Philol. B Zetto fir miß B.X.

L. Eutocii versione [illegible]

52.

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ

ΤΟΥ ΣΥΡΑΚΟΥΣΙΟΥ, ΤΑ ΜΕΧΡΙ
νῦν σωζόμενα, ἅπαντα.

ARCHIMEDIS SYRACVSANI

*PHILOSOPHI AC GEOMETRAE EX*cellentißimi Opera, quæ quidem extant, omnia, multis iam seculis desiderata, atq; à quàm paucißimis hactenus uisa, nuncq; primùm & Græcè & Latinè in lucem edita.

Quorum Catalogum uersa pagina reperies.

Adiecta quoq; sunt

EVTOCII ASCALONITAE
IN EOSDEM ARCHIMEDIS LIbros Commentaria, item Græcè & Latinè, nunquam antea excusa.

Cum Cæs. Maiest. gratia & priuilegio ad quinquennium.

BASILEAE,
Ioannes Heruagius excudi fecit.
An. MDXLIIII.

52.

ARCHIMEDIS OPERVM HOC LIBRO CONTENTOrum Catalogus.

AMPLISSIMO SENATORVM ORDINI REIPVBLICAE NORIMBERGENſis, Dominis ſuis incomparabiliter obſeruandis, Thomas Gechauff, cognomento Venatorius, ſeipſum commendat.

HOMINEM ab ipſomet Opifice rerum, imperium in ipſam terram, adeoq; in ipſas paſſim uniuerſas creaturas accepiſſe: conceſſa etiam, quæ homini, pro modulo ſui ſtatus ſatis eſſet, cognitione rerum, Moſes in ipſo ſtatim libri Geneſeos ueſtibulo, ſcriptum reliquit. Homo autem ſimul atq; mandatum Opificis minus, quàm par erat, ſanctè colere cœpiſſet, prębuiſſetq; iam aures aduerſario lucis, protinus & accepto in rerum creaturas imperio exuitur, & ſummæ felicitatis, ad quam utiq; formatus fuerat, fruitione priuatur: adeò ut iam non tantum longiſſimè à uera felicitate exularet, ſed etiam in ipſa rerum cognitione equidem miſerè cæcutiret. Et meritò quidem. Qui enim ſupremæ contemptor eſt maieſtatis, ſuprema quur non plecteretur pœna? Atqui ne penitus ab ea, ad quam ſemel fabricatus fuerat homo, excideret felicitate: præterquam quod Deus omnipotens bonitatis ſuæ uerbum, ut carnem indueret, miſit, cuius deinde morte, labes illa contractæ impuritatis ablueretur: rurſus etiam hominem, ad præclariſſimarum rerum cognitionem, ceu per gradus quoſdam artium aſcendere uoluit, ut iam conſtanter nobis polliceri poſſimus, habere quãdam cum uirtute ipſa coniunctionem honeſtas artes omnes. Et ſi enim hodie inuentam ueritatem, ſola ſibi iure uendicat Theologia: inuentam una ſecurè poſſidet pietas Chriſtiana: nõ tamen & alias liberales diſciplinas cõtemnere debemus, ob eam duntaxat cauſam, quòd per ipſas adhuc quæritur Veritas: ſed potius & ipſæ in conſuetudinem humanæ uitæ admittendæ, ne quæ uſu adhuc rerum carent ingenia iuuentutis noſtræ, penitus ſylueſcant, dum perpetuò cultura bonarum artium deſtituuntur. Quod enim præſtat cibus hominibus ut uiuant, id præſtant honeſtæ diſciplinæ, ut bene uiuant. Alimenta corporibus ſi ſubduxeris, ipſa protinus uiuere deſinent: & communi mortalium uitæ honeſtas artes, mox ut ſubducere cœperis, ipſa uita noſtra, quid niſi quàm proximè ad brutorum uitam accedere uidebitur? Quare mea quidem ſententia, hoc iuuentuti ſunt artes honeſtę uniuerſæ, quod himber eſt pratis areſcẽtibus, quod riui hortis, quod agris cultus, & ipſis quod eſt uineis putatio. Cultura artium ut rebus humanis non parum adijcit ſplendoris & ornamẽti, ita contemptus earum & morum & uitæ ſinceritatem nòn infrequen-

ter eneruare uiſus eſt. Literis literatis non exculta uita noſtra, quid aliud quàm barbara quædam cenſenda eſt barbaries? Certe bonarum artium ſtudijs, homini præſertim ad immortalitatem contendenti, nulla eſt poſſeſſio uel certior, uel ſecurior: cum quod hæc una poſſeſſio, animū ad ſolidæ uirtutis amorem inflammat: tum quod ea ab initio qui uſi ſunt, ut uerè inquit Sapiens, participarunt amicitiæ Dei. Vos uerò P. C. quàm rectiſſimè conſultum eſſe optetis Reipub. literariæ, abunde teſtantur tot paſſim illa ueſtræ liberalitatis collata in ſtudioſos ſubſidia. Et eſt alioqui apud uos in magno precio philoſophiæ ſtudium: tum præcipuè in maiore honore haberi à uobis eos autores, qui Mathemata conſcripſerunt, uel hoc nomine, quod Mathematicarū rerum cognitionem, numerare ſoletis inter pulcherrimas atq; utiliſſimas philoſophiæ partes: ut inde uobis non ſolum multam utilitatem percipiatis priuatim, ſed apud exteros quoq; & doctos harum rerum, ſummam non rarò inire uiſi ſitis gratiam publicè. Habuit ordo ueſter Senatorius ſemper tales uiros, qui uel pulcherrimarum artiū fuerint ſtudioſi, uel ſaltem qui à rectis ſtudijs non eſſent prorſus abhorrente animo. Quæ laus cum ipſam ſecum ferat honeſtatem, non poteſt non eſſe pulcherrima. De uobis, qui hodie gubernacula Reipub. tenetis, ut paucis abſoluere, quod dicere uolo, non poſſum: ita à me dedicatum uobis Archimedem Siculum illum, Mathematicarum diſciplinarum facile, iudicio doctorum omniū, principem, benignè equidem accipere debetis. Hoc enim uno renato, uniuerſa Matheſis renata uideri queat. Fuit hactenus in Mathematicis ſcriptionibus Archimedis nomine celebrius nihil. at qui uerè oculis ſuis tanti autoris monimenta uiderit, quem mihi conſpiciendū dabitis? Bilibaldus Pirckheymerus, quem uos, dum uiueret, inter doctos doctiſſimum nominari haud grauatim paſſi eſtis: ille inquam, ut erat uir excellentis ingenij, cum Rhoma græcè ſcriptum Archimedis noſtri exemplar, opera amici cuiuſdam, tandem poſt longam expectationem accepiſſet, non tantum quaſi uilem aliquem in ædibus ſuis paſſus eſt habitare hoſpitem, ſed illū quotidianæ ſtudiorum ſuorum conſuetudini uoluit eſſem conſortem. Quippe qui nō ignoraret, hoc ſtudiorum genus olim ſemper religioſiſſimè ab ipſis ſummis regnorum moderatoribus, illiſq; ſapientiſſimis, & cultum fuiſſe, & celebratum. Hinc Plato philoſophorū lumen, in libris
Lib. 7. de Legib. ſcribens, ſuo more præcipere audet, Geometriam (ut alia prætercam) diſcēdam eſſe à liberis hominibus. Quem ſequutus M. Fabius Quintilianus, hanc ipſam diſciplinam futuro Oratori, non tam utilem quàm neceſſariam etiam eſſe putauit. Itaq; rem gratam facturum me ratus ſum, ſi eum autorem ueſtris potiſſimum auſpicijs in diem protruderem, qui unus adhuc ad Mathematicas perfectiones abſoluendas deeſſe uidebatur. Cæterum, quæ animis ueſtris inſita eſt modeſtia, nō egrè laturi eſtis, ſi extremos huius editionis fructus, ad uniuerſos bono

rūm ſtudiorum cultores cupiam peruēturos, laudem uerò ad uos unos commigraturam. Hac enim laude cum primis digni eſtis, quod primi ac penè ſoli ſitis hodie in Germania (abſit inuidia dicto) quorum patrocinio rectorum ſtudiorum cauſa ſuſtentatur, foueturq;. Quod exemplum utinam ſequerentur etiam alij, quos habet Germania Principes plures, titulis alioqui non inhoneſtarum rerum inclytos & illuſtres. Certe ab eis res præclarè geſtæ, ad poſteros ut cum laude extendantur, ſine literarum præclariſſimarum adminiculo, rectè ſperare non poſſunt. Sic enim uſu comperimus, neq; nomen ſibi quenquam parare poſſe, neq; locum laudis ullum apud poſteros habiturum, qui hiſce diſciplinis animum ſuum parum bona fide ſtuduit obfirmare. Quare contemptores artium præterquam quòd uitam inglorij tranſigunt, in ipſum etiā conditorē rerum ingrati eſſe conuincuntur. Sunt enim artes honeſtæ omnes, non ſine numinis ſummi certa diſpenſatione ad homines allatæ: ut iam neq; uita dignus cenſeri debeat, qui contemptor eſt eorum bonorum, ſine quibus nec ipſe homo rectè ualere queat. Animus quo eſt corpori præſtantior, hoc diligentiori ſtudio curandus uenit. Curatur autem recta ratione potiſſimum, & uirtute, qua cum cognationem quandam habent omnes ſimul honeſtæ artes. Quas non enim (ut de alijs taceam) illa nobis contulit in uita utilitates, quæ à menſuratione terræ Geometria, Græco nomine eſt uocata? Quid illius diſciplinæ ſtudioſi, ad uitæ humanæ conſeruationem, intentatum reliquerunt? Quid non auſi ſunt in lucem producere illi? An non illorum inuenta ſunt machinæ illæ bellicæ, arietes, telaq; & propugnacula, paſſimq; uniuerſa alia quæ in numero, pondere & menſura creaſſe Deum ipſum fides Chriſtiana recepit? Corporum cœleſtiū ordines, interualla, magnitudines, ad noſtram notitiam, nonne Geometræ attulerunt? Scripſit huiuſmodi de rebus Archimedes Siculus ille multa iucunda, utilia & neceſſaria uitæ: in quibus ſunt de Sphæra & cylindro libri duo, copioſè equidem & feliciſſimè ſcripti. De circuli commenſuratione, nihil æquè doctū tradiderunt ueteres, atq; apud hunc noſtrum legere eſt autorem. Si enim circulus in Geometricis figuris eſt linea infinita, in qua nō eſt terminus à quo, (ut uocant:) nec terminus item ad quem, nēpe cuius principiū & finis eſt in quolibet puncto: quis, quæſo, ueterum ea de re Archimede noſtro apertius uel ſcripſit, uel docuit? Quis terminos illos quatuor, quibus uniuerſa Mathemata conſtant, pūctum, lineam, planiciem, & profundum, clarius oculis humanis unquam ſubiecit? De planis uero corporibus, ſolidiſq;, de rotundis, conicis quoque, & his quæ more pyramidum aſſurgunt: item de linea, ſuperficie, & corpore, quibus tribus rebus omnis continetur magnitudo: & quia omne corpus tribus conſtat interuallis, longitudine, latitudine, craſſitudine: deniq; de quadrata figura, quæ in architectura principem locum, & iure ſibi congruentem uendicat, cuiq; quaſi proprium eſt, quod eſt cu-

bus ſolidus & ſtabilis, firmiter inſiſtens quaquauerſum ceciderit, quia
longitudinem latitudinem & profunditatem habeat. Atq; de his omni-
bus, quis obſecro uel doctius, uel accuratius, uel diligentius noſtro hoc
Archimede tradidit? Sunt hodie non pauci, qui hæc ſtudia magno cum
honore ſequuntur, digniq́; habentur, quibus uel ſtatuæ, ad immortalem
ſtudiorum ſuorum memoriam erigantur. quales potiſſimum noſtra eti-
am ſecula uiderunt, Ioannem Stoſſlerum Sueuū, Ioannem Schœnerum
Caroloſtadium amicum, & in Mathematis ſtudijs præceptorem uni-
cè mihi dilectum: Bilibaldum quoq; Pyrkheymerum, uirum præclaris
rebus obeundis conſultiſſimum: ac paulo ante hæc tempora humanis
exutum curis, Simonē Grynæum, uirum ex æquo & doctum & pium,
cuiq́; hoc unum deerat, quòd in tanta diuinarū humanarūq; rerū cogni-
tione minimè eſſet inflatus. Chriſtianum quoq; Herlinum, Argentinen
ſem Mathematicum, uirum longè doctiſſimum, hoc loco uel in primis
ac iure celebrandum puto, quippe cui non ſolum bonarum artium ſtu-
dioſi, ſed & ipſi Archimedis noſtri manes plurimū debent, quòd in ho-
ſce libros, quo cùm emendatiores, tum elegantib. typis illuſtriores pro-
dirent, ſtudium haud leue impendit. Philippus Melanchthon uero
hodie purioris literaturæ, ac ſeuerioris philoſophiæ uindex, cum Ioachi-
mo Camerario Franco, ac altero item ciue meo Ioachimo Rhetico, quid
non ſalutaris operæ inſumit, ut quàm latiſſimè odorem ſuum diffundāt
recta ſtudia? De affine noſtro Achille P. reconditarum artium ſtudioſo,
in primis uero Aſtrologiæ ac Medicinæ ſuprà quàm dici queat perito,
hoc parcius hic ſum dicturus, quo ſcio illum eſſe modeſtiorem, quàm ut
laudes noſtras in ſe agnoſcere uelit ullas, cum ſit alioqui maximis laudi-
bus dignus. Ioannem à Regiomonte olim ut extra communem mortali
um aleam poſuit natura, ita mundus hic, in Mathematicis diſciplinis,
maiorem an habuerit in aliquot retro ſæculis, dubitare auſis. Is Rhomæ
agens, paulo poſt captā, ac crudeliſſime direptam à Turcis Conſtanti-
nopolitanā ciuitatem: cum iam literatæ literæ, bonis auſpicijs, tanquā ex
fuga & tempeſtate ſeruatæ, in Italiam eſſent illatæ: is, inquam ego, primæ
uocationi ſuæ in Italiam ultro obſequens, ut ampliſſimam nominis ſuæ
famam eſt conſequutus, ita ex Conſtantinopolitana clade ereptos Græ
cos libros & uidit plurimos, & deſcripſit non paucos articulis proprijs.
Inter alia autem Archimedis libros, de ſphæra & cylindro, de circuli di-
menſione, deq́; alijs rebus non tam utilibus quàm neceſſarijs mortalium
generi, ueluti palàm eſt legere in iſtis libris, quos Iacobus Cremonenſis
uir ea tempeſtate duplici honore dignus, cum quòd Græcè doctus eſſet,
tum quod linguarum commercio adiutus, hanc operam ſolus uideretur
abſoluere poſſe, in gratiam Nicolai V. Rom. Pont. iam pridem latinos
fecerat: oblatos ſibi ab amicis diligentiſſimè deſcripſit, adiectis non rarò
in marginibus, Græcis (quod etiam Græcorum codicum facta fuiſſet ſi-
bi

bi copia) ſi quæ uiſa fuiſſent uel uerſa duriuſculè, uel non admodum in-
telligenter deſcripta. Altera deinde ſuſcepta in Italiam profectio, ut nō
fuit felix, ita nihil bonorum autorū ad nos reportare potuit. Hominem
enim exuens (non ſine datiueneni ſuſpicione) ad nos, ciues ſuos, quid
referret exanimis? Sed hæc miſſa. Cæterum de quibus diximus, omnes
haud illibenter Archimedi noſtro ſunt conceſſuri. Etenim quæ ſcripſit
ille, in eo eminentiæ poſita ſunt loco, ut qui palmam artis præripere ei
contendere auſit, facile inuenias neminem. Claruit autem Archimedes
Syracuſis ciuitate Siciliæ, Mathematicus & Geometra inter primos no
bilis: à quo metiendi moles quaſcunq; & facilis & expedita inuenta eſt
ratio. Quin etiam terræ globum huiuſmodi inueniſſe, memoriæ prodi
tum eſt, ut dicere non dubitarit: Si alter foret terræ globus, ſe illum ad
hunc ſuum pertracturum: uel hunc ſuum, ad illum alterum impulſurū.
Et uerè quidem. Nam ipſe artis ſuæ fiducia, haud paruo tempore obſi-
dionem M. Marcelli remoratus, & patriæ ſimul tutatus eſt muros. Pla
cet etiam, in gratiā ſtudioſorum, C. Plinij calculum hic ſubijcere, ita ſcri
bentis: Grande & Archimedi Geometricæ & machinalis ſcientiæ teſti- Lib. 7.
monium, M. Marcelli contigit interdicto, cum Syracuſæ caperentur, cap. 37.
ne uiolaretur unus, niſi fefelliſſet imperium militaris imprudentia. Et
hæc quidem ad hunc modum dicta ſint ſatis, dum illud quoq; ceu au-
ctarij uice adiecerim: Secretiorem eſſe cauſam & uim liberalium ſtudio
rum, quàm ut à prophanis ingenijs percipi queat. Nam illa ex ſtudijs
noſtris proueniens cùm laus, tum fructus & gloria, ad unam illam ſum-
mamq́; rerum omnium cauſam primam dirigenda ueniunt, cuius præ
uia bonitate fit ut interim dulces ſint omnes illæ, in recta ſtudia colloca
tæ curæ, labores, uigiliæ, dum mens noſtra quàm fieri poterit perfectiſ
ſimè ad cognitionem honeſtarum artium penetrare & poſſit & ualeat.
Quibus uerò ſpreta ſunt honeſta illa ſtudia noſtra, illos neq; Numinis
curam, neq; propriæ felicitatis rationem habere, iam ante meritò dixi-
mus. Nos autem qui æquiore iudicio quàm uulgus ſtolidum, expendi
mus omnia, finem noſtrorum ſtudiorum dicimus eſſe: primum ut O-
pificem rerū, quàm fieri queat pleniſſimè cognoſcamus: deinde ut do-
nis illius eruditi, per hanc naturalium rerum cognitionem, animis quo-
que euadamus meliores ac puriores, dum ipſis tandem ſummis ſpiriti-
bus reddamur quàm ſimilimi, gratia & miſericordia Dei & Seruatoris
noſtri: qui & uos & unà uobiſcum Rempub. ueſtram tueatur
perpetuò. Amen. Ex Vrbe ueſtra, ad Calend.
Decembres. Anno MDXLIII.

ARCHIMEDES
de seipso.

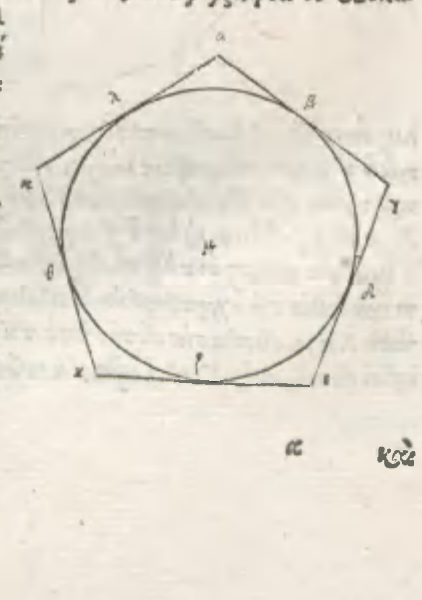
Ipse Syracusio surgens de sanguine ciuis,
Corripior patriæ dulcis amore meæ.
Clarus eram ingenio, Siculis cantatus in oris,
Clara simul per me Sicilis ora fuit.
Quin rerum domina ut patriam circundaret urbem,
Ars est Romanum nostra morata ducem.
Sed bene quæ uetuit uictor, male corripit arma
Miles, & è multis me tulit ausa manus.
Ni respexisset miseram Germania sortem,
Me simul atq; meas commiserata uices:
Abfuit inde parum mecum monumenta perirent,
Plurima, in extensos uiuere digna dies.
Quod supero tenebras, cœlo fruiturus aperto
Posthac, Germanis debeo, non Siculis.

καλῶς ἔχειν μεταδιδόναι τοῖς οἰκείοις τῶν μαθημάτων, ἀποστέλλομέν σοι τὰς ἀποδείξεις ἀναγράψαντες, ὑπὲρ ὧν ἔξεσται τοῖς περὶ τὰ μαθήματα ἀναστρεφομένοις ἐπισκέψασθαι. ἔρρωσο.

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΠΕΡΙ ΣΦΑΙΡΑΣ
ΚΑΙ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ, ΒΙΒΛΙΟΝ Α.

ΓΡΑΦΟΝΤΑΙ πρῶτον τὰ ἀξιώματα, καὶ τὰ λαμβανόμενα εἰς τὰς ἀποδείξεις αὐτῶν. εἰσί τινες ἐν ἐπιπέδῳ καμπύλαι γραμμαὶ πεπερασμέναι, αἳ τῶν τὰ πέρατα ἐπιζευγνυουσῶν αὐτῶν εὐθειῶν, ἤτοι ὅλαι ἐπὶ τὰ αὐτά εἰσιν, ἢ οὐδὲν ἔχουσιν ἐπὶ τὰ ἕτερα. ἐπὶ τὰ αὐτὰ δὴ κοίλην καλῶ τὴν τοιαύτην γραμμὴν, ἐν ᾗ ἐὰν δύο σημείων λαμβανομένων ὁποιωνοῦν, αἱ μεταξὺ τῶν σημείων εὐθεῖαι, ἤτοι πᾶσαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ πίπτουσι τῆς γραμμῆς. ἢ τινὲς μὲν ἐπὶ τὰ αὐτά, τινὲς δὲ κατ' αὐτῆς, ἐπὶ τὰ ἕτερα δὲ μηδεμία. ὁμοίως δὴ καὶ ἐπιφάνειαί τινές εἰσι πεπερασμέναι. αὗται μὲν οὖν ἐν ἐπιπέδῳ, τὰ δὲ πέρατα ἔχουσιν ἐν ἐπιπέδῳ. ἢ τοῦ ἐπιπέδου ἐν ᾧ τὰ πέρατα ἔχουσιν, ἤτοι ὅλαι ἐπὶ τὰ αὐτά ἔσονται, ἢ οὐδὲν ἔχουσιν ἐπὶ τὰ ἕτερα. ἐπὶ τὰ αὐτὰ δὴ κοίλας καλῶ τὰς τοιαύτας ἐπιφανείας, ἐν αἷς ἂν δύο σημείων λαμβανομένων, αἱ μεταξὺ τῶν σημείων εὐθεῖαι, ἤτοι πᾶσαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ πίπτουσι τῆς ἐπιφανείας. ἢ τινὲς μὲν ἐπὶ τὰ αὐτά, τινὲς δὲ κατ' αὐτῆς, ἐπὶ τὰ ἕτερα δὲ μηδεμία. τομέα δὲ στερεὸν καλῶ, ἐπειδὰν σφαῖραν κῶνος τέμνῃ, κορυφὴν ἔχων πρὸς τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, τὸ ἐμπεριεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου, καὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ἐντὸς τοῦ κώνου. ῥόμβον δὲ καλῶ στερεόν, ἐπειδὰν δύο κῶνοι τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντες, τὰς κορυφὰς ἔχωσιν ἐφ' ἑκάτερα τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως, ὅπως οἱ ἄξονες αὐτῶν ἐπ' εὐθείας ὦσι κείμενοι, τὸ ἐξ ἀμφοῖν τοῖν κώνοιν συγκείμενον στερεὸν σχῆμα. λαμβάνω δὲ ταῦτα, τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν γραμμῶν ἐλαχίστην εἶναι τὴν εὐθεῖαν. τῶν δὲ ἄλλων γραμμῶν ἐὰν ἐν ἐπιπέδῳ οὖσαι τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχωσιν, ἀνίσους εἶναι τὰς τοιαύτας. ἐπειδὰν ὦσιν ἀμφότεραι ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι, καὶ ἤτοι ὅλη περιλαμβάνηται, ἡ ἑτέρα αὐτῶν ὑπὸ τῆς ἑτέρας ἐπιφανείας, καὶ τῆς εὐθείας τῆς τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσης αὐτῇ, ἢ τινὰ μὲν περιλαμβάνηται, τινὰ δὲ κοινὰ ἔχῃ, καὶ ἐλάσσονα εἶναι τὴν περιλαμβανομένην. ὁμοίως καὶ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν, ἐὰν ἐν ἐπιπέδῳ τὰ πέρατα ἔχωσιν, ἐλάσσονα εἶναι τὴν ἐπίπεδον. τῶν δὲ ἄλλων ἐπιφανειῶν, καὶ τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν, ἐὰν ἐν ἐπιπέδῳ τὰ πέρατα ᾖ, ἀνίσους εἶναι τὰς τοιαύτας. ἐπειδὰν ὦσιν ἀμφότεραι ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι, καὶ ἤτοι ὅλη περιλαμβάνηται ὑπὸ τῆς ἑτέρας ἡ ἑτέρα ἐπιφάνεια, καὶ τῆς ἐπιπέδου τῆς τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσης αὐτῇ, ἢ τινὰ μὲν περιλαμβάνηται, τινὰ δὲ κοινὰ ἔχῃ, καὶ ἐλάσσονα εἶναι τὴν περιλαμβανομένην. ἔτι δὲ τῶν ἀνίσων γραμμῶν, καὶ τῶν ἀνίσων ἐπιφανειῶν, καὶ τῶν ἀνίσων στερεῶν, τὸ μεταξὺ τοῦ ἐλάσσονος ὑπερέχειν τοιούτῳ, ὃ συντιθέμενον αὐτὸ ἑαυτῷ δυνατόν ἐστιν ὑπερέχειν παντὸς τοῦ προτεθέντος τῶν πρὸς ἄλληλα λεγομένων. τούτων δὲ ὑποκειμένων, ἐὰν εἰς κύκλον πολύγωνον ἐγγραφῇ, φανερὸν ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ ἐγγραφέντος πολυγώνου ἐλάσσων ἐστὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας. ἑκάστη γὰρ τῶν τοῦ πολυγώνου πλευρῶν ἐλάσσων ἐστὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, τῆς ὑπὸ τῆς αὐτῆς ἀποτεμνομένης.

