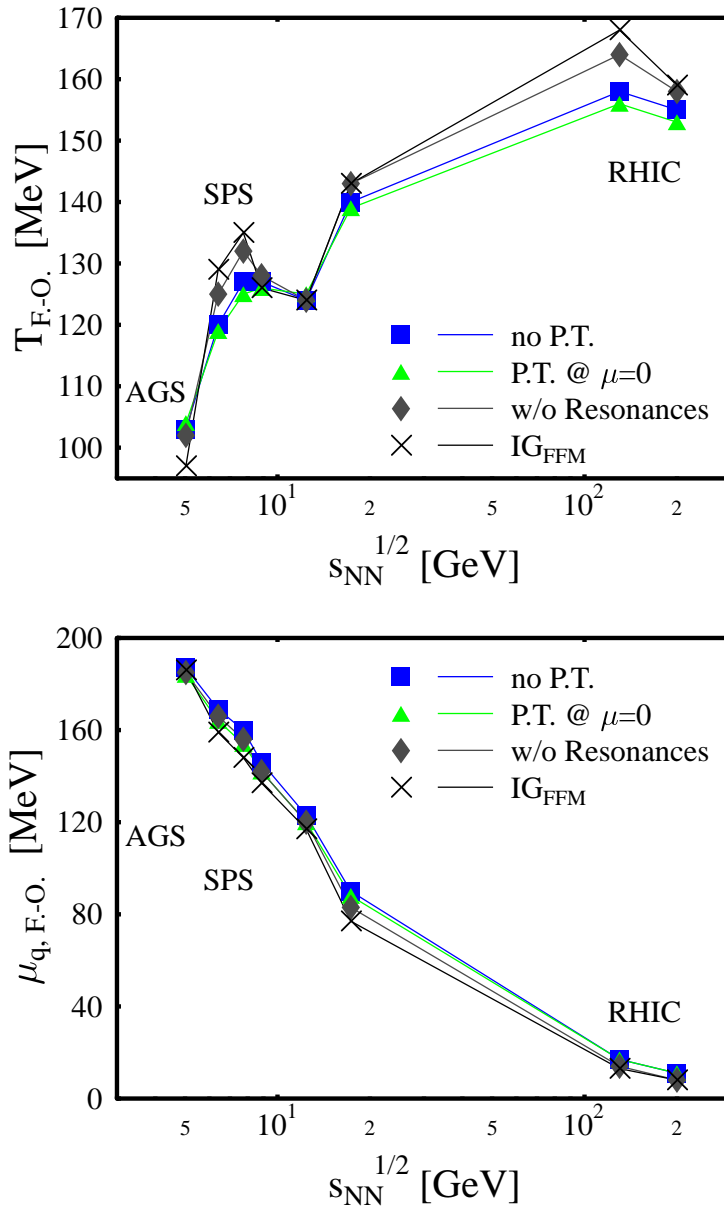


Abbildung 5.11: Anregungsfunktionen der Ausfrierparameter für Zustandsgleichungen ohne Phasenübergang bei hohen Dichten.

Ausfrierparameter T^{f-o} . (oben) und μ_q^{f-o} . (unten) vs. Reaktionsenergie $\sqrt{s_{NN}}$. Zu den Parametersätzen siehe Abb. 5.1 und Erläuterungen dazu.

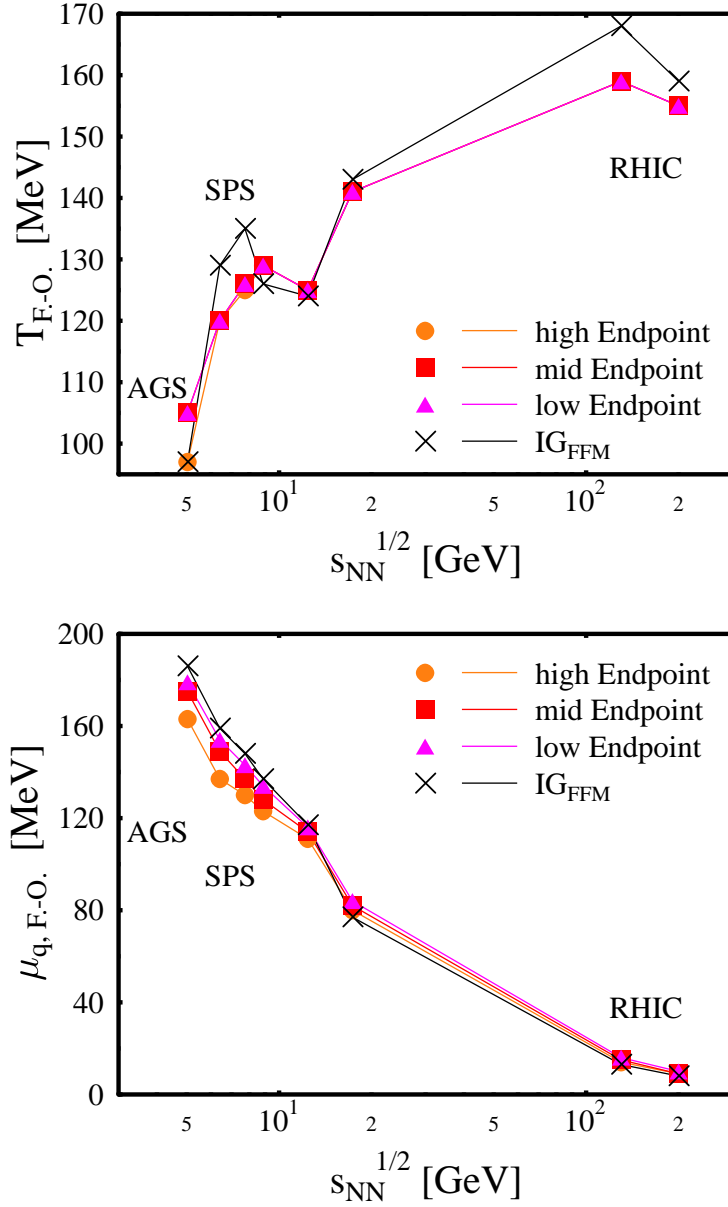


Abbildung 5.12: Anregungsfunktionen der Ausfrierparameter für Zustandsgleichungen mit Phasendiagramm ähnlich zu IQCD.

Ausfrierparameter T^{f-o} . (oben) und μ_q^{f-o} . (unten) vs. Reaktionsenergie $\sqrt{s_{NN}}$ mit IQCD ähnlichem Phasendiagramm.

Zu den Parametersätzen siehe Abb. 5.1 und Erläuterungen dazu.

5.3.2 Effektive Massen und chemische Potentiale

Im Bezug auf Teilchenzahlverhältnisse liefert das chirale Modell *prinzipiell* gleichartige Ergebnisse wie ein ideales Hadronengas-Modell – nämlich Teilchendichten zu T und μ_q . Der wesentliche Unterschied in dieser Sichtweise ist dann, dass Massen und chemische Potentiale (der niedrigsten chiralen Hadronen-Multipletts) nicht die ursprünglichen Werte, sondern *effektive* Werte haben, weil es für sie Medium-Modifikationen gibt, d.h. ihre Werte sind aufgrund der Wechselwirkung im Modell verändert. Umgekehrt sind diese Modifikationen auch ein Maß dafür, wie stark die Medium-Effekte im einzelnen Fall sind – oder eben, wie groß die Abweichung zum nichtwechselwirkenden Fall (IG_{FFM}) sind.

Solange diese Medium-Modifikationen sehr klein sind, müssen die Vorhersagen des chiralen Modells und des idealen Hadronengas-Modells also auch sehr nahe beieinander liegen. Die im vorigen Abschnitt beobachteten Abweichungen der Ausfrierparameter zwischen den verschiedenen Zustandsgleichungen sind folglich ein Hinweis darauf, dass diese Medium-Modifikationen zumindest nicht vernachlässigbar sind.

Im folgenden wollen wir diese modifizierten Werte vorstellen, zunächst Beispiele für effektive Hadronenmassen und dann das effektive quarkchemische Potential an den jeweiligen Ausfrierpunkten.

Die Abbildungen 5.13 zeigen die Anregungsfunktionen der effektiven Massen für die Parametersätze ohne (oberes Schaubild) und mit Phasenübergang bei hohen Dichten (unteres Schaubild) für Kaonen, Pionen, Nukleonen und Lambda-Baryonen (jeweils von oben nach unten) in relativer Darstellung; dargestellt ist also die prozentuale Abnahme oder Zunahme im Vergleich zur Vakuummasse. Die Änderung der effektiven Massen hat bei allen Hadronen und für alle Zustandsgleichungen qualitativ das gleiche Verhalten, wobei die effektiven Massen der Goldstone-Bosonen erhöht¹⁹ sind und die Baryonen-Massen abgesenkt. Allerdings skalieren die Massenänderungen etwas unterschiedlich: Die Nukleonenmassen sind am stärksten verändert (bis zu 15%), die Λ - und Pionen-Massen mittelstark (bis zu 7%) und die Massen der Kaonen eher schwach (nur maximal 4%).

Die Massenänderung beginnt bei AGS mit mittleren Werten ($\delta m_N^*/m_N \approx 10\%$ beim Nukleon und entsprechend weniger bei π , Λ und K). Bei SPS-20

¹⁹Wegen der Vernachlässigung der ω -Kopplung der Kaonen haben Kaonen und Anti-Kaonen kein unterschiedliches Potential im Modell. Sowohl bei K^+ als auch bei \bar{K}^- steigt die effektive Masse im Medium. Bei Ankopplung von Vektorfeldern würde \bar{K}^- aufgrund der negativen Netto-Baryonenzahl von $1/3$ eine vektorielle *Attraktion* spüren [180, 181, 182] und K^+ eine entsprechende *Repulsion*.

und 30 ist sie maximal ($\delta m_N^*/m_N \approx 15\%$), erreicht bei SPS-80 oder 158 dann ein Minimum bei kleinen Werten ($\delta m_N^*/m_N \approx 5\%$). Zu RHIC-130 hin nimmt die Massenänderung noch einmal etwas zu ($\delta m_N^*/m_N \approx 8\%$) und fällt bei RHIC-200 wieder leicht ab ($\delta m_N^*/m_N \approx 6\%$). Mit den Minima bei SPS-80 und von RHIC-130 auf 200 ist das Verhalten ähnlich unregelmäßig wie zuvor bei der Ausfrieretemperatur (Abb. 5.7 und 5.8 oben), offenbar spiegelt sich deren nichtmonotones Verhalten hier wider.

Das allgemeine Verhalten der *verschiedenen Parametersätze untereinander* ist wie gehabt: Der Satz 'w/o Resonances' hat mit Abstand die geringste Veränderung und verhält sich damit am ähnlichsten zu IG_{FFM} , welches keiner Veränderung entspricht ($m^*/m_0 \equiv 1.0$); und die Sätze mit Phasenübergang bei hohen Dichten liegen mit ihren Ergebnisse aufeinander, außer dort wo bei 'high Endpoint' die diskutierten Probleme mit dem Phasenübergang bestehen (SPS-40 bis AGS).

Alles in allem sind die Änderungen der Massen zwar moderat aber deutlich von Null verschieden – im Einklang mit vorigen Studien mit dem chiralen Modell [33, 67] und mit anderen Untersuchungen mit dem idealen Hadrongas-Modell [148, 149], wo darüber hinaus gezeigt wurde, dass sich bei starker Veränderung aller Massen (über 15%) die Beschreibung deutlich verschlechtert.

Der Effekt ist wie gesagt insgesamt am stärksten bei den unteren und mittleren SPS-Energien (20 bis 40 A GeV), also genau dort, wo die chiralen Zustandsgleichungen gegenüber IG_{FFM} eine signifikant bessere Beschreibung liefern. Dies illustriert, dass die modifizierten Hadronenmassen für die verbesserte Beschreibung eine wichtige Rolle spielen.

Abschließend noch einige Bemerkungen um den Bezug zu den chiralen Feldern herzustellen: Auf den Ausfrierkurven in den Abb. 5.7 sowie 5.8 sind die σ/σ_0 -Isolinien mit angegeben und man erkennt, dass sich die Ausfrierpunkte um die Isolinie $\sigma/\sigma_0 = 0.9$ herum gruppiert sind. Unterhalb der Linie entspricht schwacher Veränderung der effektiven Massen und oberhalb der Linie folglich starker Veränderung.

Die Unterschiede zwischen den verschiedenen Hadronen erklärt sich aus der unterschiedlichen σ -Kopplung, siehe Gl. (3.12, 3.13). Das Nukleon hat eine starke σ -Kopplung, Änderungen in σ schlagen sich fast unvermindert in Änderungen der effektiven Nukleonenmasse nieder. Beim Lambda-Baryon kommt rund ein Drittel ζ -Kopplung dazu, die Änderungen der effektive Λ -Masse ist ungefähr um diesen Beitrag abgeschwächt, weil das (seltsame) ζ -Feld erst später abfällt als das σ -Feld, wie sich in Kapitel 4 gezeigt hat. Und auch der Unterschied zwischen den effektiven Massen der Goldstone-Bosonen K und π erklärt sich daraus, dass die Kaonen aufgrund einer zusätzlichen

ζ -Kopplung weniger stark auf Änderungen in σ ansprechen.

Effektives chemisches Potential

Die Veränderung der effektiven chemischen Potentiale μ_i^* (3.24) hängen nach 3.2.2 von den Vektorkopplungen und der Baryonendichte ab. Demnach sollte zumindest der Unterschied von μ_i^* zu unverändertem μ_i klein sein bei geringen Dichten oder kleinen μ_q , d.h. bei RHIC-Energien. Zu AGS hin ist dieser Unterschied dann zunehmend größer zu erwarten. Da die Vektorkopplung eine repulsive Wirkung hat (außer für Antiteilchen), sind effektive chemische Potentiale kleiner als die ursprünglichen Werte.

In den Abbildungen 5.14 sind die Anregungsfunktionen für das effektive quark-chemische Potential $\mu_q^*(\sqrt{s_{NN}})$ an den Ausfrierpunkten dargestellt (volle Symbole), oben für die Zustandsgleichungen ohne und unten für jene mit Phasenübergang bei hohen Dichten.

Die Abweichungen zu den ursprünglichen Werten, hier zusätzlich mit offenen Symbolen (wie jeweils in den unteren Schaubildern der Abb. 5.11 und 5.12) dargestellt, gehen wie erwartet nach unten und sind umso kleiner, je höher die Reaktionsenergie wird. Waren die Werte von μ_q^{f-o} (offene Symbole) noch jeweils in der Nähe, liegen alle Werte von $\mu_q^{*,f-o}$ (volle Symbole) jetzt deutlich unterhalb der Ergebnisse von IG_{FFM} , wo natürlich $\mu_q^* \equiv \mu_q$ gilt.

Die Ergebnisse aller chiralen Zustandsgleichungen liegen auffallend nahe beieinander. Insbesondere sind die Werte zu 'high Endpoint' hier fast genau auf den Werten der anderen beiden Zustandsgleichungen mit Phasenübergang bei hohen Dichten; die Abweichung, die bei der Anregungsfunktion von μ_q^{f-o} in Abb. 5.12 unten zu finden war, ist hier verschwunden. Offenbar bewirkt die Anpassung der Daten an ein minimales χ^2 hier kaum eine Änderung in der Größe μ_q^* gegenüber den beiden verwandten Zustandsgleichungen 'mid Endpoint' und 'low Endpoint', während andererseits die Ausfrieretemperatur und die effektiven Massen (siehe oben) deutliche Abweichungen zeigen.

Gleichzeitig zeigt sich für diese drei Zustandsgleichungen beim effektiven chemischen Potential eine Abweichung vom Monotonieverhalten, nämlich ein Plateau bei SPS-40 und 80, welches beim ursprünglichen μ_q^{f-o} in Abb. 5.12 unten nicht vorhanden ist. Und wie zuvor bei den effektiven Massen ist auch hier die Abweichung zu IG_{FFM} insgesamt am größten bei den unteren SPS-Energien (20 bis 40 AGeV), wiederum genau dort, wo die chiralen Zustandsgleichungen eine signifikant bessere Beschreibung liefern als IG_{FFM} . Also sind offensichtlich auch die modifizierten chemischen Potentiale wichtig für die verbesserte Beschreibung durch das chirale Modell.

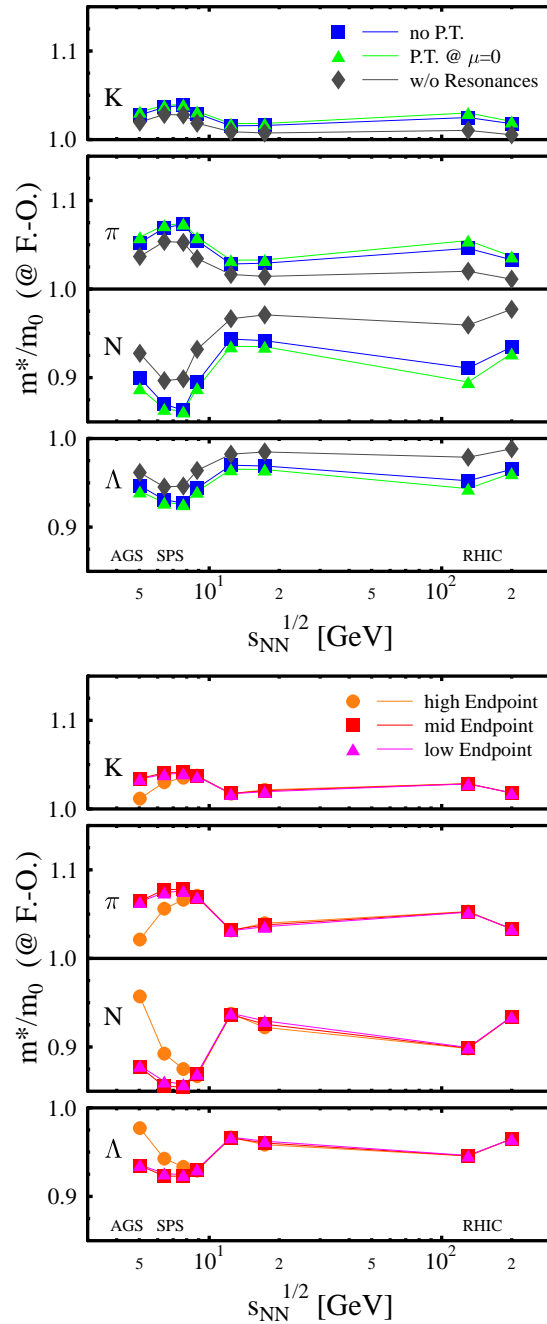


Abbildung 5.13: Anregungsfunktionen für die effektiven Massen.

Effektive Massen m^* von K , π , N und Λ am Freeze-out in Abhängigkeit von der Reaktionsenergie $\sqrt{s_{NN}}$ (normiert auf den jeweiligen Vakuumwert) für Zustandsgleichungen ohne (oben) und mit (unten) Phasenübergang bei hohen Dichten. Verbindungslinien sind nur eingezeichnet, um den Blick zu leiten. (Zu den Parametersätzen: s. Abb. 5.1 und Erläuterungen dazu.)

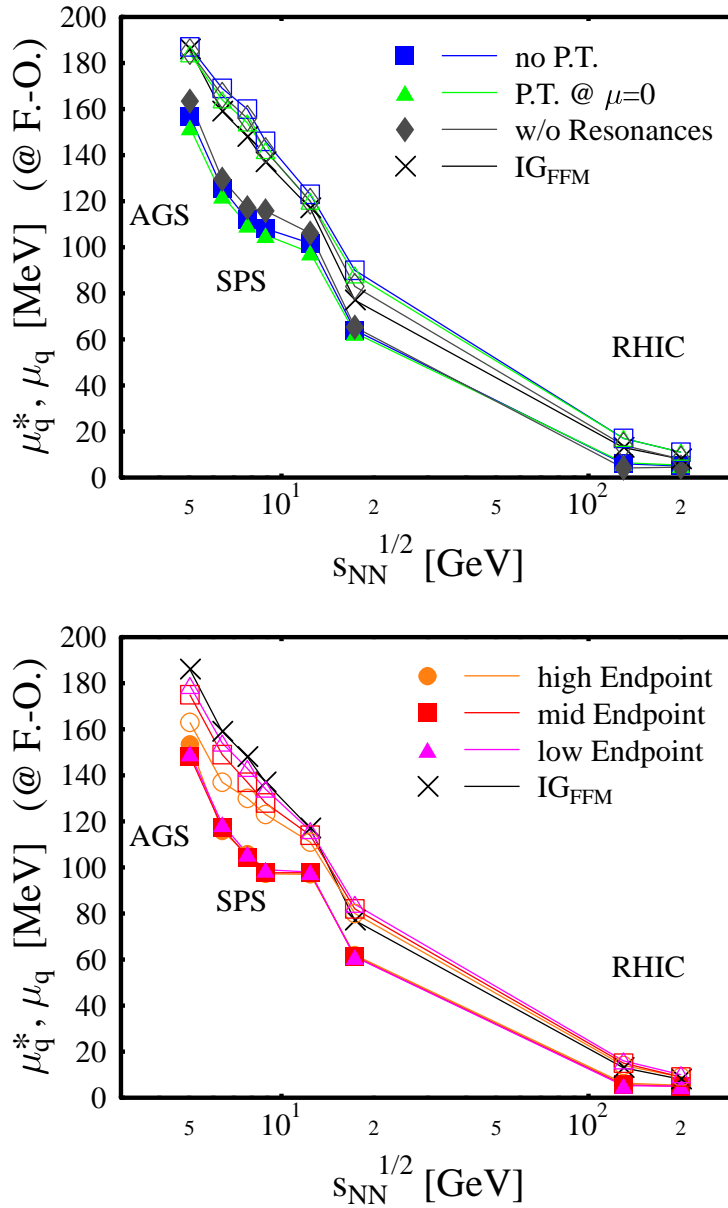


Abbildung 5.14: Anregungsfunktionen für das effektive chemische Potential.

Effektives chemisches Potential μ_q^* in Abhängigkeit von der Reaktionsenergie $\sqrt{s_{NN}}$ für Zustandsgleichungen ohne (oben) und mit (unten) Phasenübergang bei hohen Dichten. Zum Vergleich sind zusätzlich auch die ursprünglichen Werte des chemischen Potentials für diese Zustandsgleichungen (offene Symbole) sowie für das ideale Hadronengas dargestellt.

(Zu den Parametersätzen: s. Abb. 5.1 und Erläuterungen dazu.)

5.3.3 Untersuchung vorgeschlagener Ausfrierkriterien

Als Ausfrierpunkte mit dem idealen Hadronengas über einen etwas größeren Energiebereich – damals SIS, AGS und SPS – bestimmt worden waren, und diese augenscheinlich auf einer Kurve lagen, wurde von Cleymans und Redlich 1998 in Ref. [179] ein 'universelles Ausfrierkriterium' vorgeschlagen (wie bereits in 5.3.1 erwähnt). Diesem Kriterium zufolge findet das Ausfrieren – unabhängig von der Reaktionsenergie – bei einer konstanten mittleren Energie pro Hadron statt, $\langle E \rangle / \langle N \rangle \approx 1$ GeV, oder nach einer neueren Studie $\langle E \rangle / \langle N \rangle \approx 1.08$ GeV [151].

In den letzten Jahren sind in der Literatur weitere universelle, also über einen weiten Energiebereich gültige, Ausfrierkriterien vorgeschlagen bzw. aus den verfügbaren Ausfrierpunkten ermittelt worden, wie die konstante Brutto-Baryondichte²⁰ $\rho_B + \rho_{\bar{B}} \approx 0.12 \text{ fm}^{-3}$ [183] oder die konstante (normierte) Entropiedichte $s/T^3 \approx 7$ [184]. Die Abbildung 5.6 zeigt Isolinien dieser Kriterien, sie ist der Ref. [151] entnommen, einer vergleichenden Untersuchung aus letzter Zeit.

Um die Ergebnisse des chiralen Modells mit diesen 'universellen Vorhersagen' abzugleichen, wurden die entsprechenden Observablen aller untersuchter Parametersätze des chiralen Modells einschließlich des idealen Hadronengases IG_{FFM} an den Ausfrierpunkten bestimmt. Die Gegenüberstellungen sind in den folgenden Abbildungen als Anregungsfunktionen dargestellt.

Wie im Abschnitt 5.3.1 diskutiert, weichen die ermittelten Ausfrierpunkte bei allen Parametersätzen und besonders bei IG_{FFM} deutlich von einer Ausfrierkurve – wie sie z.B. in Ref. [151] dargestellt wird – ab, hauptsächlich für die 4π -Daten von NA49. Entsprechend starke Abweichungen sind bei den jeweiligen Observablen der Ausfrierkriterien zu erwarten.

Die Abbildung 5.15 zeigt das prominente Kriterium von Cleymans und Redlich $E/N \approx 1.08$ GeV als gepunktete Gerade, dazu die Werte der einzelnen Parametersätze mit bunten Symbolen. Auffällig ist, dass alle Ergebnisse weit unter dem Wert 1.08 aus Ref. [151] liegen, jeweils zwischen 10 und 30% und außerdem ähnlich stark für alle Parametersätze. Ein geschätzter Mittelwert über die verschiedenen Energien wäre $E/N \approx 0.9$ GeV für alle Parametersätze. Dabei sind die Abweichungen von dem vorgeschlagenen Wert $E/N \approx 1.08$ GeV jeweils größer als die Unterschiede zwischen den verschiedenen Parametersätzen.

Wie schon bei der Ausfrieretemperatur und bei den effektiven Baryonmassen in den vorigen Abschnitten, zeigen sich auch hier Knie-Strukturen

²⁰Im Gegensatz dazu ist die (eigentliche) Baryondichte $\rho_B \equiv \rho_B - \rho_{\bar{B}}$ eine Nettodichte.

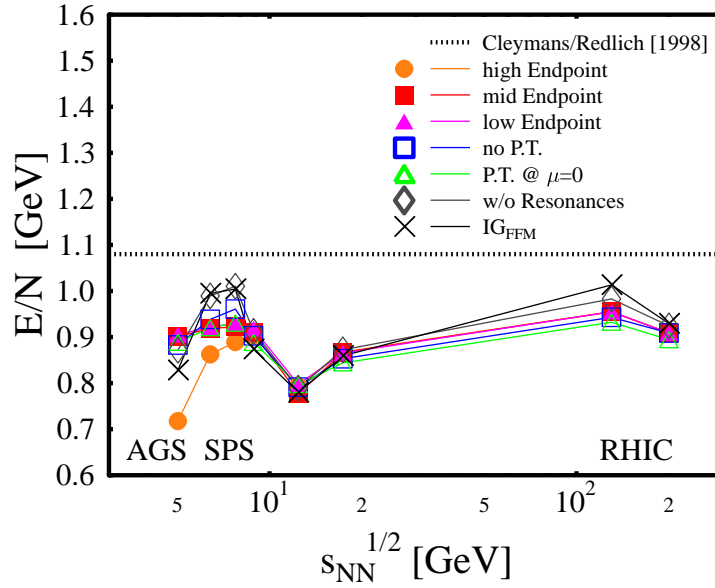


Abbildung 5.15: Ausfrierkriterium konstante Energie pro Hadron.

Aufgetragen ist die Energie pro Teilchen (Hadron) gegen die Reaktionsenergie $\sqrt{s_{\text{NN}}}$ für alle Phasendiagramme im Vergleich mit $E/N \approx 1.08$ GeV, dem von Cleymans und Redlich [179, 151] vorgeschlagenen Ausfrierkriterium. (Zu den Parametersätzen: s. Abb. 5.1 und Erläuterungen dazu.)

mit Maxima bei SPS-30 und RHIC-130 mit einem Minimum bei SPS-80. Des weiteren zeigt sich wieder das dort diskutierte Verhalten der Parametersätze untereinander: Der Parametersatz 'w/o Resonances' liegt sehr nahe bei IG_{FFM} und meist oberhalb der übrigen Parametersätze des chiralen Modells, welche ihrerseits fast aufeinander liegen – abgesehen von der charakteristischen Abweichung des Satzes 'high Endpoint' bei den niedrigen Energien aufgrund der dort vorliegenden Problematik.