ΕΑΝ περὶ κύκλον πολύγωνον περιγραφῇ, ἡ τοῦ περιγραφέντος πολυγώνου περίμετρος, μείζων ἐστὶ τῆς περιμέτρου τοῦ κύκλου. περὶ γὰρ κύκλον πολύγωνον περιγεγράφθω τὸ ὑποκείμενον. λέγω, ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου μείζων ἐστὶ τῆς περιμέτρου τοῦ κύκλου. ἐπεὶ γὰρ συναμφότερος ἡ βαλ μείζων ἐστὶ τῆς βλ περιφερείας, διὰ τὸ τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαν περιλαμβάνειν τὴν περιφέρειαν, ὁμοίως καὶ συναμφότερος μὲν ἡ δγ, γβ, τῆς δβ. συναμφότερος δὲ ἡ λκ, κθ, τῆς λθ. συναμφότερος δὲ ἡ ζη θ, τῆς ζθ. ἔτι δὲ συναμφότερος ἡ δε, εζ, τῆς δζ. ὅλη ἄρα ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου μείζων ἐστὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου.



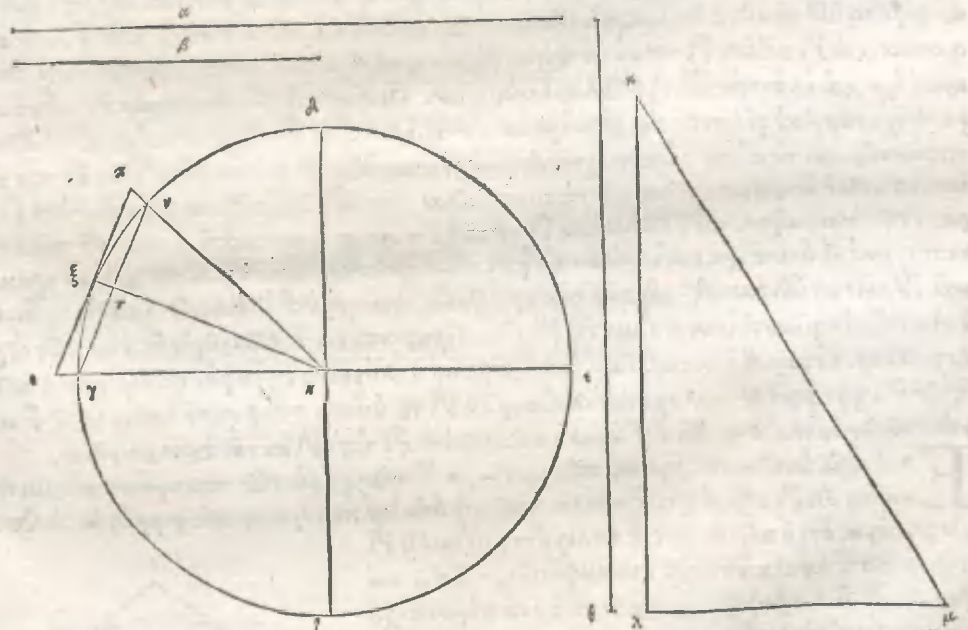
ΔΥο μεγεθῶν ἀνίσων δοθέντων, δυνατόν ἐστιν εὑρεῖν δύο εὐθείας ἀνίσους, ὥστε τὴν μείζονα εὐθεῖαν πρὸς τὴν ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἐλάσσονα, ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἐλάσσον. ἔστω δύο μεγέθη ἄνισα, τὰ αβ, δ.

β

α καὶ

καὶ ἔστω μεῖζον τὸ α β. λέγω, ὅτι δυνατόν ἐστι δύο εὐθείας ἀνίσας εὑρεῖν, τὸ εἰρημένον ἐπίταγμα ποιούσας. κείσθω διὰ τὸ δεύτερον τοῦ πρώτου τῶν Εὐκλείδου, τῷ δ ἴσον τὸ β γ, καὶ κείσθω τις εὐθεῖα γραμμὴ ἡ ζ η. τὸ δὴ γ α ἑαυτῷ ἐπισυντιθέμενον ὑπερέξει τοῦ δ. πεπολλαπλασιάσθω οὖν, καὶ ἔστω τὸ α θ. καὶ ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ α θ τοῦ α γ, τοσαπλάσιος ἔστω ἡ ζ η τῆς η ε. ἔστιν ἄρα ὡς θ α πρὸς α γ, οὕτως ἡ ζ η πρὸς η ε. καὶ ἀνάπαλίν ἐστιν ὡς ἡ ε η πρὸς η ζ, οὕτως τὸ α γ πρὸς α θ. καὶ ἐπεὶ μεῖζόν ἐστι τὸ α θ τοῦ δ, τουτέστι τοῦ γ β. τὸ ἄρα γ α πρὸς τὸ α θ λόγον ἐλάσσονα ἔχει, ἤπερ τὸ γ α πρὸς γ β. καὶ συνθέντι ἡ ε ζ ἄρα πρὸς ζ η ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ α β πρὸς β γ (διὰ λῆμμα) ἴσον δὲ τὸ β γ τῷ δ. ἡ ε ζ ἄρα πρὸς ζ η ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ α β πρὸς τὸ δ. εὑρημέναι εἰσὶν ἄρα δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, ποιοῦσαι τὸ (ἴσον) ἐπίταγμα. τουτέστι τὴν μείζονα πρὸς τὴν ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἐλάσσονα, ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον.

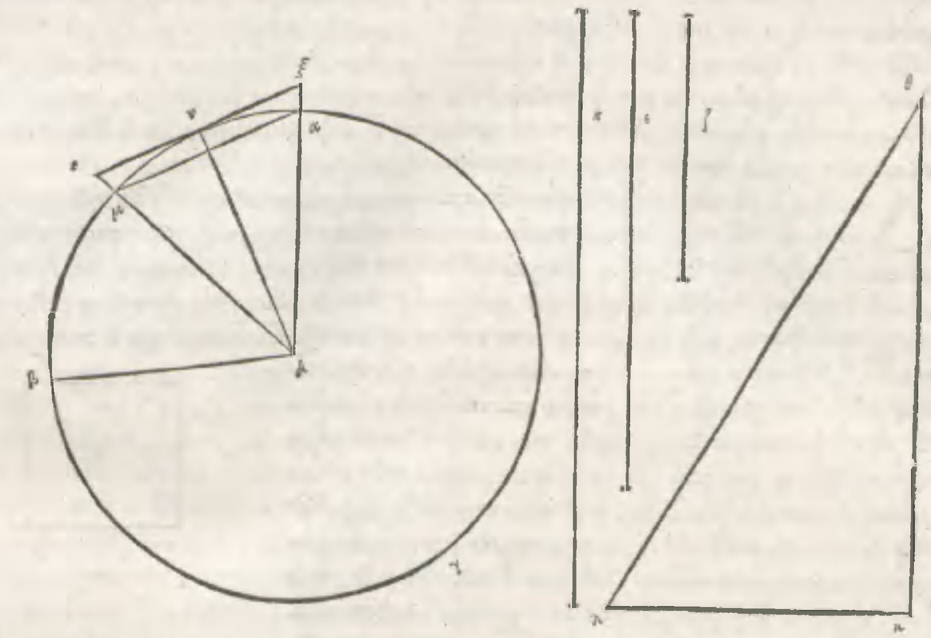
γ Δύο μεγεθῶν ἀνίσων δοθέντων, καὶ κύκλου, δυνατόν ἐστιν εἰς τὸν κύκλον πολύγωνον ἐγγράψαι, καὶ ἄλλο περιγράψαι. ὅπως ἡ τοῦ περιγραφομένου πολυγώνου πλευρά, πρὸς τὴν τοῦ ἐγγραφομένου πολυγώνου πλευράν, ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον. ἔστω τὰ δοθέντα δύο μεγέθη τὰ α β. ὁ δὲ δοθεὶς κύκλος ὁ ὑποκείμενος. λέγω οὖν, ὅτι δυνατόν ἐστι ποιεῖν τὸ ἐπίταγμα. εὑρήσθωσαν δὲ δύο εὐθεῖαι αἱ θ, κ λ, ὧν μείζων ἔστω ἡ θ. ὥστε τὴν θ πρὸς τὴν κ λ, ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλαττον. καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ λ τῇ κ λ πρὸς ὀρθὰς ἡ λ μ, καὶ ἀπὸ τοῦ κ τῇ θ ἴση κατήχθω ἡ κ μ. δυνατὸν γὰρ τοῦτο. καὶ ἤχθωσαν τοῦ κύκλου δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ γ ε, δ ζ. τέμνοντες οὖν τὴν ὑπὸ τῶν δ η γ γωνίαν δίχα, καὶ τὴν ἡμίσειαν αὐτῆς δίχα, καὶ ἀεὶ τοῦτο ποιοῦντες λείψομεν τινὰ γωνίαν ἐλάσσονα ἢ διπλασίαν τῆς ὑπὸ λ κ μ. λελείφθω, καὶ ἔστω ἡ ὑπὸ ν η γ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ν γ. ἡ ἄρα ν γ πο-



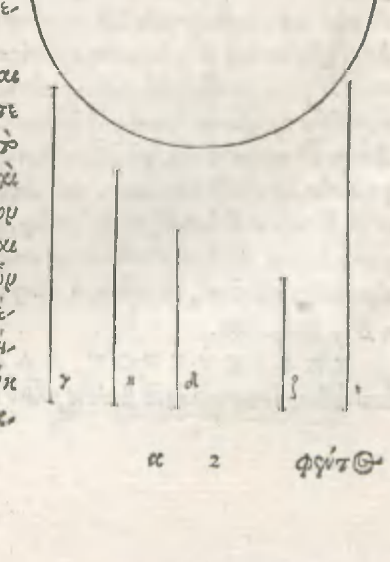
λυγώνου ἐστὶ πλευρὰ ἰσοπλεύρου. ἐπείπερ ἡ ὑπὸ ν η γ γωνία μετρεῖ τὴν ὑπὸ δ η γ ὀρθὴν οὖσαν, καὶ ἡ ν γ ἄρα περιφέρεια μετρεῖ τὴν γ δ, τέταρτον οὖσαν κύκλου· ὥστε καὶ τὸν κύκλον μετρεῖ. πολυγώνου ἄρα ἐστὶ πλευρὰ ἰσοπλεύρου ἡ γ ν. φανερὸν γάρ ἐστι τοῦτο. καὶ τετμήσθω ἡ ὑπὸ γ η ν γωνία δίχα τῇ η ξ εὐθείᾳ. καὶ ἀπὸ τοῦ ξ ἐφαπτέσθω τοῦ κύκλου ἡ ο ξ π. καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ η ν π, η γ ο. ὥστε καὶ ἡ π ο πολυγώνου ἐστὶ πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου περὶ τὸν κύκλον, καὶ ἰσοπλεύρου, φανερὸν ὅτι καὶ ὁμοίου τῷ ἐγγραφομένῳ, οὗ πλευρὰ ἡ ν γ. ἐπεὶ δὲ ἐλάσσων ἐστὶν ἢ διπλασία ἡ ὑπὸ ν η γ τῆς ὑπὸ λ κ μ, διπλασία δὲ τῆς ὑπὸ τ η γ, ἐλάσσων ἐστὶν ἄρα ἡ ὑπὸ τ η γ τῆς ὑπὸ λ κ μ. καὶ εἰσὶν ὀρθαὶ αἱ πρὸς τοῖς λ τ. ἡ ἄρα μ κ πρὸς λ κ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γ η πρὸς η τ. ἴση δὲ ἡ γ η τῇ η ξ.

τῇ η ξ. ὥστε ἡ η ξ πρὸς η τ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, τουτέστιν ἡ π ο πρὸς ν γ. ἢ ἡ μ κ πρὸς κ λ. ἔτι δὲ ἡ κ μ πρὸς κ λ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ α πρὸς τὸ β. καὶ ἔστι μὲν π ο πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου πολυγώνου, ἡ δὲ γ ν τοῦ ἐγγραφομένου· ὅπερ προέκειτο εὑρεῖν.

δ Πάλιν δύο μεγεθῶν ἀνίσων ὄντων, καὶ τομέως, δυνατόν ἐστι περὶ τὸν τομέα πολύγωνον περιγράψαι, καὶ ἄλλο ἐγγράψαι. ὥστε τὴν τοῦ περιγεγραμμένου πλευράν, πρὸς τὴν ἐγγεγραμμένου πλευράν, ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον. ἔστω γὰρ πάλιν δύο

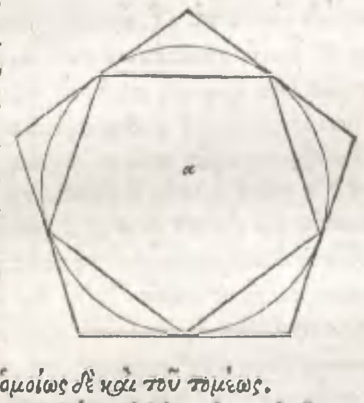


μεγέθη ἄνισα τὰ ε ζ. ὧν μεῖζον ἔστω τὸ ε, κύκλος δὲ τις ὁ α β γ, κέντρον ἔχων τὸ δ. καὶ πρὸς τὸ δ τομεὺς συνεστάτω ὁ α δ β. δεῖ δὴ περιγράψαι, καὶ ἐγγράψαι πολύγωνον περὶ τὸν α β δ τομέα, ἴσας ἔχον τὰς πλευρὰς χωρὶς τῶν β δ α, ὅπως γένηται τὸ ἐπίταγμα. εὑρήσθωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι αἱ η θ κ ἄνισοι, καὶ μείζων ἡ η. ὥστε τὴν η πρὸς τὴν θ κ ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον. δυνατὸν γὰρ τοῦτο. καὶ ἀπὸ τοῦ θ ὁμοίως ἀχθείσης πρὸς ὀρθὰς τῇ θ κ τῆς θ λ, προσβεβλήσθω τῇ η ἴση ἡ κ λ. δυνατὸν γάρ. ἐπεὶ οὖν μείζων ἐστὶν ἡ η τῆς θ κ, τεμνομένης δὴ τῆς ὑπὸ τῶν α δ β γωνίας δίχα, καὶ τῆς ἡμισείας δίχα, καὶ ἀεὶ τούτου γινομένου λειφθήσεταί τις γωνία, ἐλάσσων οὖσα ἢ διπλασία τῆς ὑπὸ λ κ θ. λελείφθω οὖν ἡ ὑπὸ α δ μ. ἡ α μ οὖν γὰρ πολυγώνου πλευρὰ ἐγγραφομένου εἰς τὸν κύκλον. καὶ ἐὰν τέμωμεν τὴν ὑπὸ α δ μ γωνίαν δίχα τῇ δ ν, καὶ ἀπὸ τοῦ ν, ἐπαγάγωμεν ἐφαπτομένην τοῦ κύκλου τὴν ν ξ ο, αὕτη πλευρὰ ἔσται τοῦ πολυγώνου τοῦ περιγραφομένου περὶ τὸν αὐτὸν κύκλον, ὁμοίου τῷ εἰρημένῳ. καὶ ὁμοίως τοῖς προειρημένοις ἡ ξ ο πρὸς τὴν α μ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ε μέγεθος πρὸς τὸ ζ.

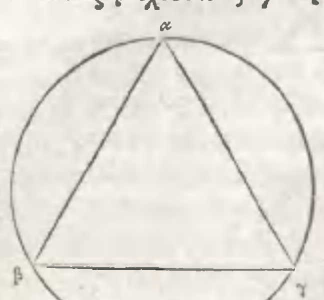


ε Κύκλου δοθέντος καὶ δύο μεγεθῶν ἀνίσων, περιγράψαι περὶ τὸν κύκλον πολύγωνον, καὶ ἄλλο ἐγγράψαι. ὥστε τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον. ἐκκείσθω κύκλος ὁ α, καὶ δύο μεγέθη ἄνισα τὰ ε ζ. καὶ μεῖζον τὸ ε. δεῖ οὖν πολύγωνον ἐγγράψαι εἰς τὸν κύκλον. καὶ ἄλλο περιγράψαι, ἵνα γένηται τὸ ἐπιταχθέν. λαμβάνω γὰρ δύο εὐθείας ἀνίσους τὰς γ δ. ὧν μείζων ἔστω ἡ γ. ὥστε τὴν γ πρὸς τὴν δ ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, ἢ τὸ ε πρὸς τὸ ζ. καὶ τῶν γ δ μέσης ἀνὰ λόγον ληφθείσης τῆς η, μείζων ἄρα καὶ ἡ γ τῆς η. περιγεγράφθω δὴ περὶ κύκλον πολύγωνον, καὶ ἄλλο ἐγγεγράφθω, ὥστε τὴν τοῦ περιγραφέντος πολυγώνου πλευρὰν, πρὸς τὴν τοῦ ἐγγραφέντος, ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, ἢ τὴν γ πρὸς τὴν η, καθὼς ἐμάθομεν. διὰ τοῦτο δὴ καὶ ὁ διπλάσιος λόγος τοῦ διπλασίου ἐλάσσων ἐστί. καὶ τοῦ μὲν τῆς πλευρᾶς πρὸς τὴν πλευρὰν, διπλάσιός ἐστιν ὁ τοῦ πολυγώνου πρὸς τὸ πολύγωνον· ὅμοια γάρ. τοῦ δὲ γ πρὸς τὴν η, ὁ τοῦ γ πρὸς τὴν δ. καὶ τὸ περιγραφὲν ἄρα πολύγωνον πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γ πρὸς τὴν δ. πολλῷ ἄρα καὶ τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ε πρὸς τὸ ζ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι δύο μεγεθῶν ἀνίσων δοθέντων, καὶ τομέως, δυνατόν ἐστι περὶ τὸν τομέα πολύγωνον περιγράψαι, καὶ ἄλλο ἐγγράψαι ὅμοιον αὐτῷ, ἵνα τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχῃ, ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον. φανερὸν δὲ καὶ τοῦτο, ὅτι ἐὰν δοθῇ κύκλος, ἢ τομεύς, καὶ χωρίον τι, δυνατόν ἐστιν ἐγγράφοντα εἰς τὸν κύκλον, ἢ τὸν τομέα πολύγωνα ἰσόπλευρα. καὶ ἔτι ἀεὶ εἰς τὰ περιλειπόμενα τμήματα, λείπειν τινὰ τμήματα τοῦ κύκλου ἢ τοῦ τομέως, ἅπερ ἔσται ἐλάσσονα τοῦ προκειμένου χωρίου· ταῦτα γὰρ ἐν τῇ στοιχειώσει παραδίδονται.

ε Δεικτέον δὲ, ὅτι καὶ κύκλου δοθέντος, ἢ τομέως καὶ χωρίου, δυνατόν ἐστι περιγράψαι πολύγωνον περὶ τὸν κύκλον, ἢ τομέα, ὥστε τὰ περιλειπόμενα τῆς περιγραφῆς τμήματα ἐλάσσονα εἶναι τοῦ δοθέντος χωρίου. ἔστω γὰρ ἐπὶ κύκλου δείξαντα, μεταγαγεῖν τὸν ὅμοιον λόγον καὶ ἐπὶ τοῦ τομέως. δεδόσθω κύκλος ὁ α. καὶ χωρίον τι τὸ β, δυνατὸν δὴ περιγράψαι περὶ τὸν κύκλον πολύγωνον, ὥστε τὰ ἀπολειφθέντα τμήματα μεταξὺ τοῦ κύκλου καὶ τοῦ πολυγώνου ἐλάσσονα εἶναι τοῦ β χωρίου. καὶ γὰρ ὄντων δύο μεγεθῶν ἀνίσων, μείζονος μὲν συναμφοτέρου τοῦ χωρίου καὶ τοῦ κύκλου, ἐλάσσονος δὲ τοῦ κύκλου, περιγεγράφθω περὶ τὸν κύκλον πολύγωνον, καὶ ἄλλο ἐγγεγράφθω, ὥστε τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, ἢ τὸ εἰρημένον μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον. τοῦτο δὴ τὸ περιγραφόμενον πολύγωνον ἐστὶν οὗ τὰ περιλείμματα ἔσται, ἐλάσσονα τοῦ προτεθέντος χωρίου τοῦ β. εἰ γὰρ τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ τὸ συναμφότερον, ὅ τε κύκλος καὶ τὸ β χωρίον πρὸς αὐτὸν τὸν κύκλον· τοῦ δὲ ἐγγραφομένου μείζων ὁ κύκλος, πολλῷ μᾶλλον τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸν κύκλον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ τὸ συναμφότερον, ὅ τε κύκλος καὶ τὸ β χωρίον πρὸς αὐτὸν τὸν κύκλον. καὶ διελόντι ἄρα τὰ ἀπολείμματα τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πρὸς τὸν κύκλον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ β χωρίον πρὸς τὸν κύκλον. ἐλάσσονα ἄρα τὰ ἀπολείμματα τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου τοῦ β χωρίου, ἢ ὅ. ἐπεὶ τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸν κύκλον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ τὸ συναμφότερον, ὅ τε κύκλος καὶ τὸ β χωρίον πρὸς τὸν κύκλον. διὰ τοῦτο δὴ ἔλασσον ἔσται τὸ περιγραφὲν συναμφοτέρου. ὥστε καὶ ἄλλα τὰ περιλείμματα ἐλάσσονα ἔσται τοῦ χωρίου τοῦ β. ὁμοίως δὲ καὶ τοῦ τομέως.



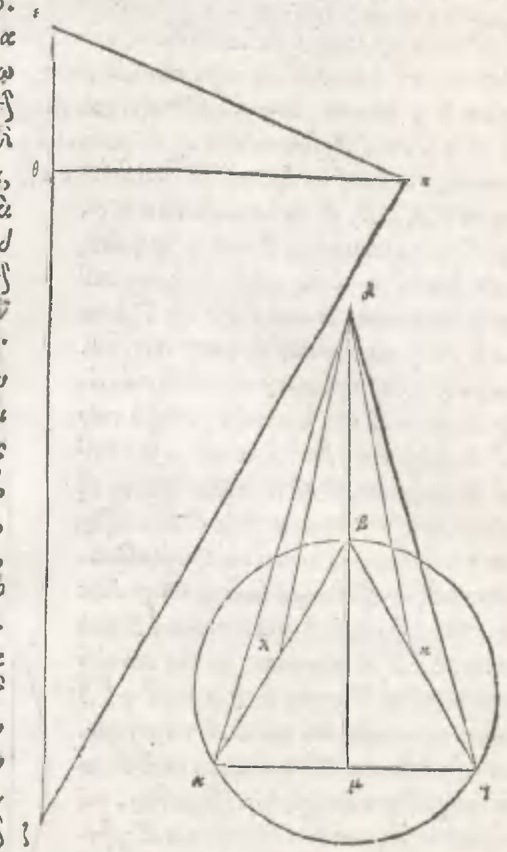
ζ Ἐὰν ἐν ἰσοσκελεῖ κώνῳ πυραμὶς ἐγγραφῇ, ἰσόπλευρον ἔχουσα βάσιν, ἡ ἐπιφάνεια αὐτῆς χωρὶς τῆς βάσεως, ἴση ἐστὶ τριγώνῳ, βάσιν μὲν ἔχοντι ἴσην τῇ περιμέτρῳ τῆς βάσεως. ὕψος δὲ τὴν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ μίαν πλευρὰν τῆς βάσεως κάθετον ἀγομένην. ἔστω κῶνος ἰσοσκελής, οὗ βάσις ὁ αβγ κύκλος, καὶ εἰς αὐτὸν ἐγγεγράφθω πυραμὶς ἰσόπλευρον ἔχουσα τρίγωνον τὸ αβγ. λέγω ὅτι ἡ ἐπιφάνεια αὐτῆς χωρὶς τῆς βάσεως ἴση ἐστὶ τῷ εἰρημένῳ τριγώνῳ. ἐπεὶ γὰρ ἰσοσκελὴς ὁ κῶνος, καὶ ἰσόπλευρος ἡ βάσις τῆς πυραμίδος, τὰ ὕψη τῶν περιεχόντων τριγώνων τὴν πυραμίδα, ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις. καὶ βάσιν μὲν ἔχει τὰ τρίγωνα, τὰς αβ, βγ, γα. ὕψος δὲ, τὸ εἰρημένον. ὥστε τὰ τρίγωνα ἴσα ἐστὶ τριγώνῳ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν ἴσην ταῖς αβ, βγ, γα. ὕψος δὲ τὴν εἰρημένην εὐθεῖαν, τουτέστιν ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος, χωρὶς τοῦ αβγ τριγώνου.



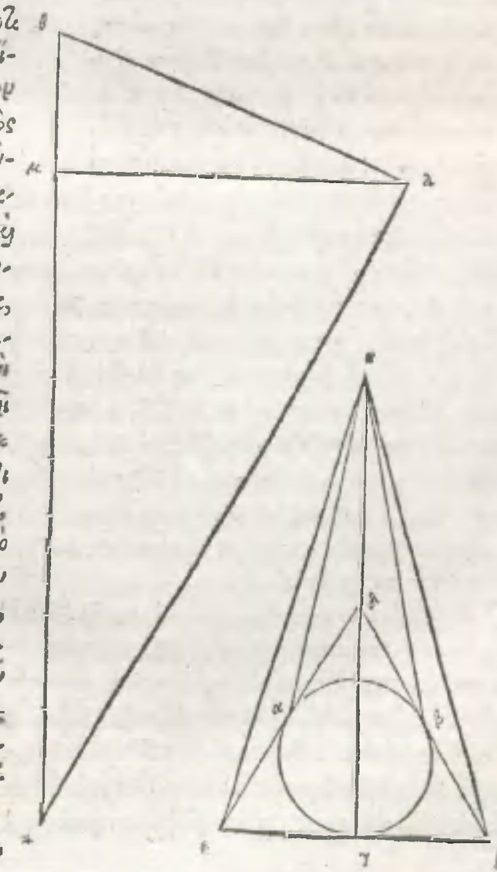
ΣΑΦΕΣΤΕΡΟΝ ΑΛΛΩΣ Η ΔΕΙΞΙΣ.

Ἔστω κῶνος ἰσοσκελής, οὗ βάσις μὲν ὁ αβγ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ

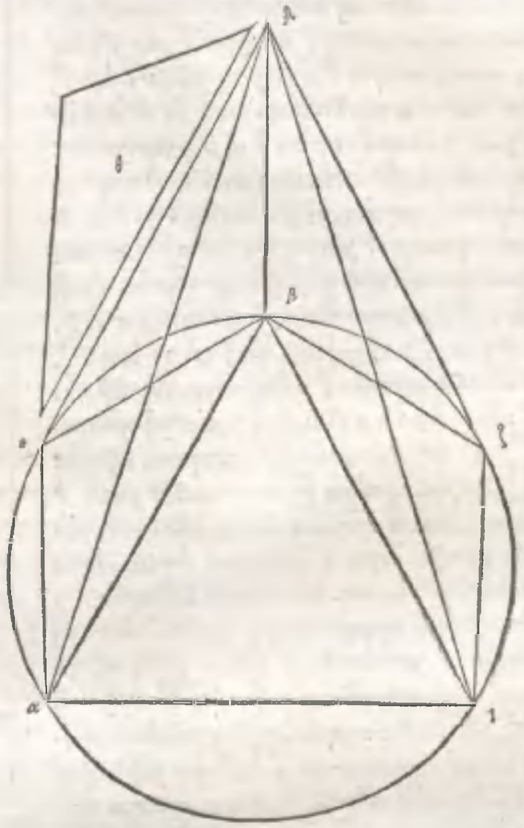
δ σημεῖον. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν κῶνον πυραμίς, βάσιν μὲν ἔχουσα ἰσόπλευρον τρίγωνον τὸ αβγ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ δα, δγ, δβ. λέγω ὅτι τὰ αδβ, αδγ, βδγ τρίγωνα ἴσα ἐστὶ τριγώνῳ, οὗ ἡ μὲν βάσις ἴση ἐστὶ τῇ περιμέτρῳ τοῦ αβγ τριγώνου. ἡ δὲ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος, ἴση τῇ καθέτῳ τῇ ἀπὸ τοῦ δ ἐπὶ τὴν βγ ἀγομένῃ. ἤχθωσαν γὰρ κάθετοι αἱ δκ, δλ, δμ. αὗται ἄρα ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. καὶ κείσθω τρίγωνον τὸ εζη, ἔχον τὴν μὲν εζ βάσιν τῇ περιμέτρῳ τοῦ αβγ τριγώνου ἴσην. τὴν δὲ ηθ κάθετον τῇ δλ ἴσην. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν βγ, δλ διπλάσιόν ἐστι τοῦ δβγ τριγώνου· ἔστι δὲ καὶ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν αβ, δκ διπλάσιον τοῦ αβδ τριγώνου. τὸ δὲ ὑπὸ τῶν αγ, δμ διπλάσιον τοῦ αδγ τριγώνου. τὸ ἄρα ὑπὸ τῆς περιμέτρου τοῦ αβγ τριγώνου· τουτέστι τῆς εζ, καὶ τῆς δλ, τουτέστι τῆς ηθ, διπλάσιον τῶν αδβ, βδγ, αδγ τριγώνων. ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑπὸ εζ, ηθ διπλάσιον τοῦ εζη τριγώνου, ἴσον ἄρα τὸ εζη τρίγωνον τοῖς αδβ, βδγ, αδγ τριγώνοις.



Ἐὰν περὶ κῶνον ἰσοσκελῆ πυραμὶς περιγραφῇ, ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος χωρὶς τῆς βάσεως, ἴση ἐστὶ τριγώνῳ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν ἴσην τῇ περιμέτρῳ τῆς βάσεως, ὕψος δὲ τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου. η ἔστω κῶνος οὗ βάσις ὁ αβγ κύκλος, καὶ πυραμὶς περιγραφέσθω ὥστε τὴν βάσιν αὐτῆς, τουτέστι τὸ δεζ πολύγωνον περιγεγραμμένον περὶ τὸν αβγ κύκλον εἶναι. λέγω ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος χωρὶς τῆς βάσεως ἴση ἐστὶ τῷ εἰρημένῳ τριγώνῳ. ἐπεὶ γὰρ ὁ ἄξων τοῦ κώνου ὀρθός ἐστι πρὸς τὴν βάσιν, τουτέστι πρὸς τὸν αβγ κύκλον, καὶ αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἐπὶ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύμεναι εὐθεῖαι κάθετοί εἰσιν ἐπὶ τὰς ἐφαπτομένας. ἔσονται ἄρα καὶ αἱ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου ἐπὶ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύμεναι κάθετοι ἐπὶ τὰς δε, εζ, ζδ, αἱ ηα, ηβ, ηγ. ἄρα αἱ εἰρημέναι κάθετοι ἴσαι εἰσὶν ἀλλήλαις· πλευραὶ γάρ εἰσι τοῦ κώνου. κείσθω δὴ τὸ τρίγωνον τὸ θκλ, ἴσην ἔχον τὴν μὲν θκ τῇ περιμέτρῳ τοῦ δεζ τριγώνου. τὴν δὲ λμ κάθετον ἴσην τῇ ηα. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ὑπὸ δε, αη διπλάσιόν ἐστι τοῦ δεη τριγώνου. τὸ δὲ ὑπὸ δζ, ηβ διπλάσιόν ἐστι τοῦ δζη τριγώνου, τὸ δὲ ὑπὸ εζ, γη διπλάσιόν ἐστι τοῦ εζη τριγώνου, ἔστιν ἄρα τὸ ὑπὸ τῆς θκ καὶ τῆς αη, τουτέστι τῆς μλ, διπλάσιον τῶν εδη, ζδη, εζη τριγώνων. ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν θκ, λμ διπλάσιον τοῦ λκθ τριγώνου. διὰ τοῦτο δὴ ἴση ἐστὶν ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος χωρὶς τῆς βάσεως, τριγώνῳ βάσιν μὲν ἔχοντι ἴσην τῇ περιμέτρῳ τοῦ δεζ. ὕψος δὲ τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου.

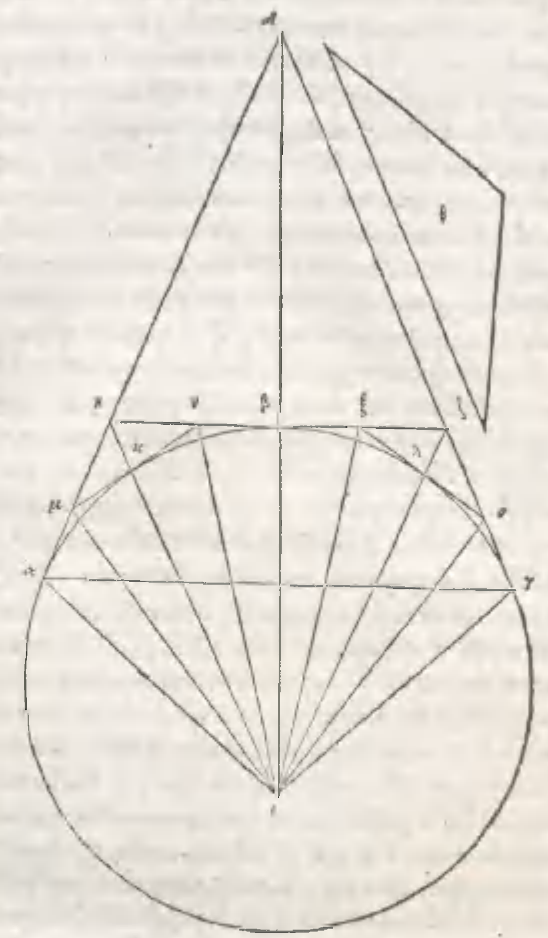


θ Ἐὰν κώνου τινὸς ἰσοσκελοῦς εἰς τὸν κύκλον, ὅς ἐστι βάσις τοῦ κώνου, εὐθεῖα γραμμὴ ἐμπέσῃ, ἀπὸ δὲ τῶν περάτων αὐτῆς εὐθεῖαι γραμμαὶ ἀχθῶσιν ἐπὶ τὴν κορυφὴν τοῦ κώνου, τὸ περιληφθὲν τρίγωνον, ὑπό τε τῆς ἐκπεσούσης καὶ τῶν ἐπιζευχθεισῶν ἐπὶ τὴν κορυφὴν, ἔλασσον ἔσται τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου, τῆς μεταξὺ τῶν ἐπὶ τὴν κορυφὴν ἐπιζευχθεισῶν. ἔστω κώνου ἰσοσκελοῦς βάσις ὁ α β γ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ δ. καὶ διήχθω τις εἰς αὐτὸν εὐθεῖα ἡ α γ. καὶ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὰ α γ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α δ, δ γ. λέγω ὅτι τὸ α δ γ τρίγωνον ἔλασσόν ἐστι τῆς ἐπιφανείας τῆς κωνικῆς, τῆς μεταξὺ τῶν α δ γ. τετμήσθω ἡ α β γ περιφέρεια δίχα κατὰ τὸ β. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α β, γ β, δ β. ἔσται δὴ τὰ α β δ, β γ δ, τρίγωνα μείζονα τοῦ α δ γ τριγώνου, ᾧ δὴ ὑπερέχει τὰ εἰρημένα τρίγωνα τοῦ α δ γ τριγώνου, ἔστω τὸ θ. τὸ δὴ θ ἤτοι τῶν α β, β γ τμημάτων ἔλασσόν ἐστιν, ἢ οὔ. ἔστω μὴ ἔλασσον πρότερον. ἐπεὶ οὖν δύο εἰσὶν ἐπιφάνειαι, ἥ τε κωνικὴ ἡ μεταξὺ τῶν α δ β, μετὰ τοῦ α ε β τμήματος, καὶ ἡ τοῦ α δ β τριγώνου, τὸ αὐτὸ πέρας ἔχουσαι τὴν περίμετρον τοῦ τριγώνου τοῦ α δ β, μείζων ἔσται ἡ περιλαμβάνουσα τῆς περιλαμβανομένης, μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια ἡ μεταξὺ τῶν α δ β μετὰ τοῦ α ε β τμήματος, τοῦ α β δ τριγώνου. ὁμοίως δὴ καὶ ἡ μεταξὺ τοῦ δ β γ τριγώνου, μετὰ τοῦ γ ζ β τμήματος, μείζων ἐστὶ τοῦ β δ γ τριγώνου. ὅλη ἄρα ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια μετὰ τοῦ θ χωρίου ἐστὶ μείζων τῶν εἰρημένων τριγώνων. τὰ δὲ εἰρημένα τρίγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε α δ γ τριγώνῳ, καὶ τῷ θ χωρίῳ, κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ θ χωρίον. λοιπὴ ἄρα ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια, ἡ μεταξὺ τῶν α δ β, μείζων ἐστὶ τοῦ α δ γ τριγώνου. ἔστω δὴ τὸ θ ἔλασσον τῶν α β, β γ τμημάτων. τέμνοντες δὴ τὰς α β, β γ περιφερείας δίχα, καὶ τὰς ἡμισείας αὐτῶν δίχα, λείψομεν τμήματα ἐλάσσονα ὄντα τοῦ θ χωρίου. λελείφθω τὰ ἐπὶ τῶν α ε, ε β, β ζ, ζ γ εὐθειῶν. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ δ ε, δ ζ. πάλιν τοίνυν κατὰ τὰ αὐτά, ἡ μὲν ἐπιφάνεια τοῦ κώνου ἡ μεταξὺ τῶν α δ ε, μετὰ τοῦ ἐπὶ τῆς α ε τμήματος, μείζων ἐστὶ τοῦ α δ ε τριγώνου. ἡ δὲ μεταξὺ τοῦ ε δ β μετὰ τοῦ ἐπὶ τοῦ ε β τμήματος, μείζων ἐστὶ τοῦ ε δ β τριγώνου. ἡ ἄρα ἐπιφάνεια, ἡ μεταξὺ τῶν α δ β μετὰ τῶν α ε, ε β τμημάτων, μείζων ἐστὶ τῶν α δ ε, ε β δ τριγώνων. ἐπεὶ δὲ τὰ α ε δ, δ ε β τρίγωνα μείζονά ἐστι τοῦ α β δ τριγώνου, καθὼς δέδεικται, πολλῷ ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου, ἡ μεταξὺ τῶν α δ β, μετὰ τῶν ἐπὶ τῶν α ε, ε β τμημάτων, μείζων ἐστὶ τοῦ α δ β τριγώνου. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ἐπιφάνεια ἡ μεταξὺ τῶν δ β γ, μετὰ τῶν ἐπὶ τῶν β ζ, ζ γ, μείζων ἐστὶ τοῦ β δ γ τριγώνου. ὅλη ἄρα ἡ ἐπιφάνεια ἡ μεταξὺ τῶν α δ γ, μετὰ τῶν εἰρημένων τμημάτων μείζων ἐστὶ τῶν α β δ, δ β γ τριγώνων. ταῦτα δέ ἐστιν ἴσα τῷ α δ γ τριγώνῳ, καὶ τῷ θ χωρίῳ, ὧν τὰ εἰρημένα τμήματα ἐλάσσονα τοῦ θ χωρίου. λοιπὴ ἄρα ἡ ἐπιφάνεια ἡ μεταξὺ τῶν α δ γ, μείζων ἐστὶ τοῦ α δ γ τριγώνου.



ι Ἐὰν ἐπιψαύουσαι ἀχθῶσι τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ κώνου ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι τῷ κύκλῳ, καὶ συμπίπτωσιν ἀλλήλαις, ἀπὸ δὲ τῶν ἁφῶν καὶ τῆς συμπτώσεως ἐπὶ τὴν κορυφὴν τοῦ κώνου εὐθεῖαι ἀχθῶσι, τὰ περιεχόμενα τρίγωνα ὑπὸ τῶν ἐπιψαυουσῶν καὶ τῶν ἐπὶ τὴν κορυφὴν τοῦ κώνου ἐπιζευχθεισῶν εὐθειῶν μείζονά ἐστι τῆς τοῦ κώνου ἐπιφανείας, τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ᾽ αὐτῶν. ἔστω κῶνος οὗ βάσις μὲν ὁ α β γ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ ε σημεῖον. καὶ τοῦ α β γ κύκλου ἐφαπτόμεναι ἤχθωσαν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι, αἱ α δ, γ δ, καὶ ἀπὸ τοῦ ε σημείου ὅ ἐστι κορυφὴ τοῦ κώνου ἐπὶ τὰ α, δ, γ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ε α, ε δ, ε γ. λέγω δὲ, ὅτι τὰ α δ ε, δ ε γ τρίγωνα μείζονα

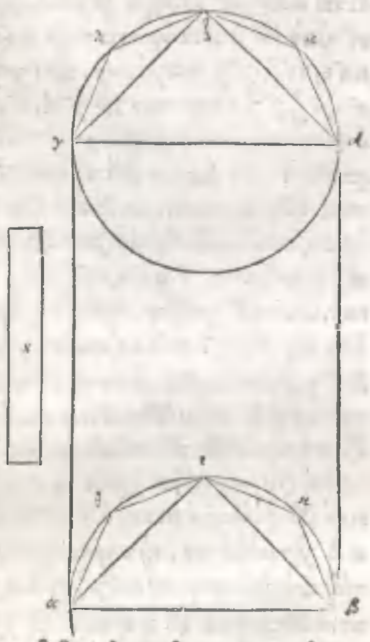
ἐστὶ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν α ε, γ ε εὐθειῶν, καὶ τῆς α β γ περιφερείας. ἤχθω γὰρ ἡ η β ζ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου, καὶ παράλληλος οὖσα τῇ α γ, δίχα τμηθείσης τῆς α β γ περιφερείας κατὰ τὸ β. καὶ ἀπὸ τῶν η, ζ ἐπὶ τὸ ε ἐπεζεύχθωσαν αἱ η ε, ζ ε. καὶ ἐπεὶ μείζους εἰσὶν αἱ η δ, δ ζ τῆς η ζ, κοιναὶ προσκείσθωσαν αἱ η α, ζ γ. ὅλαι ἄρα αἱ α δ, δ γ μείζους εἰσὶ τῶν α η, η ζ, ζ γ. καὶ ἐπεὶ αἱ α ε, ε β, ε γ πλευραί εἰσι τοῦ κώνου, ἴσαι εἰσί, διὰ τὸ ἰσοσκελῆ εἶναι τὸν κῶνον. ὁμοίως δὲ καὶ κάθετοί εἰσιν, ὡς ἐδείχθη ἐν τῷ λήμματι, τὰ δ᾽ ὑπὸ τῶν καθέτων καὶ τῶν βάσεων τῶν α η ε, η ε ζ, ζ ε γ τριγώνων. εἰσὶ γὰρ αἱ μὲν α η, η ζ, ζ γ ἐλάσσους τῶν γ δ, δ α. τὰ δὲ ὕψη αὐτῶν ἴσα. φανερὸν γὰρ, ὅτι ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ ὀρθοῦ κώνου ἐπὶ τὴν ἐπαφὴν τῆς βάσεως ἐπιζευγνυμένη κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην. ὧν δὴ μείζονά ἐστι τὰ α ε δ, δ ε γ τρίγωνα, τῶν α ε η, η ε ζ, ζ ε γ τριγώνων. ἔστω τὸ θ χωρίον. τὸ δὴ θ χωρίον, ἤτοι ἔλαττόν ἐστι τῶν περιλημμάτων τῶν α η β, β ζ γ, ἢ οὐκ ἔλαττον. ἔστω πρῶτον οὐκ ἔλαττον. ἐπεὶ οὖν εἰσὶν ἐπιφάνειαι σύνθετοι, ἥ τε τῆς πυραμίδος τῆς ἐπὶ βάσεως τοῦ η α, γ ζ τραπεζίου, κορυφὴν ἐχούσης τὸ ε. καὶ ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια, ἡ μεταξὺ τῶν α ε γ μετὰ τοῦ α β γ τμήματος. καὶ πέρας ἔχουσι τὴν αὐτὴν περίμετρον τοῦ α ε γ τριγώνου, δῆλον ὡς ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος χωρὶς τοῦ α ε γ τριγώνου, μείζων ἐστὶ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας μετὰ τοῦ τμήματος τοῦ α β γ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ α β γ τμῆμα. λοιπὰ ἄρα τὰ τρίγωνα τὰ α η ε, η ε ζ, ζ ε γ, μετὰ τῶν α η β, β ζ γ περιλημμάτων, μείζονά ἐστι τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν α ε, ε γ. τῶν δὲ α η β, β ζ γ περιλημμάτων οὐκ ἔλασσόν ἐστι τὸ θ χωρίον, πολλῷ ἄρα τὰ α η ε, η ε ζ, ζ ε γ τρίγωνα μετὰ τοῦ θ, μείζονα ἔσται τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν α ε, ε γ. ἀλλὰ τὰ α η ε, η ε ζ, ζ ε γ τρίγωνα μετὰ τοῦ θ, ἐστὶ τὰ α ε δ, δ ε γ τρίγωνα. τὰ ἄρα α ε δ, δ ε γ τρίγωνα, μείζονα ἔσται τῆς εἰρημένης κωνικῆς ἐπιφανείας. ἔστω δὴ τὸ θ ἔλασσον τῶν περιλημμάτων, ἀεὶ δὴ περιγράφοντες πολύγωνα περὶ τὰ τμήματα. ὁμοίως δίχα τεμνομένων τῶν περιλειπομένων περιφερειῶν, καὶ ἀγομένων ἐφαπτομένων, λείψομέν τινα περιλήμματα, ἃ ἔσται ἐλάσσονα τοῦ θ χωρίου. λελείφθω καὶ ἔστω τὰ α μ κ, κ ν β, β ξ λ, λ ο γ ἐλάσσονα ὄντα τοῦ θ χωρίου, καὶ ἐπεζεύχθω ἐπὶ τὸ ε. πάλιν φανερὸν, ὅτι τὰ α η ε, η ε ζ, ζ ε γ τρίγωνα, τῶν α ε μ, μ ε ν, ν ε ξ, ξ ε ο, ο ε γ τριγώνων ἔσται μείζονα. αἵ τε γὰρ βάσεις τῶν βάσεών εἰσι μείζους, τὸ δὲ ὕψος ἴσον. ἔτι δὲ πάλιν ὁμοίως μείζονα ἔχει ἐπιφάνειαν ἡ πυραμὶς, ἡ βάσις μὲν ἔχουσα τὸ α μ ν ξ ο γ πολύγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ ε, χωρὶς τοῦ α ε γ τριγώνου, τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν α ε γ, μετὰ τοῦ α β γ τμήματος. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ α β γ τμῆμα, λοιπὰ ἄρα τὰ α ε μ, μ ε ν, ν ε ξ, ξ ε ο, ο ε γ τρίγωνα, μετὰ τῶν α μ κ, κ ν β, β ξ λ, λ ο γ περιλημμάτων μείζονα ἔσται τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν α ε γ. ἀλλὰ τῶν μὲν εἰρημένων περιλημμάτων μεῖζόν ἐστι τὸ θ χωρίον. τῶν δὲ α ε μ, μ ε ν, ν ε ξ, ξ ε ο, ο ε γ τριγώνων μείζονα ἐδείχθη τὰ α ε η, η ε ζ, ζ ε γ τρίγωνα. πολλῷ ἄρα τὰ α ε η, η ε ζ, ζ ε γ τρίγωνα μετὰ τοῦ θ χωρίου, τουτέστι τὰ α δ ε, δ ε γ τρίγωνα, μείζονά ἐστι τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας, τῆς μεταξὺ τῶν α ε γ εὐθειῶν.