In den Abbildungen 5.16 sind die Anregungsfunktionen der anderen beiden als Ausfrierkriterium vorgeschlagenen Observablen dargestellt, oben die Brutto-Baryondichte ($\rho_B + \rho_{\bar{B}}$) und unten die normierte Entropiedichte s/T^3 . Bei den verschiedenen Parametersätzen stimmt das Verhalten mit dem entsprechenden der vorigen Abbildung qualitativ überein, und es zeigen sich wieder starke Abweichungen von dem jeweils vorgeschlagenen Wert. Besonders drastisch ist der Unterschied bei der Brutto-Baryondichte, anstelle der gepunkteten Linie, die den Wert $(\rho_B + \rho_{\bar{B}}) \approx 0.12 \text{ fm}^{-3}$ aus Ref. [183] zeigt, ergibt sich für unsere Ausfrierpunkte mit einem Mittelwert

von $\approx 0.06 \text{ fm}^{-3}$ lediglich die Hälfte des vorgeschlagenen Wertes. Bei der Entropiedichte erhalten wir für die Ausfrierpunkte einen Mittelwert von ≈ 4 bis 5, was mäßig aber deutlich unterhalb der gepunkteten Gerade zu $s/T^3 \approx 7$ [184, 151] liegt.

Der grundsätzliche Verlauf der Observablen E/N , $(\rho_B + \rho_{\bar{B}})$ und s/T^3 hat bei allen Parametersätzen die gleiche Form. Offensichtlich ist dieser Effekt also nicht auf die Medium-Modifikationen des chiralen Modells zurückzuführen, zumal die Variationen (Knie-Strukturen) bei IG_{FFM} jeweils mit Abstand am deutlichsten ausgeprägt sind.²¹ Vielmehr ist die Ähnlichkeit zum Verlauf der Ausfrier Temperatur (Abb. 5.11 und 5.12, jeweils oben) im Bezug auf einen gedachten monotonen Anstieg so stark, dass es auf der Hand liegt, diese Unregelmäßigkeiten miteinander in Verbindung zu bringen.

Wie bereits besprochen, liegen die *Ausfrier Temperaturen* zu den 4π -Daten von NA49 auch bei anderen aktuellen Studien [176] mit idealen Hadronengas-Modellen merklich unterhalb der Ergebnisse zu anderen Daten vom SPS bei entsprechender Reaktionsenergie. Die zugehörigen Punkte liegen deshalb weit unterhalb der universellen Kurven der genannten Ausfrierkriterien. Da schon kleine Abweichungen von diesen Kurven zu starken Abweichungen bei den Werten der Ausfrierkriterien führen [151], ist zu erwarten, dass sich an den angesprochenen Ausfrierpunkten aus [176] ebenfalls stark abweichende Werte für die hier diskutierten Ausfrierkriterien ergeben; diese Werte sind in Ref. [176] allerdings nicht angegeben.

In Ref. [155] ergibt sich durch die Verwendung des zusätzlichen Parameters γ_s eine verbesserte Beschreibung bei *wesentlich höheren* Temperaturen (als hier bzw. in Ref. [176]), dabei ergeben sich ein monotoner Temperaturverlauf und gleichzeitig ein sprunghaftes Verhalten von γ_s . Wie in Ref. [151] festgestellt wird, ändert der Parameter γ_s zwar die Zusammenstellung an Hadronen mit seltsamem Quarkinhalt im System, jedoch ändern sich dadurch die thermodynamischen Eigenschaften des Gesamtsystems kaum, weil die Anzahl der seltsamen Hadronen stark unterdrückt ist. Dies erklärt, warum auch in aktuellsten Studien [185] die Ausfrierpunkte innerhalb von $E/N = 1.0$ und 1.1 GeV liegen, wenn für die Bestimmung der Ausfrierpunkte andere experimentelle Daten und/oder Hadronengas-Modelle mit $\gamma_s \neq 1$ verwendet werden.

In zukünftigen Studien wäre es folglich von Interesse, andere experimen-

²¹Ein systematisches Problem des IG_{FFM} -Modells kann zufolge dem Abschnitt 5.2.2 und besonders der Diskussion zu Abb. 5.6 ausgeschlossen werden.

telle Daten zu verwenden, die auch ohne γ_s eine gute Beschreibung mit dem thermischen Modell zulassen und höhere Ausfrieremperaturen ergeben. Bei solchen Daten ist zu erwarten, dass dann die Ausfrierkriterien nahe an den vorgeschlagenen Werten liegen, und Abweichungen zwischen IG_{FFM} und den Parametersätzen könnten dann auf einer besseren Basis diskutiert werden.

Außerdem wäre es interessant in Zukunft – als komplementären Zugang – auch Isolinien der Ausfrierkriterien der einzelnen Parametersätze des chiralen Modells in die Phasendiagramme mit einzuzeichnen, um so Abweichungen zum idealen Fall (IG_{FFM} und weitere) besser untersuchen zu können.

Charakteristische Ausfrierkriterien des chiralen Modells

Es haben sich also *große Variationen und Abweichungen* in den als konstant vorgeschlagenen Observablen ergeben (für die zugrunde liegenden experimentellen Daten). Insbesondere ist die Variation der Observablen – sowohl qualitativ als auch quantitativ – vergleichbar mit jener, die wir im vorigen Abschnitt bei den effektiven Massen beobachtet haben. Vor diesem Hintergrund können wir auch die effektiven Massen bzw. ihre Veränderung als ein, für das chirale Modell charakteristisches, Ausfrierkriterium verwenden.

In der Abbildung 5.17 sind dazu noch einmal die Anregungsfunktionen der effektiven Massen aus den beiden Abbildungen 5.13, also zu allen untersuchten Parametersätzen, vereint. Die Werte sind auch hier normiert auf die zugehörigen Vakuummassen dargestellt, so dass die Linien zu $m^*/m_0 = 1.0$ jeweils dem idealen Hadronengas entsprechen und Abweichungen von diesem Wert in Prozent abgelesen werden können.

Das Verhalten der einzelnen effektiven Massen bei den verschiedenen Parametersätzen wurde im vorigen Abschnitt bereits diskutiert. In der direkten Gegenüberstellung mit den Ausfrierkriterien fällt die Ähnlichkeit der verschiedenen Anregungsfunktionen auf, beispielsweise der effektiven Pionenmasse (zweites Feld von oben in Abb. 5.17) und der normierten Entropiedichte (Abb. 5.16 unten). Der einzige *qualitative* Unterschied zwischen diesen beiden Observablen ist der Trend von den chiralen Zustandsgleichungen zum idealen Hadronengas hin. Bei den effektiven Pionenmassen liegt der ideale Fall unter den Werten der chiralen Parametersätzen und ist konstant. Dagegen liegt der ideale Fall bei der Entropiedichte (wie auch bei den anderen beiden Ausfrierkriterien Brutto-Baryonendichte und Energie pro Hadron) oberhalb der chiralen Parametersätze und zeigt die größten Unregelmäßigkeiten im Verlauf. Der Parametersatz mit geringen Medium-Effekten 'w/o Resonances' nimmt jeweils eine Zwischenrolle ein: Die zugehörige Anregungsfunktion der effektiven Massen liegt bei *kleineren*

Abweichungen und zeigt *geringere Variationen* als diejenigen der anderen chiralen Parametersätze während die Entropiedichte-Werte zu 'w/o Resonances' überwiegend *größer* sind und *stärkere* Variationen zeigen als die der anderen chiralen Parametersätze – und entsprechend für die anderen beiden Ausfrierkriterien Energie pro Hadron und Brutto-Baryondichte.

Um nun ein Ausfrierkriterium auf Basis der effektiven Massen zu erhalten, können z.B. die Nukleonen (drittes Feld von oben in Abb. 5.17) verwendet werden. Ein Mittelwert über den abgedeckten Energiebereich wäre dann $m_N^*/m_{N,0} \approx 90\%$. Die Variation um diesen Mittelwert von etwa 5% sind zwar größer als bei den anderen effektiven Massen, jedoch kleiner als oder vergleichbar mit den Variationen in den anderen Ausfrierkriterien.

Da die effektive Nukleonenmasse m_N^* (3.12) hauptsächlich durch das nichtseltsame skalare Kondensat σ generiert wird, kann anstelle von Mittelwerten aus effektiven Massen auch direkt ein σ -Wert als Ausfrierkriterium verwendet werden. Der Blick auf die T - μ -Diagramme der Abb. 5.7 und 5.8 zeigt, dass die Ausfrierpunkte bei den Zustandsgleichungen des chiralen Modells (Ausnahme 'w/o Resonances') um die Isolinie zu $\sigma/\sigma_0 = 0.9$ verteilt liegen. Also scheint dies ein geeignetes Ausfrierkriterium zu sein innerhalb des chiralen Modells – und zwar für alle Parametersätze mit starken Medium-Effekten (d.h. außer 'w/o Resonances'). Die universellen Ausfrierkurven im chiralen Modell sind damit schlicht die entsprechenden Isolinien des σ -Feldes in den Abb. 5.1. Dieser Ansatz erklärt auch auf natürliche Weise die unterschiedliche Lage der T - μ -Ausfrierpunkte zum jeweiligen Parametersatz in den Abb. 5.7 und 5.8. Schließlich soll noch angemerkt werden, dass auch die skalaren Dichten (siehe Gl. 3.35) sich als Basis für ein Ausfrierkriterium anbieten würden, da sie mit dem σ -Feld direkt verknüpft sind: als Quellen in der Feldgleichung (3.30).

Andererseits wurde oben bereits darauf hingewiesen, dass sich die Variation in den diversen Ausfrierkriterien und die Variation der Ausfrier Temperatur (in Bezug auf einen kontinuierlichen Anstieg) qualitativ und auch nahezu quantitativ entsprechen. Dieser Zusammenhang macht deutlich, dass eine tiefer gehende Untersuchung der – hier und in der Literatur vorgeschlagenen – Ausfrierkriterien mit den oben beobachteten Variationen nur sinnvoll ist, wenn zuvor die systematischen Probleme bei der Bestimmung von Ausfrierpunkten (starke Abhängigkeit von der Auswahl an Teilchenzahlverhältnissen, schlechte Beschreibungsqualität bei mittleren und hohen SPS-Energien) besser eingegrenzt bzw. abgegrenzt werden kann.

Ein Ausweg wäre es, in Zukunft andere experimentelle Daten zu verwenden, die eine gute Beschreibung ergeben, wie oben bereits vorgeschlagen.

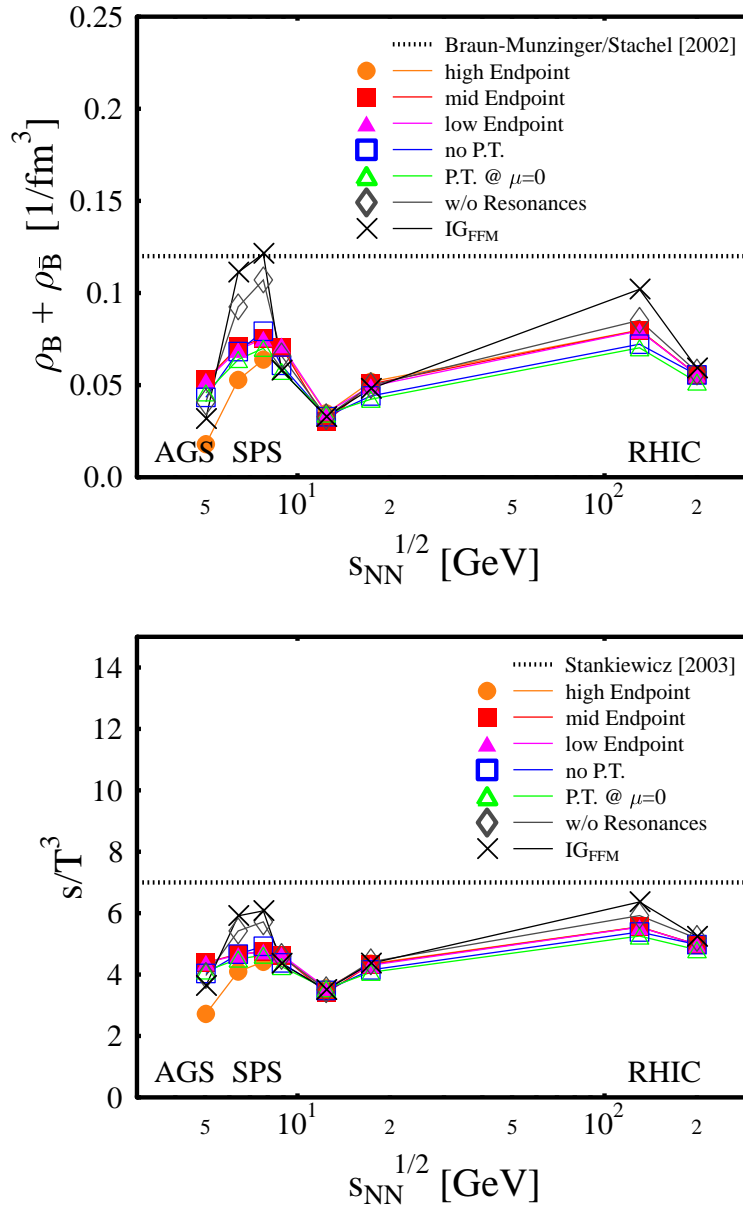


Abbildung 5.16: Kriterien Brutto-Baryonendichte und normierte Entropie.

Dargestellt sind die Anregungsfunktionen zweier weiterer Ausfrierkriterien, jeweils für alle Phasendiagramme. Oben ist die Gesamtdichte von Baryonen und Antibaryonen (Brutto-Baryonendichte) gezeigt sowie der Wert $(\rho_B + \rho_{\bar{B}}) \approx 0.12 \text{ fm}^{-3}$ von Braun-Munzinger und Stachel [183] zum Vergleich. Unten ist die (normierte) Entropie in Einheiten von T^3 im Vergleich mit $s/T^3 \approx 7$ aufgetragen, dem von Stankiewicz [184, 151] vorgeschlagenen Ausfrierkriterium.

(Zu den Parametersätzen: s. Abb. 5.1 und Erläuterungen dazu.)

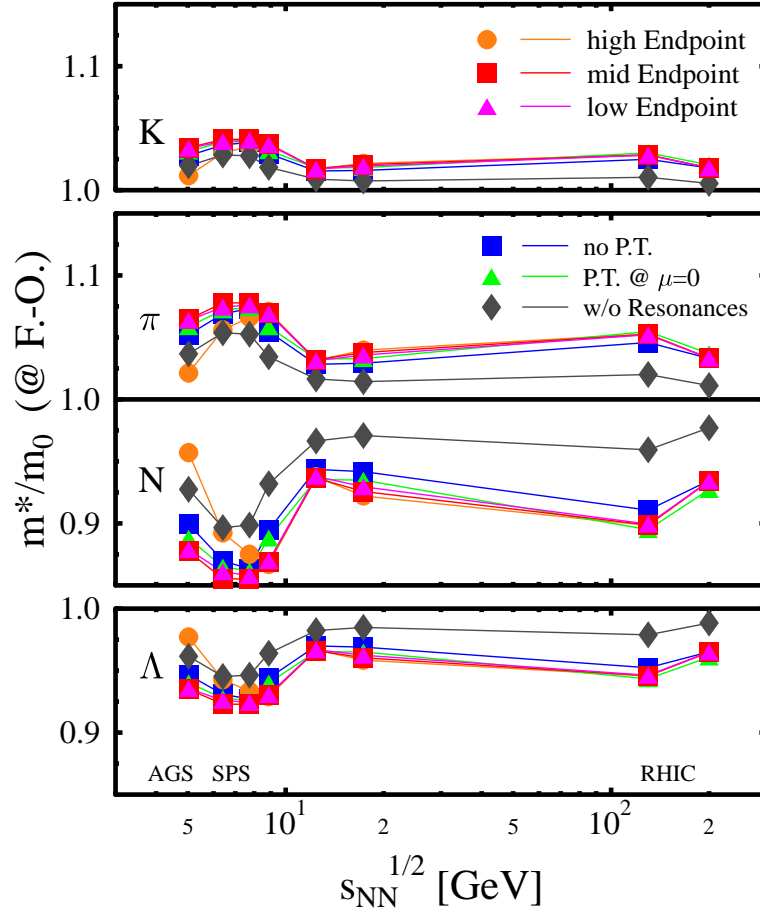


Abbildung 5.17: Konstante effektive Hadronenmassen als charakteristisches Ausfrierkriterium für das chirale Modell.

Aufgetragen sind die effektiven Massen von K, π , N und Λ (von oben nach unten und in Einheiten der Vakuummassen) gegen die Reaktionsenergie $\sqrt{s_{NN}}$ für alle Phasendiagramme bzw. für alle Parametersätze (Zusammenfassung der beiden Abbildungen 5.13). Die *Variation* in den effektiven Massen entspricht jener der vorgehend untersuchten Ausfrierkriterien.

(Zu den Parametersätzen: siehe Abb. 5.1 und Erläuterungen dazu.)

5.4 Isentropen und kritischer Endpunkt

Zum Abschluss der Untersuchungen von Teilchenzahlverhältnissen mit dem chiralen Modell sollen noch Isentropen, also Linien zu konstanter spezifischer Entropie $S/A \equiv s/\rho_B = \text{const.}$, mit den verschiedenen Parametersätzen des Modells bestimmt werden. Der Zusammenhang zwischen Isentropen und Trajektorien einer adiabatischen Expansion bei Schwerionen-Kollisionen wurde bereits in Abschnitt 4.3 diskutiert.

Im Bezug auf die dortigen Studien gibt es jedoch zwei wesentliche Unterschiede. Zum einen haben die hier verwendeten Zustandsgleichungen – vergleiche Abschnitt 5.1.2 und die Bemerkung am Ende von Abschnitt 5.1.3 – ein vollständiges hadronisches Massenspektrum (bis $m_{\text{Hadron}} \approx 2$ GeV). Und zum anderen werden die Isentropen bzw. die zugehörigen S/A -Werte bei dieser Untersuchung nicht über Anfangsbedingungen fixiert, sondern über die zuvor bestimmten Ausfrierpunkte, d.h. wir modellieren hier also *nicht die Expansion aus der frühen Phase heraus*, sondern die *letzte Phase der Expansion bis zum Ausfrieren*. Das bedeutet aber auch, dass diese Methode verlässlicher sein sollte, denn die Ausfrierpunkte sind innerhalb eines jeden Parametersatzes des chiralen Modells ermittelt worden, sind also auf den Parametersatz angepasst, und außerdem liegen die Ausfrierpunkte alle in einem Bereich, in dem die Zustandsgleichungen ohne grundsätzliche Einschränkungen anwendbar sind. Dagegen sind in Abschnitt 4.3 die Anfangsbedingungen (in e und ρ_B) unabhängig von der Zustandsgleichung mit einem vereinfachenden Modell berechnet worden, und diese Anfangsbedingungen liegen weit in der restaurierten Phase, wo die Anwendbarkeit der chiralen Zustandsgleichungen in Frage gestellt werden kann. Beim vorliegenden Ansatz werden also zwei Quellen für systematische Ungenauigkeiten bei der Bestimmung der jeweiligen spezifischen Entropie S/A vermieden.²²

Die folgenden Abbildungen 5.18 bis 5.21 zeigen nun Isentropen *bis zum* Ausfrieren des Systems. Dazu verwenden wir eben jene Ausfrierpunkte, die in den vorigen Abschnitten ermittelt und diskutiert wurden, dargestellt in den gewohnten T - μ -Diagrammen aus den Abb. 5.7 und 5.8. Für den jeweiligen Parametersatz wird die spezifische Entropie $S/A \equiv s/\rho_B$ an jedem Ausfrierpunkt bestimmt – der S/A -Wert ist in der entsprechenden Farbe über dem Schaubild angegeben – und dann T - μ -Punkte mit gleicher spezifischer Entropie gesucht. Aus technischen Gründen ergeben diese Punkte zu gleichem S/A

²²Der Einfluss dieser systematischen Ungenauigkeiten könnte abgeschätzt werden, in dem für die verschiedenen Zustandsgleichungen die hier resultierenden Werte der spezifischen Entropie mit Resultaten aus dem Überlapp-Modell verglichen würden.

mitunter keine durchgehenden Linien, hauptsächlich in der Nähe von Phasenübergängen erster Ordnung.²³ Es wurden hier also *nicht* die Trajektorien einer tatsächlichen Expansion ermittelt. Besonders wichtig ist dieser Unterschied bei dem Parametersatz 'P.T.@ $\mu=0$ ' in Abb. 5.19 oben: Dort ergeben sich im Bereich größerer T und μ_q Bifurkationen, wo eigens untersucht werden müsste, entlang welcher Pfade die Expansion zu den SPS-Ausfrierpunkten erfolgt. Allerdings ist diese Zustandsgleichung eher unrealistisch, so dass eine nähere Untersuchung wenig lohnenswert erscheint.

Der Zweck dieser Untersuchung ist weniger, den exakten Verlauf der Isentropen in der Nähe der Phasenübergangslinie zu finden. Vielmehr wollen wir eine Orientierung erhalten, wie die Zustandsgleichungen bzw. deren Phasenübergangsbereiche den Verlauf von Isentropen beeinflussen, auch im Hinblick auf einen möglichen Zusammenhang zwischen den ermittelten Ausfrierpunkten und einem kritischen Endpunkt, wie er von IQCD-Rechnungen vorhergesagt wird.

In den folgenden Abbildungen sind zwei der aktuellen IQCD-Vorhersagen mit eingezeichnet, der bereits (in Abschnitt 4.3) angeführte Endpunkt von 2+1-Flavor-Rechnungen aus Ref. [84] mit einem grauen Punkt einschließlich der dort angegebenen Fehlerbalken und außerdem die Vorhersage von 3-Flavor-Rechnungen (extrapoliert zum 2+1-Flavor-Fall) aus [96] mit senkrecht angeordneten dicken schwarzen Punkten.²⁴ Wie schon in Abschnitt 4.3 angesprochen, ist zu erwarten, dass sich die Vorhersagen zum QCD-Endpunkt mit zunehmender Qualität der IQCD-Rechnungen verändern werden. Deshalb stehen hier nicht die Isentropen durch diese Punkte im Vordergrund, vielmehr sollen die Punkte der Orientierung dienen.

Zustandsgleichungen ohne starke Medium-Effekte

Die Abbildungen 5.18 zeigen die Isentropen zu den Ausfrierpunkten des idealen Hadronengases IG_{FFM} (oben), welches keine expliziten Medium-Effekte enthält, und der chiralen Zustandsgleichung mit schwachen Medium-Effekten 'w/o Resonances' (unten). Die Isentropen verlaufen bei beiden Zustandsgleichungen ähnlich: fast senkrecht mit einer leichten Neigung von links oben nach rechts unten, nur die Isentropen zu den RHIC-Ausfrierpunkten sind bei

²³In diesem Bereich erfordert es zum Teil einen enormen numerischen Aufwand (Computer-Rechenzeit), die Zustandsgleichung an ausreichend vielen T - μ -Punkten zu berechnen, um die Isentropen durchgehend bestimmen zu können.

²⁴Dort wird lediglich ein chemisches Potential von $\mu_{q,\text{End}} \approx 140$ MeV und keine Temperatur angegeben. In letzter Zeit macht diese Gruppe noch zurückhaltendere Angaben: In dem Vortrag von F. Karsch [186] heißt es, man sähe "keine eindeutige Evidenz für einen kritischen Punkt".

'w/o Resonances' leicht in die andere Richtung geneigt.

Die spezifische Entropie beider Zustandsgleichungen liegt bei den meisten Ausfrierpunkten nahe beieinander, von AGS-11.6 über SPS-20, 30, 40, 80 und 158 bis RHIC-130 und 200 ergeben sich die Werte $S/A \equiv s/\rho_B \approx 13, 14, 15.5, 19, 26, 37.5, 210$ und 370 als Anhaltspunkte. (Die Unterschiede bei RHIC bzw. bei kleinen chemischen Potentialen sind deutlich größer, weil hier durch Dichten nahe Null geteilt wird und kleine Änderungen in ρ_B somit große Änderungen in s/ρ_B bewirken.)

Da diese beiden Zustandsgleichungen keine bzw. nur wenig (explizite) Wechselwirkung enthalten, geschweige denn Phasenübergänge erster Ordnung oder einen kritischen Endpunkt, ist es nicht sinnvoll die IQCD-Vorhersagen zum Endpunkt über die entsprechenden Isentropen dieser Modelle bestimmen zu wollen – außer man nähme an, dass das ideale Hadronengas-Modell auch sehr nahe am Endpunkt noch eine gute Beschreibung des Systems lieferte.

Trotzdem ist es interessant zu untersuchen, mit welchen Einschussenergien und mit welchen spezifischen Entropien der Bereich um die beiden IQCD-Endpunkte verknüpft werden kann, dann im Sinne eines Extremfalls (nämlich dem nichtwechselwirkenden hadronischen Grenzfall). Beim idealen Hadronengas IG_{FFM} sind es die Isentropen zu Einschussenergien von 20 bis 40 A GeV, welche durch diesen Bereich laufen, und bei 'w/o Resonances' sind es Isentropen zu tendenziell höheren Energien, $E_{\text{Lab}} \approx 30$ bis nahezu $80 A$ GeV. Diese Energien entsprechen Werten für die spezifische Entropie von $S/A \approx 14$ bis 20 bei IG_{FFM} und $S/A \approx 15$ bis 22 bei 'w/o Resonances'.

Ein anderer Extremfall wären dann Isentropen in einem ultrarelativistischen idealen Gas aus Quarks und Gluonen, der Bag-Zustandsgleichung für das QGP (vgl. Abschnitt 4.2.2). Allerdings können die zugehörigen Isentropen innerhalb dieser Zustandsgleichung nur mit *Anfangsbedingungen* in der Quark-Gluon-Phase, also oberhalb des Phasenübergangs, bestimmt werden (z.B. mit dem Überlapp-Modell wie in Abschnitt 4.3). Hadronische *Ausfrierpunkte*, die unterhalb des Phasenübergangs liegen, können mit der Bag-Zustandsgleichung nicht bestimmt werden, hier müsste stattdessen die spezifische Entropie von den jeweiligen Ausfrierpunkten einer hadronischen Zustandsgleichung wie etwa IG_{FFM} übernommen werden.

Zustandsgleichungen ohne Phasenübergang bei hohen Dichten

Die Isentropen zu den Ausfrierpunkten der beiden Zustandsgleichungen ohne Phasenübergang bei hohen Dichten bzw. bei großen chemischen Potentialen sind in den Abb. 5.19 dargestellt, oben 'P.T.@ $\mu=0$ ' und unten der Parame-

tersatz 'no P.T.'. In der Nähe der Ausfrierpunkte verlaufen die Isentropen hier ähnlich wie in den beiden vorigen Abbildungen.

Der entscheidende Unterschied wird erst im Bereich des Phasenübergangs erster Ordnung bzw. des Crossovers deutlich: Es zeigt sich das 'bending' bzw. der Versatz der Isentropen am Phasenübergang erster Ordnung [105, 106, 99], was beim Crossover zu einem kontinuierlichen Abbiegen abgeschwächt wird, und zwar jeweils gerade in dem schraffierten Bereich zwischen den Feld-Isolinien zu $\sigma/\sigma_0 = 0.7$ bis 0.5 , wo die Änderung des Ordnungsparameters am stärksten ist. Oberhalb des Phasenübergangs (erster Ordnung oder kontinuierlich), also in der chiral restaurierten Phase, verlaufen die Isentropen diagonal nach rechts oben. Dieses Verhalten entspricht dem idealen ultra-relativistischen Gas (Bag-Modell, vgl. Abschnitt 4.2.2), was auf die stark abgesenkten Baryonenmassen zurückgeführt werden kann, siehe auch die Diskussion hierzu in Abschnitt 4.3.

Bei dem Parametersatz 'P.T.@ $\mu=0$ ' treten im Bereich von $\mu_q \approx 140$ MeV und 170 MeV oberhalb des Crossovers die oben angesprochenen Bifurkationen bzw. Mehrdeutigkeiten auf. Dadurch kann der Pfad der Expansion hier nicht direkt an den Punkten gleicher spezifischer Entropie abgelesen werden, sondern müsste wie schon gesagt in einer zusätzlichen Untersuchung bestimmt werden.

Am Phasenübergang erster Ordnung lässt sich der bereits in Abschnitt 4.3 beobachtete und diskutierte Versatz der Isentropen erkennen: Von höheren Temperaturen kommend, laufen die Isentropen unterhalb des Phasenübergangs bei 10 bis 20 MeV kleineren chemischen Potentialen weiter – und bei tendenziell höheren Temperaturen, was hier aber aufgrund der flachen Phasenübergangslinie kaum auffällt.