Ἐὰν ἐν ἐπιφανείᾳ ὀρθοῦ κυλίνδρου δύο εὐθεῖαι ὦσιν, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου, ἡ μεταξὺ τῶν εὐθειῶν, μείζων ἐστὶ τοῦ παραλληλογράμμου, τοῦ περιεχομένου ὑπό τε τῶν ἐν τῇ ἐπιφα- ια

νείᾳ

νεία τοῦ κυλίνδρου εὐθειῶν, καὶ τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰ πέρατα αὐτῶν. ἔστω κύλινδρος ὀρθός, οὗ βάσις μὲν ὁ α β κύκλος. ἀπεναντίον δὲ ὁ γ δ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α γ, β δ. λέγω ὅτι ἡ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν α γ, β δ εὐθειῶν, μείζων ἐστὶ τοῦ α γ, β δ παραλληλογράμμου. τετμήσθω γὰρ ἑκατέρα τῶν α β, γ δ περιφερειῶν δίχα, κατὰ τὰ ε ζ σημεῖα. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α ε, ε β, γ ζ, ζ δ. καὶ ἐπεὶ αἱ α ε, ε β τῆς α β μείζους εἰσί, καὶ ἔστιν ἰσοϋψῆ τὰ παραλληλογράμματα τὰ ἐπ' αὐτῶν. μείζονα οὖν ἐστὶ τὰ παραλληλόγραμμα, ὧν αἱ βάσεις μὲν αἱ α ε, ε β. ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τοῦ κυλίνδρου, τοῦ α β, γ δ παραλληλογράμμου. τίνι ἄρα μείζων ἐστίν, ἔστω τῷ η χωρίῳ. τὸ δὴ η χωρίον ἤτοι ἔλασσον τῶν α ε, ε β, γ ζ, ζ δ ἐπιπέδων ἐστὶ τμημάτων, ἢ οὐκ ἔλασσον. ἔστω πρότερον μὴ ἔλασσον. καὶ ἐπεὶ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν α γ, β δ εὐθειῶν, καὶ τὰ α ε β, γ ζ δ τμήματα πέρας ἔχει τὸ τοῦ α γ, β δ παραλληλογράμμου ἐπίπεδον. ἀλλὰ καὶ ἡ συγκειμένη ἐπιφάνεια, ἐκ τῶν παραλληλογράμμων, ὧν βάσεις μὲν αἱ α ε, ε β. ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ. καὶ τὰ α ε β, γ ζ δ τρίγωνα πέρας ἔχει τὸ τοῦ α β γ δ παραλληλογράμμου ἐπίπεδον. καὶ ἑτέρα τὴν ἑτέραν περιλαμβάνει, καὶ ἀμφότεραι ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι εἰσί. μείζων οὖν ἐστὶν ἡ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια, ὑπὸ τῶν α γ, β δ εὐθειῶν καὶ τὰ α ε β, γ ζ δ ἐπίπεδα τμήματα τῆς συγκειμένης ἐπιφανείας ἐκ τῶν παραλληλογράμμων, ὧν αἱ βάσεις μὲν αἱ α ε, ε β. ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τοῦ κυλίνδρου, καὶ τῶν α ε β, γ ζ δ τριγώνων. κοινὰ ἀφῃρήσθω τὰ α ε β, γ ζ δ τρίγωνα. λοιπὴ οὖν ἡ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν α γ, β δ εὐθειῶν. καὶ τὰ α ε, ε β, γ ζ, ζ δ, ἐπίπεδα τμήματα, μείζονα ἐστὶ τῆς συγκειμένης ἐπιφανείας ἐκ τῶν παραλληλογράμμων. ὧν βάσεις μὲν αἱ α ε, ε β. ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τοῦ κυλίνδρου. τὰ δὲ παραλληλόγραμμα ὧν βάσις μὲν αἱ α ε, ε β. ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ κυλίνδρῳ, ἴσα ἐστὶ τῷ α γ β δ παραλληλογράμμῳ, καὶ τοῦ η χωρίῳ. λοιπὴ ἄρα ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν α γ, β δ εὐθειῶν, μείζων ἐστὶ τοῦ α γ β δ παραλληλογράμμου.

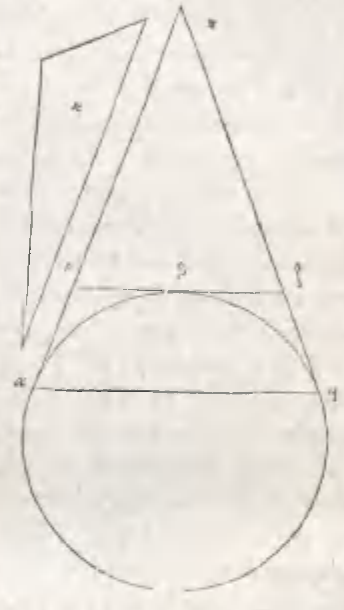


ἀλλὰ δὴ ἔστω ἔλασσον τὸ η χωρίον τῶν α ε, ε β, γ ζ, ζ δ ἐπιπέδων τμημάτων. καὶ τετμήσθω ἑκάστη τῶν α ε, ε β, γ ζ, ζ δ περιφερειῶν δίχα κατὰ τὰ θ, κ, λ, μ, σημεῖα. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α θ, θ ε, ε κ, κ β, γ λ, λ ζ, ζ μ, μ δ. τῶν δὲ α ε, ε β, γ ζ, ζ δ ἄρα ἐπιπέδων τμημάτων ἀφαιρεῖται οὐκ ἔλασσον ἢ τὸ ἥμισυ, τὰ α θ ε, ε κ β, γ λ ζ, ζ μ δ τρίγωνα. τούτου οὖν ἑξῆς γινομένου καταλειφθήσεταί τινα τμήματα, ἃ ἔσται ἐλάσσονα τοῦ η χωρίου. καταλελείφθω, καὶ ἔστω τὰ α θ, θ ε, ε κ, κ β, γ λ, λ ζ, ζ μ, μ δ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι τὰ παραλληλόγραμμα, ὧν βάσις μὲν αἱ α θ, θ ε, ε κ, κ β, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, μείζονα ἔσται τῶν παραλληλογράμμων, ὧν βάσεις μὲν αἱ α ε, ε β, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ. καὶ ἐπεὶ ἡ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν α γ, β δ εὐθειῶν, καὶ τὰ α ε β, γ ζ δ ἐπίπεδα τμήματα, πέρας ἔχει τὸ τοῦ α γ β δ παραλληλογράμμου ἐπίπεδον, ἀλλὰ καὶ ἡ συγκειμένη ἐπιφάνεια ἐκ τῶν παραλληλογράμμων, ὧν βάσις μὲν αἱ α θ, θ ε, ε κ, κ β. ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τοῦ κυλίνδρου. καὶ τῶν α θ ε κ β, γ λ ζ μ δ, εὐθυγράμμων. κοινὰ ἀφῃρήσθω τὰ α θ ε κ β, γ λ ζ μ δ εὐθύγραμμα. λοιπὴ ἄρα ἡ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν α γ, β δ εὐθειῶν. καὶ τὰ α θ, θ ε, ε κ, κ β, γ λ, λ ζ, ζ μ, μ δ ἐπίπεδα τμήματα, μείζονα ἐστὶ τῆς συγκειμένης ἐπιφανείας ἐκ τῶν παραλληλογράμμων. ὧν βάσις μὲν αἱ α θ, θ ε, ε κ, κ β. ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ. τὰ δὲ παραλληλόγραμμα, ὧν βάσις μὲν αἱ α θ, θ ε, ε κ, κ β, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, μείζονα ἐστὶ τῶν παραλληλογράμμων, ὧν βάσις μὲν αἱ α ε, ε β. ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ. καὶ ἡ ἀποτεμνομένη ἄρα κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια, ὑπὸ τῶν α γ, β δ εὐθειῶν. καὶ τὰ α θ, θ ε, ε κ, κ β, γ λ, λ ζ, ζ μ, μ δ ἐπίπεδα τμήματα, μείζονα ἐστὶ τῶν παραλληλογράμμων. ὧν βάσις μὲν αἱ α ε, ε β. ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τοῦ κυλίνδρου. τὰ δὲ παραλληλόγραμμα ὧν βάσις μὲν αἱ α ε, ε β, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τοῦ κυλίνδρου, ἴσα ἐστὶ τῷ α γ δ β παραλληλογράμμῳ, καὶ τῷ η χωρίῳ. καὶ ἡ ἀποτεμνομένη ἄρα κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια, ὑπὸ τῶν α γ, β δ εὐθειῶν. καὶ τὰ α θ, θ ε, ε κ, κ β, γ λ, λ ζ, ζ μ, μ δ ἐπίπεδα τμήματα, μείζονα ἐστὶ τοῦ α γ β δ παραλληλογράμμου, καὶ τοῦ η χωρίου. ἀφαιρεθέντα δὲ τὰ α θ, θ ε, ε κ, κ β, γ λ, λ ζ, ζ μ, μ δ τμήματα τοῦ η χωρίου ἐλάσσονα.

λοιπὴ

λοιπὴ ἄρα ἡ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν α γ, β δ εὐθειῶν, μείζων ἐστὶ τοῦ α γ β δ παραλληλογράμμου.

Ἐὰν ἐν ἐπιφανείᾳ κυλίνδρου τινὸς ὀρθοῦ δύο εὐθεῖαι ὦσιν, ἀπὸ δὲ τῶν περάτων τῶν εὐθειῶν ἀχθῶσίν τινες ἐπιψαύουσαι τῶν κύκλων, αἵ εἰσι βάσεις τοῦ κυλίνδρου ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αὐτῶν οὖσαι, καὶ συμπίπτωσι, τὰ παραλληλόγραμμα τὰ περιεχόμενα ὑπό τε τῶν ἐπιψαυουσῶν καὶ τῶν πλευρῶν τοῦ κυλίνδρου, μείζονα ἔσται τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου τῆς μεταξὺ τῶν εὐθειῶν τῶν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου. ἔστω κυλίνδρου τινὸς ὀρθοῦ βάσις ὁ α β γ κύκλος, καὶ ἔστωσαν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ αὐτοῦ δύο εὐθεῖαι. ὧν πέρατα τὰ α γ. ἀπὸ δὲ τῶν α γ ἤχθωσαν ἐπιψαύουσαι τοῦ κύκλου ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι. καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ η. νοείσθωσαν δὲ καὶ ἐν τῇ ἑτέρᾳ βάσει τοῦ κυλίνδρου ἀπὸ τῶν περάτων ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ εὐθεῖαι ἠγμέναι ἐπιψαύουσαι τοῦ κύκλου. δεικτέον ὅτι τὰ παραλληλόγραμμα τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν ἐπιψαυουσῶν, καὶ τῶν πλευρῶν τοῦ κυλίνδρου, μείζονα ἐστὶ τῆς κατὰ τὴν α β γ περιφέρειαν ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου. ἤχθω γὰρ ἡ ε ζ ἐπιψαύουσα, καὶ ἀπὸ τῶν ε ζ σημείων ἤχθωσαν τινὲς εὐθεῖαι παρὰ τὸν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου, ἕως τῆς ἐπιφανείας τῆς ἑτέρας βάσεως. τὰ δὴ παραλληλόγραμμα τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν α η, η γ, καὶ τῶν πλευρῶν τοῦ κυλίνδρου, μείζονα ἐστὶ τῶν παραλληλογράμμων τῶν περιεχομένων ὑπό τε τῶν α ε, ε ζ, ζ γ. καὶ τῶν πλευρῶν τοῦ κυλίνδρου. ἐπεὶ γὰρ αἱ ε η, η ζ, τῆς ε ζ μείζους εἰσί, κοιναὶ προσκείσθωσαν αἱ α ε, ζ γ. ὅλαι ἄρα αἱ η α, η γ, μείζους εἰσὶ τῶν α ε, ε ζ, ζ γ. ᾧ δὴ μείζονα ἐστίν, ἔστω τὸ κ χωρίον. τοῦ δὴ κ χωρίου τὸ ἥμισυ ἤτοι μεῖζον ἐστὶ τῶν σχημάτων τῶν περιεχομένων ὑπὸ τῶν α ε, ε ζ, ζ γ εὐθειῶν, καὶ τῶν α δ β, β θ γ περιφερειῶν, ἢ οὔ. ἔστω πρότερον μεῖζον. τῆς δὲ ἐπιφανείας τῆς συγκειμένης ἐκ τῶν παραλληλογράμμων τῶν κατὰ τὰς α ε, ε ζ, ζ γ. καὶ τοῦ α ε ζ γ τραπεζίου, καὶ τοῦ κατεναντίον αὐτοῦ ἐν τῇ ἑτέρᾳ βάσει τοῦ κυλίνδρου, πέρας ἐστὶν ἡ περίμετρος τοῦ παραλληλογράμμου τοῦ κατὰ τὴν α γ. ἔστι δὲ καὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς συγκειμένης ἐκ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου, τῆς κατὰ τὴν α β γ περιφέρειαν. καὶ τῶν τμημάτων τοῦ τε α β γ καὶ τοῦ ἀπεναντίον αὐτοῦ, πέρας ἡ αὐτὴ περίμετρος. αἱ οὖν εἰρημέναι ἐπιφάνειαι τὸ αὐτὸ πέρας ἔχουσαι τυγχάνουσιν, ὅπερ ἐστὶν ἐν ἐπιπέδῳ. καὶ εἰσὶν ἀμφότεραι ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι. καὶ τινὰ μὲν περιλαμβάνει ἡ ἑτέρα αὐτῶν, τινὰ δὲ κοινὰ ἔχουσιν. ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ περιλαμβανομένη. ἀφαιρεθέντων οὖν κοινῶν τοῦ τε α β γ τμήματος, καὶ τοῦ ἀπεναντίον αὐτοῦ, ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ

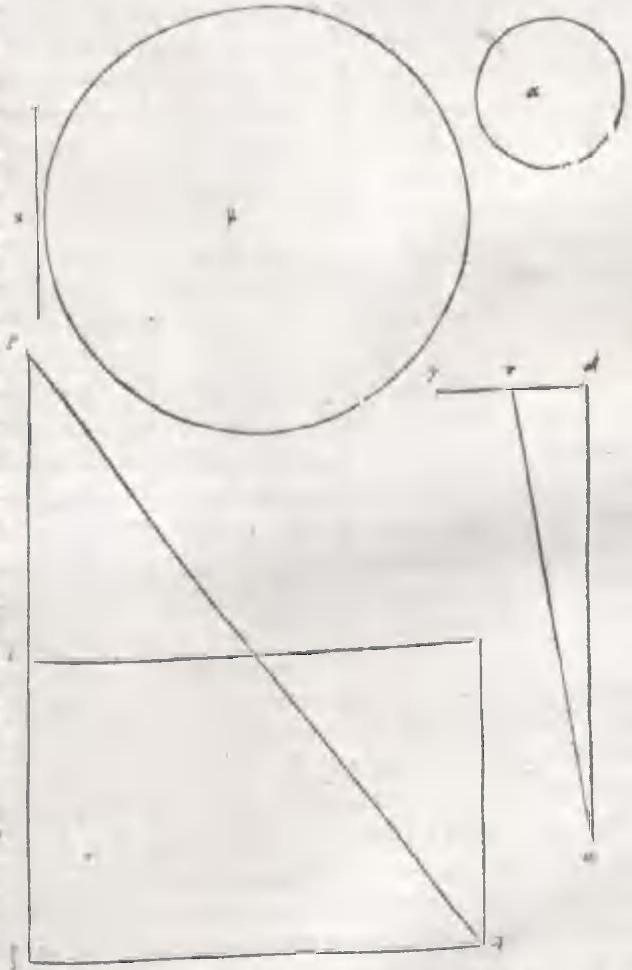


κυλίνδρου, ἡ κατὰ τὴν α β γ περιφέρειαν τῆς συγκειμένης ἐπιφανείας, ἔκ τε τῶν παραλληλογράμμων τῶν κατὰ τὰς α ε, ε ζ, ζ γ. καὶ τῶν σχημάτων τῶν α ε β, β ζ γ. καὶ τῶν ἀπεναντίον αὐτῶν. αἱ δὲ τῶν εἰρημένων σχημάτων, ἐλάττους εἰσὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς συγκειμένης ἐκ τῶν παραλληλογράμμων τῶν κατὰ τὰς α η, η γ. μετὰ γὰρ τοῦ κ μείζονος ὄντος τῶν σχημάτων ἴσαι ἦσαν αὐτοῖς. δῆλον οὖν ὅτι τὰ παραλληλόγραμμα τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν α η, γ η. καὶ τῶν πλευρῶν τοῦ κυλίνδρου, μείζονα ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου τῆς κατὰ τὴν α β γ. περιφέρειαν. εἰ δὲ μὴ ἐστὶ μεῖζον τὸ ἥμισυ τοῦ κ χωρίου τῶν εἰρημένων σχημάτων, ἀχθήσονται εὐθεῖαι ἐπιψαύουσαι τοῦ κύκλου σχήματος, ὥστε γενέσθαι τὰ περιλειπόμενα σχήματα ἐλάσσονα τοῦ ἡμίσεος τοῦ κ. καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ τοῖς ἔμπροσθεν δειχθήσεται. τούτων δὴ δεδειγμένων, φανερὸν ἐπὶ μὲν τῶν προειρημένων, ὅτι ἐὰν εἰς κῶνον ἰσοσκελῆ πυραμὶς ἐγγραφῇ, ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος χωρὶς τῆς βάσεως ἐλάσσων ἐστὶ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας. ἕκαστον γὰρ τῶν περιεχόντων τὴν πυραμίδα τριγώνων ἔλασσόν ἐστι τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας, τῆς μεταξὺ τῶν τοῦ τριγώνου πλευρῶν. ὥστε καὶ ὅλη ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος χωρὶς τῆς βάσεως ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου, χωρὶς τῆς βάσεως. καὶ ὅτι ἐὰν περὶ κῶνον ἰσοσκελῆ πυραμὶς περιγραφῇ, ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος χωρὶς τῆς βάσεως μείζων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου χωρὶς τῆς βάσεως, κατὰ τὸ συνεχὲς ἐκείνῳ. φανερὸν δὲ ἐκ τῶν ἀποδεδειγμένων, ὅτι τε ἐὰν εἰς κύλινδρον ὀρθὸν πρίσμα ἐγγραφῇ, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος, ἡ ἐκ τῶν παραλληλογράμμων συγκειμένη, ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου χωρὶς τῆς βάσεως. ἔλασσον γὰρ ἕκαστον παραλληλόγραμμον τοῦ πρίσματος ἐστὶ τῆς καθ' αὐτὸ τοῦ κυλίνδρου ἐπιφανείας. καὶ ὅτι ἐὰν περὶ κύλινδρον ὀρθὸν πρίσμα περιγραφῇ, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος ἡ ἐκ τῶν

παραλ-

παραλληλογράμμων συγκειμένη, μείζων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου χωρὶς τῆς βάσεως.

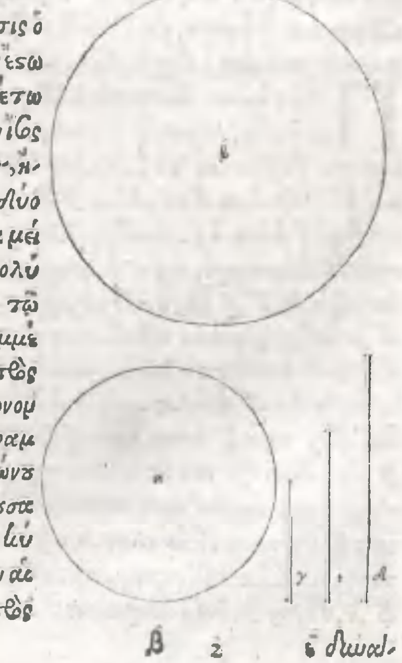
ιγ Παντὸς κυλίνδρου ὀρθοῦ ἡ ἐπιφάνεια χωρὶς τῆς βάσεως, ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέσον λόγον ἔχει τῆς πλευρᾶς τοῦ κυλίνδρου, καὶ τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου. ἔστω κυλίνδρου τινὸς ὀρθοῦ βάσις ὁ α κύκλος. καὶ ἔστω τῇ μὲν διαμέτρῳ τοῦ α κύκλου ἴση, ἡ γ δ. τῇ δὲ πλευρᾷ τοῦ κυλίνδρου ἡ ε ζ. ἑκατέρα δὲ μέσον λόγον τῶν γ δ, ε ζ, ἡ η. καὶ κείσθω κύκλος οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ η, ὁ β. δεικτέον ὅτι ὁ β κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου, χωρὶς τῆς βάσεως. εἰ γὰρ μὴ ἐστὶν ἴσος, ἤτοι μείζων ἐστὶν ἢ ἐλάσσων. ἔστω πρότερον εἰ δυνατὸν ἐλάσσων. δύο δὴ μεγεθῶν ὄντων ἀνίσων, τῆς τε ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου, καὶ τοῦ β κύκλου, δυνατόν ἐστιν εἰς τὸν β κύκλον ἰσόπλευρον πολύγωνον ἐγγράψαι, καὶ ἄλλο περιγράψαι. ὥστε τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου πρὸς τὸν β κύκλον. νοείσθω δὴ περιγεγραμμένον, καὶ ἐγγεγραμμένον. καὶ περὶ τὸν α κύκλον περιγεγράφθω εὐθύγραμμον, ὅμοιον τῷ περὶ τὸν β περιγεγραμμένῳ. καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τοῦ εὐθυγράμμου πρίσμα. ἔσται δὴ περὶ τὸν κύλινδρον περιγεγραμμένον. ἔστω δὴ καὶ τῇ περιμέτρῳ τοῦ εὐθυγράμμου, τοῦ περὶ τὸν α κύκλον, ἴση ἡ κ δ. καὶ τῇ κ δ ἴση ἡ λ ζ. τῆς δὲ γ δ ἡμίσεια ἔστω ἡ γ τ. ἔσται δὴ τὸ κ δ τ τρίγωνον, ἴσον τῷ περιγεγραμμένῳ εὐθυγράμμῳ περὶ τὸν α κύκλον. ἐπειδὴ βάσιν μὲν ἔχει τῇ περιμέτρῳ ἴσην. ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ α κύκλου. τὸ δὲ ε λ παραλληλόγραμμον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ πρίσματος, τοῦ περὶ τὸν κύλινδρον περιγεγραμμένου. ἐπειδὴ περιέχεται ὑπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ κυλίνδρου, καὶ τῆς ἴσης τῇ περιμέτρῳ τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος. κείσθω δὴ τῇ ε ζ ἴση ἡ ε ρ. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ζ ρ λ τρίγωνον, τῷ ε λ παραλληλογράμμῳ, ὥστε καὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ πρίσματος. καὶ ἐπεὶ ὅμοιά ἐστι τὰ εὐθύγραμμα τὰ περὶ τοὺς α, β κύκλους περιγεγραμμένα, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον τὰ εὐθύγραμμα, ὅνπερ αἱ ἐκ τῶν κέντρων δυνάμει. ἕξει ἄρα τὸ κ τ δ τρίγωνον πρὸς τὸ περὶ τὸν β κύκλον εὐθύγραμμον, λόγον, ὃν ἡ τ δ πρὸς τὴν η δυνάμει. αἱ γὰρ τ δ, η, ἴσαι εἰσὶ ταῖς ἐκ τῶν κέντρων. ἀλλ' ὃν ἔχει λόγον ἡ τ δ πρὸς τὴν η δυνάμει, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ἡ τ δ πρὸς ρ ζ μήκει. ἡ γὰρ η τῶν τ δ, ρ ζ μέση ἐστὶν ἀνὰ λόγον, διὰ τὸ καὶ τῶν γ δ, ε ζ. πῶς δὲ τοῦτο; ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν δ τ τῇ τ γ. ἡ δὲ ρ ε τῇ ε ζ. διπλασία ἄρα ἐστὶν ἡ γ δ τῆς τ δ. καὶ ἡ ρ ζ, τῆς ρ ε. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ δ γ πρὸς δ τ, οὕτως ἡ ρ ζ πρὸς ζ ε. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν γ δ, ε ζ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν τ δ, ρ ζ. τῷ δὲ ὑπὸ τῶν γ δ, ε ζ, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς η. καὶ τῷ ὑπὸ τῶν τ δ, ρ ζ ἄρα ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς η. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ τ δ πρὸς η, οὕτως ἡ η πρὸς ρ ζ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ τ δ πρὸς ρ ζ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς τ δ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς η. ἐὰν γὰρ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνὰ λόγον ὦσιν, ἔστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας εἶδος, τὸ ὅμοιον, καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένον. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἡ τ δ πρὸς ρ ζ μήκει, τοῦτον ἔχει τὸ κ τ δ τρίγωνον πρὸς τὸ ρ λ ζ. ἐπειδήπερ ἴσαι εἰσὶν αἱ κ δ, λ ζ. τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει τὸ κ τ δ τρίγωνον πρὸς τὸ εὐθύγραμμον τὸ περὶ τὸν β κύκλον περιγεγραμμένον, ὅνπερ τὸ τ κ δ τρίγωνον πρὸς τὸ ρ ζ λ τρίγωνον. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ζ λ ρ τρίγωνον, τῷ περὶ τὸν β κύκλον περιγεγραμμένῳ εὐθυγράμμῳ.



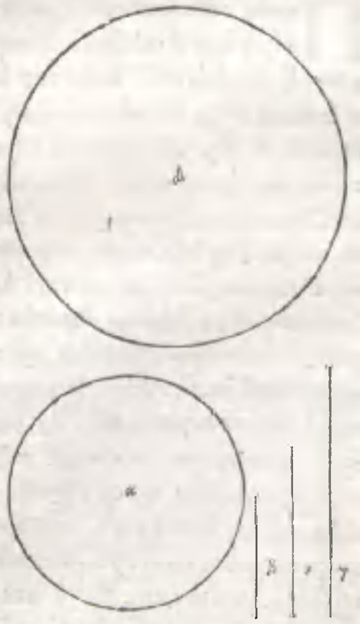
ὥστε καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος τοῦ περὶ τὸν α κύλινδρον περιγεγραμμένου, τῷ εὐθυγράμμῳ τῷ περὶ τὸν β κύκλον ἴση ἐστί. καὶ ἐπεὶ ἐλάσσονα λόγον ἔχει τὸ εὐθύγραμμον τὸ περὶ τὸν β κύκλον, πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐν τῷ κύκλῳ, τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ α κυλίνδρου πρὸς τὸν β κύκλον, ἐλάσσονα λόγον ἕξει καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος τοῦ περὶ τὸν κύλινδρον, περιγεγραμμένου πρὸς τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ β τῷ κύκλῳ γεγραμμένον, ἤπερ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου πρὸς τὸν β κύκλον· καὶ ἐναλλάξ, ὅπερ ἀδύνατον. ἡ μὲν γὰρ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸν κύλινδρον, μείζων οὖσα δέδεικται τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου. τὸ δὲ γεγραμμένον εὐθύγραμμον ἐν τῷ β κύκλῳ, ἔλασσόν ἐστι τοῦ β κύκλου. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὁ β κύκλος ἐλάσσων τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου. ἔστω δέ, εἰ δυνατόν, μείζων. πάλιν δὲ νοείσθω εἰς τὸν β κύκλον εὐθύγραμμον ἐγγεγραμμένον, καὶ ἄλλο περιγεγραμμένον. ὥστε τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, ἢ τὸν β κύκλον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν α κύκλον πολύγωνον, ὅμοιον τῷ εἰς τὸν β κύκλον ἐγγεγραμμένῳ. καὶ πρίσμα ἀναγεγράφθω ἀπὸ τοῦ ἐν τῷ κύκλῳ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου. καὶ πάλιν ἡ κ δ ἴση ἔστω τῇ περιμέτρῳ τοῦ εὐθυγράμμου, τοῦ ἐν τῷ α κύκλῳ ἐγγεγραμμένου. καὶ ἡ ζ λ ἴση αὐτῇ ἔστω. ἔσται δὴ τὸ μὲν κ τ δ τρίγωνον μεῖζον τοῦ εὐθυγράμμου, τοῦ ἐν τῷ α κύκλῳ ἐγγεγραμμένου. διότι βάσιν μὲν ἔχει τὴν περίμετρον αὐτοῦ. ὕψος δὲ μεῖζον τῆς ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου ἀγομένης καθέτου. τὸ δὲ ε λ παραλληλόγραμμον ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ πρίσματος, τῇ ἐκ τῶν παραλληλογράμμων συγκειμένῃ, διότι περιέχεται ὑπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ κυλίνδρου, καὶ τῆς ἴσης τῇ περιμέτρῳ τοῦ εὐθυγράμμου, ὅ ἐστι βάσις τοῦ πρίσματος. ὥστε καὶ τὸ ρ λ ζ τρίγωνον, ἴσον ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ πρίσματος. καὶ ἐπεὶ ὅμοιά ἐστι τὰ εὐθύγραμμα τὰ ἐν τοῖς α, β κύκλοις ἐγγεγραμμένα, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρὸς ἄλληλα, ὃν αἱ ἐκ τῶν κέντρων αὐτῶν δυνάμει. ἔχει δὲ καὶ τὰ κ τ δ, ζ ρ λ τρίγωνα πρὸς ἄλληλα, λόγον, ὃν αἱ ἐκ τῶν κέντρων τῶν κύκλων δυνάμει. τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ α κύκλῳ ἐγγεγραμμένον, πρὸς τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ β ἐγγεγραμμένον, καὶ τὸ κ τ δ τρίγωνον πρὸς τὸ λ ρ τρίγωνον. ἔλασσον δέ ἐστι τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ α κύκλῳ ἐγγεγραμμένον, τοῦ κ τ δ τριγώνου. ἔλασσον ἄρα καὶ τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ β κύκλῳ ἐγγεγραμμένον, τοῦ ζ ρ λ τριγώνου, ὥστε καὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ πρίσματος τοῦ ἐν τῷ κυλίνδρῳ ἐγγεγραμμένου. ὅπερ ἀδύνατον. ἐπεὶ γὰρ ἐλάσσονα λόγον ἔχει τὸ περιγεγραμμένον εὐθύγραμμον περὶ τὸν β κύκλον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον, ἢ ὁ β κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου· καὶ ἐναλλάξ. μεῖζον δέ ἐστι τὸ περιγεγραμμένον περὶ τὸν β κύκλον τοῦ β κύκλου. μεῖζον ἄρα ἐστὶ τὸ ἐγγεγραμμένον ἐν τῷ β κύκλῳ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου. ὥστε καὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ πρίσματος, οὐκ ἄρα μείζων ἐστὶν ὁ β κύκλος τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἐλάσσων, ἴσος ἄρα ἐστί.

Παντὸς κώνου ἰσοσκελοῦς χωρὶς τῆς βάσεως, ἡ ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέσον λόγον ἔχει τῆς πλευρᾶς τοῦ κώνου, καὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ κώνου. ιδ

ἔστω κῶνος ἰσοσκελής, οὗ βάσις ὁ α κύκλος. ἡ δ' ἐκ τοῦ κέντρου ἔστω ἡ γ. τῇ δὲ πλευρᾷ τοῦ κώνου ἔστω ἴση ἡ δ. τῶν δὲ γ, δ μέση ἀνὰ λόγον ἡ ε. ὁ δὲ β κύκλος ἐχέτω τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῇ ε ἴσην. λέγω ὅτι ὁ β κύκλος ἐστὶν ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, χωρὶς τῆς βάσεως. εἰ γὰρ μὴ ἐστὶν ἴσος, ἤτοι μείζων ἐστὶν ἢ ἐλάσσων. ἔστω πρότερον ἐλάσσων. ἔστι δὴ δύο μεγέθη ἄνισα, ἥ τε ἐπιφάνεια τοῦ κώνου, καὶ ὁ β κύκλος. καὶ μείζων ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου. δυνατὸν ἄρα εἰς τὸν β κύκλον πολύγωνον ἰσόπλευρον ἐγγράψαι, καὶ ἄλλο περιγράψαι ὅμοιον τῷ ἐγγεγραμμένῳ. ὥστε τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου πρὸς τὸν β κύκλον. νοείσθω δὴ καὶ περὶ τὸν α κύκλον πολύγωνον περιγεγραμμένον, ὅμοιον τῷ περὶ τὸν β κύκλον περιγεγραμμένῳ. καὶ ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν α κύκλον περιγεγραμμένου πολυγώνου πυραμὶς ἀνεστάτω ἀναγεγραμμένη, τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ. ἐπεὶ οὖν ὅμοιά ἐστι τὰ πολύγωνα τὰ περὶ τοὺς α, β κύκλους περιγεγραμμένα, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρὸς ἄλληλα, ὃν αἱ ἐκ τῶν κέντρων δυνάμει πρὸς ἀλλήλας, τουτέστιν, ὃν ἔχει ἡ γ πρὸς



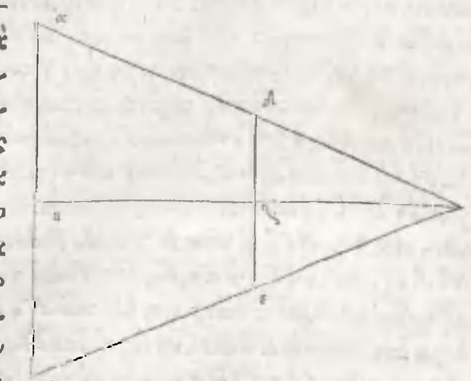
ε δυνάμει, τουτέστιν ἡ γ πρὸς δ μήκει. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἡ γ πρὸς δ μήκει, τοῦτον ἔχει τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον περὶ τὸν α κύκλον, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸν κῶνον. ἡ μὲν γὰρ γ ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου καθέτῳ ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου. ἡ δὲ τῇ πλευρᾷ τοῦ κώνου. κοινὸν δὲ ὕψος ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου, πρὸς τὰ ἡμίση τῶν ἐπιφανειῶν. τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει τὸ εὐθύγραμμον τὸ περὶ τὸν α κύκλον πρὸς τὸ εὐθύγραμμον τὸ περὶ τὸν β κύκλον. καὶ αὐτὸ τὸ εὐθύγραμμον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος περιγεγραμμένης περὶ τὸν κῶνον. ὥστε ἴση ἐστὶν ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος τῷ εὐθυγράμμῳ τῷ περὶ τὸν β κύκλον περιγεγραμμένῳ. ἐπεὶ οὖν ἐλάσσονα λόγον ἔχει τὸ εὐθύγραμμον τὸ περὶ τὸν β κύκλον περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον, ἤπερ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου πρὸς τὸν β κύκλον, ἐλάσσονα λόγον ἕξει ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος τῆς περὶ τὸν κῶνον περιγεγραμμένης, πρὸς τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ β κύκλῳ ἐγγεγραμμένον, ἤπερ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου πρὸς τὸν β κύκλον. ὅπερ ἀδύνατον. ἡ μὲν γὰρ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος μείζων οὖσα δέδεικται τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου. τὸ δὲ ἐγγεγραμμένον εὐθύγραμμον ἐν τῷ β κύκλῳ, ἔλασσον ἔσται τοῦ β κύκλου. οὐκ ἄρα ὁ β κύκλος ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου. λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ μείζων. εἰ γὰρ δυνατόν ἐστιν, ἔστω μείζων. πάλιν δὲ νοείσθω εἰς τὸν β κύκλον πολύγωνον ἐγγεγραμμένον, καὶ ἄλλο περιγεγραμμένον, ὥστε τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, τοῦ ὃν ἔχει ὁ β κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου. καὶ εἰς τὸν α κύκλον νοείσθω ἐγγεγραμμένον πολύγωνον, ὅμοιον τῷ εἰς τὸν β κύκλον ἐγγεγραμμένῳ. καὶ ἀναγεγράφθω ἀπ' αὐτοῦ πυραμὶς τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ. ἐπεὶ οὖν ὅμοιά ἐστιν τὰ ἐν τοῖς α, β ἐγγεγραμμένα, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον πρὸς ἄλληλα, ὃν αἱ ἐκ τῶν κέντρων δυνάμει πρὸς ἀλλήλας, τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον, καὶ ἡ γ πρὸς τὴν δ μήκει. ἡ δὲ γ πρὸς τὴν δ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ τὸ πολύγωνον τὸ ἐν τῷ α κύκλῳ ἐγγεγραμμένον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὸν κῶνον. ἡ γὰρ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ α κύκλου πρὸς πλευρὰν τοῦ κώνου, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀγομένη κάθετος ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου πρὸς τὴν ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου, κάθετον ἀγομένην ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου. μείζονα ἄρα λόγον ἔχει τὸ πολύγωνον τὸ ἐν τῷ α κύκλῳ ἐγγεγραμμένον πρὸς τὸ πολύγωνον τὸ ἐν τῷ β ἐγγεγραμμένον, ἢ αὐτὸ τὸ πολύγωνον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος. μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος, τοῦ ἐν τῷ β πολυγώνου ἐγγεγραμμένου. ἐλάσσονα δὲ λόγον ἔχει τὸ πολύγωνον τὸ περὶ τὸν β κύκλον περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον, ἢ ὁ β κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου. πολλῷ ἄρα τὸ πολύγωνον τὸ περὶ τὸν β κύκλον περιγεγραμμένον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος τῆς ἐν τῷ κώνῳ ἐγγεγραμμένης ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ὁ β κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου, ὅπερ ἀδύνατον. τὸ μὲν γὰρ περιγεγραμμένον πολύγωνον μεῖζόν ἐστι τοῦ β κύκλου. ἡ δὲ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος τῆς ἐν τῷ κώνῳ, ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου, οὐκ, ὅτι οὐδὲ μείζων ἐστὶν ὁ κύκλος τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἐλάσσων, ἴσος ἄρα.

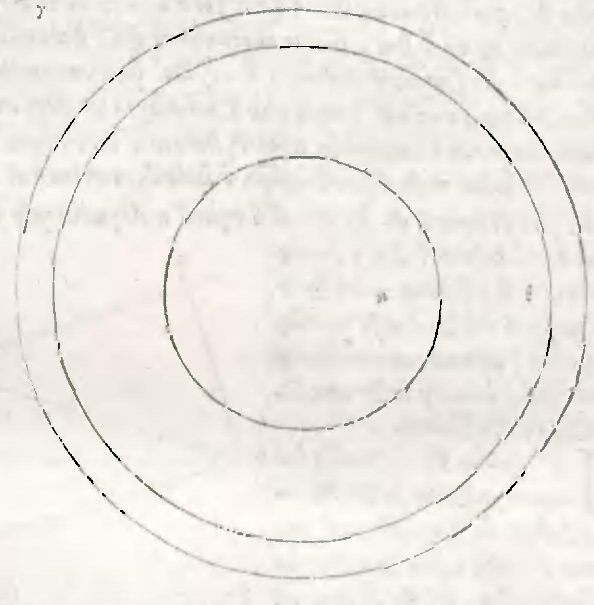


ις Παντὸς κώνου ἰσοσκελοῦς ἡ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν βάσιν τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἡ πλευρὰ τοῦ κώνου πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως τοῦ κώνου. ἔστω κῶνος ἰσοσκελής, οὗ βάσις ὁ α κύκλος. ἔστω δὲ τῇ μὲν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ α, ἴση ἡ β, τῇ δὲ πλευρᾷ τοῦ κώνου, ἡ γ. δεικτέον ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου πρὸς τὸν α κύκλον, καὶ ἡ γ πρὸς τὴν β. εἰλήφθω γὰρ τῶν β, γ μέση ἀνὰ λόγον ἡ ε, καὶ ἐκκείσθω κύκλος ὁ δ, ἴσην ἔχων τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῇ ε. ὁ δ ἄρα κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου. τοῦτο γὰρ ἐδείχθη ἐν τῷ πρὸ τούτου. ἐδείχθη δὲ ὁ δ κύκλος πρὸς τὸν α κύκλον, λόγον ἔχων τὸν αὐτόν, τῷ τῆς γ πρὸς β μήκει. ἑκάτερος γὰρ ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς ε πρὸς β δυνάμει. διὰ τὸ τοὺς κύκλους πρὸς ἀλλήλους εἶναι, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα πρὸς ἄλληλα. ὁμοίως δὲ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ἐκ τῶν κέντρων τῶν κύκλων. εἰ γὰρ αἱ διάμετροι, καὶ τὰ ἥμισυ, τουτέστιν αἱ ἐκ τῶν κέντρων, ταῖς δὲ ἐκ τῶν κέντρων ἴσαι εἰσίν, αἱ β, ε. δῆλον οὖν, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου, πρὸς τὸν α κύκλον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἡ γ πρὸς β μήκει.

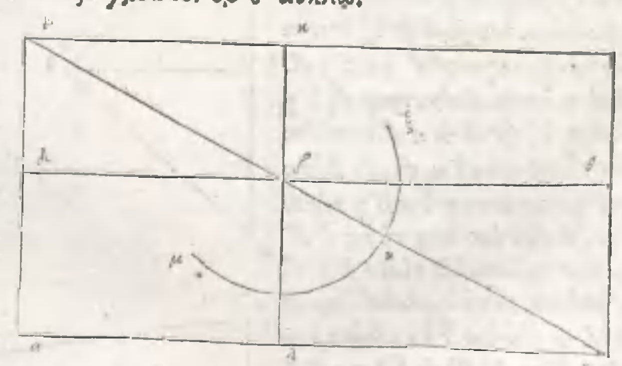
Ἐὰν

Ἐὰν κῶνος ἰσοσκελὴς ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ τῇ βάσει, τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, ἴσος ἐστὶ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέσον λόγον ἔχει τῆς τε πλευρᾶς τοῦ κώνου, τῆς μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων, καὶ τῆς ἴσης ἀμφοτέραις ταῖς ἐκ τῶν κέντρων τῶν κύκλων, τῶν ἐν τοῖς παραλλήλοις ἐπιπέδοις. ιζ ἔστω κῶνος οὗ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον ἴσον τῷ α β γ. καὶ τετμήσθω παραλλήλῳ ἐπιπέδῳ τῇ βάσει. καὶ ποιείτω τομὴν τὴν δ ε. ἄξων δὲ τοῦ κώνου ἔστω β η. κύκλος δέ τις ἐκκείσθω, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέση ἀνὰ λόγον ἐστὶ τῆς τε α δ, καὶ συναμφοτέρου τῆς δ ζ, η α. ἔστω δὲ κύκλος ὁ θ. λέγω ὅτι ὁ θ κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, τῇ μεταξὺ τῶν δ ε, α γ. ἐκκείσθωσαν γὰρ κύκλοι οἱ λ, κ. καὶ τοῦ μὲν κ κύκλου ἡ ἐκ τοῦ κέντρου, δυνάσθω τὸ ὑπὸ β δ ζ. τοῦ δὲ λ, ἡ ἐκ τοῦ κέντρου, δυνάσθω τὸ ὑπὸ β α η. ὁ μὲν ἄρα λ κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ α β γ κώνου. ὁ δὲ κ κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ δ ε β. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν β α, α η, ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν β δ, δ ζ, καὶ τῷ ὑπὸ τῆς α δ, καὶ συναμφοτέρου τῆς δ ζ, α η. διὰ τὸ παράλληλον εἶναι τὴν δ ζ τῇ α η, ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ α β, α η δύναται ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ λ κύκλου. τὸ δὲ ὑπὸ β δ, δ ζ δύναται ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κ κύκλου. τὸ δὲ ὑπὸ τῆς δ α, καὶ συναμφοτέρου τῆς δ ζ, α η δύναται ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ θ. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ λ κύκλου, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ἐκ τῶν κέντρων τῶν κ, θ κύκλων. ὥστε καὶ ὁ λ κύκλος ἴσος ἐστὶ τοῖς κ θ κύκλοις. ἀλλ' ὁ μὲν λ ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ β α γ κώνου. ὁ δὲ κ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ δ β ε κώνου. λοιπὴ ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου ἡ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν δ ε, α γ, ἴση ἐστὶ τῷ θ κύκλῳ.

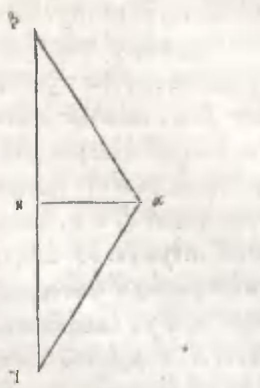




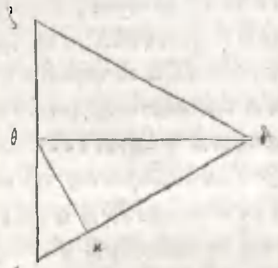
Ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ β α η, καὶ διάμετρος αὐτοῦ ἔστω ἡ β η, τετμήσθω ἡ β α πλευρὰ ὡς ἔτυχεν κατὰ τὸ δ, καὶ διὰ τοῦ δ ἤχθω παράλληλος τῇ α η, ἡ δ θ. διὰ δὲ τοῦ ζ τῇ β α, ἡ κ λ. λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ β α η ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ β δ ζ, καὶ ὑπὸ δ α, καὶ συναμφοτέρου τῆς δ ζ, α η. ἐπεὶ γὰρ τὸ μὲν ὑπὸ β α η, ὅλον ἐστὶ τὸ β η. τὸ δὲ ὑπὸ β δ ζ, τὸ β ζ. τὸ δὲ ὑπὸ δ α, καὶ συναμφοτέρου τῆς δ ζ α η, ὁ μ ν ξ γνώμων. τὸ μὲν γὰρ ὑπὸ δ α η, ἴσον ἐστὶ τῷ κ η. διὰ τὸ ἴσον εἶναι τὸ κ θ παραπλήρωμα, τῷ δ α παραπληρώματι. τὸ δὲ ὑπὸ δ α, δ ζ, τῷ δ λ. ὅλον ἄρα τὸ β η, ὅπερ ἐστὶ τὸ ὑπὸ β α η, ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ β δ ζ, καὶ τῷ μ ν ξ γνώμονι, ὅς ἐστιν ἴσος τὸ ὑπὸ δ α, καὶ συναμφοτέρου τῆς α η δ ζ.

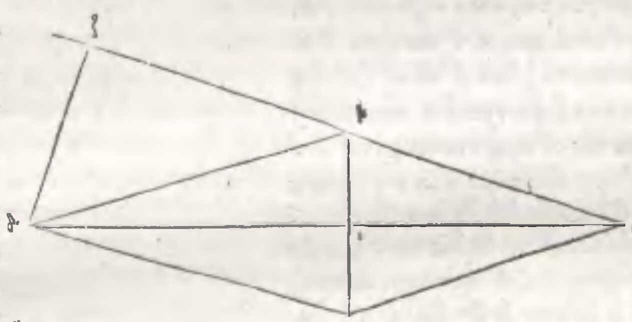


οἱ κῶνοι οἱ ἴσον ὕψος ἔχοντες, τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον ταῖς βάσεσι. καὶ οἱ ἴσας ἔχοντες βάσεις, τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον τοῖς ὕψεσιν. ἐὰν κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῇ παρὰ τὴν βάσιν, ἔστιν ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον, ὡς ὁ ἄξων πρὸς τὸν ἄξονα. τοῖς δὲ κυλίνδροις ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶν οἱ κῶνοι, οἱ ἔχοντες τὰς αὐτὰς βάσεις τοῖς κυλίνδροις. καὶ τῶν ἴσων κώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι. καὶ ὧν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσοι εἰσί. καὶ οἱ κῶνοι ὧν αἱ διάμετροι τῶν βάσεων, τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσι τοῖς ἄξοσι, τουτέστι τοῖς ὕψεσι, πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἐν ταῖς βάσεσι διαμέτρων. ταῦτα δὲ πάντα ὑπὸ τῶν πρότερον ἀπεδείχθη.

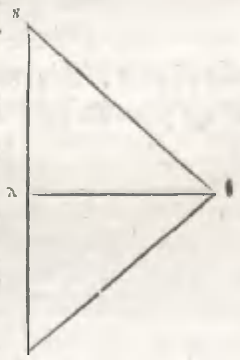


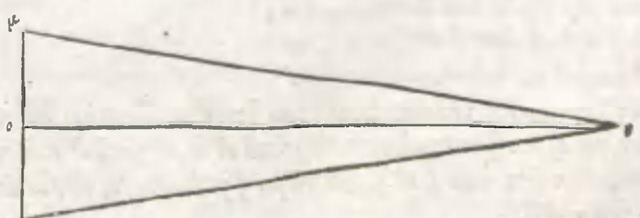
ιζ Ἐὰν ὦσι δύο κῶνοι ἰσοσκελεῖς, ἡ δὲ τοῦ ἑτέρου κώνου ἐπιφάνεια ἴση ἡ τῇ τοῦ ἑτέρου βάσει, ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου κάθετος ἀγομένη τῷ ὕψει ἴση ᾖ, ἴσοι ἔσονται οἱ κῶνοι. ἔστωσαν δύο κῶνοι ἰσοσκελεῖς, οἱ αβγ, δεζ. καὶ τοῦ αβγ ἡ μὲν βάσις ἴση ἔστω τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ δεζ. τὸ δὲ ὕψος τὸ αη, ἴσον ἔστω τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως τοῦ θ, ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ κώνου, οἷον ἐπὶ τὴν δε καθέτῳ ἠγμένῃ τῇ κθ. λέγω ὅτι ἴσοι εἰσὶν οἱ κῶνοι. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ βάσις τοῦ αβγ, τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ δεζ, τὰ δὲ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὡς ἄρα ἡ τοῦ βαγ βάσις, πρὸς τὴν τοῦ δεζ βάσιν, οὕτως ἡ ἐπιφάνεια τοῦ δεζ πρὸς τὴν βάσιν τοῦ δεζ. ἀλλ' ὡς ἡ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν ἰδίαν βάσιν, οὕτως ἡ δθ πρὸς τὴν θκ. ἐδείχθη γὰρ τοῦτο, ὅτι παντὸς κώνου ἰσοσκελοῦς ἡ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν βάσιν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει, ὃν ἡ πλευρὰ τοῦ κώνου πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως, τουτέστιν ἡ δε πρὸς δθ. ὡς δὲ ἡ εδ πρὸς θδ, οὕτως ἡ δθ πρὸς θκ. ἰσογώνια γὰρ ἐστὶ τὰ τρίγωνα. ἴση δὲ ἐστὶν ἡ θκ τῇ αη. ὡς ἄρα ἡ βάσις τοῦ βαγ, πρὸς τὴν βάσιν τοῦ δεζ, οὕτως τὸ ὕψος τοῦ δεζ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ αβγ. τῶν αβγ, δεζ ἄρα ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ βαγ, τῷ δεζ κώνῳ.