Aus lQCD-Rechnungen [96, 84] ergeben sich für den 2+1-Flavor-Fall als Vorhersagen zum QCD-Phasendiagramm ein Crossover bei $\mu = 0$ und eine kritische Linie ab $T \approx 165 \pm 10$ MeV und $\mu_q \approx 125 \pm 25$ MeV, wie bereits mehrfach angeführt. Im qualitativen Widerspruch dazu zeigt die Zustandsgleichung 'P.T.@ $\mu=0$ ' eine Linie mit Phasenübergängen erster Ordnung ab $\mu_q = 0$ bis zu einem Endpunkt bei $\mu_q = 110$ MeV. Die Isentrope zu SPS-158 bzw. zu $S/A = 38$ trifft in der restaurierten Phase auf diesen Punkt während die Isentrope zu SPS-80 bzw. zu $S/A = 26.5$ in der gebrochenen Phase aus dem Endpunkt dieser Zustandsgleichung heraus läuft. Diese beiden Isentropen grenzen also den Endpunkt der Zustandsgleichung 'P.T.@ $\mu=0$ ' ein.

Für die spezifische Entropie an den Ausfrierpunkten zu AGS-11.6, SPS-20, 30, 40, 80, 158, RHIC-130 und 200 ergibt sich bei den hier vorliegenden

Parametersätzen mit starken Medium-Effekten fast übereinstimmend $S/A \equiv s/\rho_B \approx 12.5, 15, 16, 19, 26.5, 37.5, 235$ und 355 , auffallend ähnlich zu den Werten der vorigen Parametersätze. Dies ist nachvollziehbar, weil die Ausfrierpunkte im Bereich geringer Medium-Modifikationen – vorwiegend unter der Isolinie zu $\sigma/\sigma_0 = 0.9$ – liegen, siehe die Diskussion dazu im vorigen Abschnitt bei den Ausfrierkriterien.

Die Isentropen, die durch den Bereich der IQCD-Vorhersagen zum Endpunkt verlaufen, entsprechen bei 'P.T.@ $\mu=0$ ' Energien von knapp 80 bis deutlich über 158 A GeV und spezifischen Entropien von $S/A = 25$ bis deutlich über 40, und beim Parametersatz 'no P.T.' sind es Energien von 40 bis gut 80 A GeV und spezifischen Entropien von $S/A = 18$ bis etwas über 26. Speziell durch die Mitte der Vorhersage von Fodor und Katz verlaufen Isentropen mit $S/A \approx 40$ (etwas über SPS-158) bei 'P.T.@ $\mu=0$ ' und mit $S/A \approx 24$ (etwas unter SPS-80) bei 'no P.T.'.

Hier zeigt sich also beim Vergleich zweier Zustandsgleichungen mit ähnlichen Parametern, wie stark die spezifische Entropie zu einem bestimmten T - μ -Punkt abweichen kann, wenn der fragliche Punkt im Phasenübergangsbereich oder gar in der restaurierten Phase liegt. Wie bereits in Abschnitt 4.3 angemerkt, ist es also nicht sinnvoll, anhand einer speziellen Zustandsgleichung die spezifische Entropie oder die zugehörige Einschussenergie an einem speziellen T - μ -Punkt entsprechend dem Endpunkt aus IQCD-Vorhersagen zu bestimmen.

Stattdessen wäre es notwendig, verschiedene und möglichst voneinander unabhängige Zustandsgleichungen zu finden bzw. zu verwenden, deren Phasendiagramme qualitativ und quantitativ mit den IQCD-Vorhersagen übereinstimmen. Dann könnte deren Verhalten – Verlauf der Isentropen und zugehörige Werte der spezifischen Entropie – im Bereich des kritischen Endpunkts miteinander verglichen sowie deren Robustheit gegenüber Veränderungen der Modellparameter untersucht werden.

Zustandsgleichungen mit Phasenübergang bei hohen Dichten

Nun sollen die Zustandsgleichungen mit Crossover bei $\mu = 0$ und Phasenübergang bei hohen Dichten bzw. großen chemischen Potentialen untersucht werden, die qualitativ mit den IQCD-Vorhersagen übereinstimmen.²⁵ Die Abbildungen 5.20 oben und unten sowie Abb. 5.21 zeigen die Isentropen zu den

²⁵Wie erwähnt ist die Übereinstimmung jedoch nicht quantitativ, denn die Endpunkte liegen entweder bei zu kleinen oder bei zu großen chemischen Potentialen und die kritische Linie fällt jeweils zu steil ab; außerdem sind diese Zustandsgleichungen nicht in der Lage, normale Kernmaterie (bei $T = 0$ und $\mu_B = \mu_0 \approx 923$ MeV) zu beschreiben.

Ausfrierpunkten der Parametersätze 'low Endpoint', 'mid Endpoint' sowie 'high Endpoint'.

Der Verlauf der Isentropen in der gebrochenen Phase bzw. unterhalb des Phasenübergangs – erster Ordnung oder kontinuierlich – ist wieder ähnlich wie in den vorigen Diagrammen, allerdings ist die Neigung (nach links oben) stärker als bei den vorigen und nimmt zu von 'low Endpoint' zu 'high Endpoint'. Der Versatz am Phasenübergang ist aufgrund der fehlenden Datenpunkte z.T. schwer auszumachen, aber trotzdem ist ein entscheidender Unterschied zum Parametersatz 'P.T.@ $\mu=0$ ' und zu jenem aus Abschnitt 4.3 zu erkennen: Von höheren Temperaturen kommend, laufen die Isentropen unterhalb des Phasenübergangs hier bei *größeren* anstatt kleineren chemischen Potentialen weiter! Es wäre wichtig, den Grund hierfür zu finden, was aber den Rahmen dieses Abschnitts sprengen würde.

Die Werte der spezifischen Entropie an den Ausfrierpunkten stimmen dagegen wieder mit den vorigen Zustandsgleichungen überein, weil die Ausfrierpunkte auch hier im Bereich geringer Medium-Modifikationen bzw. nahe der Isolinie zu $\sigma/\sigma_0 = 0.9$ liegen. Die Ausnahme ist wie gehabt 'high Endpoint', wo die Ausfrierpunkte bei niedrigen Energien (SPS-30 bis AGS) stark von der kritischen Linie eingeschränkt werden. Deshalb erhält man dort zwar lediglich mittlere Medium-Modifikationen, siehe untere Abb. 5.13 und 5.14, aber es gelingt keine akzeptable Beschreibungen der Teilchenzahlverhältnisse mehr.

Für AGS-11.6, SPS-20, 30, 40, 80, 158 sowie RHIC-130 und 200 ergeben sich bei den drei Parametersätzen fast vollständig übereinstimmend spezifische Entropien von $S/A \equiv s/\rho_B \approx 12, 15, 16, 18, 26, 34.5, 200$ und 330. Offensichtlich fixieren die experimentellen Teilchenzahlverhältnisse also den S/A -Wert mit einer guten Verlässlichkeit – unabhängig von der verwendeten Zustandsgleichung!

Die Ausnahme ist 'high Endpoint' mit $S/A \approx 17.6, 17.2$ und 17.5 für AGS-11.6, SPS-20 und SPS-30 (*in dieser Reihenfolge*), was offensichtlich nicht sinnvoll ist, aber andererseits ein Hinweis ist auf den Grund für die schlechte Beschreibung der Teilchenzahlverhältnisse dort.

Hingegen streuen die Werte der spezifischen Entropie zu den Isentropen, die durch den Bereich der Endpunkte aus den IQCD-Vorhersagen laufen, stark. Bei 'low Endpoint' sind dies die Isentropen AGS (und unterhalb) bis SPS-30 entsprechend S/A -Werten von knapp 12 bis 16 und bei 'mid Endpoint' sind es Energien von weit unterhalb von AGS bis etwas unterhalb von AGS entsprechend $S/A \approx 7$ bis 10. Bei 'high Endpoint' schließlich ist es der Bereich von $S/A \approx 5$ bis 7, der allerdings über die vorhandenen Aus-

frierpunkte bzw. Isentropen keiner Einschussenergie zugeordnet werden kann (sehr weit unterhalb von AGS).

Dem speziellen Punkt $T = 162$ MeV und $\mu_q = 120$ MeV (lQCD-Vorhersage von Fodor und Katz) entspricht bei 'low Endpoint' eine spezifische Entropie $S/A \approx 14$, bei 'mid Endpoint' ergibt sich $S/A \approx 9$ und bei 'high Endpoint' $S/A \approx 6$. Die zunehmende Stärke des Phasenübergangs von 'low Endpoint' zu 'high Endpoint' führt also dazu, dass die Isentropen mit gleichem S/A in der restaurierten Phase zu immer kleineren chemischen Potentialen verschoben werden und deshalb die S/A -Werte an einem konkreten T - μ -Punkt ebenfalls kleiner werden. Auch hier zeigt sich die extreme Abhängigkeit der spezifischen Entropie eines Punktes oder Bereiches im T - μ -Diagramm der jeweils verwendeten Zustandsgleichung.

Schließlich noch die Isentropen an dem jeweiligen zum Parametersatz gehörenden Endpunkt: Bei 'low Endpoint' liegt der Endpunkt der kritischen Linie außerhalb des untersuchten Ausfrierbereichs, was Energien weit unterhalb AGS-11.6 und S/A -Werte weit unterhalb von 12 entspricht. Bei 'mid Endpoint' liegt die Isentrope zu SPS-158 mit $S/A = 35$ im Bereich des Endpunktes der Zustandsgleichung und bei 'high Endpoint' liegt der zugehörige Endpunkt zwischen den Isentropen zu SPS-158 und RHIC-130, entsprechend $S/A = 34$ und 190, wobei die Isentrope zu SPS-158 in der restaurierten Phase recht nahe am Endpunkt auf die kritische Linie zu läuft, die Isentrope zu RHIC-130 liegt hingegen deutlich entfernter.

Alles in allem haben wir bisher in diesem Abschnitt also eine starke Abhängigkeit des Verlaufs von Isentropen sowie der spezifischen Entropie S/A zu gegebenen T - μ -Punkten gefunden. Aussagen hierzu – wie etwa zur Einschussenergie oder zum S/A -Wert, die dem Endpunkt einer Zustandsgleichung oder aus lQCD-Rechnungen entsprechen – sind also nicht robust!

Dagegen sind die Werte der spezifischen Entropie an den Ausfrierpunkten der verschiedenen Zustandsgleichungen (trotz teilweise deutlichen T - μ -Abweichungen dieser Punkte selbst, siehe z.B. Abb. 5.9 oben) alle sehr ähnlich. Ein Grund hierfür ist, dass die Ausfrierpunkte jeweils in Bereichen nahe der Isolinie zu $\sigma/\sigma_0 = 0.9$ liegen, wo die Medium-Modifikationen moderat sind.

Einfluss des hadronischen Massenspektrums

Am Ende dieser Untersuchung mit Isentropen soll schließlich noch die Verbindung zu dem T - μ -Diagramm aus dem Abschnitt 4.3 hergestellt werden. Wie eingangs erwähnt, besteht ein wesentlicher Unterschied zwischen den

hier verwendeten Zustandsgleichungen und der dortigen Zustandsgleichung mit Test-Resonanz: Bei der letzteren werden ausschließlich diejenigen Hadronen einbezogen, die an die Feldgleichungen gekoppelt sind, also dynamisch in das Modell eingehen, wohingegen bei den Zustandsgleichungen dieses Kapitels die weiteren – sozusagen fehlenden – Zustände des hadronischen Massenspektrums bis $m_{\text{Hadron}} = 2 \text{ GeV}$ als freie Teilchen ergänzt werden.

Um nun die Brücke zu der Zustandsgleichung mit Test-Resonanz zu schlagen, betrachten wir den Parametersatz 'no P.T.' als Beispiel: zum einen wie gehabt mit vervollständigtem hadronischen Massenspektrum, zum anderen aber auch die entsprechenden Isentropen zur Zustandsgleichung ohne diese Vervollständigung, welche also ausschließlich die angekoppelten Hadronen enthält. Das zugehörige Phasendiagramm bzw. der Verlauf der σ -Isolinien wird dadurch nicht verändert, denn die zusätzlichen Hadronen bei der ursprünglichen Zustandsgleichung koppeln nicht an die Feldgleichungen und somit das Phasenübergangsverhalten nicht beeinflussen können.

Die Abbildung 5.22 oben zeigt noch einmal das T - μ -Diagramm mit Isentropen aus Abb. 5.19 unten zum Parametersatz 'no P.T.' mit vervollständigtem hadronischen Massenspektrum. In der Abb. 5.22 unten ist hingegen der Verlauf der Isentropen für den entsprechenden 'unvollständigen' Parametersatz dargestellt, also ohne die zusätzlichen Hadronen ('Isentropes w/o higher masses'). Zur einfachen Vergleichbarkeit werden dabei die Ausfrierpunkte von 'no P.T.' übernommen. Hier ergeben sich zu AGS-11.6, SPS-20, 30, 40, 80, 158 sowie RHIC-130 und 200 Werte für die spezifische Entropie von $S/A = 7.4, 7.7, 7.9, 8.2, 8.9, 10.6, 77$ und 97 . Diese liegen weit unter den Werten der ursprünglichen Zustandsgleichung in der Abbildung 5.22 oben.

Die drastisch reduzierte Anzahl der hadronischen Freiheitsgrade führt zu einer niedrigeren spezifischen Entropie am jeweiligen T - μ -Punkt. Die Entropie S ist im wesentlichen ein Maß für die gesamte Anzahl der im System vorhandenen Hadronen, so dass bei der vervollständigten Zustandsgleichung 'no P.T.' die zusätzlichen Mesonen zu einer größeren Entropiedichte s führen, ohne jedoch einen Beitrag für die Baryondichte ρ_B zu erzeugen. Auch die zusätzlichen Baryonen tragen zu einer höheren Gesamtanzahl bei, während gleichzeitig ρ_B als Nettodichte sich weniger stark vergrößert, und umso schwächer je kleiner das jeweilige chemische Potential ist. Alles in allem ergibt sich damit der beobachtete Trend der spezifischen Entropie an einem gegebenen T - μ -Punkt: größere Werte für die vervollständigte Zustandsgleichung, wobei der Unterschied drastischer wird für kleinere chemische Potentiale.

Der Verlauf der Isentropen in der unteren Abbildung 5.22 unterscheidet

sich ebenfalls stark von der oberen Abbildung. Erstere zeigen ein ähnliches Verhalten wie die Isentropen mit Test-Resonanz aus Abb. 4.16, unterhalb des (hier kontinuierlichen) Phasenübergangs verlaufen die Isentropen diagonal nach rechts oben und flachen dann zum Crossover hin ab. Oberhalb des Crossovers werden die Isentropen wieder etwas steiler, ohne allerdings die Steigung der Isentropen in Abb. 4.16 zu erreichen.

Diese Isentropen sind im Vergleich zur oberen Abbildung 5.22 also wesentlich stärker von den Änderungen des σ -Felds beeinflusst, denn bei dieser Zustandsgleichung koppeln alle enthaltenen Hadronen an die Feldgleichungen. Umgekehrt formuliert verhalten sich die Isentropen in der Abb. 5.22 oben wesentlich 'steifer', ähnlich dem idealen Hadronengas (vgl. Abb. 5.18 oben), denn der überwiegende Teil der in dieser Zustandsgleichung enthaltenen hadronischen Freiheitsgrade sind als freie Teilchen mit konstanten Massen eingebunden, so dass die Absenkung des σ -Felds am Crossover deutlich weniger Abweichung des Systems vom idealen Hadronengas-Verhalten bewirken kann als bei der Zustandsgleichung ohne zusätzliche Hadronen in Abb. 5.22 unten.

Mit einer Zustandsgleichung, die das vollständige hadronische Massenspektrum dynamisch einbezieht also an die Feldgleichungen koppelt, wäre dann eher ein Verhalten ähnlich zu Abb. 5.22 unten zu erwarten. Dagegen sollten die S/A -Werte an gegebenen T - μ -Punkten wiederum eher der oberen Abbildung entsprechen, aufgrund der größeren Anzahl an hadronischen Freiheitsgraden.

Bei der Zustandsgleichung ohne vervollständigtem Massenspektrum verlaufen Isentropen mit S/A -Werten von 10 bis ungefähr 20 durch den Bereich der IQCD-Vorhersagen zum Endpunkt, bei der ursprünglichen Zustandsgleichung 'no P.T.' waren es Werte von 18 bis 27 gewesen. Und speziell dem Endpunkt $T = 162$ MeV und $\mu_q = 120$ MeV aus Ref. [84] entspricht $S/A \approx 15$ in Abb. 5.22 unten, an Stelle von $S/A \approx 24$ wie in der oberen Abbildung.

Allerdings liegt der Wert $S/A \approx 15$ andererseits in dem Bereich der kritischen spezifischen Entropie der Zustandsgleichung mit Test-Resonanz aus Abb. 4.16. Dort ergab sich $S/A \approx 10$ für die Isentrope durch den genannten IQCD-Endpunkt und $S/A \approx 20$ für die Isentrope durch den Endpunkt der Zustandsgleichung. Hier wird deutlich, wie wichtig es ist, die Vorhersagen einer Zustandsgleichung zur spezifischen Entropie mit den Freiheitsgraden in Bezug zu setzen, die in der Zustandsgleichung enthalten sind.

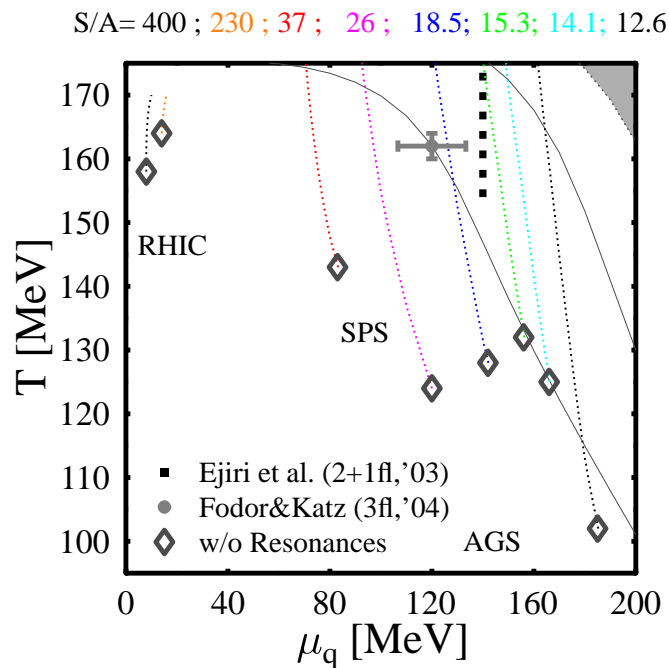
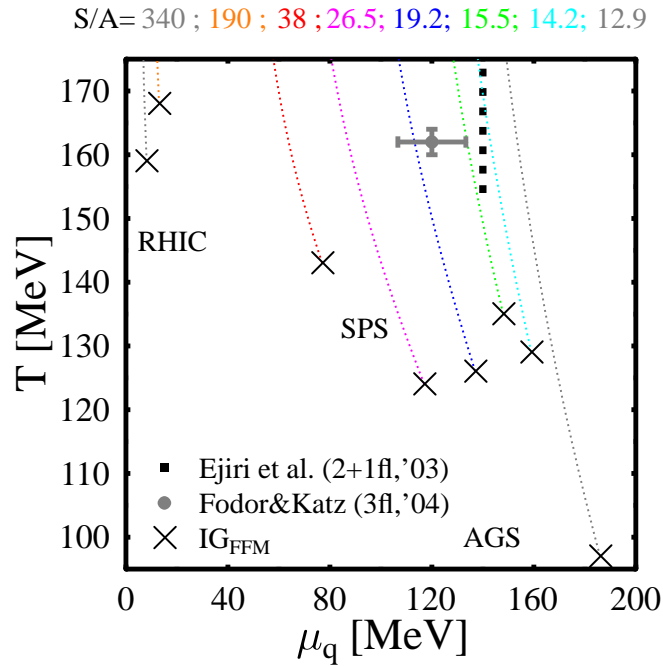


Abbildung 5.18: Isentropen zu den Ausfrierpunkten in der T - μ -Ebene für Parametersätze ohne und mit geringen Medium-Effekten.

Entropie pro Baryon S/A über dem Plot angegeben (farbig entsprechend).
(Zu den Parametersätzen: s. Abb. 5.1 und Erläuterungen dazu.)

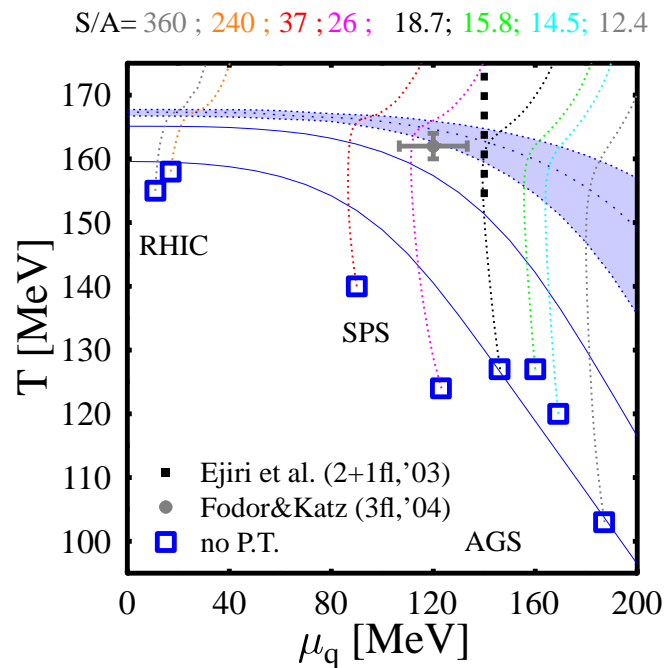
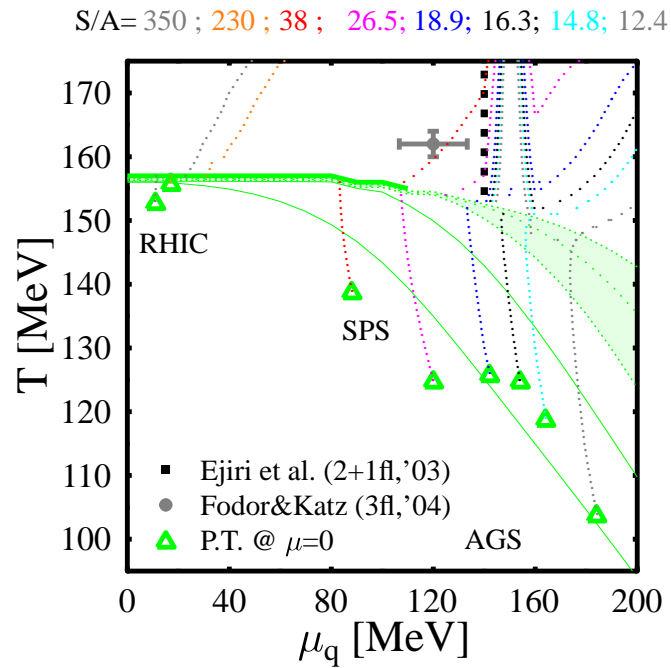


Abbildung 5.19: Isentropen zu den Ausfrierpunkten in der T - μ -Ebene für Parametersätze ohne Phasenübergang bei hohen Dichten.

Entropie pro Baryon S/A über dem Plot angegeben (farbig entsprechend).
(Zu den Parametersätzen: s. Abb. 5.1 und Erläuterungen dazu.)

150 KAPITEL 5. TEILCHENZAHLVERHÄLTNISSE VON AGS BIS RHIC

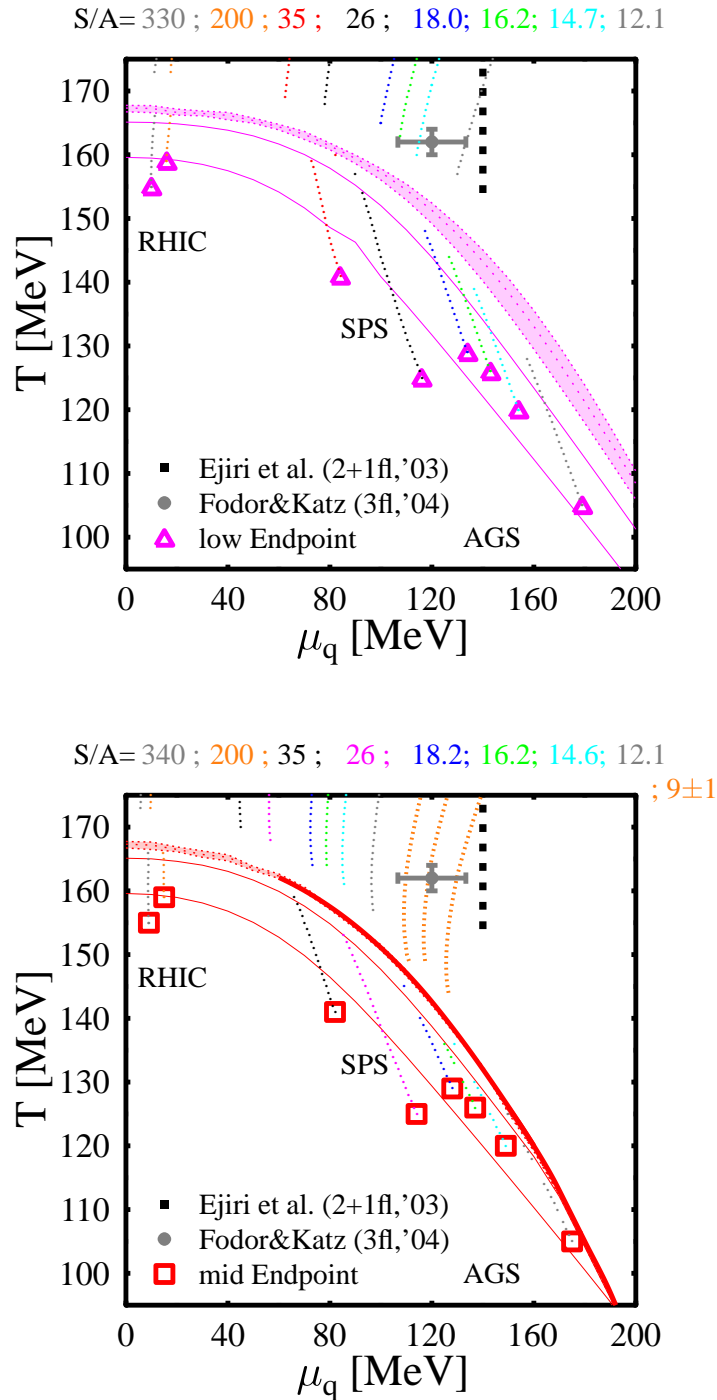


Abbildung 5.20: Isentropen zu den Ausfrierpunkten in der T - μ -Ebene für Parametersätze mit Phasenübergang bei hohen Dichten.

Entropie pro Baryon S/A über dem Plot angegeben (farbig entsprechend).
(Zu den Parametersätzen: s. Abb. 5.1 und Erläuterungen dazu.)

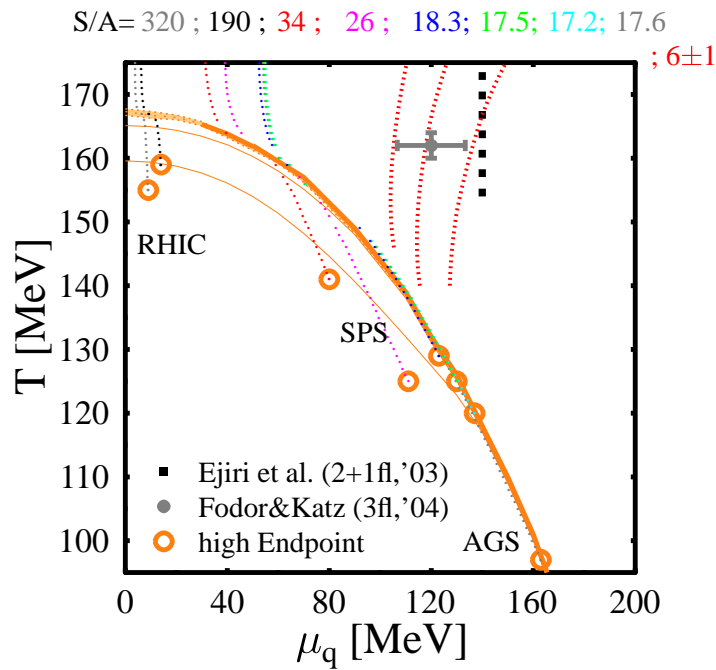


Abbildung 5.21: Isentropen zu den Ausfrierpunkten in der T - μ -Ebene für den Parametersatz mit extrem steil abfallender kritischer Linie.