ιη Παντὶ ῥόμβῳ ἐξ ἰσοσκελῶν κώνων συγκειμένῳ, ἴσος ἐστὶ κῶνος, ὁ βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ἑτέρου κώνου τῶν περιεχόντων τὸν ῥόμβον, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ ἑτέρου κώνου καθέτῳ ἀγομένῃ ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ ἑτέρου κώνου. ἔστω ῥόμβος ἐξ ἰσοσκελῶν κώνων συγκείμενος ὁ αβγδ. οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν βγ κύκλος. ὕψος δὲ τὸ αδ. ἐκκείσθω δέ τις ἕτερος ὁ ηθκ, τὴν μὲν βάσιν ἔχων τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ αβγ κώνου ἴσην, τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ δ σημείου καθέτῳ ἐπὶ τὴν αβ, ἢ τὴν ἐπ' εὐθείας αὐτῇ ἠγμένην. ἔστω δὲ ἡ δζ. τὸ δὲ ὕψος τοῦ θηκ κώνου, ἔστω τὸ θλ. ἴσον δὴ ἐστὶ τὸ θλ τῇ δζ. λέγω ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ κῶνος τῷ ῥόμβῳ. ἐκκείσθω γὰρ ἕτερος κῶνος ὁ μνξ, τὴν μὲν βάσιν ἔχων ἴσην τῇ βάσει τοῦ αβγ κώνου, τὸ δὲ ὕψος

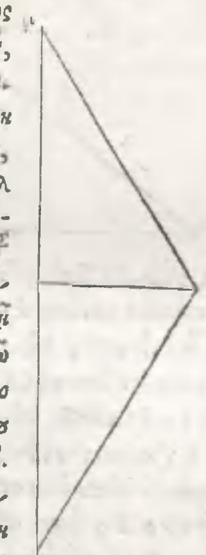


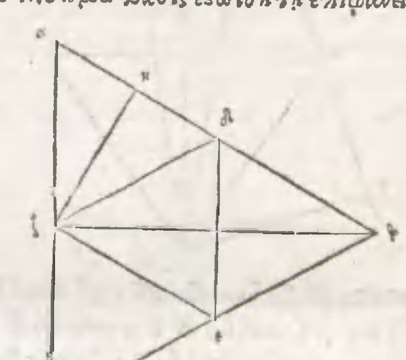


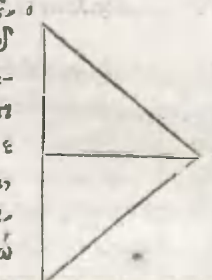
ἴσον

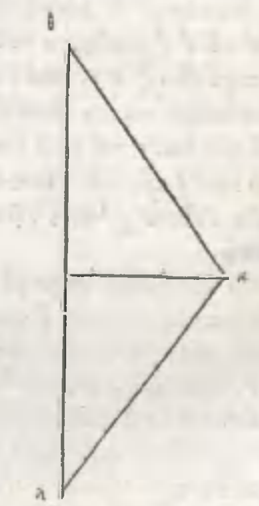
ἴσον τῇ αδ. καὶ ἔστω τὸ ὕψος αὐτοῦ τὸ νο. ἐπεὶ οὖν ἡ νο, τῇ αδ ἴση ἐστὶν, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ νο πρὸς δε, οὕτως ἡ αδ πρὸς δε. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ αδ πρὸς δε, οὕτως ὁ αβγδ ῥόμβος πρὸς τὸν βγδ κῶνον. ὡς δὲ ἡ νο πρὸς τὴν δε, οὕτως ὁ μνξ κῶνος πρὸς τὸν βγδ κῶνον, διὰ τὸ τὰς βάσεις αὐτῶν εἶναι ἴσας. ὡς ἄρα ὁ μνξ κῶνος, πρὸς τὸν βγδ κῶνον οὕτως ὁ αβγδ ῥόμβος, πρὸς τὸν βγδ κῶνον. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ μνξ, τῷ αβγδ ῥόμβῳ. καὶ ἐπεὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ αβγ, ἴση ἐστὶ τῇ βάσει τοῦ ηθκ. ὡς ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τοῦ αβγ, πρὸς τὴν ἰδίαν βάσιν, οὕτως ἡ βάσις τοῦ ηθκ πρὸς τὴν βάσιν τοῦ μνξ. ἡ γὰρ βάσις τοῦ αβγ ἴση ἐστὶ τῇ βάσει τοῦ μνξ. ὡς δὲ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ αβγ πρὸς τὴν ἰδίαν βάσιν, οὕτως ἡ αβ πρὸς τὴν βε, τουτέστιν ἡ αδ πρὸς δζ. ὅμοια γὰρ τὰ τρίγωνα. ὡς ἄρα ἡ βάσις τοῦ ηθκ πρὸς τὴν βάσιν τοῦ μνξ, οὕτως ἡ αδ πρὸς δζ. ἴση δὲ ἡ μὲν αδ τῇ νο, ὑπόκειται γάρ. ἡ δὲ δζ τῇ θλ. ὡς ἄρα ἡ βάσις τοῦ ηθκ, πρὸς τὴν βάσιν τοῦ μνξ, οὕτως τὸ νο ὕψος πρὸς τὸ θλ. τῶν ηθκ, μνξ ἄρα κώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσοι ἄρα εἰσὶν οἱ κῶνοι. ἐδείχθη δὲ ὁ μνξ ἴσος τῷ αβγδ ῥόμβῳ, καὶ ὁ ηθκ ἄρα κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ αβγδ ῥόμβῳ.

Ἐὰν κῶνος ἰσοσκελὴς ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ τῇ βάσει, ἀπὸ δὲ τοῦ γινομένου κύκλου, κῶνος ἀναγραφῇ κορυφὴν ἔχων τὸ κέντρον τῆς βάσεως, ὁ δὲ γενόμενος ῥόμβος ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ ὅλου κώνου, τῷ περιλείμματι ἴσος ἔσται κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων. ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως, ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ κώνου καθέτῳ ἠγμένῃ. ἔστω κῶνος ἰσοσκελὴς ὁ αβγ. καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ παραλλήλῳ τῇ βάσει, καὶ ποιείτω τομὴν τὴν δε. κέντρον δὲ τῆς βάσεως ἔστω ζ. καὶ ἀπὸ τοῦ περὶ διάμετρον τὴν δε κύκλου, κῶνος ἀναγεγράφθω κορυφὴν ἔχων τὸ ζ. ἔσται δὴ ῥόμβος ὁ βδζε, ἐξ ἰσοσκελῶν κώνων συγκείμενος. ἐκκείσθω δή τις κῶνος ὁ κθλ, οὗ ἡ μὲν βάσις ἔστω ἴση τῇ ἐπιφανείᾳ τῇ μεταξὺ τῶν δε, αγ. τὸ δὲ ὕψος ἀπὸ τοῦ ζ σημείου καθέτου, ἐπὶ τὴν αβ ἠγμένῃ. ἔστω ἴσον τῇ ζη. λέγω ὅτι ἐὰν ἀπὸ τοῦ αβγ κώνου νοηθῇ ἀφῃρημένος ὁ βδζε ῥόμβος, τῷ περιλείμματι ἴσος ἔσται ὁ θκλ κῶνος. ἐκκείσθωσαν γὰρ δύο κῶνοι οἱ μνξ, οπρ. ὥστε τὴν μὲν τοῦ μνξ βάσιν ἴσην εἶναι τῇ τοῦ αβγ κώνου τῇ ἐπιφανείᾳ, τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ ζη. διὰ δὴ τοῦτο ἴσος ἐστὶν ὁ μνξ κῶνος τῷ αβγ κώνῳ. ἐὰν γὰρ ὦσι δύο κῶνοι ἰσοσκελεῖς, ἡ δὲ τοῦ ἑτέρου κώνου ἐπιφάνεια ἴση ἡ τῇ τοῦ ἑτέρου βάσει. ἔτι δὲ ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου ἀγομένη κάθετος, τῷ ὕψει ἴση, ἴσοι ἔσονται οἱ κῶνοι. τὴν δὲ τοῦ οπρ κώνου βάσιν ἴσην εἶναι τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ δβε κώνου, ὕψος δὲ τῇ ζη. διὰ δὴ τοῦτο ἴσος ἐστὶν ὁ οπρ κῶνος, τῷ βδζε ῥόμβῳ. τοῦτο γὰρ προαποδέδεικται. ἐπεὶ δὲ ἡ τοῦ αβγ κώνου ἐπιφάνεια σύγκειται ἔκ τε τῆς τοῦ βδε ἐπιφανείας, καὶ τῆς μεταξὺ τῶν δε, αγ. ἀλλ' ἡ μὲν τοῦ αβγ κώνου ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῇ βάσει τοῦ μνξ κώνου. ἡ δὲ τοῦ δβε ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῇ βάσει τοῦ οπρ. ἡ δὲ μεταξὺ τῶν δε, αγ, ἴση ἐστὶ τῇ βάσει τοῦ θκλ. ἡ ἄρα τοῦ μνξ βάσις ἴση ἐστὶ βάσεσι τῶν θκλ, οπρ. καὶ εἰσὶν οἱ κῶνοι ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος. ἴσος ἄρα ἐστὶ καὶ ὁ μνξ κῶνος τοῖς θκλ, οπρ κώνοις. ἀλλ' ὁ μὲν μνξ





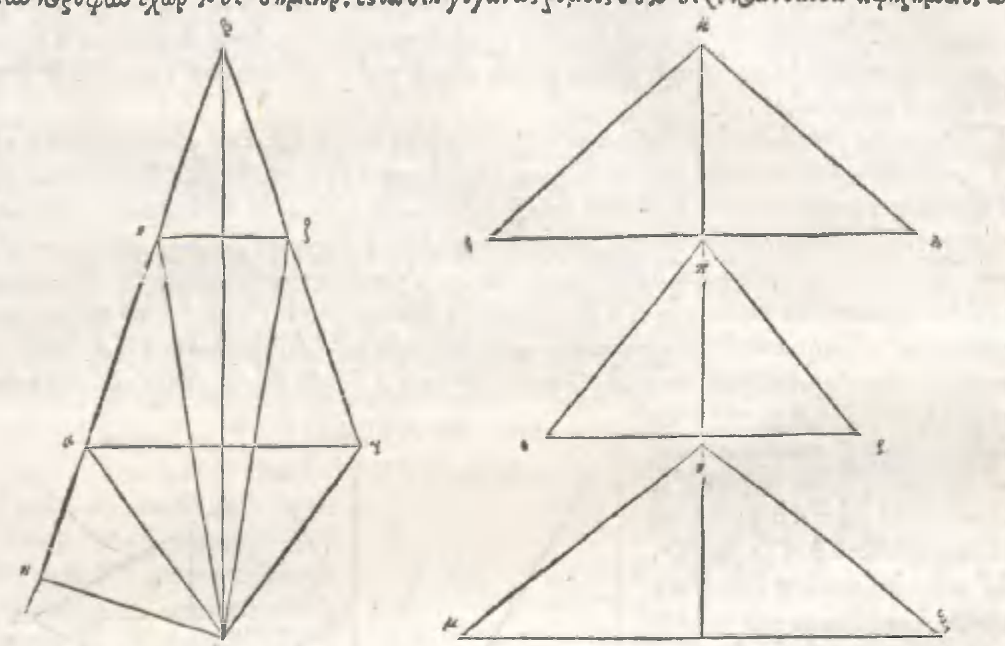




κῶνος

κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ αβγ κώνῳ. ὁ δὲ π ο ρ, τῷ β δ ε ζ ῥόμβῳ. λοιπὸς ἄρα ὁ θ κ λ κῶνος, τῷ περιλείμματι ἴσος ἐστίν.

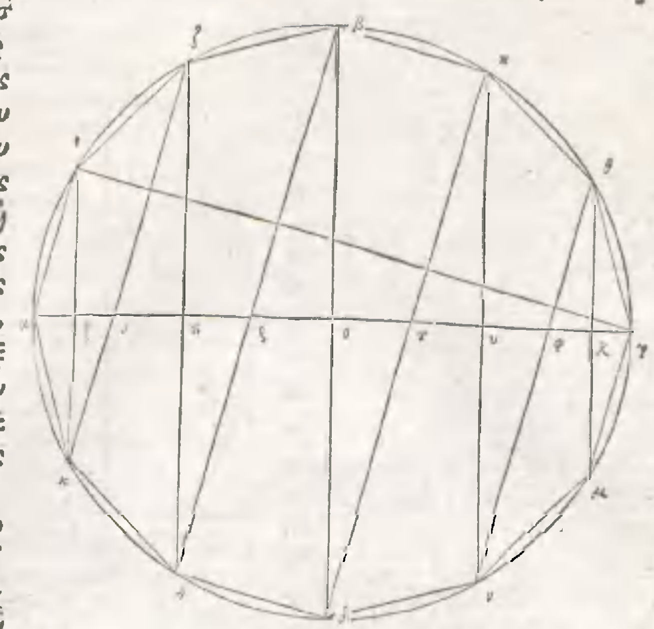
κ Ἐὰν ῥόμβου ἐξ ἰσοσκελῶν κώνων συγκειμένου, ὁ ἕτερος κῶνος ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ τῇ βάσει, ἀπὸ δὲ τοῦ γενομένου κύκλου κῶνος ἀναγραφῇ, κορυφὴν ἔχων τὴν αὐτὴν τῷ ἑτέρῳ κώνῳ· ἀπὸ δὲ τοῦ ὅλου ῥόμβου ὁ γενόμενος ῥόμβος ἀφαιρεθῇ, τῷ περιλείμματι ἴσος ἔσται ὁ κῶνος, ὁ βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων, ὕψος δὲ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ ἑτέρου κώνου ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ ἑτέρου κώνου καθέτῳ ἠγμένῃ. ἔστω ῥόμβος ἐξ ἰσοσκελῶν κώνων συγκείμενος ὁ αβγδ. καὶ τμηθήτω ὁ ἕτερος κῶνος ἐπιπέδῳ παραλλήλῳ τῇ βάσει, καὶ ποιείτω τομὴν τὴν εζ. ἀπὸ δὲ τοῦ περὶ διάμετρον τὴν εζ κύκλου, κῶνος ἀναγεγράφθω τὴν κορυφὴν ἔχων τὸ δ σημεῖον. ἔσται δὴ γεγονὼς ῥόμβος ὁ εβδζ. καὶ νοείσθω ἀφῃρημένος ἀπὸ



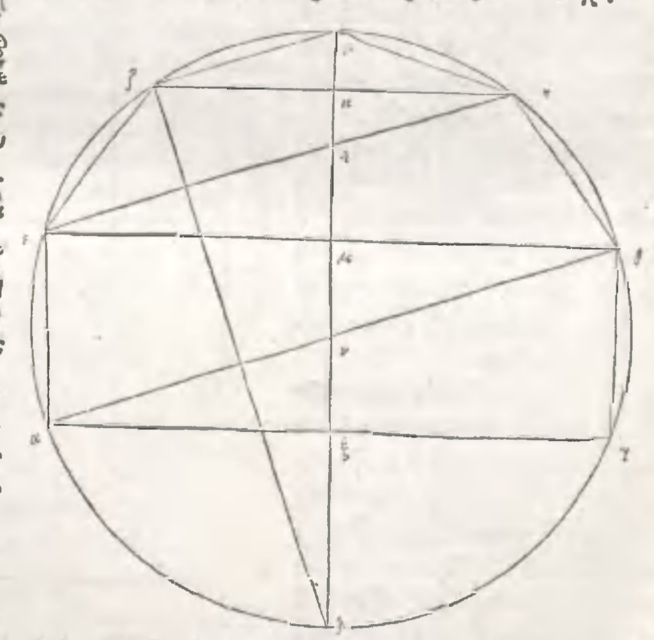
τοῦ ὅλου ῥόμβου. ἐκκείσθω δέ τις κῶνος ὁ θκλ, τὴν μὲν βάσιν ἴσην ἔχων τῇ ἐπιφανείᾳ τῇ μεταξὺ τῶν αγ, εζ. τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ δ σημείου καθέτῳ ἀγομένῃ ἐπὶ τὴν βα, ἢ τὴν ἐπ' εὐθείας αὐτῇ. λέγω ὅτι ὁ θκλ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ εἰρημένῳ περιλείμματι. ἐκκείσθωσαν γὰρ δύο κῶνοι, οἱ μνξ, ο π ρ. καὶ ἡ μὲν βάσις τοῦ μνξ κώνου ἴση ἔστω τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ αβγ. τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ δη. διὰ δὴ τὰ προδειχθέντα, ἴσος ἐστὶν ὁ μνξ κῶνος τῷ αβγδ ῥόμβῳ. τοῦ δὲ ο π ρ κώνου, ἡ μὲν βάσις ἴση ἔστω τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ εβζ κώνου. τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ δη. ὁμοίως δὴ ἴσος ἐστὶν ὁ ο π ρ κῶνος, τῷ εβδζ ῥόμβῳ. ἐπεὶ δὲ ὁμοίως ἡ ἐπιφάνεια τοῦ αβγ κώνου, σύγκειται ἐκ τῆς τοῦ εβζ, καὶ τῆς μεταξὺ τῶν εζ αγ. ἀλλὰ ἡ μὲν τοῦ αβγ κώνου ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῇ βάσει τοῦ μνξ. ἡ δὲ τοῦ εβζ κώνου ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῇ βάσει τοῦ ο ρ π κώνου. ἡ δὲ μεταξὺ τῶν εζ αγ ἴση ἐστὶ τῇ βάσει τοῦ θκλ, ἡ ἄρα βάσις τοῦ μνξ ἴση ἐστὶ ταῖς βάσεσι τῶν ο π ρ, θκλ. καὶ εἰσὶν οἱ κῶνοι ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος. καὶ ὁ μνξ ἄρα κῶνος ἴσος ἐστὶ τοῖς θκλ, ο π ρ κώνοις. ἀλλ' ὁ μὲν μνξ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ αβγδ ῥόμβῳ, ὁ δὲ ο π ρ κῶνος τῷ εβδζ ῥόμβῳ. λοιπὸς ἄρα ὁ κῶνος ὁ θκλ, ἴσος ἐστὶ τῷ περιλείμματι τῷ λοιπῷ.

κα Ἐὰν εἰς κύκλον πολύγωνον ἐγγραφῇ ἀρτιόπλευρόν τε καὶ ἰσόπλευρον, καὶ διαχθῶσιν εὐθεῖαι ἐπιζευγνύουσαι τὰς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου, ὥστε αὐτὰς παραλλήλους εἶναι μιᾷ ὁποιαοῦν τῶν ὑπὸ δύο πλευρὰς τοῦ πολυγώνου ὑποτεινουσῶν, αἱ ἐπιζευγνύουσαι πᾶσαι πρὸς τὴν τοῦ κύκλου διάμετρον τοῦτον ἔχουσι τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ὑποτείνουσα τὰς μιᾷ ἐλάσσονας τῶν ἡμίσεων, πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου. ἔστω κύκλος ὁ αβγδ, καὶ ἐν αὐτῷ πολύγωνον ἐγγεγράφθω τὸ αεζβηθγμνδλκ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ εκ, ζλ, βδ, ην, θμ. δῆλον δὴ ὅτι παράλληλοί εἰσιν τῇ ὑπὸ δύο πλευρὰς τοῦ πολυγώνου ὑποτεινούσῃ. λέγω οὖν, ὅτι αἱ εἰρημέναι πᾶσαι πρὸς τὴν τοῦ κύκλου διάμετρον τὴν αγ, τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσι τῷ τῆς γε πρὸς εα. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ζκ, λβ, ηδ, θν. παράλληλος ἄρα ἡ μὲν ζκ τῇ εα, ἡ δὲ βλ τῇ ζκ. καὶ ἔτι ἡ μὲν δη τῇ βλ, ἡ δὲ θν τῇ δη. καὶ ἡ γμ τῇ θν. καὶ ἐπεὶ δύο παράλληλοί εἰσιν αἱ εα, κζ, καὶ δύο διηγμέναι εἰσὶν αἱ εκ, αο. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ

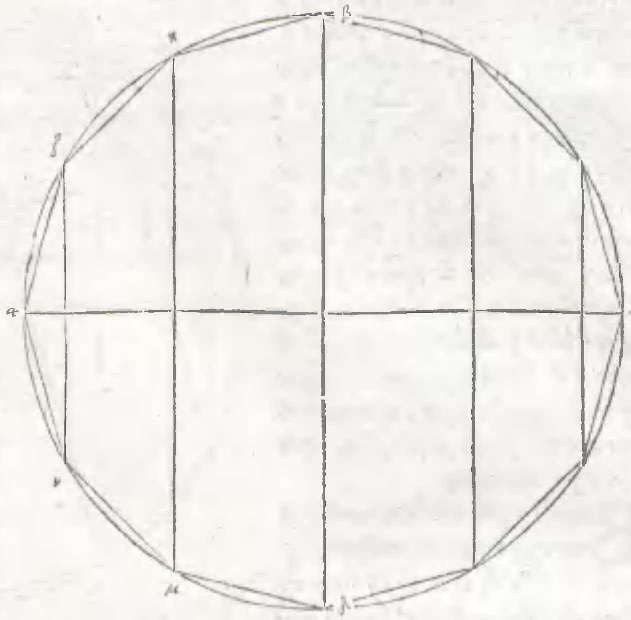
εξ, πρὸς ξα, ἡ κξ πρὸς ξο. ὡς δὲ ἡ κξ πρὸς ξο, ἡ ζπ πρὸς πο. ὡς δὲ ἡ ζπ πρὸς πο, ἡ λπ πρὸς πρ. ὡς δὲ ἡ λπ πρὸς πρ, οὕτως ἡ βσ πρὸς σρ. καὶ ἔτι ὡς ἡ βσ πρὸς σρ, ἡ δσ πρὸς στ. ὡς δὲ ἡ δσ πρὸς στ, ἡ ηυ πρὸς υτ. καὶ ἔτι ὡς ἡ ηυ πρὸς υτ, ἡ νυ πρὸς υφ. ὡς δὲ ἡ νυ πρὸς υφ, ἡ θχ πρὸς χφ. καὶ ἔτι ὡς ἡ θχ πρὸς χφ, ἡ μχ πρὸς χγ. καὶ πάντα ἄρα πρὸς πάντα ἐστὶν ὡς εἷς τῶν λόγων πρὸς ἕνα. ὡς ἄρα ἡ εξ πρὸς ξα, οὕτως αἱ εκ, ζλ, βδ, ην, θμ, πρὸς τὴν αγ διάμετρον. ὡς δὲ ἡ εξ πρὸς ξα, οὕτως ἡ γε πρὸς εα. ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ γε πρὸς εα, οὕτως πᾶσαι αἱ εκ, ζλ, βδ, ην, θμ, πρὸς τὴν αγ διάμετρον.

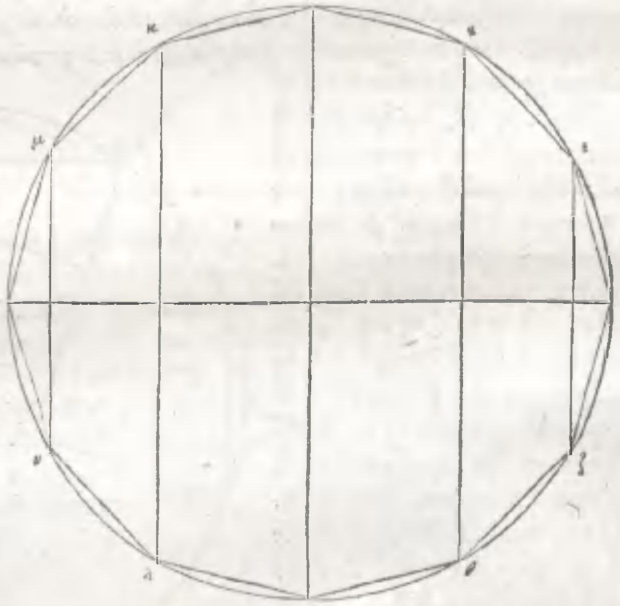


κβ Ἐὰν εἰς τμῆμα κύκλου πολύγωνον ἐγγραφῇ τὰς πλευρὰς ἔχον χωρὶς τῆς βάσεως ἴσας καὶ ἀρτίους, ἀχθῶσιν δὲ εὐθεῖαι παρὰ τὴν βάσιν τοῦ τμήματος, τὰς πλευρὰς ἐπιζευγνύουσαι τοῦ πολυγώνου, αἱ ἀχθεῖσαι πᾶσαι καὶ ἡμίσεια τῆς βάσεως, πρὸς τὸ ὕψος τοῦ τμήματος, τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσιν, ὃν ἡ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου ἐπιζευγνυμένη, πρὸς τὴν τοῦ πολυγώνου πλευράν. εἰς γὰρ κύκλον τὸν αβγ, διήχθω τις εὐθεῖα ἡ αγ, καὶ ἐπὶ τῆς αγ πολύγωνον ἐγγεγράφθω εἰς τὸ αβγ τμῆμα ἀρτιόπλευρόν τε, καὶ ἴσας ἔχον τὰς πλευρὰς χωρὶς τῆς βάσεως τῆς αγ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ζη, εθ, αἵ εἰσι παράλληλοι τῇ βάσει τοῦ τμήματος. λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς αἱ ζη, εθ, αξ πρὸς βξ, οὕτως ἡ δζ πρὸς ζβ. πάλιν γὰρ ὁμοίως ἐπεζεύχθωσαν αἱ ηε, αθ. παράλληλοι ἄρα εἰσὶ τῇ βζ. διὰ δὴ ταῦτα ἐστὶν ὡς ἡ κζ πρὸς κβ, ἥ τε ηκ πρὸς κλ, καὶ ἡ εμ πρὸς μλ, καὶ ἡ μθ πρὸς μν, καὶ ἡ ξα πρὸς ξν. καὶ ὡς ἄρα πάντα πρὸς πάντα, εἷς τῶν λόγων πρὸς ἕνα, ὡς ἄρα αἱ ζη, εθ, αξ πρὸς βξ, οὕτως ἡ ζκ πρὸς κβ. ὡς δὲ ἡ κζ πρὸς κβ, οὕτως ἡ δζ πρὸς ζβ. ὡς ἄρα ἡ δζ πρὸς ζβ, οὕτως αἱ ζη, εθ, αξ πρὸς βξ.

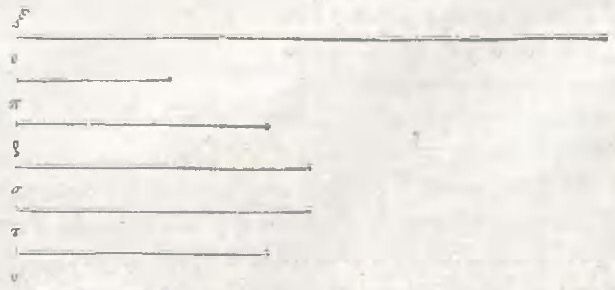


κγ Ἔστω ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ αβγδ. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸν πολύγωνον ἰσόπλευρον, τὸ δὲ πλῆθος τῶν πλευρῶν αὐτοῦ μετρείσθω ὑπὸ τετράδος. αἱ δὲ αγ, βδ διάμετροι ἔστωσαν. ἐὰν δὴ μενούσης τῆς αγ διαμέτρου, περιενεχθῇ ὁ αβγδ κύκλος ἔχων τὸ πολύγωνον, δῆλον ὅτι ἡ μὲν περιφέρεια αὐτοῦ κατὰ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ἐνεχθήσεται, αἱ δὲ τοῦ πολυγώνου γωνίαι χωρὶς τῶν πρὸς α, γ σημείοις κατὰ κύκλων περιφερειῶν ἐνεχθήσονται ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας γεγραμμένων ὀρθῶν πρὸς τὸν αβγδ κύκλον. διάμετροι δὲ αὐτῶν ἔσονται, αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου παρὰ τὴν βδ οὖσαι, αἱ δὲ τοῦ πολυγώνου πλευραὶ κατά τινων κώνων ἐνεχθήσονται. αἱ μὲν αζ, αν κατ' ἐπιφανείας κώνου, οὗ βάσις μὲν ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν ζν, κορυφὴ δὲ τὸ α σημεῖον. αἱ δὲ ζη, μν κατά τινος κωνικῆς ἐπιφανείας οἰσθήσονται, ἧς βάσις μὲν ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν μη, κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον καθ' ὃ συμβάλλουσιν ἐκβαλλόμεναι αἱ ζ η, μ ν ἀλλήλαις τε καὶ τῇ α γ. αἱ δὲ β θ, μ δ πλευραὶ κατὰ κωνικῆς ἐπιφανείας οἰσθήσονται. ἧς βάσις μὲν ἐστὶν ὁ κύκλος, ὁ περὶ διάμετρον τὴν β δ, ὀρθὸς πρὸς τὸν α β γ δ κύκλον. κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον, καθ' ὃ συμβάλλουσιν ἐκβαλλόμεναι αἱ β η, δ μ, ἀλλήλαις τε καὶ τῇ γ α. ὁμοίως δὲ καὶ ἐν τῷ ἑτέρῳ ἡμικυκλίῳ πλευραὶ κατὰ κωνικῶν ἐπιφανειῶν οἰσθήσονται, πάλιν ὁμοίων ταύταις. ἔσται δή τι σχῆμα ἐγγραφόμενον ἐν τῇ σφαίρᾳ ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενον, τῶν προειρημένων. οὗ ἡ ἐπιφάνεια ἐλάσσων ἔσται τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας. διαιρεθείσης γὰρ τῆς σφαίρας ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κατὰ τὴν β δ ὀρθοῦ, πρὸς τὸν α β γ δ κύκλον, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἑτέρου ἡμισφαιρίου, καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ σχήματος τοῦ ἐν αὐτῷ ἐγγεγραμμένου, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσιν ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ. ἀμφοτέρων γὰρ τῶν ἐπιφανειῶν πέρας ἐστὶ, τοῦ κύκλου ἡ περιφέρεια, τοῦ περὶ διάμετρον τὴν β δ ὀρθοῦ πρὸς τὸν α β γ δ κύκλον. καί εἰσιν ἀμφότεραι ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι. καὶ περιλαμβάνεται αὐτῶν ἡ ἑτέρα ὑπὸ τῆς ἑτέρας ἐπιφανείας, καὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχοντος αὐτῇ. ὁμοίως δὲ καὶ τοῦ ἐν τῷ ἑτέρῳ ἡμισφαιρίῳ σχήματος ἡ ἐπιφάνεια ἐλάσσων ἐστὶ τῆς τοῦ ἡμισφαιρίου ἐπιφανείας. καὶ ὅλη οὖν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ σχήματος τοῦ ἐν τῇ σφαίρᾳ, ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.





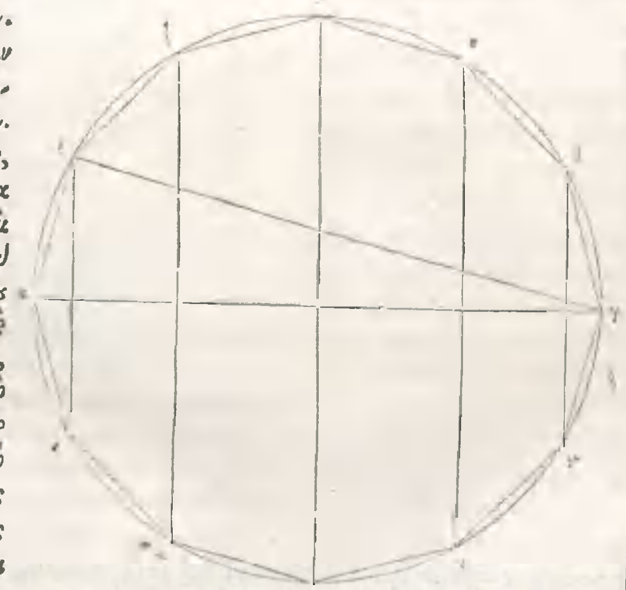
κδ Ἡ τοῦ ἐγγραφομένου σχήματος εἰς τὴν σφαῖραν ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς πλευρᾶς τοῦ σχήματος, καὶ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς ἐπιζευγνυούσαις τὰς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου (τετραπλεύρου) παραλλήλους οὔσας τῇ ὑπὸ δύο πλευρὰς τοῦ πολυγώνου ὑποτεινούσῃ εὐθείᾳ. ἔστω ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ α β γ δ, καὶ ἐν αὐτῷ πολύγωνον ἐγγεγράφθω ἰσόπλευρον, οὗ αἱ πλευραὶ ὑπὸ τετράδος μετροῦνται. καὶ ἀπὸ τοῦ πολυγώνου τοῦ ἐγγεγραμμένου νοείσθω τι εἰς τὴν σφαῖραν ἐγγεγραφὲν σχῆμα. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ε ζ, η θ, γ δ, κ λ, μ ν, παράλληλοι οὖσαι τῇ ὑπὸ δύο πλευ-



ρὰς

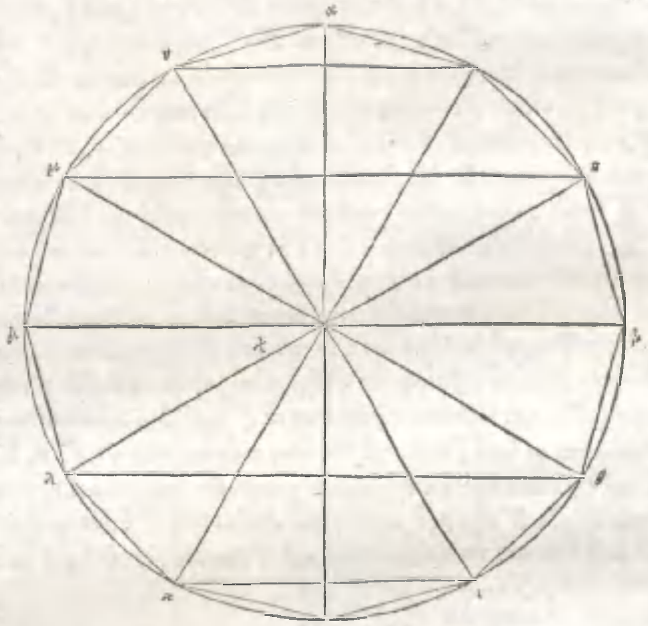
ρὰς ὑποτεινούσῃ εὐθείᾳ. κύκλος δή τις ἐκκείσθω ὁ ξ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς α ε, καὶ τῆς ἴσης ταῖς ε ζ, η θ, γ δ, κ λ, μ ν. λέγω ὅτι ὁ κύκλος οὗτος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ εἰς τὴν σφαῖραν ἐγγραφομένου σχήματος. ἐκκείσθωσαν γὰρ κύκλοι οἱ ο, π, ρ, σ, τ, υ. καὶ τοῦ μὲν ο, ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δυνάσθω τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ε α, καὶ τῆς ἡμισείας τῆς ε ζ. ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ π, δυνάσθω τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ε α καὶ τῆς ἡμισείας τῶν ε ζ, η θ. ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ρ, δυνάσθω τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ε α καὶ τῆς ἡμισείας τῶν η θ, γ δ. ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ σ, δυνάσθω τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς α ε, καὶ τῆς ἡμισείας τῶν γ δ, κ λ. ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ τ, δυνάσθω τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς α ε, καὶ τῆς ἡμισείας τῶν κ λ, μ ν. ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ υ, δυνάσθω τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς α ε, καὶ τῆς ἡμισείας τῆς μ ν. διὰ δὴ ταῦτα ὁ μὲν ο κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ α ε ζ κώνου. ὁ δὲ π τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τῇ μεταξὺ τῶν ε ζ, η θ. ὁ δὲ ρ τῇ μεταξὺ τῶν η θ, γ δ. ὁ δὲ σ τῇ μεταξὺ τῶν γ δ, κ λ. καὶ ἔτι ὁ μὲν τ ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τῇ μεταξὺ τῶν κ λ, μ ν. ὁ δὲ υ τῇ τοῦ μ β ν κώνου ἐπιφανείᾳ ἴσος ἐστί. οἱ πάντες ἄρα κύκλοι ἴσοι εἰσὶ τῇ τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐπιφανείᾳ. καὶ φανερὸν ὅτι αἱ ἐκ τοῦ κέντρου τῶν ο, π, ρ, σ, τ, υ κύκλων, δύνανται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς α ε καὶ δὶς τῶν ἡμίσεων τῶν ε ζ, η θ, γ δ, κ λ, μ ν. αἳ ὅλαι εἰσὶν αἱ ε ζ, η θ, κ λ, μ ν. αἱ ἄρα ἐκ τῶν κέντρων τῶν ο, π, ρ, σ, τ, υ κύκλων δύνανται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς α ε καὶ πασῶν τῶν ε ζ, η θ, γ δ, κ λ, μ ν. ἀλλὰ καὶ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ξ κύκλου δύναται τὸ ὑπὸ τῆς α ε, καὶ τῆς συγκειμένης ἐκ πασῶν τῶν ε ζ, η θ, γ δ, κ λ, μ ν. ἡ ἄρα ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ξ κύκλου δύναται τὰς ἐκ τῶν κέντρων τῶν ο, π, ρ, σ, τ, υ κύκλων. καὶ ὁ κύκλος ἄρα ὁ ξ, ἴσος ἐστὶ τοῖς ο, π, ρ, σ, τ, υ κύκλοις. οἱ δὲ ο, π, ρ, σ, τ, υ κύκλοι ἀπεδείχθησαν ἴσοι τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ εἰρημένου σχήματος. καὶ ὁ ξ ἄρα κύκλος ἴσος ἔσται τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος.

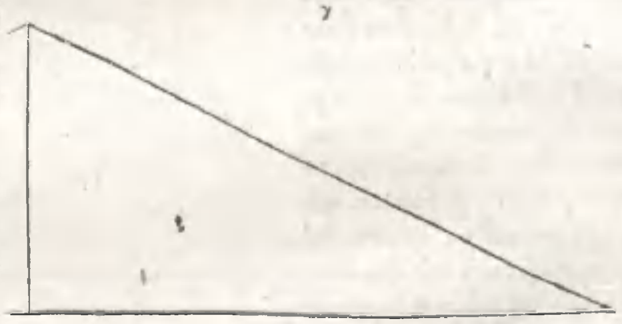
Τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος εἰς τὴν σφαῖραν, ἡ ἐπιφάνεια ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν κωνικῶν ἐπιφανειῶν, ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τετραπλασία τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ. ἔστω ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ α β γ δ. καὶ ἐν αὐτῷ ἐγγεγράφθω πολύγωνον ἀρτιόγωνον ἰσόπλευρον, οὗ αἱ πλευραὶ ὑπὸ τετράδος μετροῦνται. καὶ ἀπ' αὐτοῦ νοείσθω ἐπιφάνεια ἡ ἀπὸ τῶν κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχομένη. λέγω ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγραφέντος, ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τετραπλασία τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ὑπὸ δύο πλευρὰς ὑποτείνουσαι τοῦ πολυγώνου, αἱ ε ι, θ μ. καὶ ταύταις παράλληλοι αἱ ζ κ, δ β, η λ. ἐκκείσθω δέ τις κύκλος ὁ ρ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ τῆς ε α, καὶ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς ε ι, ζ κ, β δ, η λ, θ μ. διὰ δὴ τὸ προδειχθὲν ἴσος ἐστὶν ὁ κύκλος τῇ τοῦ εἰρημένου σχήματος ἐπιφανείᾳ. καὶ ἐπεὶ δέδεικται ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ἴση πάσαις ταῖς ε ι, ζ κ, β δ, η λ, θ μ, πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου τὴν α γ, οὕτως ἡ γ ε πρὸς ε α. τὸ ἄρα ὑπὸ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς εἰρημέναις, καὶ τῆς ε α, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ρ κύκλου, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν α γ, γ ε. ἀλλὰ καὶ τὸ ὑπὸ α γ, γ ε ἔλασσον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς α γ. ἔλασσον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ρ, τοῦ ἀπὸ τῆς α γ. ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ρ τῆς α γ. ὥστε ἡ διάμετρος τοῦ ρ κύκλου, ἐλάσσων ἐστὶν ἢ διπλασία τῆς διαμέτρου τοῦ α β γ δ κύκλου. καὶ δύο ἄρα τοῦ α β γ δ κύκλου διάμετροι, μείζους εἰσὶ τῆς διαμέτρου τοῦ ρ κύκλου. καὶ τὸ τετράκις ἀπὸ τῆς διαμέτρου τοῦ α β γ δ κύκλου, τουτέστι τῆς α γ, μεῖζον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς τοῦ ρ κύκλου διαμέτρου. ὡς δὲ τὸ τετράκις ἀπὸ τῆς α γ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς τοῦ ρ κύκλου διαμέτρου, οὕτως τέσσαρες κύκλοι οἱ α β γ δ πρὸς τὸν ρ κύκλον. τέσσαρες ἄρα κύκλοι οἱ α β γ δ, μείζους εἰσὶ τοῦ ρ κύκλου. ὁ ἄρα κύκλος ὁ ρ ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τετραπλάσιος τοῦ μεγίστου κύκλου. ὁ δὲ ρ κύκλος ἴσος ἐδείχθη κε



τῇ εἰρημένῃ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος. ἡ ἄρα ἐπιφάνεια τοῦ σχήματος ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τετραπλασία τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ.

κϛ Τῷ ἐγγραφομένῳ ἐν τῇ σφαίρᾳ σχήματι, τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν κωνικῶν ἴσος ἐστὶ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον, τὸν ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος τοῦ ἐγγραφέντος ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου κάθετον ἠγμένῃ. ἔστω ἡ σφαῖρα καὶ ὁ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος ὁ αβγδ. καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ τῷ πρότερον. ἔστω δὲ κῶνος ὀρθὸς ὁ ρ, βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου κάθετον ἠγμένῃ. δεικτέον ὅτι ὁ κῶνος ὁ ρ, ἴσος ἐστὶ τῷ ἐγγεγραμμένῳ ἐν τῇ σφαίρᾳ σχήματι. ἀπὸ γὰρ τῶν κύκλων ὧν εἰσι διάμετροι αἱ ζν, ημ, θλ, ικ, κῶνοι ἀναγεγράφθωσαν, κορυφὴν ἔχοντες τὸ τῆς σφαίρας κέντρον. ἔσται δὴ ῥόμβος στερεὸς ἔκ τε κώνου, οὗ βάσις μὲν ἔστω ὁ κύκλος ὁ περὶ τὴν ζν, κορυφὴ δὲ τὸ α σημεῖον. καὶ τοῦ κώνου οὗ βάσις ὁ αὐτὸς κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ χ σημεῖον, ἴσος ἐστὶ τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ναζ. ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ χ κάθετον ἠγμένῃ. πάλιν δὲ καὶ τὸ περιλελειμμένον τοῦ ῥόμβου τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου τῆς μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὴν ζν ημ. καὶ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν κώνων τῶν τε ζνχ, καὶ τοῦ ημχ, ἴσον ἐστὶ τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς μν ζη. ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ χ ἐπὶ τὴν ζη κάθετον ἠγμένῃ. δέδεικται γὰρ ταῦτα. ἔτι δὲ καὶ τὸ περιλειπόμενον τοῦ κώνου τοῦ περιεχομένου ὑπό τε τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου τῆς μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς ημ, βδ, καὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ μηχ κώνου. καὶ τοῦ κύκλου τοῦ περὶ διάμετρον τὴν βδ, ἴσον ἔσται κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τῇ μεταξὺ τῶν τε ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς ημ, βδ. ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ χ ἐπὶ τὴν βη κάθετον ἠγμένῃ. ὁμοίως δὲ καὶ ἐν τῷ ἑτέρῳ ἡμισφαιρίῳ ὅ τε ῥόμβος ὁ χκγι, καὶ τὰ περιλείμματα τῶν κώνων ἴσα ἔσται τοσούτοις καὶ τηλικούτοις κώνοις, ὅσοι καὶ πρότερον ἐρρήθησαν. δῆλον οὖν ὅτι καὶ ὅλον τὸ σχῆμα τὸ ἐγγεγραμμένον ἐν τῇ σφαίρᾳ, ἴσον ἐστὶ πᾶσι τοῖς εἰρημένοις κώνοις. οἱ δὲ κῶνοι ἴσοι εἰσὶ τῷ ρ κώνῳ. ἐπειδὴ ὁ ρ κῶνος ὕψος μὲν ἔχει ἑκάστῳ ἴσον τῶν εἰρημένων κώνων. βάσιν δὲ ἴσην πάσαις ταῖς βάσεσιν αὐτῶν. δῆλον οὖν, ὅτι τὸ ἐν τῇ σφαίρᾳ ἐγγεγραμμένον ἴσον ἐστὶ τῷ ἐκκειμένῳ κώνῳ.

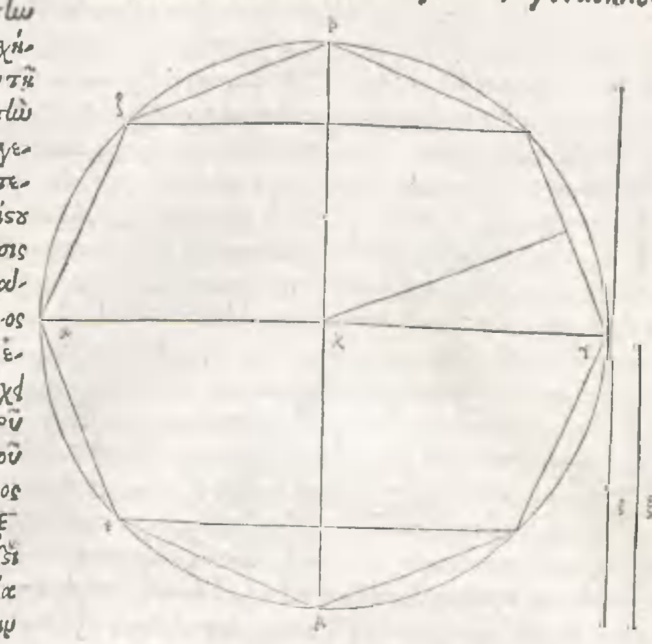




κζ Τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐν τῇ σφαίρᾳ, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν κωνικῶν, ἔλασσόν ἐστιν ἢ τετραπλάσιον τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος ἴσην τῷ μεγίστῳ κύκλῳ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ἔστω γὰρ ὁ γινόμενος κῶνος ἴσος τῷ σχήματι τῷ ἐγγεγραμμένῳ ἐν τῇ σφαίρᾳ, τὴν βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος. τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου κάθετον ἀγομένῃ ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ ἐγγραφέντος πολυγώνου ὁ ρ. ὁ δὲ κῶνος

ὁ ξ

ὁ ξ ἔστω, βάσιν ἔχων ἴσην τῷ αβγδ κύκλῳ, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ αβγδ κύκλου. ἐπεὶ οὖν ὁ ρ κῶνος βάσιν ἔχει ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ χ κάθετον ἀγομένῃ ἐπὶ τὴν αζ. ἐδείχθη δὲ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐλάσσων ἢ τετραπλασία τοῦ ἐν τῇ σφαίρᾳ μεγίστου κύκλου. ἔστιν ἄρα ἡ τοῦ ρ κώνου βάσις ἐλάσσων ἢ τετραπλασία τῆς βάσεως τοῦ ξ κώνου. ἔστι δὲ καὶ τὸ ὕψος τοῦ ρ ἔλασσον τοῦ ὕψους τοῦ ξ κώνου. ἐπεὶ οὖν ὁ ρ κῶνος τὴν μὲν βάσιν ἔχει ἐλάσσονα ἢ τετραπλασίαν τῆς τοῦ ξ βάσεως, τὸ δὲ ὕψος ἔλασσον τοῦ ὕψους, δῆλον ὡς καὶ αὐτὸς ὁ ρ κῶνος ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τετραπλάσιος τοῦ ξ κώνου. ἀλλὰ καὶ ὁ ρ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι. τὸ ἄρα ἐγγεγραμμένον σχῆμα, ἔλασσόν ἐστιν ἢ τετραπλάσιον τοῦ ξ κώνου.

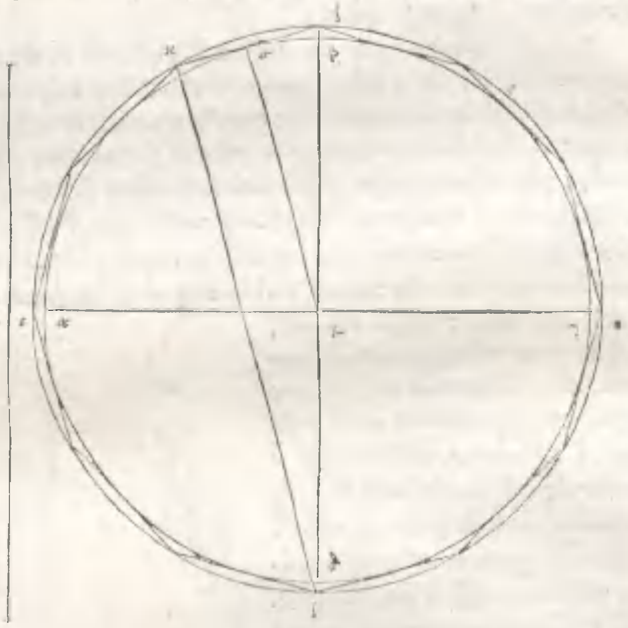


Ἔστω ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ αβγδ. περὶ δὲ τὸν αβγδ κύκλον περιγεγράφθω πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, τὸ δὲ πλῆθος τῶν πλευρῶν αὐτοῦ μετρείσθω ὑπὸ τετράδος. τὸ δὲ περὶ τὸν κύκλον περιγεγραμμένον πολύγωνον, κύκλος περιγεγραμμένος περιλαμβανέτω, περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον γινόμενος τῷ αβγδ, μενούσης δὴ τῆς εη περιενεχθήτω τὸ εζηθ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ τότε πολύγωνον καὶ ὁ κύκλος. δῆλον οὖν ὅτι ἡ μὲν περιφέρεια τοῦ αβγδ κύκλου κατὰ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας οἰσθήσεται. ἡ δὲ περιφέρεια τοῦ εζηθ, κατ' ἄλλης ἐπιφανείας σφαίρας τὸ αὐτὸ κέντρον ἐχούσης τῇ ἐλάσσονι οἰσθήσεται. αἱ δὲ ἁφαὶ καθ' ἃς ἐπιψαύουσιν αἱ πλευραὶ, γράφουσι κύκλους ὀρθοὺς πρὸς τὸν αβγδ κύκλον ἐν τῇ ἐλάσσονι σφαίρᾳ. αἱ δὲ γωνίαι τοῦ πολυγώνου χωρὶς τῶν πρὸς τοῖς ε, η σημείοις, κατὰ κύκλων περιφερειῶν οἰσθήσονται, ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς μείζονος σφαίρας γεγραμμένων ὀρθῶν πρὸς τὸν εζηθ κύκλον. αἱ δὲ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου κατὰ κωνικῶν ἐπιφανειῶν οἰσθήσονται, καθάπερ ἐπὶ τῶν πρὸ τούτου. ἔσται οὖν τὸ σχῆμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν κωνικῶν, περὶ μὲν τὴν ἐλάσσονα σφαῖραν περιγεγραμμένον, ἐν δὲ τῇ μείζονι ἐγγεγραμμένον. ὅτι δὲ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος μείζων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, οὕτως δειχθήσεται. ἔστω γὰρ ἡ κδ διάμετρος κύκλου τινὸς τῶν ἐν τῇ ἐλάσσονι σφαίρᾳ, τῶν κ, δ σημείων ὄντων, καθ' ἃ ἅπτονται τοῦ αβγδ κύκλου αἱ δύο πλευραὶ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου, διῃρημένης δὴ τῆς σφαίρας ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κατὰ τὴν κδ ὀρθοῦ πρὸς τὸν αβγδ κύκλον. καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος περὶ τὴν σφαῖραν, διαιρεθήσεται ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου. καὶ φανερὸν ὅτι τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσιν ἐν ἐπιπέδῳ. ἀμφοτέρων γὰρ τῶν ἐπιφανειῶν

πέρας ἐστὶν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια τοῦ περὶ διάμετρον τὴν κ δ, ὀρθοῦ πρὸς τὸν α β γ δ κύκλον, καὶ εἰσὶν ἀμφότεραι ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι. καὶ περιλαμβάνεται ἡ ἑτέρα αὐτῶν ὑπὸ τῆς ἑτέρας ἐπιφανείας, καὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχοντος. ἐλάσσων οὖν ἐστὶν ἡ περιλαμβανομένη τοῦ τμήματος τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια, τῆς ἐπιφανείας τοῦ σχήματος τοῦ περιγεγραμμένου περὶ αὐτήν. ὁμοίως δὲ καὶ ἡ τοῦ λοιποῦ τμήματος τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια, ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ σχήματος τοῦ περιγεγραμμένου περὶ αὐτήν. δῆλον οὖν, ὅτι καὶ ὅλη ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ σχήματος τοῦ περιγεγραμμένου περὶ αὐτήν.