Entropie pro Baryon S/A über dem Plot angegeben (farbig entsprechend).
(Zu den Parametersätzen: s. Abb. 5.1 und Erläuterungen dazu.)

152 KAPITEL 5. TEILCHENZAHLVERHÄLTNISSE VON AGS BIS RHIC

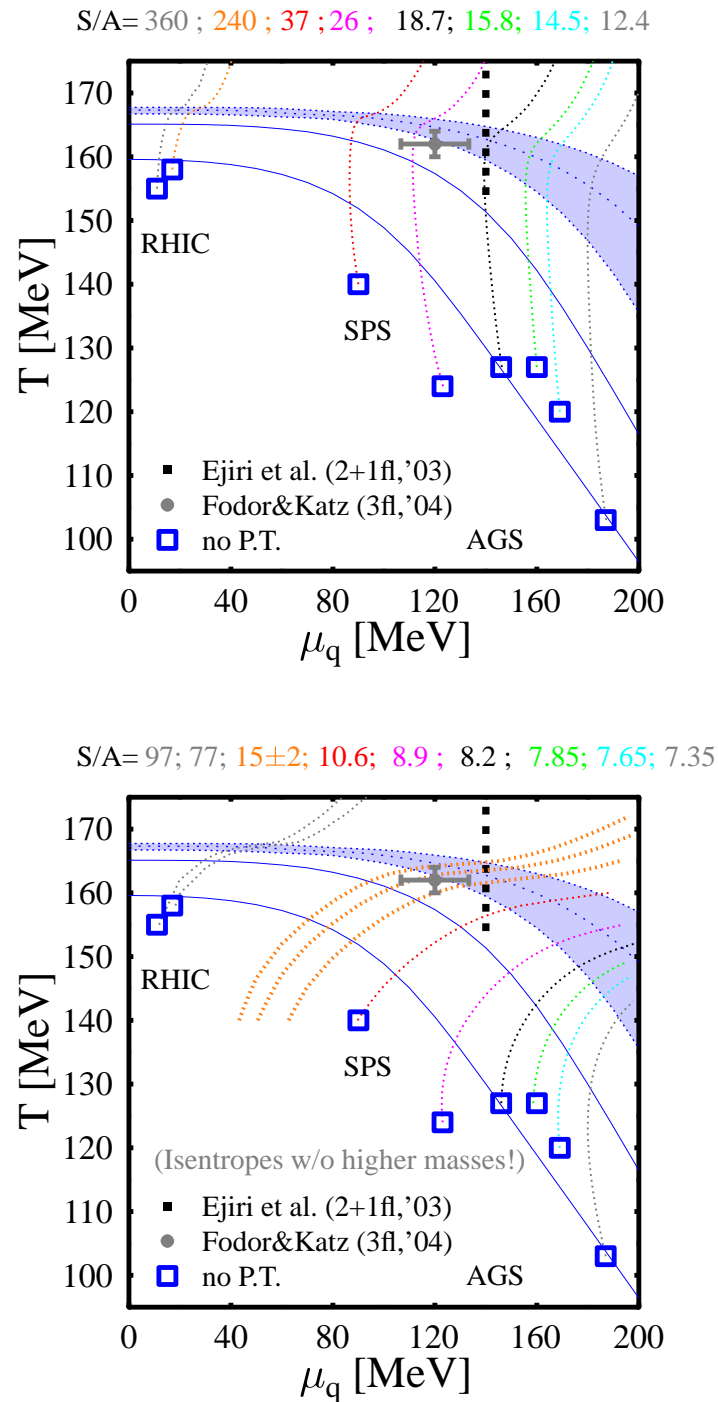


Abbildung 5.22: Vergleich der Isentropen mit und ohne vervollständigtem hadronischen Massenspektrum.

Entropie pro Baryon S/A über dem Plot angegeben (farbig entsprechend).
(Zu den Parametersätzen: s. Abb. 5.1 und Erläuterungen dazu.)

Kapitel 6

Restauration der Skaleninvarianz

In diesem Kapitel soll der Einfluss des Dilaton-Felds auf die Phasenübergangseigenschaften des Modells untersucht werden [187]. Im Gegensatz zu den bisherigen Studien in dieser Arbeit und vorigen Studien mit dem chiralen Modell seit Ref. [26], wird es hier als dynamischer Freiheitsgrad behandelt.

Im Abschnitt 2.2.4 wurde veranschaulicht, wie mit Hilfe des Dilaton-Felds das Skalen-Verhalten der QCD im Lagrangean \mathcal{L} (3.1) bzw. \mathcal{L}_0 (3.4) effektiv modelliert wird. Damit kann untersucht werden, wie und unter welchen Bedingungen eine Restauration der Skalen-Invarianz vonstatten geht. Auch hier wird sich zeigen, dass die Stärke der Ankopplung an zusätzliche baryonische Freiheitsgrade – vertreten durch das Baryonen-Dekuplett – eine wichtige Rolle spielt.

Der Übersichtlichkeit wegen wird der Einfluss effektiver Mesonenmassen vernachlässigt, wir verwenden die Vakuummassen für die Mesonen und diese tragen somit zu den Feldgleichungen nicht bei. (Es wurde überprüft, dass diese Näherung die Phasenübergangseigenschaften nicht wesentlich verändert.)

Wie schon beschrieben, stellen die chiralen Kondensate, σ im nichtseltsamen Sektor und ζ im seltsamen Sektor, die Rolle der Ordnungsparameter der chiralen Restauration dar. Das jetzt dynamisch behandelte Gluonkondensat χ charakterisiert die Stärke der spontanen Symmetriebrechung der Skaleninvarianz. Es kann also als Ordnungsparameter zur Restauration der Skalensymmetrie des effektiven Lagrangeans aufgefasst werden. Damit werden wir es hier also mit zwei qualitativ verschiedenen Phasenübergängen zu tun haben.

6.1 Dynamisches Gluonkondensat

Der Modell-Lagrangian \mathcal{L} (3.1) enthält das Gluonkondensat bzw. das skalare Dilaton-Feld χ als eigenen Freiheitsgrad. Der Potentialterm $\mathcal{V}_0 = -\mathcal{L}_0$ (3.4), der die Wechselwirkungsterme der Skalarfelder beinhaltet, bewirkt auch für χ eine spontane Symmetriebrechung. Dadurch erhält das Dilaton-Feld einen endlichen Vakuumerwartungswert von $\chi_0 \approx 400$ MeV.

In Referenz [26] wurde schon gezeigt, dass die Dichteabhängigkeit des χ -Felds bei $T = 0$ gering ist, wenn es nicht an die Baryonen koppelt. Im Folgenden soll gezeigt werden, inwieweit dies auch für endliche Temperaturen, $T > 0$, gilt.

Kondensate als Funktion der Temperatur

Wenden wir uns zuerst der Temperaturabhängigkeit der skalaren Felder bzw. der Kondensate bei verschwindender Baryondichte oder $\mu = 0$ zu. In Abbildung 6.1 sind die Kondensate σ (kurze grüne Striche), ζ (blaue Punkte) und χ (rote Striche) dargestellt, jeweils normiert auf ihren Vakuumerwartungswert.

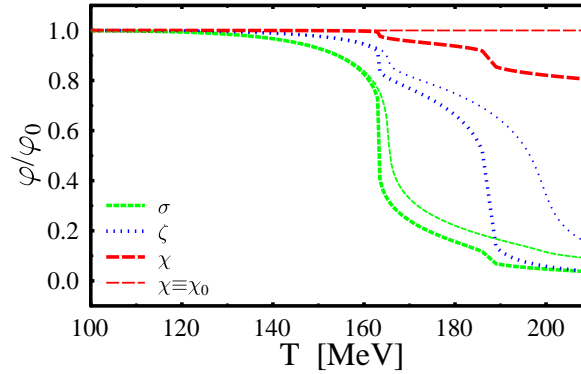


Abbildung 6.1: Temperaturabhängigkeit der skalaren Kondensate mit und ohne dynamischem Gluonkondensat bei $\mu = 0$.

Die dicken Linien zeigen die Kondensate σ , ζ und χ (normiert auf ihre Vakuumerwartungswerte) in Abhängigkeit von der Temperatur bei mittlerer Skalarkopplung entsprechend $m_{\text{Dec}} = 300$ MeV. Zum Vergleich sind die Felder für die Näherung des eingefrorenen Gluonkondensats ($\chi \equiv \chi_0$) jeweils mit dünnen Linien dargestellt.

Für den expliziten Massenterm wurde der Wert $m_{\text{Dec}} = 300$ MeV gewählt, entsprechend der Massendifferenz von Nukleon und Δ -Baryon. Wie in Ab-

schnitt 4.1 gezeigt wurde, ergibt sich mit der resultierenden mittleren Skalar-kopplung gerade kein chiraler Phasenübergang erster Ordnung mehr, sondern ein Crossover. Die dünnen Linien der Abbildung 6.1 zeigen die Näherung mit eingefrorenem Gluonkondensat, $\chi \equiv \chi_0$, während die dicken Linien den Fall zeigen, in dem das Dilaton-Feld dynamisch behandelt wird.

Bei nicht zu hohen Temperaturen sind die Unterschiede zwischen den beiden Fällen erwartungsgemäß gering. Sie werden erst sichtbar, wenn das σ -Feld stark fällt, hier bei $T \approx 160$ MeV. Durch das dynamische Dilaton-Feld wird der (starke) chirale Crossover in σ zu einem (schwachen) Phasenübergang erster Ordnung verstärkt und tritt etwas früher auf, ebenso der dadurch induzierte Abfall in ζ . Auch in χ ist bei dieser Phasenübergangstemperatur ein kleiner Abfall von etwa 5% zu bemerken. (Im Lagrangean \mathcal{L} 3.1 treten Terme mit χ^4 auf, dadurch können χ -Änderungen von 5% zu Änderungen von bis zu 20% in Ω/V führen.)

Bei $T \approx 190$ MeV zeigt das seltsame chirale Kondensat ζ einen schnellen kontinuierlichen Abfall. Dieser Crossover wird stärker und setzt deutlich früher ein bei dynamischem Gluonkondensat χ , welches hier auf etwa 80% des Vakuumerwartungswerts abfällt.

Wie zu erwarten, ist die Näherung eines eingefrorenen Gluonkondensats ($\chi \equiv \chi_0$) bei verschwindender Netto-Baryondichte bzw. bei $\mu = 0$ umso besser, je niedriger die Temperaturen sind – konkret: unterhalb des chiralen Phasenübergangs in σ . Mit dynamischem χ -Feld verhält sich das System tendenziell attraktiver, im betrachteten Fall (Abb. 6.2) werden die Crossover in σ und ζ verstärkt. Bei der Wahl $m_{\text{Dec}} = 300$ MeV führt dies dazu, dass aus dem zuvor (starken) kontinuierlichen Phasenübergang in σ dann ein (schwacher) Phasenübergang erster Ordnung wird – was aber ebenfalls durch eine kleine Verminderung des m_{Dec} -Wertes erreicht werden kann.

Kondensate als Funktion des chemischen Potentials

Nun wollen wir die Gültigkeit der Näherung des eingefrorenen Gluonkondensats, $\chi \equiv \chi_0$, für die μ -Abhängigkeit der skalaren Felder bei hohen Temperaturen überprüfen. Die Abbildung 6.2 zeigt ein Beispiel für $T = 100$ MeV, wieder mit einem expliziten Massenterm von $m_{\text{Dec}} = 300$ MeV und jetzt mit einer mittleren Vektorkopplung $r_V = 0.4$ (vgl. Abschnitt 4.2.1).

Die Kondensate σ , ζ und χ sind dargestellt wie in der vorigen Abbildung, mit dünnen Linien für die Näherung $\chi \equiv \chi_0$ und mit dicken Linien für den dynamischen Fall. Es ergibt sich ein ähnliches Bild wie zuvor bei der Temperaturabhängigkeit. Die Unterschiede zwischen den beiden Fällen treten erst mit dem Crossover in σ auf (hier bei $\mu_q \approx 210$ MeV) und sind deutlich,

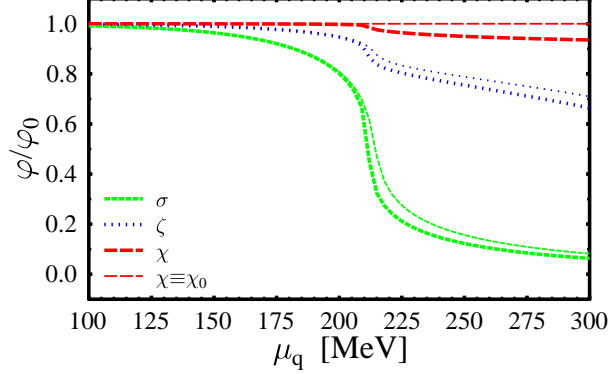


Abbildung 6.2: Dichteabhängigkeit der Kondensate mit und ohne dynamischem Gluonkondensat in Abhängigkeit vom chemischen Potential.

Die dicken Linien zeigen die Kondensate σ , ζ und χ (normiert auf ihre Vakuum erwartungswerte) bei $T = 100$ MeV in Abhängigkeit vom quark-chemischen Potential μ_q mit mittlerer Vektorkopplung $r_V = 0.4$ und mittlerer Skalarkopplung entsprechend $m_{\text{Dec}} = 300$ MeV. Zum Vergleich sind wieder die Felder für die Näherung des eingefrorenen Gluonkondensats ($\chi \equiv \chi_0$) mit dünnen Linien dargestellt.

aber nicht groß.

Allerdings tritt hier kein zweiter Crossover in ζ auf, wo sich deutliche Unterschiede zeigen könnten, so dass die Näherung des eingefrorenen Gluonkondensats als gute Näherung für hohe Dichten angesehen werden kann – solange die Temperaturen nicht zu hoch sind. Sonst wären deutlichere Abweichungen zu erwarten, analog zur Abb. 6.1.

6.2 Dilaton-Kopplung der Resonanzen

Die exemplarischen Untersuchungen des vorigen Abschnitts haben gezeigt, dass ein dynamisches Dilaton-Feld ohne Ankopplung an die Baryonen zu leichten Veränderungen führt im Vergleich zum eingefrorenen Fall $\chi \equiv \chi_0$. Allerdings sind diese Änderungen nicht so groß, dass dadurch das Phasenübergangsverhalten des Modells wesentlich beeinflusst wird.

In den frühen 1990er Jahren wurden bereits von John R. Ellis *et al.* effektive Lagrangeans mit chiralem Quarkkondensat und Gluonkondensat untersucht [188, 189, 190, 191]. und damit insbesondere das Wechselspiel von Restauration der chiralen Symmetrie und Restauration der Skaleninvarianz diskutiert. In Ref. [191] werden zusätzlich Nukleonen in den Lagrangean

miteinander; die Nukleonenmasse wird, neben einem konstanten Beitrag, durch das σ -Feld und durch das Dilaton-Feld generiert wird.

Ähnlich jenem Ansatz, wird in diesem Abschnitt die lineare Kopplung des Dilaton-Felds an die Dekuplett-Baryonen, wie in Gl. (3.49) angegeben, untersucht. Die effektiven Dekuplett-Massen werden somit auch durch das χ -Feld dynamisch generiert, zusätzlich zum Beitrag durch σ und ζ .

Für die folgenden Untersuchungen beschränken wir uns auf den Fall $\mu = 0$, wo die Vektorkopplung wie gehabt keinen Einfluss hat bzw. nicht zum Tragen kommt.

Effektive Massen der Dekuplett-Baryonen

Wir rekapitulieren kurz die zweite Erweiterung $\mathcal{L}_{\text{Dec},\chi}$ (3.49) des Modell-Lagrangians aus Kapitel 3

$$\mathcal{L}_{\text{Dec},\chi} = -\bar{\psi}_{\text{Dec}} g_{\text{Dec},\chi} \chi \psi_{\text{Dec}} . \quad (6.1)$$

Dieser Term koppelt das Dilaton Feld χ nun direkt an die Dekuplett-Baryonen, die wieder stellvertretend für zusätzliche baryonische Freiheitsgrade stehen. Ohne diesen Term ist bereits eine schwache χ -Abhängigkeit der Massen vorhanden, weil ja σ und ζ ihrerseits eine χ -Abhängigkeit haben (vgl. voriger Abschnitt).

Die effektiven Massen des baryonischen Dekupletts (3.50 – 3.53) können schematisch notiert werden als

$$m_i^* = m_{\text{Dec}} + m_{\text{Dec},\chi} + g_{i,\sigma} \sigma + g_{i,\zeta} \zeta + m_{0,i} , \quad (6.2)$$

wobei $m_{\text{Dec},\chi} \equiv g_{\text{Dec},\chi} \chi$ eingeführt wurde und $i = \Delta, \Sigma^*, \Xi^*, \Omega$ ist. Die Kopplungen $g_{i,\sigma}$ und $g_{i,\zeta}$ ergeben sich aus den Gleichungen (3.50 – 3.53) und entsprechen im Wesentlichen dem additiven Quark-Modell. Der Term $m_{0,i}$ ergibt sich aus δm (3.20) und tritt nur bei den seltsamen Baryonen auf.

Hier ist es die Kopplungsstärke $g_{\text{Dec},\chi}$, die variiert wird, um so den Einfluss der Dilaton-Ankopplung auf die Modellvorhersagen, besonders zum Phasenübergangverhalten, studieren zu können.

Da die Vakuummassen unverändert bleiben müssen, bedeutet das Einführen der Kopplung $g_{\text{Dec},\chi}$, dass die Kopplungen $g_{i,\sigma}$ und $g_{i,\zeta}$ sich entsprechend verringern. Wie wir in Kapitel 4 gesehen haben, bedeutet verminderte σ -Kopplung erst einmal verminderte Attraktion. Allerdings ist von vornherein nicht klar, wie stark attraktiv sich die χ -Kopplung auswirkt, die dann teilweise an Stelle der σ -Kopplung tritt. Die resultierende Änderung im Phasenübergangverhalten hängt also nicht-trivial vom Verhalten der

drei skalaren Felder χ , σ und ζ ab.

Um die Kopplungsstärke festzulegen, orientieren wir uns zunächst an der Massendifferenz von Δ -Baryonen¹ und Nukleonen und wählen

$$m_{\text{Dec},\chi_0} \equiv g_{\text{Dec},\chi} \chi_0 = 300 \text{ MeV} \approx m_{\Delta} - m_N \quad \text{mit} \quad m_{\text{Dec}} = 0. \quad (6.3)$$

Mit dieser Wahl wird der Massenunterschied des Baryonen-Oktetts und des Dekupletts durch das Dilaton-Feld generiert. Die physikalische Interpretation dazu ist, dass die Massenaufspaltung zwischen dem Baryonen-Oktett und dem Dekuplett durch Austausch von Instantonen [192] modelliert wird.

Da diese Massendifferenz zur Orientierung dient, ist es nicht entscheidend, dass die Aufspaltung zwischen den anderen Partnern aus Oktett und Dekuplett geringer sind, $(m_{\Sigma^*} - m_{\Sigma}) \approx (m_{\Xi^*} - m_{\Xi}) \approx 200 \text{ MeV}$.

Einfluss auf die Kondensate

Wir wollen zuerst den unterschiedlichen Einfluss auf die Kondensate untersuchen, der sich für eine Dekuplett- χ -Kopplung mit der Parameterwahl (6.3) einerseits und andererseits für einen konstanten expliziten Massenterm von $m_{\text{Dec}} = 300 \text{ MeV}$ ohne χ -Kopplung (wie im vorigen Abschnitt besprochen) ergibt. Im Vakuum haben natürlich beide Kopplungsvarianten den gleichen Effekt, Unterschiede sind also nur dort zu erwarten, wo das Dilaton-Feld deutlich von seinem Vakuum Erwartungswert χ_0 abweicht.

Die Temperaturabhängigkeit der normierten Skalarfelder ist in Abb. 6.3 dargestellt. Die dicken Linien zeigen den Verlauf mit χ -Kopplung und die dünnen Linien zeigen zum Vergleich noch einmal den Verlauf für einen konstanten Massenterm ohne χ -Kopplung, also entsprechend der dicken Linien in Abb. 6.1.

Der Phasenübergang in σ etwas oberhalb von $T = 160 \text{ MeV}$ bleibt nahezu unverändert, denn der zugehörige Abfall in χ ist wie gehabt sehr klein. Der Crossover in ζ wird hingegen merklich verstärkt und findet schon bei $T \approx 180 \text{ MeV}$ statt, fast 10 MeV tiefer als ohne χ -Kopplung. Der zugehörige Abfall in χ ist durch die Kopplung deutlich stärker geworden, auch fällt das Kondensat nach dem Crossover in ζ deutlich steiler ab.

Im Vergleich zu einem expliziten Massenterm $m_{\text{Dec}} = \text{const.}$ zeigt der Fall mit Dilaton-Kopplung mehr Attraktion, und zwar umso deutlicher, je weiter sich χ abgesenkt hat.

¹Die Δ -Resonanzen haben aufgrund der höchsten Entartung und der kleinsten Masse im Dekuplett den größten Einfluss unter den Dekuplett-Resonanzen.

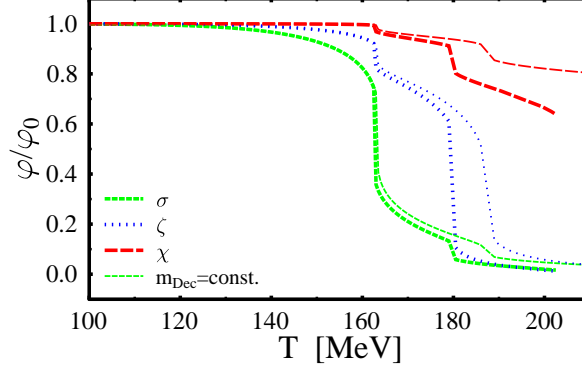


Abbildung 6.3: Kondensate vs. Temperatur mit und ohne Dilaton-Kopplung.

Die dicken Linien zeigen die (normierten) Kondensate σ , ζ und χ für die mittlere Dekuplett- χ -Kopplung (6.3) in Abhängigkeit der Temperatur bei $\mu = 0$. Im Vergleich dazu sind die jeweiligen Kondensate ohne χ -Kopplung aber dafür mit entsprechend großem expliziten Massenterm ($m_{\text{Dec}} = 300 \text{ MeV} = \text{const.}$) mit dünnen Linien dargestellt, analog der dicken Linien in Abb. 6.1.

Umgekehrt formuliert verhält sich die Dilaton-Kopplung also deutlich weniger attraktiv als eine bloße σ -Kopplung ($g_{\text{Dec},\chi} = 0$ bei $m_{\text{Dec}} \equiv 0$), die Dilaton-Kopplung entspricht bis zum chiralen Phasenübergang im σ -Feld einem konstanten Massenterm entsprechender Größe.

Oberhalb von $T \approx 180 \text{ MeV}$ ist das System chiral restauriert und σ , ζ haben kleine aber von Null verschiedene Werte – die Skaleninvarianz ist jedoch weiterhin gebrochen, denn das Gluonkondensat ist noch weit von restaurierten Werten entfernt. Aus diesem Grund kann die chirale Restauration nicht total sein ($\sigma = \zeta = 0$), denn der Term $\propto \chi^4 \ln[\sigma^2 \zeta / \sigma_0^2 \zeta_0]$ in \mathcal{L}_0 (3.4) verhindert dies, solange $\chi \neq 0$ ist.

Die Linien der Kondensate enden etwas oberhalb von $T = 200 \text{ MeV}$ abrupt. Der Grund hierfür ist das Verschwinden der Phase mit gebrochener Skaleninvarianz, wie später anhand des effektiven Potentials (Abb. 6.5) illustriert werden wird.

Druck und Felder: Totale Restauration

Die Abbildung 6.4 oben zeigt für die Parameterwahl (6.3) nun die Temperaturabhängigkeit des Drucks. Zum einen ist der Druck der Phase

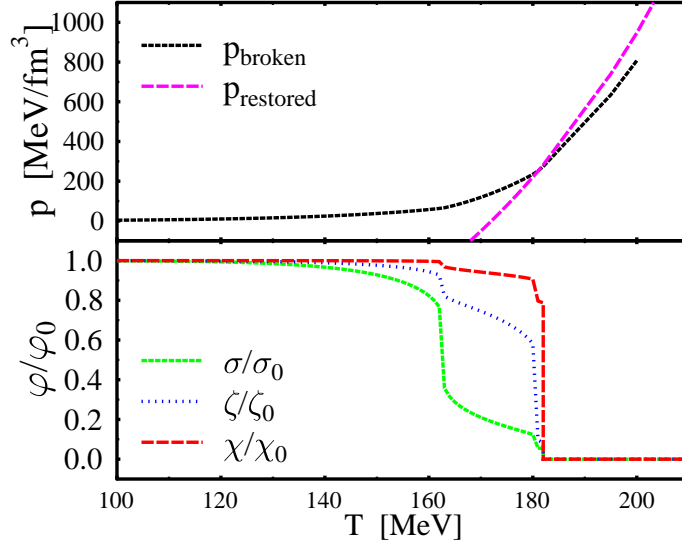


Abbildung 6.4: Temperaturabhängigkeit des Drucks und der Kondensate.

Im oberen Teil ist der Druck als Funktion der Temperatur zur Phase mit gebrochener Skaleninvarianz (kurze schwarze Striche, 'broken') und zur total-restaurierten Phase (rosa Striche, 'restored') gezeigt für die Parameterwahl (6.3), $m_{\text{Dec},\chi_0} = 300$ MeV, bei $\mu = 0$. Ab einer Temperatur $T_{\text{P.T.}} = 182$ MeV ist der Letztere größer, so dass ab dort die total restaurierte Phase stabil wird.

Im unteren Teil sind dazu die Kondensate in der jeweils stabilen Phase dargestellt, das nichtseltsame σ (grüne kurze Striche), das seltsame ζ (blaue Punkte) und das Gluonkondensat χ (rote Striche), jeweils normiert auf den Vakuumwert. Man sieht deutlich die beiden chiralen Phasenübergänge bei $T \approx 165$ MeV (Sprung in σ) und $T \approx 180$ MeV (Sprung in ζ), welche nur geringen Einfluss auf χ haben. Erst bei $T_{\text{P.T.}}$ springt das Gluonkondensat, zusammen mit den beiden chiralen Kondensaten, auf Null: Hier ist die totale Restauration der Skaleninvarianz und der chiralen Symmetrie erreicht.

mit gebrochener Skaleninvarianz (kurze schwarze Striche, 'broken') dargestellt, in der das Gluonkondensat groß ist und die chiralen Kondensate – für hinreichend hohe Temperaturen zwar klein aber – stets ungleich Null sind. Zusätzlich dazu ist der Druck der total restaurierten Phase dargestellt (rosa Striche, 'restored'), in der das Gluonkondensat Null wird und deshalb

auch die chiralen Kondensate ganz verschwinden können, $\sigma = \zeta = \chi = 0$. Ab einer Temperatur $T_{\text{P.T.}} \approx 182$ MeV ist dieser größer als der Druck der skalen-gebrochenen Phase, so dass ab dort die total-restaurierte Phase stabil wird. Wie schon bei den Kondensaten (vorige Abbildung), endet die Druck-Kurve der Phase mit gebrochener Skaleninvarianz bei Temperaturen etwas oberhalb von 200 MeV.

Betrachtet man die Temperaturabhängigkeit der Kondensate in der jeweils stabilen Phase, ergibt sich ein plötzlicher Sprung auf Null bei $T_{\text{P.T.}}$, siehe Abbildung 6.4 unten. Unterhalb von $T_{\text{P.T.}}$ verlaufen die Kondensate wie bereits in Abb. 6.3 gezeigt. Ab der Temperatur $T_{\text{P.T.}}$ ist die total restaurierte Phase stabil und zusammen mit dem Gluonkondensat χ werden jetzt auch die chiralen Kondensate vollständig zu Null. Das ist die totale Restauration: die Restauration der Skaleninvarianz, die gleichzeitig eine vollständige chirale Restauration ermöglicht.

Ein solches Zusammenspiel wurde auch in den eingangs erwähnten Studien [188, 189, 190, 191] diskutiert. Dort wird argumentiert, dass das Verschwinden des Gluonkondensats (Restauration der Skaleninvarianz) immer auch das Verschwinden der chiralen bzw. Quarkkondensate (vollständige chirale Restauration) zur Folge haben muss. Die chirale Restauration kann also entweder vor oder zusammen mit der Restauration der Skaleninvarianz erfolgen, in Übereinstimmung mit unseren obigen Ergebnissen.

Darüber hinaus wird dort das Verschwinden des Gluonkondensats mit dem 'Deconfinement' in Verbindung gebracht.

Effektives Potential von χ

Wenden wir uns nun dem effektiven Potential zu, das zur Parameterwahl (6.3) gehört. Die Abbildung 6.5 zeigt das thermodynamische Potential Ω/V als Funktion von χ für verschiedene Temperaturen (minimiert bzgl. der anderen Felder). Die Lage des Potentialminimums gibt wieder den Wert des Feldes zu gegebenem T an, und der Wert dortige des Potentials entspricht dem negativen Druck, $\Omega/V = -p$.

Unterhalb der Restaurationstemperatur $T_{\text{P.T.}} = 182$ MeV (aus der vorigen Abbildung) liegt das Minimum im Potential bei großen χ -Werten tiefer als bei $\chi = 0$, hier ist die Phase mit gebrochener Skaleninvarianz stabil. Nahe der Restaurationstemperatur (hier $T = 180$ MeV)² liegt das Potentialminimum der gebrochenen Phase auf ähnlicher Höhe wie das Potential bei $\chi = 0$.

²Die kleine Beule im Potential zu $T = 180$ MeV bei $\chi \approx 350$ MeV spiegelt den Crossover in ζ wider, vgl. Abb. 6.3.

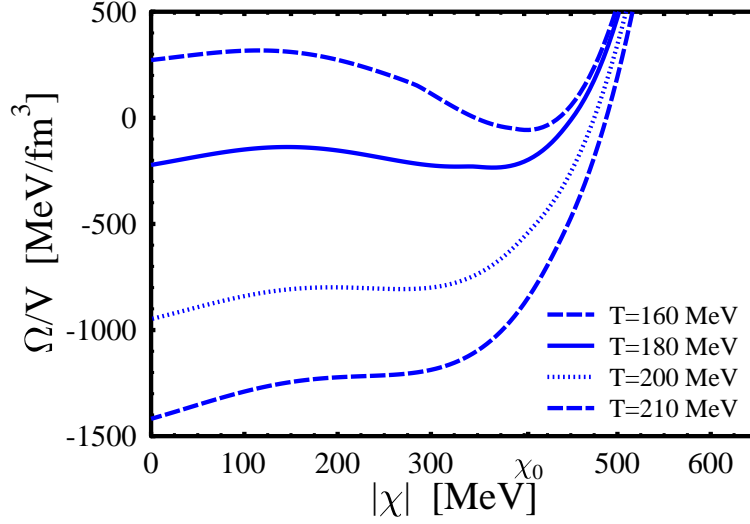


Abbildung 6.5: Potential Ω/V vs. χ zu verschiedenen Temperaturen.

Dargestellt ist das effektive Potential als Funktion des Dilaton-Feldes χ für die Parameterwahl (6.3) ($m_{\text{Dec},\chi_0} = 300$ MeV) zu verschiedenen Temperaturen bei $\mu = 0$. Dabei sind die anderen beiden Kondensate σ und ζ so gewählt, dass das Potential jeweils minimal wird.

Deutlich oberhalb von $T_{\text{P.T.}}$, z.B. bei $T = 200$ MeV, ist das Potential bei $\chi = 0$ schon merklich tiefer als das Potentialminimum der gebrochenen Phase, Letztere ist also nicht mehr stabil.

Wird die Temperatur noch weiter erhöht ($T = 210$ MeV), verschwindet das Minimum bei großen χ , die Phase mit gebrochener Skaleninvarianz hört auf zu existieren. Deshalb enden auch die Kurven der Kondensate in Abb. 6.3 und des Drucks in Abb. 6.4 etwas oberhalb von $T = 200$ MeV.

Bei dem Potentialminimum an der Stelle $\chi = 0$ handelt es sich allerdings nur um ein Randminimum, nicht um ein Extremum im eigentlichen Sinne, denn das Potential hat bei $\chi = 0$ eine endliche Steigung anstatt einer verschwindenden Ableitung.

Die Steigung des Potentials $\partial(\Omega/V)/\partial\chi$ ist für die χ -Werte zu Extrema durch die Feldgleichung von χ (3.32) gegeben (nämlich Null). Für alle anderen χ -Werte wird die Feldgleichung nicht gelöst, sondern gibt die dann endliche Steigung des Potentials $\partial(\Omega/V)/\partial\chi \neq 0$ an.

Bei $\chi = 0$ sind die anderen Skalarfelder ebenfalls Null, $\sigma = \zeta = 0$, und die Steigung ist lediglich durch die baryonischen Skalardichten gegeben, mit der Ableitung der zugehörigen effektiven Massen nach χ als Vorfaktor. Die effektive Dekuplett-Masse mit Dilaton-Kopplung (6.2) führt damit auf die Steigung $g_{\text{Dec},\chi} \rho_{\text{Dec}}^{\text{sc}}$. Sie nimmt mit steigender Temperatur zu, weil dann die Skalardichten der Dekuplett-Baryonen zunehmen.

Betrachten wir zur Vervollständigung auch das Potential auf der negativen χ -Achse, wie in Abb. 6.6 dargestellt. Das tiefere, im mathematischen

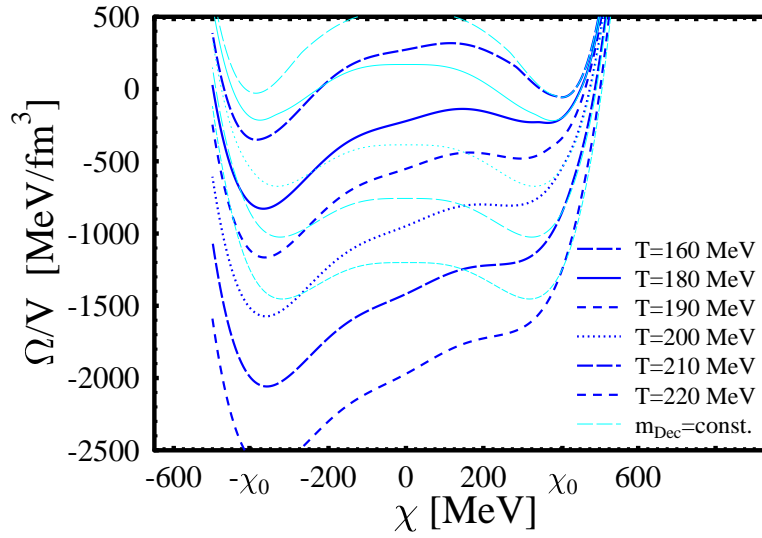


Abbildung 6.6: Potential Ω/V vs. χ mit und ohne Dilaton-Kopplung.

Das effektive Potential als Funktion von χ ist dargestellt zu verschiedenen Temperaturen bei $\mu = 0$ mit dicken blauen Linien für die Parameterwahl (6.3) ($m_{\text{Dec},\chi_0} = 300$ MeV, wie in der vorigen Abbildung) und mit dünnen hellblauen Linien für einen konstanten Massenterm gleicher Größe ohne Dilaton-Kopplung ($m_{\text{Dec}} = 300$ MeV). Die Kondensate σ und ζ sind so gewählt, dass das Potential jeweils minimal wird.

Seine stabile Minimum liegt jeweils bei negativen Werten nahe $\chi = -\chi_0$, auch schon bei Temperaturen von 160 MeV.

Zum Vergleich ist in Abb. 6.6 mit dünnen, hellblauen Linien zusätzlich das Potential dargestellt für einen konstanten Massenterm gleicher Größe, $m_{\text{Dec}} = 300$ MeV, wie in Abschnitt 6.1 untersucht. Dieses Potential hat bei

$\chi = 0$ keine Steigung, aber es liegt dort stets deutlich über dem Minimum der gebrochenen Phase. Auch liegt das Minimum zu negativen χ bei nicht zu hohen Temperaturen (bei $T = 160$ MeV gerade noch zu erkennen) oberhalb des zugehörigen Minimums zu positiven χ , so dass Letzteres das globale Minimum ist. Der Grund dafür ist der in χ lineare Term $k_3 \chi \sigma^2 \zeta$ aus dem Potentialterm \mathcal{L}_0 (3.4). Für höhere Temperaturen werden die chiralen Kondensate σ und ζ sehr klein, so dass der k_3 -Term kaum noch beiträgt und die Minima nahezu entartet sind. Die Phase mit gebrochener Skaleninvarianz bleibt hier also für alle Temperaturen stabil.

Subtraktive Beiträge zur effektiven Masse

Es ist nun interessant zu klären, woher das – vom mathematischen Standpunkt aus gesehen stabile – Minimum bei negativen χ kommt. Die effektive Masse der Resonanzen (6.2) setzt sich zusammen aus den Beiträgen der Kondensate χ , σ und ζ . Wird nun χ negativ, hebt dieser Anteil die Beiträge der chiralen Kondensate teilweise auf und die Massen der Resonanzen werden sehr klein. Dadurch können sie vermehrt gebildet werden und erzeugen so auch einen größeren Druck, was einem niedrigeren Potentialminimum entspricht.

Wir sind hier auf ein Grundsatzproblem gestoßen, auf das hier aufmerksam gemacht werden soll. Dieses Problem kann bei *dynamisch* generierten Massen auftreten, wenn sich die Massen aus den Beiträgen mehrerer Kondensate zusammensetzen: *Lineare Beiträge können sich bei Vorzeichenwechsel der Kondensate kompensieren und zu unphysikalischen bzw. ungewünschten Massenabsenkungen führen.* In Abschnitt 6.4 soll dieser Zusammenhang noch ausführlicher diskutiert werden.

Fürs Erste behelfen wir uns damit, den ungewünschten Bereich auszublenden, und beschränken uns auf positive χ -Werte. Mathematisch kann dies erreicht werden, indem wir in der effektiven Masse (6.2) an Stelle von χ dessen Betrag $|\chi|$ setzen. (In der Abb. 6.5 wurde dies durch eine entsprechende Beschriftung der x -Achse schon vorweggenommen.) Die Ableitung des Potentials im Punkt $\chi = 0$ ist dann nicht eindeutig definiert. Sie kann deshalb ebenso gut als verschwindend angenommen werden, wodurch dort ein Minimum *definiert* wird. Zwar haben wir dadurch kein echtes Minimum bei $\chi = 0$ gewonnen, aber wir stoppen die Betrachtung an diesem Punkt, weil die Zusammensetzung der effektiven Masse für negative χ nicht sinnvoll ist.

Verschiedene Kopplungsstärken: Kondensate vs. T

Es soll nun untersucht werden, wie sich verschiedene Kopplungsstärken der Dekuplett-Dilaton-Kopplung $g_{\text{Dec},\chi}$ auswirken. Wir beschränken uns jetzt nicht mehr auf die Festlegung (6.3) sondern lassen auch Parameter zu, die jenseits der Massenaufspaltung von Nukleon und Δ -Resonanz liegen.

In den Abbildungen 6.7 sind die Kondensate in der Phase mit gebrochener Skaleninvarianz als Funktion der Temperatur dargestellt, im oberen Bild für eine Kopplungsstärke von $m_{\text{Dec},\chi_0} = g_{\text{Dec},\chi} \chi_0 = 500$ MeV (bei $m_{\text{Dec}} = 0$) und im unteren Bild für $m_{\text{Dec},\chi_0} = g_{\text{Dec},\chi} \chi_0 = 700$ MeV (bei $m_{\text{Dec}} = 0$). Mit dünnen Linien sind zum Vergleich jeweils die Kondensate für einen entsprechend großen konstanten expliziten Massenterm gezeigt, also oben für $m_{\text{Dec}} = 500$ MeV (bei $g_{\text{Dec},\chi} = 0$) und unten für $m_{\text{Dec}} = 700$ MeV (bei $g_{\text{Dec},\chi} = 0$).

Die Unterschiede zwischen dicken und dünnen Linien sind – wie schon für $m_{\text{Dec},\chi_0} = 300$ MeV bzw. $m_{\text{Dec}} = 300$ MeV in Abb. 6.3 – gering bei σ und etwas deutlicher bei ζ . Wieder verhalten sich die Kondensate mit Dilaton-Kopplung tendenziell attraktiver als mit konstantem Massenterm.

Da das χ -Feld innerhalb der Phase mit gebrochener Skaleninvarianz nicht stark von seinem Vakuumwartungswert abweicht, wirkt die Dilaton-Kopplung hier ähnlich wie ein konstanter Massenterm von entsprechender Größe. Demzufolge hat eine stärkere Dilaton-Kopplung eine schwächere skalare Attraktion zur Folge, in Analogie zu den Ergebnissen aus Kapitel 4. Die Crossover in σ und ζ werden deshalb stärker abgeschwächt durch größere m_{Dec,χ_0} . Bei schwächerer Attraktion fällt auch das χ langsamer ab mit zunehmender Temperatur, und die Unterschiede zwischen Dilaton-Kopplung und konstantem Massenterm sind bei gleicher Temperatur kleiner, wie in den Abb. 6.7 von oben nach unten zu erkennen ist.

Die Linien der Kondensate zur Dilaton-Kopplung enden wieder bei bestimmten Temperaturen: bei $T \approx 195$ MeV für $m_{\text{Dec},\chi_0} = 500$ MeV und bei $T \approx 205$ MeV für $m_{\text{Dec},\chi_0} = 700$ MeV. Dies sind die jeweiligen Spinodal-Temperaturen, wo die Phase mit gebrochener Skaleninvarianz aufhört zu existieren.

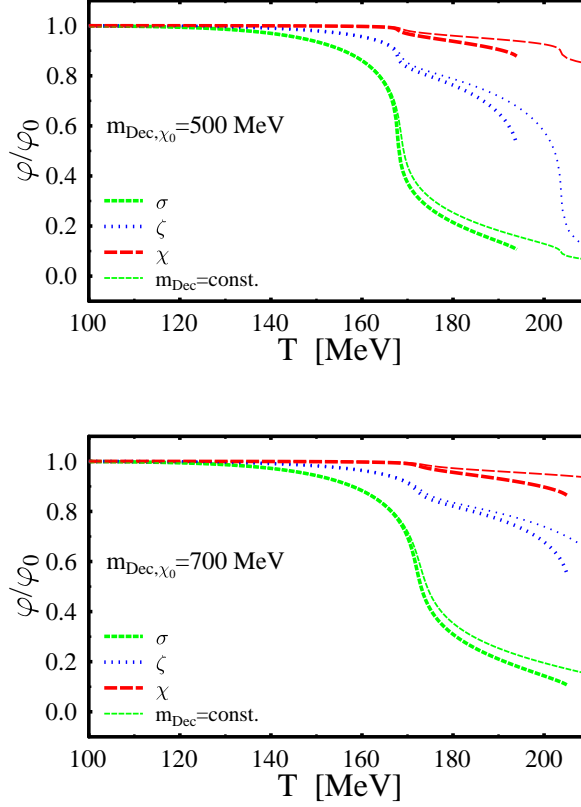


Abbildung 6.7: Kondensate vs. Temperatur für verschiedene Kopplungsstärken.

Die dicken Linien zeigen die (normierten) Kondensate σ , ζ und χ in Abhängigkeit von der Temperatur bei $\mu = 0$ für weitere Stärken der Dekuplett- χ -Kopplung, oben für $m_{\text{Dec},\chi_0} = 500$ MeV und unten für $m_{\text{Dec},\chi_0} = 700$ MeV. Im Vergleich dazu sind die Kondensate ohne χ -Kopplung aber dafür mit entsprechend großem konstantem Massenterm (oben $m_{\text{Dec}} = 500$ MeV und unten $m_{\text{Dec}} = 700$ MeV) jeweils mit dünnen Linien dargestellt.

Totale Restauration für verschiedene Kopplungsstärken: Druck vs. Temperatur

Wie wir gesehen haben, hat die Stärke der Dekuplett-Dilaton-Kopplung für die Phase mit gebrochener Skaleninvarianz also den bereits vertrauten Einfluss, sie reduziert die Attraktion ähnlich wie ein konstanter Massenterm. Allerdings kann die Dilaton-Kopplungsstärke auf die Phase mit restaurierter Skaleninvarianz keinen Einfluss haben, denn für $\chi = 0$ verschwinden die Beiträge durch die Kopplung $g_{\text{Dec},\chi}$, unabhängig davon, wie groß der Wert m_{Dec,χ_0} im Vakuum ist.

Für die Temperaturabhängigkeit des Drucks bedeutet dies, dass die Druck-Kurve zur restaurierten Phase für alle Kopplungsstärken gleich sein muss, wie in Abb. 6.8 mit der dünnen durchgezogenen rosa Linie ('restored') dargestellt ist.

Die dicken schwarzen Linien in Abb. 6.8 geben den Druck der Phase mit gebrochener Skaleninvarianz ('broken') an. Je stärker die Kopplung bzw. je größer der Wert m_{Dec,χ_0} ist, umso langsamer steigt der Druck an, aufgrund der verminderten Attraktion. Dadurch verschiebt sich der Schnittpunkt dieser Kurve mit der Druck-Kurve der restaurierten Phase umgekehrt zu niedrigeren Temperaturen, d.h. die totale Restauration (vgl. Diskussion zu Abb. 6.4) findet umso früher statt.

Wir erhalten also für die totale Restauration gerade das *umgekehrte Verhalten* zu demjenigen für die chiralen Phasenübergänge bzw. Crossover: *Je schwächer die Attraktion, desto früher findet der Phasenübergang zur totalen Restauration statt.* Wie man sich an den Abbildungen 6.7 klar machen kann, ist dieser Phasenübergang dann auch *umso stärker*. Denn der Sprung auf restaurierte Werte $\sigma = \zeta = \chi = 0$ ist aus zwei Gründen größer, wenn die Attraktion schwächer bzw. die Kopplung stärker ist: Zum einen findet der Phasenübergang dann bei niedrigeren Temperaturen statt, wo die Kondensate noch nicht so stark abgefallen sind, und zum anderen haben die Kondensate bei gleicher Temperatur zusätzlich noch größere Werte.

Wie in der vorigen Abbildung, sieht man auch hier in Abb. 6.8 das Verschwinden der Phase mit gebrochener Skaleninvarianz, die Druck-Kurven zu $m_{\text{Dec},\chi_0} > 0$ enden bei den jeweiligen Spinodal-Temperaturen.

Anhand der Abbildung 6.8 kann man grob abschätzen, dass für Kopplungsstärken deutlich kleiner als $m_{\text{Dec},\chi_0} = 300$ MeV der Schnitt der Druck-Kurven erst bei sehr hohen Temperaturen, $T > 180$ MeV, auftreten wird. Wie bereits bei der Diskussion zu Abb. 6.5 erwähnt, führt die Dilaton-Kopplung zu einem Beitrag für die Steigung des Potentials $g_{\text{Dec},\chi} \rho_{\text{Dec}}^{\text{sc}}$. Dieser Beitrag kippt das Potential sozusagen zu negativen χ hin, und zwar umso stärker, je

größer die Kopplungsstärke $g_{\text{Dec},\chi}$ ist, aber auch je höher die Temperatur ist (wegen der Proportionalität zur Skaldichte der Dekuplett-Baryonen $\rho_{\text{Dec}}^{\text{sc}}$).

Bei verschwindender Kopplung, $m_{\text{Dec},\chi_0} = g_{\text{Dec},\chi} = 0$, bleibt das Potential 'ungekippt' und der Potentialwert bei $\chi = 0$ (Druck der restaurierten Phase) bleibt immer über dem Wert im Minimum. Deshalb schneiden sich die Druck-Kurven hier nie, auch nicht bei extrem hohen Temperaturen.

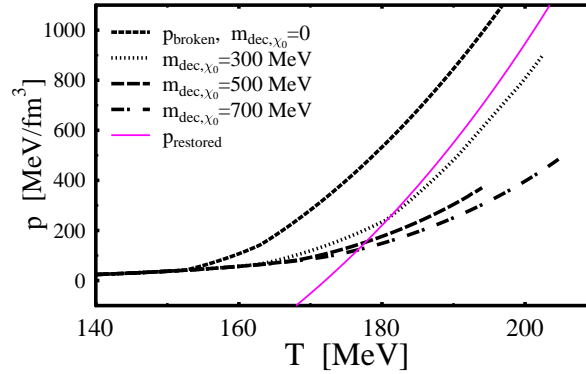


Abbildung 6.8: Druck vs. Temperatur für verschiedene χ -Kopplungen.

Dargestellt ist der Druck in Abhängigkeit von der Temperatur bei $\mu = 0$. Die dicken schwarzen Linien zeigen den Druck in der Phase mit gebrochener Skaleninvarianz für (von links nach rechts) abnehmende skalare σ -Kopplungen bzw. zunehmende χ -Kopplungen, $m_{\text{Dec},\chi_0} = 0, 300, 500$ und 700 MeV. Die dünne rosa Linie zeigt den für alle χ -Kopplungen gleiche Druck in der total restaurierten Phase ($\sigma = \zeta = \chi = 0$). Die Druck-Kurven der gebrochenen Phase zu Kopplungsstärken $m_{\text{Dec},\chi_0} > 300$ MeV schneiden die Kurve der total restaurierten Phase bei $T \approx 180$ MeV, darüber ist dann die letztere Phase stabil.

Druck vs. T ohne Dilaton-Kopplung

Abschließend wollen wir noch einmal ausführlicher untersuchen, was wir soeben beobachtet haben, nämlich dass ohne Dilaton-Kopplung keine totale Restauration stattfindet.

Abbildung 6.9 zeigt den Druck zu verschiedenen großen *konstanten* Massentermen m_{Dec} . Mit dicken schwarzen Strichen ('broken') ist der Druck der Phase mit gebrochener Skaleninvarianz dargestellt. Der Verlauf ist ähnlich wie in der vorigen Abbildung, allerdings enden die Kurven nicht, denn die Phase bleibt auch für hohe Temperaturen bestehen.

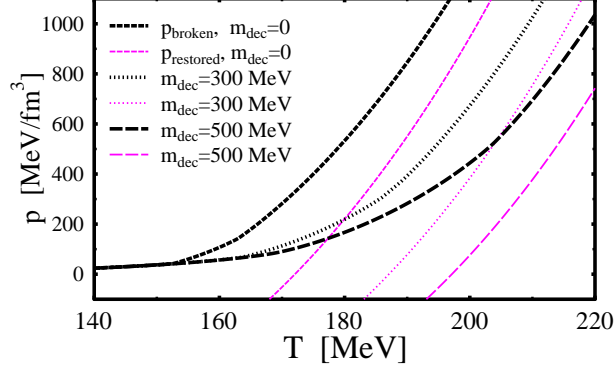


Abbildung 6.9: Vergleich verschieden großer konstanter Massenterme bei Druck vs. Temperatur.

Die dicken schwarzen Linien zeigen den Druck in Abhängigkeit von der Temperatur bei $\mu = 0$ in der Phase mit gebrochener Skaleninvarianz für (von links nach rechts) abnehmende skalare Kopplung bzw. zunehmende explizite Massenterme: $m_{\text{Dec}} = 0, 300$ und 500 MeV = *const*. Den jeweiligen Druck in der total restaurierten Phase ($\sigma = \zeta = \chi = 0$) zeigen die zugehörigen dünnen rosa Linien. Der Druck der gebrochenen Phase liegt hier jeweils deutlich über dem Druck der restaurierten Phase zu einem Wert von m_{Dec} , so dass sich die Kurven nicht schneiden und somit keine totale Restauration stattfinden kann.

Der Druck zur Phase mit restaurierter Skaleninvarianz, dargestellt mit dünnen rosa Strichen ('restored'), zeigt hingegen ein ganz anderes Verhalten als in der vorigen Abbildung. Im Gegensatz zur Dilaton-Kopplung verschwindet der explizite Massenterm *nicht* bei $\chi = 0$, also in der total-restaurierten Phase. Deshalb ist der Druck dieser Phase ebenso abhängig vom Parameter m_{Dec} wie in der Phase mit gebrochener Skaleninvarianz: In beiden Phasen ist die Repulsion erhöht, wenn der explizite Massenterm größer wird. Somit bleiben die dünnen rosa Linien immer deutlich unterhalb der zugehörigen dicken schwarzen Linien zum gleichen m_{Dec} -Wert, und die Phase mit gebrochener Skaleninvarianz bleibt stets stabil, auch für hohe Temperaturen.

6.3 Quadratische Dilaton-Kopplung

Im vorigen Abschnitt haben wir erörtert, wie – aufgrund der Kopplung des Dilaton-Felds an die Baryonen des Dekupletts – die Phase mit gebrochener Skaleninvarianz bei hohen Temperaturen verschwindet. Allerdings war das Ergebnis insofern sehr unbefriedigend, als dass wir sozusagen *künstlich*

ein Potential-Minimum bei $\chi = 0$ definieren mussten, um die Phase mit restaurierter Skaleninvarianz stabil zu machen. Deshalb wollen wir in diesem Abschnitt nun untersuchen, ob es Formen der Dekuplett-Dilaton-Kopplung gibt, die diese Problematik nicht haben, und wie die zugehörigen Phaseneigenschaften dann aussehen.

Ein nahe liegender Ansatz ist eine quadratische Kopplung. An Stelle des Terms $\mathcal{L}_{\text{Dec},\chi}$ (3.49) setzen wir also eine Erweiterung des Modells der Form

$$\mathcal{L}_{\text{Dec},\chi^2} = -\bar{\psi}_{\text{Dec}} g_{\text{Dec},\chi} \frac{\chi^2}{\chi_0} \psi_{\text{Dec}} \quad (6.4)$$

an.³ Der resultierende Zusatzbeitrag analog $m_{\text{Dec},\chi}$ aus Gl. (6.2) für die effektiven Dekuplett-Massen

$$m_{\text{Dec},\chi^2} = g_{\text{Dec},\chi} \chi^2 / \chi_0 \quad (6.5)$$

ist dann positiv definit und seine Ableitung bei $\chi = 0$ ist stetig. Im Vakuum bzw. für $\chi = \chi_0$ ergibt sich für m_{Dec,χ^2} der Wert $m_{\text{Dec},\chi_0} = g_{\text{Dec},\chi} \chi_0$, wie im linearen Fall.

Mit der quadratischen Dilaton-Kopplung haben wir also eine Kopplungsform gefunden, die die Probleme der vorigen, linearen Kopplung zu lösen scheint.

Effektives Potential bei quadratischer Kopplung

Zuerst wollen wir überprüfen, ob die Erweiterung (6.4) unsere Erwartungen erfüllt und das effektive Potential für hohe Temperaturen tatsächlich ein Minimum bei $\chi = 0$ aufweist.

Das resultierende Potential zu verschiedenen Temperaturen ist in den Abbildungen 6.10 mit dünnen grünen Linien dargestellt (minimiert bzgl. der anderen Felder), wieder für die Parameterwahl (6.3). Zum Vergleich dazu zeigen die entsprechenden dicken blauen Linien jeweils das bereits aus Abb. 6.5 bekannte Potential für lineare Kopplung mit Betrag. Die Unterschiede zwischen beiden Kopplungsvarianten werden erst für ausreichend hohen Temperaturen ($T = 160$ MeV und größer) deutlich. Bei kleineren Temperaturen sind die chiralen Kondensate noch groß und Änderungen in χ haben nur einen

³Allerdings ist der Term $\mathcal{L}_{\text{Dec},\chi^2}$ (6.4) – im Gegensatz zum linearen Ansatz (3.49) – nicht mehr skaleninvariant, denn er hat die Skalendimension 5.

Dadurch ergibt sich analog der Vorschrift (2.47) ein zusätzlicher skalenbrechender Beitrag für die Spur des Energie-Impuls-Tensors. Dieser hängt von der Skalardichte der Dekuplett-Baryonen ab und verschwindet folglich im Vakuum. Dort bleibt das Skalenverhalten des Modells also unbeeinflusst.

geringen Einfluss auf die effektiven Massen der Resonanzen und damit auf die Dynamik des Systems. Insbesondere kommen dadurch unterschiedliche χ -Änderungen kaum zum tragen.

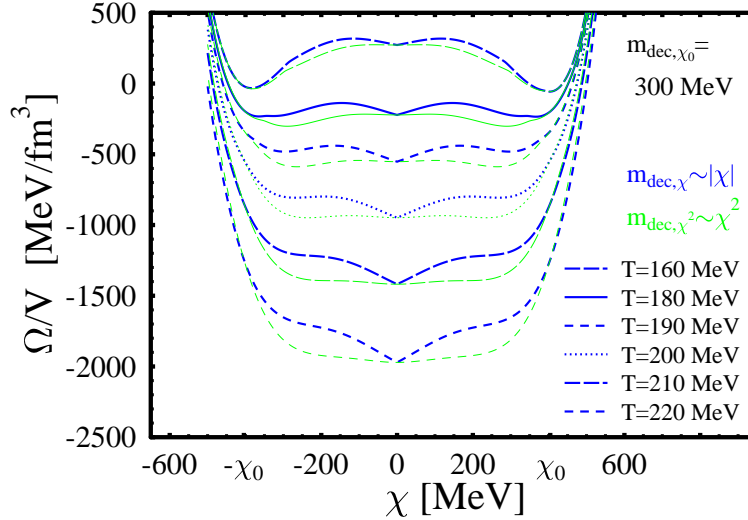


Abbildung 6.10: Potential vs. χ für lineare und quadratische χ -Kopplung.

Dargestellt ist das effektive Potential Ω/V als Funktion von χ zu verschiedenen Temperaturen bei $\mu = 0$. Die quadratische Kopplung für die Parameterwahl (6.3), $m_{\text{Dec},\chi_0} = 300$ MeV, ist mit dünnen grünen Linien dargestellt. Die dicken blauen Linien zeigen die lineare Kopplung mit Betrag für entsprechende Stärke der Kopplung, wie schon in Abb. 6.5. (σ und ζ sind so gewählt, dass das Potential jeweils minimal wird.)

Bei beiden Kopplungsvarianten fallen die Kurven an den Punkten $\chi = 0$ und $\chi = \pm\chi_0$ zusammen, weil dort der Beitrag durch die Dilaton-Kopplung für beide Varianten gleich ist: 0 bzw. m_{Dec,χ_0} .

Die Unterschiede zeigen sich zwischen diesen Punkten, insbesondere in der Ableitung des Potentials, die durch die Feldgleichung von χ (3.32) gegeben ist – wie im vorigen Abschnitt bei Abb. 6.6 diskutiert. Da die Ableitung von m_{Dec,χ^2} (6.5) nun proportional zu χ ist, weist das Potential zur quadratischen Kopplung bei $\chi = 0$ stets eine verschwindende Steigung auf, es liegt dort aber auf dem gleichen Wert wie bei linearer Kopplung. Bei hinreichend hohen Temperaturen kann dort folglich ein Minimum entstehen (sehr schwach ausgeprägt schon bei $T = 180$ MeV, etwas deutlicher zu sehen ab $T = 200$ MeV).

Das Minimum zur gebrochenen Phase liegt bei quadratischer Kopplung tiefer und bei kleineren Werten als bei der linearen Kopplung. Für die Temperaturabhängigkeit des χ -Felds bedeutet das also, dass es mit steigender Temperatur stärker absinkt und die Phase mit gebrochener Skaleninvarianz noch bei höheren Temperaturen stabil bleibt. Die Minima zu restaurierter und gebrochener Phase haben erst bei ca. $T = 200$ MeV die gleiche Tiefe, hier findet die totale Restauration statt. Auch die Spinodal-Temperatur ist hier höher als bei der linearen Kopplung, erst bei ca. $T = 210$ MeV ist das Minimum zur gebrochenen Phase verschwunden.

Insgesamt ist das Potential zur quadratischen Kopplung bei dieser Kopplungsstärke auch merklich flacher als jenes zur linearen Kopplung: die Potentialbarriere zwischen der gebrochenen und der restaurierten Phase ist sehr klein. Das Phasenübergangsverhalten zur totalen Restauration ist hier also nahe an einem Phasenübergang zweiter Ordnung. Dies ändert sich aber mit zunehmender Kopplungsstärke, wie wir bei Abb. 6.12 sehen werden.

Schließlich noch eine qualitative Bemerkung zur Masse des Teilchens, dass mit den Fluktuationen des Dilaton-Felds assoziiert wird, des *Glueballs*.

Die Krümmungen des Potential-Minimums zur gebrochenen Phase stimmen bei niedrigen Temperaturen ($T \approx 160$ MeV) für beide Kopplungsvarianten überein. In der Nähe des Phasenübergangs wird die Krümmung des Potentials zur quadratischen Kopplung aber merklich schneller schwach, die Glueball-Masse wird hier also schneller klein bzw. der Glueball 'schmilzt' früher ein.

Der ganz wesentliche Unterschied zeigt sich aber für die restaurierte Phase bei $\chi = 0$. Während es bei der linearen Kopplung nicht sinnvoll ist, von einer Potential-Krümmung zu sprechen, gilt das sehr wohl für den quadratischen Fall. Hier ist die Krümmung im restaurierten Minimum nahezu verschwindend, der Glueball also fast masselos.

Kondensate vs. T bei quadratischer Kopplung

Nun wollen wir untersuchen, wie sich durch die quadratische Dilaton-Kopplung das Verhalten der Kondensate in der Phase mit gebrochener Skalennvarianz verändert. In der Abbildung 6.11 oben sind zur Orientierung noch einmal die Kondensate zur linearen Dilaton-Kopplung für $m_{\text{Dec},\chi_0} = 300$ MeV mit dicken Linien dargestellt, also genau wie zuvor in der Abb. 6.3. Die Kondensate zur *quadratischen* Dilaton-Kopplung entsprechender Stärke (ebenso $m_{\text{Dec},\chi_0} = 300$ MeV) sind mit dünnen Linien angegeben.

Die Unterschiede zur linearen Kopplung sind klein. Der Phasenübergang in σ ist geringfügig verstärkt und fast unverschoben. Der Phasenübergang in ζ ist ebenfalls etwas verstärkt, findet aber schon bei etwas niedrigeren Temperaturen statt. Dadurch fällt auch χ etwas früher und stärker ab.

Wir erkennen hier also im Verhalten von χ wieder, was wir schon bei der vorgehenden Diskussion zum Potential gesehen haben, einschließlich der Tatsache, dass die spinodalen Endpunkte bei quadratischer Kopplung bei höheren Temperaturen liegen als im linearen Fall.

Der Verlauf der Kondensate bei stärkerer Dilaton-Kopplung ist in der Abbildung 6.11 unten dargestellt, für $m_{\text{Dec},\chi_0} = 500$ MeV. Wie gehabt zeigen dicke Linien den linearen und dünne Linien den quadratischen Fall. Die Unterschiede zwischen beiden Kopplungsvarianten sind auch hier klein. Aufgrund der Stärke der Kopplung und der damit verbundenen verminderten skalaren Attraktivität fallen hier beide chirale Kondensate mit einem Cross-over ab, im quadratischen Fall jeweils etwas stärker und früher als im linearen Fall.

Die spinodalen Endpunkte zur quadratischen Kopplung liegen hier bei niedrigeren Temperaturen als bei der linearen, im Gegensatz zur oberen Abbildung 6.11 mit $m_{\text{Dec},\chi_0} = 300$ MeV.

Zusammenfassend sind die Änderungen durch die quadratische Dilaton-Kopplung in den Kondensaten der gebrochenen Phase gering und ändern das Verhalten nicht wesentlich. Die quadratische Kopplung verhält sich insgesamt etwas attraktiver als die lineare, deutlich wird dies aber wieder erst bei merklich abgesenkten χ -Werten.

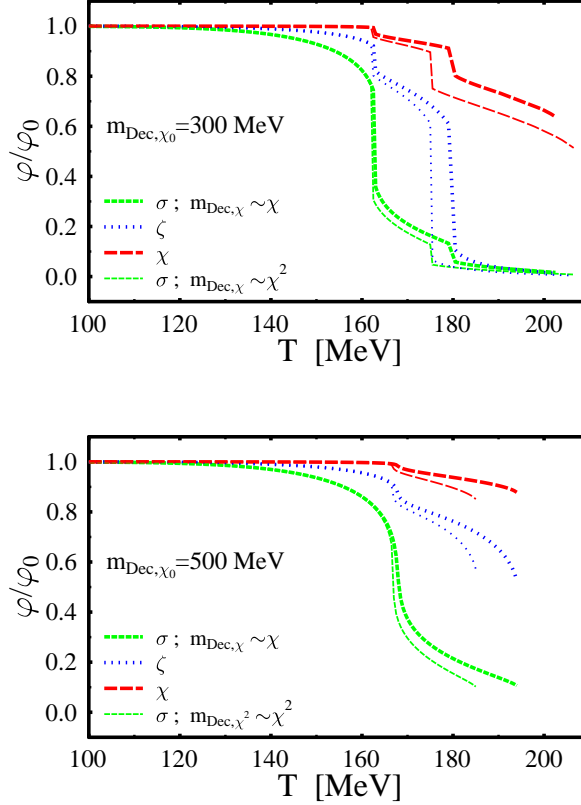


Abbildung 6.11: Kondensate vs. Temperatur für lineare und quadratische Dilaton-Kopplung verschiedener Stärke.

Die dicken Linien zeigen die (normierten) Kondensate σ , ζ und χ in Abhängigkeit von der Temperatur bei $\mu = 0$ für zwei Stärken linearer Dekuplett- χ -Kopplung, oben mit $m_{\text{Dec},\chi_0} = 300$ MeV (entsprechend Abb. 6.3) und unten mit $m_{\text{Dec},\chi_0} = 500$ MeV (entsprechend Abb. 6.7 oben). Im Vergleich dazu sind die Felder mit entsprechend großer quadratischer χ -Kopplung jeweils mit dünnen Linien dargestellt.

Druck vs. T bei quadratischer Kopplung

Abschließend soll noch die Auswirkungen der quadratischen Dilaton-Kopplung auf den Druck und damit auf die totale Restauration untersucht werden. Die Abbildung 6.12 zeigt die Temperaturabhängigkeit des Drucks zu verschiedenen Kopplungsstärken und für die quadratische sowie die lineare Kopplung zusammen, um einen besseren Vergleich zu ermöglichen.

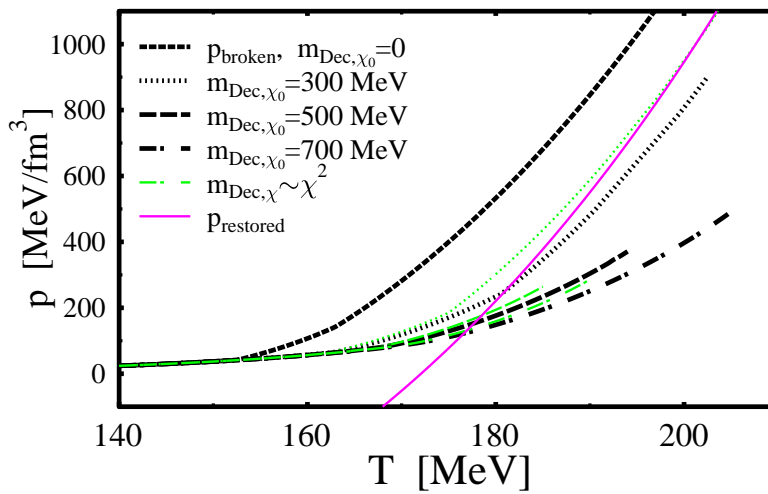


Abbildung 6.12: Druck vs. Temperatur für lineare und quadratische Dilaton-Kopplung verschiedener Stärke.

Dargestellt ist der Druck als Funktion der Temperatur bei $\mu = 0$ zu linearer und quadratischer χ -Kopplung. Die dünnen grünen Linien zeigen den Druck in der Phase mit gebrochener Skaleninvarianz zu quadratischer χ -Kopplung für (von links nach rechts) abnehmende skalare σ -Kopplung bzw. zunehmende χ -Kopplung, $m_{\text{Dec},\chi_0} = 0, 300, 500$ und 700 MeV. Zum Vergleich zeigen die dicken schwarzen Linien wieder den Druck in der gebrochenen Phase zu linearer χ -Kopplung entsprechender Stärke. Und die durchgezogene dünne rosa Linie gibt den für alle χ -Kopplungen gleichen Druck in der total-restaurierten Phase ($\sigma = \zeta = \chi = 0$) an.

Die Druck-Kurven der Phase mit gebrochener Skaleninvarianz für die lineare Kopplung sind mit dicken schwarzen Strichen ('broken') dargestellt, genau wie zuvor in Abb. 6.8. Und die entsprechenden dünnen grünen Striche zeigen die jeweiligen Druck-Kurven für die quadratische Kopplung. Der Druck der total restaurierten Phase ('restored') ist für alle Stärken und auch für beide Arten der Dilaton-Kopplung gleich, wieder dargestellt mit

der durchgezogenen dünnen rosa Linie.

Wie schon bei den Kondensaten sind die Unterschiede zwischen linearer und der quadratischer Kopplung in der gebrochenen Phase gering. Sie treten erst ab Temperaturen oberhalb von $T = 160$ MeV auf, weil sich das Gluonkondensat davor noch nicht abgesenkt hat.

Da sich die quadratische Kopplung etwas attraktiver verhält, liegen die Druck-Kurven jeweils oberhalb der Kurven zur linearen Kopplung. Dies führt dazu, dass die Schnittpunkte mit der restaurierten Druck-Kurve bei höheren Temperaturen liegen.

Speziell bei $m_{\text{Dec},\chi_0} = 300$ MeV hat der Druck der gebrochenen Phase zur linearen Kopplung im Schnittbereich eine nur wenig geringere Steigung als der restaurierte Druck. Mit der quadratischen Kopplung steigt der Druck der gebrochenen Phase in diesem Bereich nun noch etwas stärker. Dadurch verschiebt sich der Schnittpunkt mit dem restaurierten Druck vergleichsweise weit, die totale Restauration findet in diesem Fall erst bei $T \approx 200$ MeV statt, anstelle von $T \approx 180$ MeV wie im linearen Fall. Auch ist der Schnittwinkel sehr spitz, was auf einen *schwachen* Phasenübergang erster Ordnung hindeutet. Dies entspricht den Beobachtungen, die wir schon anhand des Potentials in Abb. 6.10 gemacht haben.

Bei den anderen Kopplungsstärken, $m_{\text{Dec},\chi_0} = 500$ MeV und 700 MeV, verschieben sich die Schnittpunkte kaum, die totale Restauration bleibt hier im Bereich von $T \approx 180$ MeV. Da die Schnittwinkel mit der Kurve des restaurierten Drucks hier größer sind, bleibt es in diesen Fällen bei einem starken Phasenübergang erster Ordnung.

Selbst bei starker quadratischer Dilaton-Kopplung ($m_{\text{Dec},\chi_0} \approx 500$ und 700 MeV) findet die Restauration der Skaleninvarianz bei Temperaturen oberhalb von $T \approx 175$ MeV statt, so dass sie auch hier erst *nach der chiralen* Restauration in σ eintritt, vergleiche die Abbildung 6.11 unten für $m_{\text{Dec},\chi_0} = 500$ MeV mit einem Phasenübergang in σ unterhalb von $T = 170$ MeV.

Auch bei der quadratischen Kopplung hört die gebrochene Phase bei bestimmten Temperaturen auf zu existieren und verschwindet. Die Druck-Kurven enden wieder abrupt bei den jeweiligen Spinodal-Temperaturen.

Die wesentliche Änderung, die die quadratische Kopplung mit sich bringt, ist im Druck nicht sichtbar, denn sie bezieht sich ja nur auf die Form des Potentials bei $\chi = 0$ nicht auf den dortigen Potentialwert, welcher den Druck angibt. Der Druck der restaurierten Phase ist deshalb bei beiden Kopplungsarten der selbe.

6.4 Subtraktive Beiträge zu dynamisch generierten Massen

In diesem Abschnitt wollen wir auf das bereits angesprochene Problem eingehen, dass sich einzelne Beiträge von dynamisch generierten Massen unter gewissen Umständen gegenseitig aufheben können, denn diese Problematik wurde in der Literatur bisher offenbar noch nicht diskutiert.

Die effektiven Massen der Dekuplett-Baryonen werden in unserem Modell dynamisch generiert durch die beiden chiralen Kondensate σ und ζ und das Gluonkondensat χ . Schematisch lautet die Massenformel mit linearer Dilaton-Kopplung

$$m_i^* = m_{\text{Dec}} + g_{\text{Dec},\chi} \chi + g_{i,\sigma} \sigma + g_{i,\zeta} \zeta + m_{0,i} , \quad (6.6)$$

mit $i = \Delta, \Sigma^*, \Xi^*, \Omega$, wie bereits in Gl. (6.2) notiert.

Bei der Diskussion zur Abbildung 6.6 haben wir festgestellt, dass – bei ausreichend hohen Temperaturen – der tiefste Punkt des Potentials bei negativen Werten von χ liegt. In diesem Bereich heben die negativen Beiträge durch χ dann gerade die positiven Beiträge durch σ und ζ auf, so dass die obige effektive Masse m_i^* klein wird. Dadurch können die Teilchen-Antiteilchen-Paare leicht produziert werden, die Skalardichten steigen, und mit ihnen steigt der Druck.

Bei den Studien zu dieser Arbeit ist dieses Phänomen noch an einer anderen Stelle aufgetreten. Untersucht man nämlich das effektive Potential Ω/V als Funktion von σ und ζ bei fixiertem χ , kann das absolute Potentialminimum in einem Bereich liegen, wo die beiden Kondensate σ und ζ nicht mehr ihr ursprüngliches Vorzeichen haben. Bei gegensätzlichem Vorzeichen heben sich die Beiträge durch σ und ζ dann gegenseitig auf und bei umgekehrtem Vorzeichen für beide werden konstante Massenbeiträge – wie durch $m_{0,i}$ aus δm (3.20) – kompensiert.

Deshalb wurden bei den Berechnungen für diese Arbeit die beiden chiralen Kondensate σ und ζ durch ihre *Beträge* ersetzt, um solche Vorzeichenwechsel zu verhindern. Diese Einschränkung hat aber nur in dem Fall $\chi = 0$ eine Auswirkung, wo der Term $\propto \chi^4 \ln[\sigma^2 \zeta / \sigma_0^2 \zeta_0]$ in \mathcal{L}_0 (3.4) aufgrund des Vorfaktors χ^4 verschwindet. Solange $\chi \neq 0$ gilt, verhindert der logarithmische Beitrag ohnehin, dass die Kondensate Null werden oder gar ihr Vorzeichen wechseln.

Kapitel 7

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurden die thermodynamischen Eigenschaften von hadronischer, also stark wechselwirkender, Materie und die mikroskopischen Medium-Eigenschaften von Hadronen bei hohen Temperaturen und hohen Baryonen-Dichten untersucht.

Die Grundlage für diese Untersuchungen bildet ein hadronisches chirales $SU(3)_L \times SU(3)_R$ -Modell, kurz das *chirale Modell*, ein relativistisches feldtheoretisches Modell mit Baryonen und Mesonen als effektiven Freiheitsgraden. Bei dem verwendeten chiralen Modell handelt es sich um ein erweitertes σ - ω -Modell, die Wechselwirkung zwischen den Hadronen wird durch skalare und vektorielle Felder induziert. Das Modell basiert auf der chiralen $SU(3)$ -Flavor-Symmetrie (in nichtlinearer Realisierung) und auf der Skaleninvarianz – beide Symmetrien sind sowohl spontan als auch explizit gebrochen, analog der Symmetrie-Eigenschaften des QCD-Lagrangians. Das vollständige Modell enthält die niedrigsten chiralen $SU(3)$ -Multipletts der Mesonen und Baryonen. In der vorliegenden Arbeit wird die Wechselwirkung zwischen den Hadronen in der Mittleren-Feld-Näherung (*Mean-Field*) behandelt.

Als effektives Modell stellt es einen komplementären Ansatz zur Gitter-QCD dar, bei welcher der volle QCD-Lagrangian mit numerischen Methoden auf dem Gitter gelöst wird.

In vorgehenden Arbeiten wurde gezeigt, dass dieses Modell eine gute Beschreibung u.a. von hadronischen Massen im Vakuum, der Eigenschaften von Kernmaterie im Grundzustand und endlichen Kernen, der Struktur rotierender Neutronensterne sowie von verschiedenen Observablen aus Schwerionen-Kollisionen ermöglicht.

Außerdem tritt bei hohen Temperaturen und/oder großen baryochemischen Potentialen bzw. Baryondichten ein Übergang zu einer näherungsweise chiral restaurierten Phase auf, wobei die Art und die Eigenschaften

dieses Phasenübergangs stark von der Ankopplung zusätzlicher baryonischer Freiheitsgrade abhängt. Solche schweren hadronischen Freiheitsgrade mit großer (und mit der Masse zunehmender) Entartung werden *Resonanzen* genannt. Unter bestimmten Umständen kann dabei die Phase mit normaler Kernmaterie instabil werden, und stattdessen wird ein Dichte-Isomer der stabile Zustand bei verschwindender Temperatur.

Der Gegenstand dieser Arbeit ist zum einen die systematische Untersuchung des Einflusses baryonischer Resonanzen auf den chiralen Phasenübergang und auf die Restauration der Skaleninvarianz im Rahmen des Modells. Zum andern wird der daraus resultierende Einfluss auf experimentelle Observablen, wie z.B. hadronische Teilchenzahlverhältnisse, untersucht.

Im ersten Kapitel wurde zunächst in den Themenbereich der starken Wechselwirkung eingeführt und die Arbeit in diesem Bereich eingeordnet, wonach die Problemstellung motiviert werden konnte.

In Kapitel 2 dieser Arbeit wurden dann die theoretischen Grundlagen des chiralen Modells zusammengefasst: Die chirale Symmetrie in der linearen und in der nichtlinearen Realisierung für $SU(2)$ und $SU(3)$, sowie die Skaleninvarianz einschließlich der effektiven Modellierung der Spur-Anomalie des Energie-Impuls-Tensors in der QCD mit Hilfe des Dilaton-Felds (Gluonkondensat).

Das eigentliche Modell mit seinem Lagrangean und dessen verschiedenen Bestandteilen wurde in Kapitel 3 vorgestellt. Außerdem wurden dort die Erweiterungen des Lagrangeans eingeführt, mit deren Hilfe das Phasenübergangsverhalten des chiralen Modells in dieser Arbeit untersucht wurde.

Untersuchung des Phasenübergangsverhaltens

Im Ergebnisteil wurde in Kapitel 4 zuerst der Einfluss von schweren hadronischen Zuständen auf das Phasenübergangsverhalten des chiralen Modells untersucht. Dazu wurde das chirale Modell durch Ankopplung des niedrigsten baryonischen Dekupletts erweitert und der Einfluss der skalaren und vektorialen Ankopplung untersucht. Es ergibt sich eine vergleichsweise große Vielfalt an resultierenden Phasendiagrammen, wobei die Forderung nach stabiler Kernmaterie einerseits und andererseits nach einer Struktur in Übereinstimmung zu Vorhersagen aus der Gitter-QCD die Kopplungsparameter stark einschränken. Für gewisse Kombinationen an Kopplungsparametern ergeben sich Phasendiagramme in qualitativer Übereinstimmung mit aktuellen Gitter-QCD-Vorhersagen [84, 85] und einem Endpunkt der Phasenübergangslinie im μ - T -Diagramm bei ähnlicher Temperatur – im Gegensatz zu

anderen Modellen, bei denen keine Resonanzen angekoppelt sind, und aus denen typischerweise Endpunkte mit wesentlich niedrigeren Temperaturen resultieren. Jedoch lassen diese Parameterkombinationen des chiralen Modells nicht gleichzeitig eine Beschreibung von normaler Kernmaterie im Grundzustand zu.

Dies zeigt, dass die Reproduktion der Eigenschaften von normaler Kernmaterie und eine qualitative Übereinstimmung mit den Gitter-QCD Ergebnissen zum kritischen Endpunkt, wesentlich stärkere Forderungen darstellen, als wenn nur eine dieser Bedingungen erfüllt werden muss. Die meisten Modelle in der Literatur, wie auch das chirale Modell mit Ankopplung des niedrigsten Dekupletts, können diese nicht erfüllen.

Allerdings enthält das niedrigste baryonische Dekuplett nur die leichtesten Repräsentanten des Resonanzspektrums. Um auch den Einfluss der schwereren Zustände zu berücksichtigen, wurde in einer ersten Erweiterung des bisherigen Ansatzes eine schwere Test-Resonanz angekoppelt anstelle des Dekupletts, welche effektiv für das Spektrum der schweren hadronischen Zustände steht. In diesem Ansatz wurden verschiedene Stärken der skalaren und vektorialen Ankopplung sowie unterschiedliche Massen der Test-Resonanz untersucht. Mit einer bestimmten Wahl der Kopplungsparameter und einer hohen Masse der Test-Resonanz resultiert ein Phasendiagramm mit einem Endpunkt in guter Übereinstimmung mit aktuellen Gitter-QCD-Vorhersagen [84, 85], bei gleichzeitig guter Beschreibung von normaler Kernmaterie. Dieser Erfolg zeigt die *Wichtigkeit der schweren hadronischen Zustände bei der Modellierung des QCD-Phasendiagramms*.

Als spezielle Eigenschaft dieser Zustandsgleichung zeigte sich für die latente Wärme ein nichtmonotones (entlang des Phasenübergangs) Verhalten, anstelle des erwarteten kontinuierlichen Anstiegs. In drastischerer Form war dies bereits bei den Phasendiagrammen mit angekoppeltem Dekuplett gefunden worden: Phasendiagramme mit unterbrochener kritischer Linie im Bereich mittlerer Temperatur und chemischem Potential.

Diese Zustandsgleichung wurde dann anhand von Isentropen, d.h. Pfade einer adiabatischen Expansion, wie sie näherungsweise in der Ausdehnungsphase nach einer Schwerionen-Kollision erwartet wird, mit Einschuss-Energien im Bereich der geplanten GSI-FAIR-Beschleunigeranlage an der GSI Darmstadt verknüpft. Im Rahmen der Modellannahmen konnte so abgeschätzt werden, dass der Phasenübergangsbereich dieser Zustandsgleichung für CBM (und damit auch innerhalb des geplanten niedrig-Energie-Projekts am RHIC/BNL) experimentell zugänglich sein sollte, möglicherweise sogar der kritische Endpunkt.

Untersuchung experimenteller Observablen

In Kapitel 5 wurden Vorhersagen des chiralen Modells zu experimentellen Observablen untersucht. Es wurden mehrere Zustandsgleichungen mit verschiedenen Phasendiagrammen aufgrund unterschiedlicher Ankopplung des Dekupletts, sowie ein ideales Hadronengas zum Vergleich, verwendet um Teilchenzahlverhältnisse aus Schwerionen-Kollisionen von AGS, SPS und RHIC zu beschreiben.

Zunächst wurde an einem Beispiel demonstriert, dass die Auswahl der Verhältnisbildung – bei gegebenen Teilchenmultiplizitäten – einen großen Einfluss auf die Ausfrierparameter (Temperatur T und chemisches Potential μ) und auf die Beschreibungsqualität hat. Aus diesem Grund wurden nach Möglichkeit die Verhältnisse zur Multiplizität der Pionen gebildet, was einer direkten Untersuchung von Teilchenmultiplizitäten am nächsten kommt, aber trotzdem Volumeneffekte minimiert.

Für die experimentellen Daten von AGS bis RHIC ergab sich eine ähnliche Systematik der Ausfrierparameter und der Beschreibungsqualität für das freie Hadronengas und für die verschiedenen Parametersätze des chiralen Modells. Im μ - T -Diagramm weichen die Ausfrierpunkte stark von einer Bogenform ('Ausfrierkurve') ab, besonders im SPS-Bereich.

Die Medium-Modifikationen – aufgrund der Wechselwirkung im chiralen Modell – des chemischen Potentials und der Hadronenmassen führen zu veränderten Ausfrierparametern gegenüber dem idealen Hadronengas, als Modell ohne explizite Wechselwirkung. Die Ausfrierpunkte der chiralen Parametersätze liegen bei kleineren Temperaturen und/oder kleineren chemischen Potentialen, besonders in Phasenübergangsnähe.

Bei den beiden RHIC-Datensätzen ergab sich eine ähnlich gute Beschreibung wie im idealen Fall. Bei SPS-158 und 80 ($E_{\text{Lab}}/A = 158$ bzw. 80 GeV) gelingt dagegen weder mit den chiralen Parametersätzen noch mit dem freien Hadronengas eine akzeptable Beschreibung, in Übereinstimmung mit vergleichbaren, unabhängigen Hadronengas-Studien [176] zu diesen experimentellen Daten (4π -Multiplizitäten von NA49). Hier reicht der wechselwirkende Ansatz des chiralen Modells offensichtlich nicht aus für eine wesentliche Verbesserung, und es sind andere Ansätze erforderlich für eine zufriedenstellende Beschreibung, wie die Studien in [136, 155, 177].

Bei AGS-11.6 bis SPS-40 zeigt sich jedoch eine deutlich verbesserte Beschreibung durch die chiralen Parametersätze gegenüber dem idealen Fall, besonders bei SPS-30 und 40, wo mit dem freien Hadronengas keine akzeptable Beschreibung gelingt. Diese Verbesserung ist am stärksten für Parametersätze mit Phasenübergang bei hohen Dichten, aus

denen Phasendiagramme in qualitativer Übereinstimmung mit Gitter-QCD-Vorhersagen resultieren, so dass diese Parametersätze hier favorisiert werden.

Obwohl die Ausfrierparameter der verschiedenen Zustandsgleichungen sich z.T. deutlich unterscheiden, stimmen die Werte der effektiven Massen und des effektiven chemischen Potentials an den einzelnen Ausfrierpunkten vergleichsweise gut überein. Die Abweichungen der effektiven von den Vakuummassen betragen zwischen 5 und 15% und das effektive chemische Potential ist etwa 20% bis 30% kleiner als der ursprüngliche Wert. Dagegen wird die spezifische Entropie S/A am Ausfrierpunkt durch Medium-Effekte offenbar kaum verändert: An den verschiedenen Ausfrierpunkten stimmen die jeweils resultierenden S/A -Werte der chiralen Parametersätze und des freien Hadronengases unerwartet gut überein.

Ferner wurden gebräuchliche Ausfrierkriterien untersucht. Für die zugehörigen Observablen an den Ausfrierpunkten ergaben sich starke Abweichungen vom jeweiligen Literaturwert und starke Fluktuationen um einen Mittelwert. Diese konnten mit den zugrundeliegenden Messdaten von NA49 in Verbindung gebracht werden bzw. mit den daraus resultierenden niedrigeren und fluktuierenden Ausfriertemperaturen, welche sich in den systematischen Abweichungen der Ausfrierpunkte von einer Ausfrierkurve niederschlagen. Vor diesem Hintergrund konnten die effektive Masse (beispielsweise des Nukleons) oder der Wert des σ -Kondensats als *spezifische* Ausfrierkriterien für das chirale Modell vorgeschlagen werden.

Es wurde demonstriert, dass der Verlauf von Expansions-Isentropen zu den Ausfrierpunkten (von AGS bis RHIC) essentiell von der verwendeten Zustandsgleichung bzw. von dem zugehörigen Phasenübergangsverhalten abhängt, ebenso das experimentelle μ - T -Fenster (der Bereich in chemischem Potential und Temperatur), welches einer gegebenen Energie zugeordnet werden kann.

Diese Ergebnisse zeigen, dass Untersuchungen der Expansion durch einen kritischen Endpunkt nur in einem konsistenten Modell sinnvoll sind. Um eine Modellabhängigkeit von Aussagen bzgl. des μ - T -Endpunkts aus der Gitter-QCD eingrenzen zu können, sind deshalb Zustandsgleichungen mit einem Endpunkt entsprechend Gitter-QCD-Vorhersagen erforderlich. Auf einer solchen Basis könnten dann zukünftig Aussagen – etwa über die zugehörige spezifische Entropie oder die notwendige Reaktionsenergie – in Bezug auf den *Endpunkt der jeweiligen Zustandsgleichung* bestimmt und dann solche Aussagen von verschiedenen Zustandsgleichungen untereinander verglichen werden.

Einfluss des Gluonkondensats

Schließlich wurde im sechsten Kapitel der Einfluss eines dynamischen Dilaton-Felds (Gluonkondensat) bei verschwindendem chemischen Potential, $\mu = 0$, untersucht. In vorgehenden Studien wie auch in den Untersuchungen der vorigen Kapitel wurde die Näherung $\chi \equiv \chi_0$ verwendet, d.h. dort wurden keine Abweichungen des Dilaton-Felds von seinem Vakuum Erwartungswert berücksichtigt.

Das Modell wurde dazu um die Kopplung des niedrigsten baryonischen Dekupletts an das Gluonkondensat erweitert, anhand welcher der Einfluss des Dilaton-Felds χ auf das Phasenübergangsverhalten des chiralen Modells studiert werden konnte.

Es zeigte sich, dass durch die Dekuplett-Dilaton-Kopplung die Restauration der Skaleninvarianz möglich wird, welche dann auch die totale Restauration der chiralen Symmetrie mit sich bringt: Die chiralen Kondensate werden exakt zu Null. Beim chiralen Phasenübergang allein – ohne Verschwinden des Gluonkondensats – ist dies nicht möglich (wegen der expliziten Symmetriebrechung und der logarithmischen Terme aufgrund des Skalenverhaltens). Ohne eine solche Kopplung an zusätzliche Freiheitsgrade tritt im chiralen Modell dieser Phasenübergang im Gluonkondensat und die zugehörige totale Restauration nicht auf.

Bei der Betrachtung des effektiven Potentials als Funktion des Dilaton-Felds zeigte sich, dass bei der total restaurierten Phase (an der Stelle $\chi = 0$) nur ein Randminimum vorliegt. Durch Einführen einer quadratischen Dilaton-Kopplung (anstelle einer linearen) an die Resonanzen konnte dieses Problem gelöst werden. Die Phasenübergänge verschieben sich dadurch zu höheren Temperaturen hin, ohne aber das grundsätzliche Verhalten zu verändern.

Bei beiden Kopplungsarten findet die Restauration der Skaleninvarianz stets bei höheren Temperaturen statt als der chirale Phasenübergang im nichtseltsamen σ -Kondensat. In der Phase mit gebrochener Skaleninvarianz zeigen sich deutliche Veränderungen aufgrund der Dekuplett-Dilaton-Kopplung in der Regel erst mit dem chiralen σ -Phasenübergang. Der Bereich zwischen diesen beiden qualitativ verschiedenen Phasenübergängen ist abhängig von der Kopplungsstärke und kann vergleichsweise klein werden (dann nur wenige MeV).

Die hier vorgestellten Erweiterungen des Modells erlauben es auch, den Einfluss des Dilaton-Felds auf das Phasenübergangsverhalten bei endlichen chemischen Potentialen zu untersuchen. Damit kann das Wechselspiel von

chiralem Phasenübergang und Restauration der Skaleninvarianz im Zusammenhang mit der Vektorkopplung studiert werden, insbesondere, ob sich die Phasenübergangsfolge (zuerst chiraler σ -Phasenübergang dann Restauration der Skaleninvarianz) bei endlichen chemische Potentiale ändern kann.

Außerdem wäre es von großem Interesse, zukünftig auch die Oktett-Baryonen an das Dilaton-Feld zu koppeln, was eine essentiell geänderte Massengenerierung der Baryonen im Modell zur Folge hätte.

Schlussfolgerungen

Die Resultate dieser Arbeit zeigen die wichtige Rolle der schweren baryonischen Zustände für die Modellierung des QCD-Phasendiagramms.

In Bezug auf die Vorhersage zum Phasendiagramm aus der Gitter-QCD sind die Ergebnisse vielversprechend, besonders die Modellerweiterung um eine Test-Resonanz zur effektiven Modellierung des Resonanzspektrums, welche ein Phasendiagramm in quantitativer Übereinstimmung zu Ergebnissen aus der Gitter-QCD ermöglicht.

Wie sich in verschiedenen Zusammenhängen gezeigt hat, ist es sehr erstrebenswert, zukünftig das chirale Modell um die Ankopplung des gesamten hadronischen Massenspektrums zu erweitern.

Zum einen lassen die Resultate dieser Arbeit hoffen, dass mit einem solchen Modell eine natürliche und konsistente Beschreibung des QCD-Phasendiagramms gelingt, wie es von Gitter-QCD-Rechnungen vorhergesagt wird. Zum anderen hat sich aber auch die Notwendigkeit einer solchen Zustandsgleichung aus der Untersuchung von Teilchenzahlverhältnissen und isentroper Expansion zu Ausfrierpunkten ergeben. Dort hat sich gezeigt, dass sowohl eine Verknüpfung der Ausfrierpunkte mit dem Phasenübergang einerseits, als auch eine Verknüpfung der isentropen Expansion mit dem Endpunkt aus Gitter-QCD-Vorhersagen andererseits, nur mit einer möglichst realistischen und vollständigen Zustandsgleichung sinnvoll ist.

Darüberhinaus wäre eine solche Zustandsgleichung von großer Wichtigkeit für die Anwendung auf verschiedene hadronische Systeme, nicht nur für die Teilchenproduktion, sondern auch für die hydrodynamische Beschreibung der Expansionsphase bei Schwerionen-Kollisionen (besonders auch im Nichtgleichgewicht), zum Studium von Signaturen für den Phasenübergang in Schwerionen-Kollisionen oder auch zur Anwendung auf Neutronen-Sterne. Sie könnte auf diese Weise wesentlich zum Verständnis der Phänomenologie der QCD beitragen.

Literaturverzeichnis

- [1] D. J. Gross und F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **30** (1973) 1343.
- [2] H. D. Politzer, Phys. Rev. Lett. **30** (1973) 1346.
- [3] D. J. Gross und F. Wilczek, Phys. Rev. D **8** (1973) 3633.
- [4] H. D. Politzer, Phys. Rept. **14** (1974) 129.
- [5] F. Weber, Prog. Part. Nucl. Phys. **54** (2005) 193 [arXiv:astro-ph/0407155].
- [6] H. Stöcker und W. Greiner, Phys. Rept. **137** (1986) 277.
- [7] R. Stock, Phys. Rept. **135** (1986) 259.
- [8] L. P. Csernai und J. I. Kapusta, Phys. Rept. **131** (1986) 223.
- [9] P. Koch, B. Müller und J. Rafelski, Phys. Rept. **142** (1986) 167.
- [10] D. Hahn und H. Stöcker, Nucl. Phys. A **452** (1986) 723.
- [11] D. Hahn und H. Stöcker, Nucl. Phys. A **476** (1988) 718.
- [12] P. Braun-Munzinger und J. Stachel, Nucl. Phys. A **638** (1998) 3 [arXiv:nucl-ex/9803015].
- [13] E. Fermi, Prog. Theor. Phys. **5** (1950) 570.
- [14] M. Gell-Mann, Phys. Rev. **125** (1962) 1067.
- [15] D. J. Gross, arXiv:hep-ph/9210207.
- [16] M. A. Stephanov, Prog. Theor. Phys. Suppl. **153** (2004) 139 [Int. J. Mod. Phys. A **20** (2005) 4387] [arXiv:hep-ph/0402115].

- [17] R. Hagedorn, *Invited talk at NATO Advanced Study Workshop on Hot Hadronic Matter: Theory and Experiment, Divonne-les-Bains, France, 27 Jun - 1 Jul 1994* [CERN-TH-7190-94].
- [18] R. Hagedorn, *Nuovo Cim. Suppl.* **3** (1965) 147.
- [19] P. Papazoglou, “Chirale Beschreibung Seltsamer Hadronischer Materie in einem verallgemeinerten $SU(3)_L \times SU(3)_R$ σ -Modell”, *Diplomarbeit*, J.W.Goethe-Universität Frankfurt, Frankfurt am Main 1995.
- [20] P. Papazoglou, “Einheitliche Beschreibung von Hadronen und Kernen in einem chiralen $SU(3)$ -Modell”, *Dissertation*, J.W.Goethe-Universität Frankfurt, Frankfurt am Main 1998.
- [21] D. Zschesche, “Beschreibung von heißer, dichter und seltsamer hadronischer Materie in einem chiralen $SU(3)_L \times SU(3)_R$ σ -Modell”, *Diplomarbeit*, J.W.Goethe-Universität Frankfurt, Frankfurt am Main 1997.
- [22] D. Zschesche, “Excited Hadronic Matter in a Chiral $SU(3)_L \times SU(3)_R$ Model”, *Dissertation*, J.W.Goethe-Universität Frankfurt, Frankfurt am Main 2003.
- [23] P. Papazoglou, J. Schaffner, S. Schramm, D. Zschesche, H. Stöcker und W. Greiner, *Phys. Rev. C* **55** (1997) 1499 [arXiv:nucl-th/9609035].
- [24] P. Papazoglou, S. Schramm, J. Schaffner-Bielich, H. Stöcker und W. Greiner, *Phys. Rev. C* **57** (1998) 2576 [arXiv:nucl-th/9706024].
- [25] A. Mishra, E. L. Bratkovskaya, J. Schaffner-Bielich, S. Schramm und H. Stöcker, *Phys. Rev. C* **69** (2004) 015202 [arXiv:nucl-th/0308082].
- [26] P. Papazoglou, D. Zschesche, S. Schramm, J. Schaffner-Bielich, H. Stöcker und W. Greiner, *Phys. Rev. C* **59** (1999) 411 [arXiv:nucl-th/9806087].
- [27] C. Beckmann, P. Papazoglou, D. Zschesche, S. Schramm, H. Stöcker und W. Greiner, *Phys. Rev. C* **65** (2002) 024301 [arXiv:nucl-th/0106014].
- [28] S. Schramm, *Phys. Rev. C* **66** (2002) 064310 [arXiv:nucl-th/0207060].
- [29] D. Zschesche, P. Papazoglou, C. W. Beckmann, S. Schramm, J. Schaffner-Bielich, H. Stöcker und W. Greiner, *Nucl. Phys. A* **663** (2000) 737 [arXiv:nucl-th/9908072].

- [30] D. Zschesche, P. Papazoglou, S. Schramm, J. Schaffner-Bielich, H. Stöcker und W. Greiner, Phys. Rev. C **63** (2001) 025211 [arXiv:nucl-th/0001055].
- [31] S. Schramm und D. Zschesche, J. Phys. G **29** (2003) 531 [arXiv:nucl-th/0204075].
- [32] D. Zschesche, S. Schramm, H. Stöcker und W. Greiner, Phys. Rev. C **65** (2002) 064902 [arXiv:nucl-th/0107037].
- [33] D. Zschesche, S. Schramm, J. Schaffner-Bielich, H. Stöcker und W. Greiner, Phys. Lett. B **547** (2002) 7 [arXiv:nucl-th/0209022].
- [34] J. Theis, G. Graebner, G. Buchwald, J. A. Maruhn, W. Greiner, H. Stöcker und J. Polonyi, Phys. Rev. D **28** (1983) 2286.
- [35] B. M. Waldhauser, J. Theis, J. A. Maruhn, H. Stöcker und W. Greiner, Phys. Rev. C **36** (1987) 1019.
- [36] P. Gerber und H. Leutwyler, Nucl. Phys. B **321** (1989) 387.
- [37] F. Karsch, K. Redlich und A. Tawfik, Eur. Phys. J. C **29** (2003) 549 [arXiv:hep-ph/0303108].
- [38] F. Karsch, K. Redlich und A. Tawfik, Phys. Lett. B **571** (2003) 67 [arXiv:hep-ph/0306208].
- [39] A. Dumitru, D. Röder und J. Ruppert, Phys. Rev. D **70** (2004) 074001 [arXiv:hep-ph/0311119].
- [40] J. D. Bjørken und S. D. Drell: "Relativistische Quantenfeldtheorie", Bibliographisches Institut, Mannheim 1967.
- [41] E. L. Hill, Rev. Mod. Phys. **23** (1951) 253.
- [42] B. D. Serot und J. D. Walecka, Adv. Nucl. Phys. **16** (1986) 1.
- [43] B. D. Serot und J. D. Walecka, Int. J. Mod. Phys. E **6** (1997) 515 [arXiv:nucl-th/9701058].
- [44] V. Koch, Int. J. Mod. Phys. E **6** (1997) 203 [arXiv:nucl-th/9706075].
- [45] Y. Nambu und G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. **122** (1961) 345.
- [46] Y. Nambu und G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. **124** (1961) 246.

- [47] S. Eidelman *et al.* [Particle Data Group], Phys. Lett. B **592** (2004) 1 [<http://pdg.lbl.gov/>].
- [48] J. S. Schwinger, Annals Phys. **2** (1957) 407.
- [49] M. Gell-Mann und M. Levy, Nuovo Cim. **16**, 705 (1960).
- [50] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **18** (1967) 188.
- [51] S. Weinberg, Phys. Rev. **166** (1968) 1568.
- [52] S. R. Coleman, J. Wess und B. Zumino, Phys. Rev. **177** (1969) 2239.
- [53] C. G. Callan Jr., S. R. Coleman, J. Wess und B. Zumino, Phys. Rev. **177** (1969) 2247.
- [54] V. G. J. Stoks und T. A. Rijken, Nucl. Phys. A **613** (1997) 311 [[arXiv:nuc1-th/9611002](http://arxiv.org/abs/nuc1-th/9611002)].
- [55] P. McNamee und F. Chilton, Rev. Mod. Phys. **36** (1964) 1005.
- [56] S. Coleman: “Aspects of Symmetry”, Cambridge University Press, Cambridge 1985.
- [57] J. F. Donoghue, E. Golowich und B. R. Holstein: “Dynamics of the Standard Model”, Cambridge University Press, New York 1992.
- [58] C. G. Callan Jr., S. R. Coleman und R. Jackiw, Annals Phys. **59** (1970) 42.
- [59] J. Schechter und Y. Ueda, Phys. Rev. D **3** (1971) 2874 [Erratum-ibid. D **8** (1973) 987].
- [60] C. G. Callan Jr., Phys. Rev. D **2** (1970) 1541.
- [61] J. C. Collins, A. Duncan und S. D. Joglekar, Phys. Rev. D **16** (1977) 438.
- [62] J. Schechter, Phys. Rev. D **21** (1980) 3393.
- [63] E. K. Heide, S. Rudaz und P. J. Ellis, Phys. Lett. B **293** (1992) 259.
- [64] E. K. Heide, S. Rudaz und P. J. Ellis, Nucl. Phys. A **571** (1994) 713 [[arXiv:nuc1-th/9308002](http://arxiv.org/abs/nuc1-th/9308002)].
- [65] I. Mishustin, J. Bondorf und M. Rho, Nucl. Phys. A **555** (1993) 215.

- [66] K. Paech, A. Dumitru, J. Schaffner-Bielich, H. Stöcker, G. Zeeb, D. Zschesche und S. Schramm, *Acta Phys. Hung. A* **21**, 151 (2004).
- [67] D. Zschesche, G. Zeeb, K. Paech, H. Stöcker und S. Schramm, *J. Phys. G* **30** (2004) S381.
- [68] D. Zschesche, A. Mishra, S. Schramm, H. Stöcker und W. Greiner, *Phys. Rev. C* **70** (2004) 045202 [arXiv:nucl-th/0302073].
- [69] A. Mishra, K. Balazs, D. Zschesche, S. Schramm, H. Stöcker und W. Greiner, *Phys. Rev. C* **69** (2004) 024903 [arXiv:nucl-th/0308064].
- [70] W. Greiner und B. Müller: “Quantenmechanik II: Symmetrien”, Verlag Harri Deutsch, Thun, Frankfurt am Main 1990.
- [71] J. J. Sakurai: “Currents and Mesons”, University of Chicago Press, Chicago 1969.
- [72] A. R. Bodmer, *Phys. Rev. D* **4** (1971) 1601.
- [73] T. D. Lee und G. C. Wick, *Phys. Rev. D* **9** (1974) 2291.
- [74] D. S. Kosov, C. Fuchs, B. V. Martemyanov und A. Faessler, *Phys. Lett. B* **421** (1998) 37.
- [75] R. J. Jelitto: “Theoretische Physik 6: Thermodynamik und Statistik”, 2. Auflage, AULA-Verlag, Wiesbaden 1989.
- [76] W. Greiner, L. Neise und H. Stöcker: “Thermodynamik und Statistische Mechanik”, 1. Auflage, Verlag Harri Deutsch, Thun 1987.
- [77] G. Zeeb, “Zweikomponentige Van-der-Waals-Zustandsgleichungen mit relativistischen Eigenvolumentermen für das hadronische Gas”, *Diplomarbeit*, J.W.Goethe-Universität Frankfurt, Frankfurt am Main 2002.
- [78] D. Zschesche, G. Zeeb, S. Schramm und H. Stöcker, *J. Phys. G* **31** (2005) 935 [arXiv:nucl-th/0407117].
- [79] D. Zschesche, G. Zeeb und S. Schramm, arXiv:nucl-th/0602073.
- [80] T. Hatsuda und T. Kunihiro, *Phys. Rev. Lett.* **55** (1985) 158.
- [81] J. Liao und E. V. Shuryak, arXiv:hep-ph/0508035.

- [82] K. Paech, H. Stöcker und A. Dumitru, Phys. Rev. C **68** (2003) 044907 [arXiv:nucl-th/0302013].
- [83] K. Paech und A. Dumitru, Phys. Lett. B **623** (2005) 200 [arXiv:nucl-th/0504003].
- [84] Z. Fodor und S. D. Katz, JHEP **0404**, 050 (2004) [arXiv:hep-lat/0402006].
- [85] S. D. Katz, Vortrag bei der Quark Matter 2005
http://qm2005.kfki.hu/talk2_select.pshtml?sel=27
http://qm2005.kfki.hu/Talks/Globe/aug5/0930/0930_Katz.pdf .
- [86] O. Philipsen, PoS **LAT2005** (2006) 016 [PoS **JHW2005** (2006) 012] [arXiv:hep-lat/0510077].
- [87] M. D’Elia, A. Di Giacomo und C. Pica, Phys. Rev. D **72** (2005) 114510 [arXiv:hep-lat/0503030].
- [88] Z. Fodor, Vortrag beim Workshop ’The Physics of High Baryon Density’, ECT* Trento, 29. Mai – 2. Juni 2006
http://www.ect.it/Meetings/ConfsWksAndCollMeetings/ConfWksDocument/2006/Talks/29_May_2_June/Fodor.pdf .
- [89] M. Le Bellac: “Thermal Field Theory”, Cambridge University Press, Cambridge 2000.
- [90] F. Karsch, E. Laermann und A. Peikert, Phys. Lett. B **478**, 447 (2000) [arXiv:hep-lat/0002003].
- [91] C. Bernard *et al.*, PoS **LAT2005** (2006) 156 [arXiv:hep-lat/0509053].
- [92] A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, C. B. Thorn und V. F. Weisskopf, Phys. Rev. D **9** (1974) 3471.
- [93] J. Liao und E. V. Shuryak, Phys. Rev. D **73** (2006) 014509 [arXiv:hep-ph/0510110].
- [94] E. Laermann und O. Philipsen, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **53** (2003) 163 [arXiv:hep-ph/0303042].
- [95] F. Karsch, E. Laermann und A. Peikert, Nucl. Phys. B **605** (2001) 579 [arXiv:hep-lat/0012023].

- [96] S. Ejiri, C. R. Allton, S. J. Hands, O. Kaczmarek, F. Karsch, E. Laermann und C. Schmidt, Prog. Theor. Phys. Suppl. **153** (2004) 118 [arXiv:hep-lat/0312006].
- [97] Z. Fodor und S. D. Katz, JHEP **0203** (2002) 014 [arXiv:hep-lat/0106002].
- [98] M. A. Halasz, A. D. Jackson, R. E. Shrock, M. A. Stephanov und J. J. M. Verbaarschot, Phys. Rev. D **58**, 096007 (1998) [arXiv:hep-ph/9804290].
- [99] D. H. Rischke, H. Stöcker, W. Greiner und B. L. Friman, J. Phys. G **14** (1988) 191.
- [100] P. R. Subramanian, H. Stöcker und W. Greiner, Phys. Lett. B **173** (1986) 468.
- [101] Internet-Seite des FAIR-Projekts
<http://www.gsi.de/fair/> .
- [102] Internet-Seiten des CBM-Experiments
<http://www.gsi.de/experiments/CBM/index.html> ,
<http://www-cbm.gsi.de/> .
- [103] M. Reiter, A. Dumitru, J. Brachmann, J. A. Maruhn, H. Stöcker und W. Greiner, Nucl. Phys. A **643**, 99 (1998) [arXiv:nucl-th/9806010].
- [104] Y. B. Ivanov, V. N. Russkikh und V. D. Toneev, arXiv:nucl-th/0503088.
- [105] M. A. Stephanov, K. Rajagopal und E. V. Shuryak, Phys. Rev. Lett. **81** (1998) 4816 [arXiv:hep-ph/9806219].
- [106] U. W. Heinz, P. R. Subramanian, H. Stöcker und W. Greiner, J. Phys. G **12** (1986) 1237.
- [107] H. Stöcker, arXiv:nucl-th/0506013.
- [108] L. V. Bravina *et al.*, Phys. Rev. C **60** (1999) 024904 [arXiv:hep-ph/9906548].
- [109] S. Ejiri, F. Karsch, E. Laermann und C. Schmidt, Phys. Rev. D **73** (2006) 054506 [arXiv:hep-lat/0512040].
- [110] W. Scheid, H. Müller und W. Greiner, Phys. Rev. Lett. **32** (1974) 741.

- [111] W. Scheid, J. Hofmann und W. Greiner, in **Berkeley 1974, Proceedings, Lawrence Berkeley Lab Lbl-3675**, Berkeley 1974, 1-50 (1974).
- [112] J. Hofmann, H. Stöcker, W. Scheid und W. Greiner, *Report of the Workshop on BeV/nucleon Collisions of Heavy Ions: How and Why, Bear Mountain, New York, 29 Nov - 1 Dec 1974* (1975).
- [113] J. Hofmann, H. Stöcker, U. W. Heinz, W. Scheid und W. Greiner, Phys. Rev. Lett. **36** (1976) 88.
- [114] L. D. Landau, Izv. Akad. Nauk Ser. Fiz. **17** (1953) 51.
- [115] F. Cerulus und R. Hagedorn, Nuovo Cim. Suppl. **9** (1958) 646; 659.
- [116] G. D. Westfall *et al.*, Phys. Rev. Lett. **37** (1976) 1202.
- [117] H. Stöcker, W. Greiner und W. Scheid, Z. Phys. A **286** (1978) 121.
- [118] P. Braun-Munzinger, J. Stachel, J. P. Wessels und N. Xu, Phys. Lett. B **365** (1996) 1 [arXiv:nucl-th/9508020].
- [119] F. Becattini, J. Cleymans, A. Keränen, E. Suhonen und K. Redlich, Phys. Rev. C **64** (2001) 024901 [arXiv:hep-ph/0002267].
- [120] J. Letessier und J. Rafelski, Int. J. Mod. Phys. E **9** (2000) 107 [arXiv:nucl-th/0003014].
- [121] J. Rafelski, J. Letessier und G. Torrieri, Phys. Rev. C **64** (2001) 054907 [Erratum-ibid. C **65** (2002) 069902] [arXiv:nucl-th/0104042].
- [122] P. Braun-Munzinger, D. Magestro, K. Redlich und J. Stachel, Phys. Lett. B **518** (2001) 41 [arXiv:hep-ph/0105229].
- [123] J. Cleymans, H. Oeschler und K. Redlich, J. Phys. G **25** (1999) 281 [arXiv:nucl-th/9809031].
- [124] D. H. Rischke, Nucl. Phys. A **698** (2002) 153 [arXiv:nucl-th/0104071].
- [125] H. G. Baumgardt *et al.*, Z. Phys. A **273** (1975) 359.
- [126] R. B. Clare und D. Strottman, Phys. Rept. **141** (1986) 177.
- [127] J. Brachmann, A. Dumitru, J. A. Maruhn, H. Stöcker, W. Greiner und D. H. Rischke, Nucl. Phys. A **619** (1997) 391 [arXiv:nucl-th/9703032].
- [128] C. Hartnack *et al.*, Nucl. Phys. A **495** (1989) 303C.

- [129] S. A. Bass *et al.*, Prog. Part. Nucl. Phys. **41** (1998) 225 [arXiv:nucl-th/9803035].
- [130] S. A. Bass, M. Gyulassy, H. Stöcker und W. Greiner, J. Phys. G **25** (1999) R1 [arXiv:hep-ph/9810281].
- [131] W. Cassing und E. L. Bratkovskaya, Phys. Rept. **308** (1999) 65.
- [132] M. Hofmann, J. M. Eisenberg, S. Scherer, M. Bleicher, L. Neise, H. Stöcker und W. Greiner, arXiv:nucl-th/9908031.
- [133] L. V. Bravina, A. Faessler, C. Fuchs und E. E. Zabrodin, Phys. Rev. C **61** (2000) 064902 [arXiv:nucl-th/0002045].
- [134] C. Spieles, H. Stöcker und C. Greiner, Eur. Phys. J. C **2** (1998) 351 [arXiv:nucl-th/9704008].
- [135] B. Schenke und C. Greiner, J. Phys. G **30** (2004) 597 [arXiv:nucl-th/0305008].
- [136] A. Dumitru, L. Portugal und D. Zschesche, arXiv:nucl-th/0502051.
- [137] A. Dumitru, L. Portugal und D. Zschesche, Phys. Rev. C **73** (2006) 024902 [arXiv:nucl-th/0511084].
- [138] J. Schaffner, I. N. Mishustin, L. M. Satarov, H. Stöcker und W. Greiner, Z. Phys. A **341** (1991) 47.
- [139] G. E. Brown und M. Rho, Phys. Rept. **269** (1996) 333 [arXiv:hep-ph/9504250].
- [140] D. H. Rischke, M. I. Gorenstein, H. Stöcker und W. Greiner, Z. Phys. C **51** (1991) 485.
- [141] G. D. Yen, M. I. Gorenstein, W. Greiner und S. N. Yang, Phys. Rev. C **56** (1997) 2210 [arXiv:nucl-th/9711062].
- [142] P. Braun-Munzinger, I. Heppe und J. Stachel, Phys. Lett. B **465** (1999) 15 [arXiv:nucl-th/9903010].
- [143] M. I. Gorenstein, A. P. Kostyuk und Y. D. Krivenko, J. Phys. G **25** (1999) L75 [arXiv:nucl-th/9906068].
- [144] G. Zeeb, K. A. Bugaev, P. T. Reuter und H. Stöcker, arXiv:nucl-th/0209011.

- [145] J. Rafelski, Phys. Lett. B **262**, 333 (1991).
- [146] J. Letessier und J. Rafelski, Phys. Rev. C **59** (1999) 947 [arXiv:hep-ph/9806386].
- [147] J. Cleymans, B. Kämpfer, M. Kaneta, S. Wheaton und N. Xu, Phys. Rev. C **71** (2005) 054901 [arXiv:hep-ph/0409071].
- [148] M. Michalec, W. Florkowski und W. Broniowski, Phys. Lett. B **520** (2001) 213 [arXiv:nucl-th/0103029].
- [149] M. Michalec, arXiv:nucl-th/0112044.
- [150] W. Greiner und J. Rafelski: "Spezielle Relativitätstheorie", Verlag Harri Deutsch, Thun 1984.
- [151] J. Cleymans, H. Oeschler, K. Redlich und S. Wheaton, Phys. Rev. C **73** (2006) 034905 [arXiv:hep-ph/0511094].
- [152] D. Zschesche, L. Gerland, S. Schramm, J. Schaffner-Bielich, H. Stöcker und W. Greiner, Nucl. Phys. A **681** (2001) 34 [arXiv:nucl-th/0007033].
- [153] M. Bleicher *et al.*, J. Phys. G **25** (1999) 1859 [arXiv:hep-ph/9909407].
- [154] Internet-Seite der UrQMD-Kollaboration
<http://www.th.physik.uni-frankfurt.de/~urqmd> .
- [155] F. Becattini, J. Manninen und M. Gaździcki, arXiv:hep-ph/0511092.
- [156] S. Ahmad *et al.*, Phys. Lett. B **382** (1996) 35.
- [157] L. Ahle *et al.* [E-802 Collaboration], Phys. Rev. C **59** (1999) 2173; Phys. Rev. C **60** (1999) 044904 [arXiv:nucl-ex/9903009]; Phys. Rev. C **60** (1999) 064901.
- [158] S. Albergo *et al.*, Phys. Rev. Lett. **88** (2002) 062301.
- [159] F. Becattini, M. Gaździcki, A. Keränen, J. Manninen und R. Stock, Phys. Rev. C **69** (2004) 024905 [arXiv:hep-ph/0310049].
- [160] S. V. Afanasiev *et al.* [NA49 Collaboration], Phys. Lett. B **491** (2000) 59; Phys. Lett. B **538** (2002) 275 [arXiv:hep-ex/0202037]; Phys. Rev. C **66** (2002) 054902 [arXiv:nucl-ex/0205002].

- [161] A. Mischke *et al.*, Nucl. Phys. A **715** (2003) 453 [arXiv:nucl-ex/0209002].
- [162] C. Alt *et al.* [The NA49 Collaboration], J. Phys. G **30** (2004) S119 [arXiv:nucl-ex/0305017]; Phys. Rev. Lett. **94** (2005) 192301 [arXiv:nucl-ex/0409004].
- [163] T. Anticic *et al.* [NA49 Collaboration], Phys. Rev. Lett. **93** (2004) 022302 [arXiv:nucl-ex/0311024].
- [164] M. Gaździcki *et al.* [NA49 Collaboration], J. Phys. G **30** (2004) S701 [arXiv:nucl-ex/0403023].
- [165] C. Meurer [NA49 Collaboration], J. Phys. G **30** (2004) S1325 [arXiv:nucl-ex/0406016].
- [166] C. Blume [NA49 Collaboration], J. Phys. G **31** (2005) S685 [arXiv:nucl-ex/0411039].
- [167] A. Richard [NA49 Collaboration], J. Phys. G **31** (2005) S155.
- [168] C. Adler *et al.* [STAR Collaboration], Phys. Rev. Lett. **86** (2001) 4778 [Erratum-ibid. **90** (2003) 119903] [arXiv:nucl-ex/0104022]; Phys. Rev. Lett. **87** (2001) 262302 [arXiv:nucl-ex/0110009]; Phys. Rev. C **65** (2002) 041901; Phys. Rev. Lett. **89** (2002) 092301 [arXiv:nucl-ex/0203016]; Phys. Rev. C **66** (2002) 061901 [arXiv:nucl-ex/0205015]; Phys. Lett. B **595** (2004) 143 [arXiv:nucl-ex/0206008].
- [169] M. Calderon de la Barca Sanchez, arXiv:nucl-ex/0111004.
- [170] C. Suire [STAR Collaboration], Nucl. Phys. A **715** (2003) 470 [arXiv:nucl-ex/0211017].
- [171] J. Castillo [STAR Collaboration], Nucl. Phys. A **715** (2003) 518 [arXiv:nucl-ex/0210032].
- [172] J. Adams *et al.* [STAR Collaboration], Phys. Rev. Lett. **92** (2004) 182301 [arXiv:nucl-ex/0307024]; arXiv:nucl-ex/0311017.
- [173] O. Y. Barannikova [STAR Collaboration], arXiv:nucl-ex/0403014.
- [174] J. Adams *et al.* [STAR Collaboration], Phys. Rev. Lett. **92** (2004) 112301 [arXiv:nucl-ex/0310004]; Nucl. Phys. A **757** (2005) 102 [arXiv:nucl-ex/0501009].

- [175] F. Becattini, M. Gazdzicki und J. Sollfrank, Eur. Phys. J. C **5** (1998) 143 [arXiv:hep-ph/9710529].
- [176] A. Andronic, P. Braun-Munzinger und J. Stachel, Nucl. Phys. A **772** (2006) 167 [arXiv:nucl-th/0511071].
- [177] J. Letessier und J. Rafelski, arXiv:nucl-th/0504028.
- [178] M. Kaneta und N. Xu, arXiv:nucl-th/0405068.
- [179] J. Cleymans und K. Redlich, Phys. Rev. Lett. **81** (1998) 5284 [arXiv:nucl-th/9808030].
- [180] G. E. Brown, C. H. Lee, M. Rho und V. Thorsson, Nucl. Phys. A **567** (1994) 937 [arXiv:hep-ph/9304204].
- [181] T. Waas, N. Kaiser und W. Weise, Phys. Lett. B **379**, 34 (1996).
- [182] J. Schaffner, J. Bondorf und I. N. Mishustin, Nucl. Phys. A **625** (1997) 325 [arXiv:nucl-th/9607058].
- [183] P. Braun-Munzinger und J. Stachel, J. Phys. G **28** (2002) 1971 [arXiv:nucl-th/0112051].
- [184] M. A. Stankiewicz, arXiv:nucl-th/0509058.
- [185] J. Cleymans, Vortrag beim Workshop 'Critical Point and Onset of Deconfinement', Florenz, 3. – 6. Juli 2006
<http://hep.fi.infn.it/becattini/files/talks/Cleymans.pdf> .
- [186] F. Karsch, Vortrag beim RIKEN BNL Research Center Workshop 'Can We Discover the QCD Critical Point at RHIC?', BNL, 9. – 10. März 2006
https://www.bnl.gov/riken/QCDRhic/linked_files/talks/RHICQCD_Karsch.pdf .
- [187] G. Zeeb, D. Zschesche und S. Schramm, *Proceedings of the XLIII International Winter Meeting on Nuclear Physics (Ricerca Scientifica ed Educazione Permanente)*: N **124** (2005) 279–286.
- [188] B. A. Campbell, J. R. Ellis und K. A. Olive, Phys. Lett. B **235** (1990) 325.
- [189] B. A. Campbell, J. R. Ellis und K. A. Olive, Nucl. Phys. B **345** (1990) 57.

- [190] J. R. Ellis und K. A. Olive, Phys. Lett. B **260** (1991) 173.
- [191] J. R. Ellis, J. I. Kapusta und K. A. Olive, Phys. Lett. B **273** (1991) 123.
- [192] G. 't Hooft, Phys. Rev. D **14** (1976) 3432 [Erratum-ibid. D **18** (1978) 2199].

Lebenslauf

Gebhard Zeeb
Damaschkestraße 2
61462 Königstein im Taunus

Geboren 13. April 1972 in Schorndorf (Württemberg)
Familienstand Verheiratet mit Andrea Natascha Zeeb,
geborene Jug (seit Mai 1996)
Zwei Söhne: Max Adrian Zeeb (* Nov. 1996)
und Paul Sören Zeeb (* Sep. 1999)

Schulbildung

Sep. 1978 – Juli 1982 Besuch der Grund- und Hauptschule Winterbach (Rems)
Sep. 1982 – Juni 1991 Besuch des Burg-Gymnasiums Schorndorf (Württemberg)
14. Juni 1991 Abitur (Notendurchschnitt: 1,5)

Studium

Okt. 1991 Studium der Mathematik an der Universität Stuttgart
Apr. 1992 Unterbrechung des Studiums für den Zivildienst
Okt. 1993 Studienfachwechsel zu Physik und Wiederaufnahme des
Studiums an der Universität Stuttgart
Sep. 1995 Vordiplom in Physik

Studium

(Fortsetzung)

- Okt. 1995 Wohnortswechsel nach Frankfurt am Main,
Aufnahme des Hauptstudiums in Physik an der
Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt
- Mai 1999 Eintritt in das Institut für Theoretische Physik
15. Mai 2001 Beginn der Diplomarbeit am Inst. für Theor. Physik
Betreuer der Arbeit: Prof. Dr. H. Stöcker
Titel der Arbeit: "Zweikomponentige *Van-der-Waals*-
Zustandsgleichungen mit relativistischen Eigenvolu-
menternen für das hadronische Gas"
4. Juli 2002 Abschluss des Diploms (Gesamtnote: 1,0)
- Seit Juli 2002 Wissenschaftlicher Mitarbeiter im Rahmen des
Promotionsstudiums am Inst. für Theor. Physik
Betreuer der Dissertation: Prof. Dr. S. W. Schramm
Thema der Arbeit: "Einfluss schwerer hadronischer
Zustände auf das QCD-Phasendiagramm und die
Ausfrierbedingungen in einem hadronischen chiralen
Modell"
- Aug. 2006 Abgabe der Dissertation

Gremienarbeit

- Apr. 1996 Studentischer Vertreter im Fachschaftsrat Physik und
– März 2000 im Fachbereichsrat Physik an der Goethe-Universität
- Seit Apr. 2003 Stellvertretendes Mitglied der wissenschaftlichen Ange-
stellten im Direktorium des Inst. für Theor. Physik

Lehrerfahrung

- Okt. 1999 Leitung von Übungsgruppen (Theoretika) zu
– Juli 2002 Vorlesungen der Theoretischen Physik in:
*Mechanik I und II, Elektrodynamik, Quantenmechanik
I und II sowie Thermodynamik und statistische
Mechanik*

Akademische Lehrer

— *In loser chronologischer Folge* —

An der Universität Stuttgart

Grundstudium Mathematik (ein Semester):

Prof. Dr. Manfred Pilkuhn (Physik)
Prof. Dr. Peter A. Lesky *sen.* (Mathematik)
Prof. Dr. Dietmar Kahnert (Mathematik)

Grundstudium Physik:

Prof. Dr. Dr. h.c. Wolfgang Eisenmenger
Prof. Dr. Johann R. Weidlein (Chemie)
Prof. Dr.-Ing. Dr. h.c. Wolfgang L. Wendland (Mathematik),
Dr. Werner Kolbe
Prof. Dr. Peter Bäuerle (Chemie)
Prof. Dr. Dr. h.c. Wolfgang Weidlich
Prof. Dr. Ulrich Kneißl

Dr. Hans-Jörg Limbach, Marc Maus, Achim Stein
(im Rahmen des Tutoren-Programms der Fachschaft-Physik Stuttgart)

An der Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main

Hauptstudium Physik:

Prof. Dr. Rainer J. Jelitto
Prof. Dr. Horst Klein,
PD Dr. Peter Hülsmann
Prof. Dr. Dr. h.c. Dietrich Wolf,
Prof. Dr. Ronald Tetzlaff

...

Hauptstudium Physik (Fortsetzung):

Prof. Dr. E. Mohler
Prof. Dr. Dr. h.c. Karl-Ontjes Groeneveld
Prof. Dr. Thomas Elze
Akad. Oberrat Dr. Joachim Reinhardt
Prof. Dr. Bernd Fink (Bayer, Leverkusen)
Prof. Dr. Horst Stöcker
Prof. Dr. Udo Müller-Nehler (Infraserv, *chem.* Hoechst AG)
Prof. Dr. Dr. h.c. mult. Walter Greiner
Dr. Stefan Hofmann
Prof. Dr. Reiner Dreizler
Prof. Dr. Alwin Schempp
Prof. Dr. Hans F. deGroote (Mathematik)
Prof. Dr. Bernd Schürmann (Siemens, München)
Prof. Dr. Harro Schmeling (Geophysik)
Dr. Ludwig Neise
Prof. Dr. Peter Senger
Prof. Dr. Mark I. Gorenstein
Dr. Kyrill A. Bugaev
Prof. Dr. Igor N. Mishustin
Prof. Dr. Joachim Maruhn
Prof. Dr. Dominik J. Schwarz
Prof. Dr. Dirk H. Rischke
Prof. Dr. Dr. h.c. Reinhard Stock
Prof. Dr. Herbert Ströbele

Promotionsstudium Physik:

Dr. Detlef Zschiesche
Prof. Dr. Stefan W. Schramm
HD Dr. Jürgen Schaffner-Bielich
JuniorProf. Dr. Adrian B. Dumitru
Dr. Agnes Mocsy
JuniorProf. Dr. Marcus Bleicher
PD Dr. Elena Bratkovskaya

Publikationsliste

- Equation of state for the two component Van der Waals gas with relativistic excluded volumes.
G. Zeeb (Frankfurt U.), K.A. Bugaev (Darmstadt, GSI & BITP, Kiev), P.T. Reuter, H. Stöcker (Frankfurt U.). Sep. 2002. 16 Seiten.
e-Print Archiv: nucl-th/0209011
- Multistrange baryon production in Au+Au collisions near threshold.
G. Zeeb, M. Reiter, M. Bleicher (Frankfurt U.). Dez. 2003. 5 Seiten.
Veröffentlicht in *Physics Letters B* **586**: 297–302, 2004
e-Print Archiv: nucl-th/0312015
- Production of Ξ Hyperons near the threshold.
M. Reiter, G. Zeeb, M. Bleicher, H. Stöcker, W. Greiner (Frankfurt U.). Feb. 2004. 1 Seite.
Beitrag zu *GSI Scientific Report 2003*: Seite 84, 2004.
<http://www.gsi.de/informationen/wti/library/scientificreport2003/files/73.pdf>
- Particle ratios from a chiral SU(3) model.
K. Paech, A. Dumitru, J. Schaffner-Bielich, H. Stöcker, G. Zeeb, D. Zschesche (Frankfurt U.), S. Schramm (Argonne). 2004. 6 Seiten.
Erstellt für *19th Winter Workshop on Nuclear Dynamics*, Breckenridge, Colorado, 9.–15. Feb. 2003.
Veröffentlicht in *Acta Physica Hungarica A* **21**: 151–156, 2004
- Particle ratios from AGS to RHIC in an interacting hadronic model.
D. Zschesche, G. Zeeb, K. Paech (Frankfurt U.), H. Stöcker (Frankfurt U. & Nantes U.), S. Schramm (Argonne). 2004. 11 Seiten.
Erstellt für *7th International Conference on Strangeness in Quark Matter (SQM 2003)*, Atlantic Beach, North Carolina, 12.–17. März 2003.
Veröffentlicht in *Journal of Physics G* **30**: S381–S391, 2004

- Impact of baryon resonances on the chiral phase transition at finite temperature and density.
D. Zschesche, G. Zeeb, S. Schramm (Frankfurt U.), H. Stöcker (Frankfurt U. & Frankfurt U., FIAS). Aug. 2004. 18 Seiten.
Veröffentlicht in *Journal of Physics G* **31**: 935–946, 2005
e-Print Archiv: nucl-th/0407117
- Collective flow signals the quark gluon plasma.
E.L. Bratkovskaya *et al.* 2005. 25 Seiten.
Erstellt für *9th Hadron Physics and 7th Relativistic Aspects of Nuclear Physics (HADRON-RANP 2004): A Joint Meeting on QCD and QGP*, Angra dos Reis, Rio de Janeiro, Brasilien, 28. März – 3. Apr. 2004.
Veröffentlicht in *AIP Conference Proceedings* **739**: 305–329, 2005, sowie *Acta Physica Hungarica A* **24**: 189–201, 2005
Außerdem in *Rio de Janeiro 2004, Hadron physics and relativistic aspects of nuclear physics*: 305–329
- Restoration of Scale Invariance and Chiral Symmetry at Finite Temperatures.
G. Zeeb, D. Zschesche (Frankfurt U.), S. Schramm (Frankfurt U., CSC). Feb. 2005. 1 Seite.
Beitrag zu *GSI Scientific Report 2004*: NQMA-THE-35, Seite 175, 2005
<http://www.gsi.de/informationen/wti/library/scientificreport2004/PAPERS/NQMA-THE-35.pdf>
- Restoration of Chiral Symmetrie and broken Scale Invariance.
G. Zeeb, D. Zschesche (Frankfurt U.), S. Schramm (Frankfurt U., CSC). Mai 2005. 8 Seiten.
Erstellt für *XLIII International Winter Meeting on Nuclear Physics*, Bormio, Italien, 14.–19. März 2005.
Veröffentlicht in *Proceedings of the XLIII International Winter Meeting on Nuclear Physics (Ricerca Scientifica ed Educazione Permanente)*: N **124**, 279–286, 2005
- Realistic phase diagram in a chiral hadronic model.
S. Schramm, G. Zeeb, D. Zschesche (Frankfurt U.). Jan. 2006. 1 Seite.
Zu erscheinen in *GSI Scientific Report 2005*
- Entropy per baryon of dense QCD matter at GSI-FAIR.
A. Dumitru, S. Schramm, H. Stöcker, G. Zeeb, D. Zschesche (Frankfurt U.). Jan. 2006. 1 Seite.
Zu erscheinen in *GSI Scientific Report 2005*

- Phase structure in a hadronic chiral model.
D. Zschesche, G. Zeeb, S. Schramm (Frankfurt U.). Feb. 2006. 4 Seiten.
e-Print Archiv: nucl-th/0602073
- v_1 - & v_2 -BAROMETRY @ HiMu-RHIC – pinning down the Order of the Phase Transition.
H. Stöcker (Frankfurt U. & Frankfurt U., FIAS), B. Betz, G. Zeeb (Frankfurt U.). März 2006. 6 Seiten.
Erstellt für *RIKEN BNL Research Center Workshop: Can We Discover the QCD Critical Point at RHIC?*, Brookhaven, 9.–10. März, 2006.
http://www.th.physik.uni-frankfurt.de/~stoecker/BNL2006_03/HSTshort-muRHIC2006.pdf

Danksagung

Zuallererst möchte ich Prof. Dr. Stefan W. Schramm für die ausgesprochen gute und kontinuierliche Betreuung meiner Doktorarbeit danken. Mit seiner ruhigen und gründlichen Art war er immer da für mich, für meine Arbeit und für meine unzähligen Fragen. Trotz seines schier unerschöpflichen Wissens ist Stefan einer der Wenigen, die keine Scheu haben, unklare Sachverhalte nicht schönzureden. Er hat meine fortschreitende Arbeit immer mit großem Interesse verfolgt und begleitet, gab mir Zuversicht und viele kreative Vorschläge für die Ausrichtung meiner Untersuchungen und produktive Rückkopplungen zu erarbeiteten Ergebnissen.

Ganz besonders möchte ich Dr. Detlef Zschiesche danken, der während meiner ganzen Promotionszeit (und sogar schon ein bisschen früher) mich gefordert und gefördert hat, mir den Einstieg in das Frankfurter *Chirale Modell* gegeben hat, sowohl die Theorie als auch die numerische Realisierung betreffend, mit all seinen Feinheiten und Tücken, bei größeren und kleineren Fragen. Auch Detlef war immer für mich da, in Sachen Physik und auch menschlich, wenn nötig aufmunternd – und bis ganz zuletzt.¹ Danken möchte ich ihm hier auch für viele, viele wertvolle Vorschläge zu dieser Arbeit. Sehr dankbar bin ich ihm außerdem für seinen Beistand rund um meine ersten beiden Konferenzen, an denen er ebenfalls teilnahm und wir eine großartige Zeit hatten – auch mit viel Physik, teilweise sogar bis spät in die Nacht.

Sowohl Stefan als auch Detlef mussten viel Verständnis haben für meine mannigfaltige Ablenkungen durch meine Aufgaben in der Systemadministration am Institut und zeitweise auch am CSC (vgl. u.), und wurden trotzdem nicht müde, mich weiter zu fordern und zu unterstützen. Aber ich finde, wir haben tolle Physik gemacht zusammen!

Ein ganz wichtiger Dank gebührt Prof. Dr. Horst Stöcker, sozusagen “der Dritte im Bunde“, der mir die Promotion ermöglicht hat: Zuerst

¹Selbst die räumliche Distanz in den letzten Monaten aufgrund seiner Post-Doc-Stelle in Brasilien tat dem keinen Abbruch, notfalls auch telefonisch und außerhalb jeder normalen Arbeitszeit.

durch seine freundliche und wohlwollende Aufnahme an das Institut in meiner Diplomandenzeit und dann vor allem durch meine Anstellung als wissenschaftlicher Mitarbeiter, ohne die mein Promotionsstudium kaum zu finanzieren gewesen wäre. Danken möchte ich ihm in diesem Zusammenhang für die guten und freien (*produktiven*) Arbeitsbedingungen am Institut und auch dafür, dass er mich aufrichtigerweise an Stefan Schramm als Betreuer weitergegeben hat. Trotz dem hat Horst mir mit seiner enormen Erfahrung viele Anregungen für meine Arbeit gegeben und oft impulsives Interesse an meinen Ergebnissen gezeigt. Dankbar bin ich ihm ferner dafür, dass er es mir ermöglicht hat, meine Ergebnisse auf nationalen und internationalen Konferenzen vorzustellen. Er war es außerdem, der mir die Mitarbeit an der Systemadministration verschafft hat, in gewisser Weise Chance und Fluch zugleich – ob ich ihm dafür ausschließlich danken kann, wird sich erst zeigen müssen . . .

Auch bin ich dankbar, dass ich zum Ende meiner Promotionszeit noch einmal die Chance bekommen habe, andere Promovierende (stückweise) zu betreuen. Es tut gut zu erleben, dass man in diesen Jahren sich so manches an Wissen und Methodik zu eigen gemacht hat und davon auch einiges weitergeben kann!

Ferner möchte ich auch den anderen Professoren des Instituts, Prof. Dr. Dr. h.c. mult. Walter Greiner, Prof. Dr. Carsten Greiner, Prof. Dr. Joachim Maruhn, Prof. Dr. Dirk H. Rischke, den Juniorprofessoren Dr. Marcus Bleicher und Dr. Adrian Dumitru sowie dem Hochschuldozenten Dr. Jürgen Schaffner-Bielich danken: für das gute wissenschaftliche Klima am Institut, das breite und stets wohlwollende Interesse und nicht zuletzt für das hohe physikalische Niveau einschließlich der wissenschaftlichen Gäste und Vortragsredner.² Allen voran ist hier Walter Greiner zu nennen, der wesentlich zu dem beigetragen hat, was das Institut heute ist – einschließlich seinen Sohn Carsten Greiner, der eine wirkliche Bereicherung für das Institut ist.

Im Speziellen möchte ich besonders Adrian Dumitru danken, zuerst für seine exzellenten Vorlesungen (die vereinzelt durch Agnes Mocsy kongenial vertreten wurden), dann aber auch für viele gute Antworten auf Fragen meinerseits und viele wertvolle Anregungen, die ich von ihm bekommen habe, und einfach für seine erfrischend unkomplizierte und direkte Art. (Außerdem ist er es, dem ich meinen ersten eingeladenen Vortrag zu verdanken habe!)

Und ich möchte Marcus Bleicher dafür danken, dass er jederzeit bereit war für Fragen aller Art, sei es Physik oder Mathematik oder die

²Eine Aufzählung könnte hier nur unvollständig bleiben.

Herausforderung, das erste Mal ein Paper zu submittieren. Ihm habe ich auch einen Einblick in den Frankfurter 'Dinosaurier' UrQMD zu verdanken einschließlich der Erfahrung, wie zügig und zielorientiert man publizieren kann.

Meinen verschiedenen Zimmerkollegen möchte ich für die gute und produktive Atmosphäre danken: anfänglich noch Dr. Stefan Hofmann und Dr. Kerstin Paech, dann lange Dr. Hans-Joachim Drescher und Miriam Wietoska, nach dem Umzug ins neue Gebäude dann Dr. Sven Soff und schließlich sogar Prof. Dr. Miklos Gyulassy. Besonders Hajo möchte ich für die schöne gemeinsame Zeit danken – wesentlich geprägt von gemeinsamen Wellenlängen und unserer Vorliebe für Kaffee, die uns auch nach der räumlichen Trennung weiterhin regelmäßig zusammenführen – und für viele Tipps und Tricks (und auch manchen moralischen Beistand) in Computer-Dingen.

Überhaupt haben die Kollegen, Diplomierende und Promovierende, Post-Docs usw., einen Dank verdient für das gute Klima untereinander, für die Hilfsbereitschaft füreinander. Es ist ein tolles Erlebnis, wenn man mit einer Frage in ein Zimmer kommt und mit einem Mal drei Mitstreiter in dieser Angelegenheit gewonnen hat!

Den Damen in den Sekretariaten, Astrid Steidl, Daniela Radulescu, Frau Palade und in neuerer Zeit auch Denise Meixler und Gabriela Meyer danke ich für Hilfe in vielerlei Angelegenheiten und dafür, dass sie nach Kräften zum reibungslosen Institutsbetrieb beitragen; Dank auch an Frau Ruppel, Frau Wittmann, Barbara Knoll und Monika Barron, die unser Institut inzwischen verlassen haben. Besonders möchte ich hier Joe Laperal-Gomez, AO Dr. Joachim Reinhardt und Prof. Dr. Hans Jürgen Lüdde danken, die sehr viel Administration im Hintergrund bewältigen und so einen wichtigen Teil zum Institutsbetrieb beitragen.

An diese Stelle gehört der Dank an das Computer-Team: ehemals Henning Weber, Manuel Reiter und Kerstin Paech, zeitweise auch Ella Zoller; inzwischen ist nur noch Alexander Achenbach verblieben und Thilo Kalkbrenner dazu gekommen. Ich selbst habe bei der Mitarbeit an der Systemadministration viel gelernt, von den Kollegen, aber auch durch manche Fragen von Nutzern, die mich an neue Gebiete aus diesem Themenkreis herangebracht haben. Und ich möchte Ivan Spremo danken, stellvertretend für das Computer-Team der anderen Institutshälfte; mit ihm hatte ich neben dem fachlichen vor allem auch menschlichen Überlapp.

Dem Center for Scientific Computing (CSC) sowie unserem eigenen Instituts-Cluster danke ich für die Bereitstellung ungezählter CPU-Stunden

für die numerischen Berechnungen rund um diese Doktorarbeit.

Zu guter Letzt möchte ich mich sehr herzlich bei meiner Familie bedanken: bei meinen Eltern dafür, dass sie mir mein Studium und die Promotion überhaupt ermöglicht haben und mich dabei immer unterstützt haben, und ganz besonders herzlich bei meinen beiden Söhnen Max und Paul und bei meiner Frau Natascha. Sie haben an mich geglaubt und zu mir gehalten bis zuletzt, trotz immer weiterer Aufschübe – und sie haben mir stets gezeigt, wie schön das Leben jenseits der Physik ist, und andererseits haben wir auch oft zusammen erlebt, wie viel schöne Physik im täglichen Leben zu finden ist!