κη Τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος περὶ τὴν σφαῖραν, ἴσος ἐστὶ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ πολυγώνου καὶ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς ἐπιζευγνυούσαις τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου, οὔσαις παράλληλοις τινὶ τῶν ὑπὸ δύο πλευρὰς τοῦ πολυγώνου ὑποτεινουσῶν. τὸ γὰρ περιγεγραμμένον περὶ τὴν ἐλάσσονα σφαῖραν, ἐγγέγραπται εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν. τοῦ δὲ ἐγγεγραμμένου ἐν τῇ σφαίρᾳ περιεχομένου ὑπὸ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν κωνικῶν, δέδεικται ὅτι τῇ ἐπιφανείᾳ ἴσος ἐστὶν ὁ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ πολυγώνου, καὶ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς ἐπιζευγνυούσαις τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου, οὔσαις παράλληλοις τινὶ τῶν ὑπὸ δύο πλευρὰς ὑποτεινουσῶν. δῆλον οὖν ἐστὶ τὸ προειρημένον.

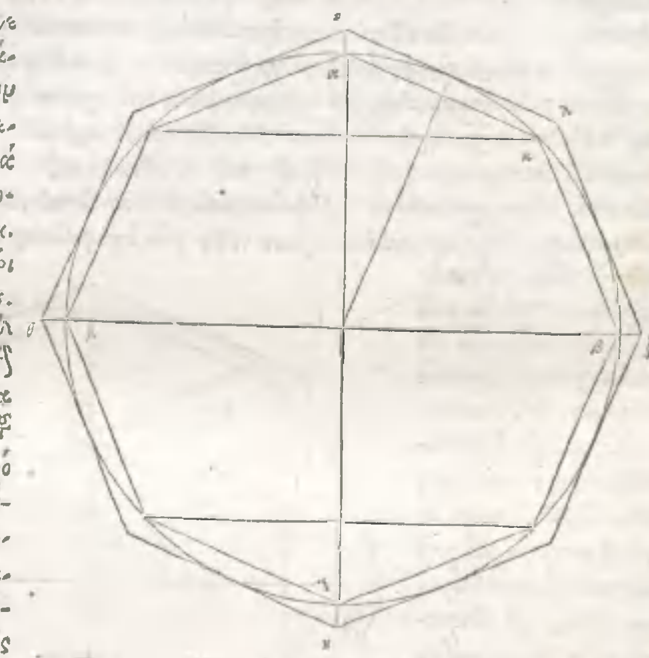
κθ Τοῦ σχήματος τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὴν σφαῖραν, ἡ ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶν ἢ τετραπλασία τοῦ μεγίστου κύκλου τοῦ ἐν τῇ σφαίρᾳ. ἔστω γὰρ ἥ τε σφαῖρα καὶ ὁ κύκλος καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον προκειμένοις. καὶ ὁ λ κύκλος ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ ἔστω τοῦ προκειμένου περιγεγραμμένου περὶ τὴν ἐλάσσονα σφαῖραν. ἐπεὶ οὖν ἐν τῷ ε ζ η θ κύκλῳ πολύγωνον ἰσόπλευρον ἐγγέγραπται, καὶ ἀρτιογώνιον, αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς τοῦ πολυγώνου πλευρὰς παράλληλοι οὖσαι τῇ θ ζ, πρὸς τὴν ζ θ τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσιν, ὃν ἡ κ θ πρὸς κ ζ. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ πολυγώνου καὶ τῆς πάσαις ταῖς ἐπιζευγνυούσαις τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου, τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν ζ θ κ. ὥστε ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ λ κύκλου ἴσον δύναται τῷ ὑπὸ ζ θ κ. μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ λ κύκλου τῆς θ κ. ἡ δὲ θ κ ἴση ἐστὶ τῇ διαμέτρῳ τοῦ α β γ δ κύκλου. διπλασία γάρ ἐστι τῆς χ ς, οὔσης ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ α β γ δ κύκλου. δῆλον οὖν ὅτι μείζων ἐστὶν ἢ τετραπλάσιος ὁ λ κύκλος, τουτέστιν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος περὶ τὴν ἐλάσσονα σφαῖραν, τοῦ μεγίστου κύκλου τοῦ ἐν τῇ σφαίρᾳ.

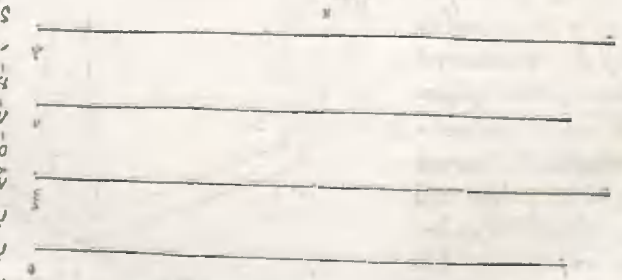


Τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι περὶ τὴν ἐλάσσονα σφαῖραν ἴσος ἐστὶ κῶνος, ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. τὸ γὰρ περιγεγραμμένον σχῆμα περὶ τὴν ἐλάσσονα σφαῖραν, ἐγγέγραπται ἐν τῇ μείζονι σφαίρᾳ. τῷ δὲ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν κωνικῶν ἐπιφανειῶν, δέδεικται ἴσος κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος. ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου καθέτῳ ἠγμένῃ. αὕτη δέ ἐστιν ἴση τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας. δῆλον οὖν ἐστὶ τὸ προτεθέν. ἐκ τούτου δὲ φανερόν, ὅτι τὸ σχῆμα τὸ περιγραφόμενον περὶ τὴν ἐλάσσονα σφαῖραν μεῖζόν ἐστιν ἢ τετραπλάσιον κώνου, τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος μέγιστον κύκλον τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ἐπειδὴ γὰρ ἴσος ἐστὶ τῷ σχήματι κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ αὐτοῦ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου καθέτῳ ἠγμένῃ, τουτέστι τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας. ἔστι δὲ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος περὶ τὴν σφαῖραν μείζων ἢ τετραπλασία τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν

ἐν τῇ σφαίρᾳ. μείζων ἄρα ἢ τετραπλάσιόν ἐστι τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον περὶ τὴν σφαῖραν τοῦ κώνου, βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν μέγιστον κύκλον, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ἐπειδὴ καὶ ὁ κῶνος ἴσος αὐτῷ, μείζων ἢ τετραπλάσιος γίνεται τοῦ εἰρημένου. βάσιν τε γὰρ μείζονα, ἢ τετραπλασίαν ἔχει, καὶ ὕψος ἴσον.

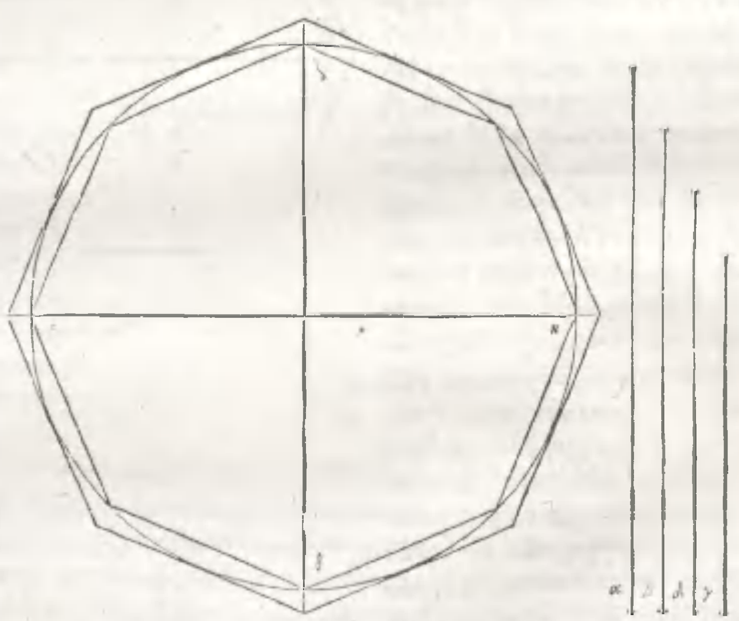
Ἐὰν ᾖ ἐν σφαίρᾳ σχῆμα ἐγγεγραμμένον, καὶ ἄλλο περιγεγραμμένον ὑπὸ ὁμοίων πολυγώνων, τὸν αὐτὸν τρόπον τοῖς πρότερον κατεσκευασμένοις, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐπιφάνειαν, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου περὶ τὸν μέγιστον κύκλον, πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου ἐν τῷ αὐτῷ κύκλῳ. αὐτὸ δὲ τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ σχῆμα τὸ ἐγγεγραμμένον, τριπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ αὐτοῦ λόγου. ἔστω ἐν σφαίρᾳ κύκλος ὁ α β γ δ. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸν πολύγωνον ἰσόπλευρον. τὸ δὲ πλῆθος τῶν πλευρῶν αὐτοῦ μετρείσθω ὑπὸ τετράδος. καὶ ἄλλο περιγεγράφθω περὶ τὸν κύκλον, ὅμοιον τῷ ἐγγεγραμμένῳ. αἱ δὲ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πλευραὶ ἐπιψαυέτωσαν τοῦ κύκλου κατὰ μέσα τῶν περιφερειῶν τῶν ἀποτεμνομένων ὑπὸ τῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου πλευρῶν. αἱ δὲ ε η, ζ θ διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἔστωσαν ἀλλήλαις τοῦ κύκλου τοῦ περιλαμβάνοντος τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον, καὶ ὁμοίως κείμεναι ταῖς α γ, β δ διαμέτροις, καὶ νοείσθωσαν ἐπιζευγνύμεναι ἐπὶ τὰς ἀπεναντίον γωνίας τοῦ πολυγώνου, αἳ γίγνονται ἀλλήλαις τε καὶ τῇ β ζ, θ δ παράλληλοι, μενούσης δὲ τῆς ε η διαμέτρου, καὶ περιενεχθέντων τῶν περιμέτρων τῶν πολυγώνων περὶ τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν. τὸ μὲν περιγεγραμμένον σχῆμα ἔσται ἐν τῇ σφαίρᾳ, τὸ δὲ ἐγγεγραμμένον. δεικτέον οὖν ὅτι ἡ μὲν ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ε λ πρὸς α κ. τὸ δὲ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον τριπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ αὐτοῦ λόγου. ἔστω γὰρ ὁ μ κύκλος ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὴν σφαῖραν. ὁ δὲ ν ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ἐγγεγραμμένου, δύναται ἄρα τοῦ μὲν μ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ε λ καὶ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς ἐπιζευγνυούσαις τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου τοῦ περιγεγραμμένου. ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ν, τὸ ὑπὸ τῆς α κ καὶ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς ἐπιζευγνυούσαις τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου τοῦ ἐγγεγραμμένου. καὶ ἐπεὶ ὅμοιά ἐστι τὰ πολύγωνα, ὅμοια ἂν εἴη καὶ τὰ περιεχόμενα χωρία ὑπὸ τῶν εἰρημένων γραμμῶν, τουτέστι τῶν ἐπὶ τὰς γωνίας, ἢ τὰς πλευρὰς τῶν πολυγώνων. ὥστε τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσι πρὸς ἄλληλα ὃν ἔχουσιν αἱ τῶν πολυγώνων πλευραὶ δυνάμει. ἀλλὰ καὶ ὃν ἔχει λόγον τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν εἰρημένων γραμμῶν, τοῦτον ἔχουσιν αἱ ἐκ τῶν κέντρων τῶν μ, ν κύκλων πρὸς ἀλλήλας δυνάμει. ὥστε καὶ αἱ τῶν μ, ν διάμετροι τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον ταῖς τῶν πολυγώνων πλευραῖς. οἱ δὲ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους διπλασίονα λόγον ἔχουσι τῶν διαμέτρων, αἵ τινές εἰσι ταῖς ἐπιφανείαις τοῦ περιγεγραμμένου καὶ ἐγγεγραμμένου. δῆλον οὖν, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος περὶ τὴν σφαῖραν, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος εἰς τὴν λ





τὴν σφαῖραν, τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ε λ πρὸς α κ. εἰλήφθωσαν δὴ δύο κῶνοι ὁ ξ, ο. καὶ ἔστω ὁ μὲν ξ κῶνος βάσιν ἔχων τὸν ξ κύκλον, ἴσον τῷ μ. ὁ δὲ ο, βάσιν ἔχων τὸν ο κύκλον, ἴσον τῷ ν, ὕψος δὲ ὁ μὲν ξ κῶνος τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, ὁ δὲ ο τὴν ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν α κ κάθετον ἠγμένην. ἴσος ἄρα ὁ μὲν ξ κῶνος τῷ σχήματι τῷ περιγεγραμμένῳ περὶ τὴν σφαῖραν, ὁ δὲ ο τῷ ἐγγεγραμμένῳ. δέδεικται γὰρ ταῦτα. καὶ ἐπεὶ ὅμοιά ἐστι τὰ πολύγωνα, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἡ ε λ πρὸς α κ, ὃν ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας πρὸς τὴν ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὴν α κ κάθετον ἀγομένην. τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει τὸ ὕψος τοῦ ξ κώνου, πρὸς τὸ ὕψος τοῦ ο κώνου, ὃν ἡ ε λ πρὸς α κ. ἔχει δὲ καὶ ἡ διάμετρος τοῦ μ κύκλου, πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ ν κύκλου λόγον, ὃν ἔχει ἡ ε λ πρὸς α κ. τῶν ἄρα ξ, ο κώνων αἱ διάμετροι τῶν βάσεων τοῖς ὕψεσι τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον. ὅμοιοι ἄρα εἰσί. καὶ διὰ τοῦτο τριπλασίονα λόγον ἔχει ὁ ξ κῶνος πρὸς τὸν ο κῶνον, ἤπερ ἡ διάμετρος τοῦ μ κύκλου πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ ν κύκλου. δῆλον οὖν, ὅτι καὶ τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ε λ πρὸς α κ.

λα Πάσης σφαίρας ἡ ἐπιφάνεια τετραπλασία ἐστὶ τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν αὐτῇ. ἔστω γὰρ σφαῖρά τις, καὶ ἔστω τετραπλάσιος τοῦ μεγίστου κύκλου ὁ α. λέγω ὅτι ὁ α ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας. εἰ γὰρ μή, ἤτοι μείζων ἐστὶν ἢ ἐλάσσων. ἔστω πρότερον μείζων ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας τοῦ κύκλου. ἔστι δὴ δύο μεγέθη ἄνισα, ἥ τε ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας, καὶ ὁ α κύκλος. δυνατὸν ἄρα ἐστὶ λαβεῖν δύο εὐθείας ἀνίσους, ὥστε τὴν μείζονα πρὸς τὴν ἐλάσσονα, λόγον ἔχειν ἐλάσσονα τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας πρὸς τὸν κύκλον. εἰλήφθωσαν αἱ β, γ. καὶ τῶν β, γ μέση ἀνάλογον ἔστω ἡ δ. νοείσθω δὲ καὶ ἡ σφαῖρα ἐπιπέδῳ τετμημένη διὰ τοῦ κέντρου κατὰ τὸν ε ζ η θ κύκλον. νοείσθω δὲ καὶ εἰς τὸν κύκλον ἐγγεγραμμένον καὶ περιγεγραμμένον πολύγωνον. ὥστε ὅμοιον εἶναι τὸ περιγεγραμμένον τῷ ἐγγεγραμμένῳ πολυγώνῳ. καὶ τὴν τοῦ περιγεγραμμένου πλευρὰν ἐλάσσονα λόγον ἔχειν τοῦ ὃν ἔχει ἡ β πρὸς τὴν δ. καὶ ὁ διπλάσιος ἄρα λόγος τοῦ διπλασίου λόγου ἐστὶν ἐλάσσων. καὶ τοῦ μὲν τῆς β πρὸς δ, διπλάσιος ἐστὶν ὁ τῆς β πρὸς τὴν γ. τῆς δὲ πλευρᾶς τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου, διπλάσιος ὁ τῆς ἐπιφανείας περιγεγραμμένου στερεοῦ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου. ἡ ἐπιφάνεια ἄρα τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος περὶ τὴν σφαῖραν, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος, ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας πρὸς τὸν α κύκλον. ὅπερ ἄτοπον. ἡ μὲν γὰρ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας μείζων ἐστίν, ἡ δὲ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος τοῦ α κύκλου ἐλάσσων ἐστί. δέδεικται γὰρ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐλάσσων τοῦ μεγίστου κύκλου

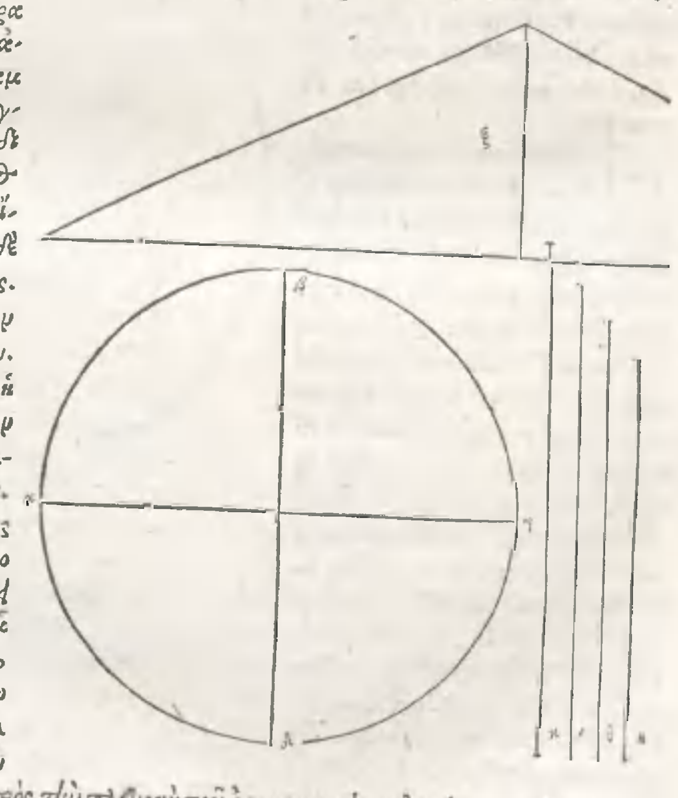


τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ἢ τετραπλασία. τοῦ δὲ μεγίστου κύκλου τετραπλάσιος ἐστὶν ὁ α κύκλος. οὐκ ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας μείζων ἐστὶ τοῦ α κύκλου. λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ ἐλάσσων. εἰ γὰρ δυνατόν ἔστω, καὶ ὁμοίως εὑρήσθωσαν αἱ β, γ εὐθεῖαι, ὥστε τὴν β πρὸς γ ἐλάσσονα λόγον ἔχειν τοῦ ὃν ἔχει ὁ α κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας. καὶ τῶν β, γ μέση ἀνάλογον ἡ δ. καὶ ἐγγεγράφθω καὶ περιγεγράφθω πάλιν, ὥστε τὴν τοῦ περιγεγραμμένου ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, τοῦ τῆς β πρὸς δ, καὶ τὰ διπλάσια ἄρα. ἡ ἐπιφάνεια ἄρα τοῦ περιγεγραμμένου πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ α κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας. ὅπερ ἄτοπον. ἡ μὲν

γὰρ

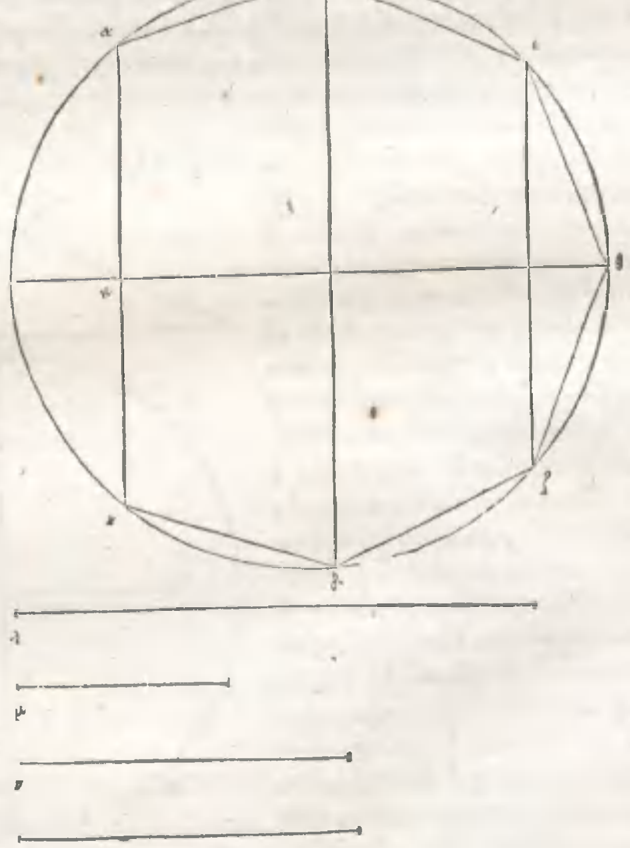
νου ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ α κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας. ὅπερ ἄτοπον. ἡ μὲν γὰρ τοῦ περιγεγραμμένου ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶ τοῦ α κύκλου. ἡ δὲ τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐλάσσων τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας. οὐκ ἄρα οὐδὲ ἐλάσσων ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας τοῦ α κύκλου. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ μείζων. ἡ ἄρα ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἴση ἐστὶ τῷ α κύκλῳ, τουτέστι τῷ τετραπλασίῳ τοῦ μεγίστου κύκλου.

λβ Πᾶσα σφαῖρα τετραπλασία ἐστὶ κώνου, βάσιν μὲν ἔχοντος ἴσην τῷ μεγίστῳ κύκλῳ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ἔστω γὰρ σφαῖρά τις, καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος ὁ α β γ δ. εἰ οὖν μή ἐστιν ἡ σφαῖρα τετραπλασία τοῦ εἰρημένου κώνου, ἔστω εἰ δυνατόν μείζων ἢ τετραπλασία. ἔστω δὲ ὁ ξ κῶνος βάσιν μὲν ἔχων τετραπλασίαν τοῦ α β γ δ κύκλου, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. μείζων οὖν ἐστὶν ἡ σφαῖρα τοῦ ξ κώνου. ἔσται δὴ δύο μεγέθη ἄνισα, ἥ τε σφαῖρα καὶ ὁ κῶνος. δυνατὸν οὖν δύο εὐθείας λαβεῖν ἀνίσους, ὥστε ἔχειν τὴν μείζονα πρὸς τὴν ἐλάσσονα λόγον ἐλάσσονα, τοῦ ὃν ἔχει ἡ σφαῖρα πρὸς τὸν ξ κῶνον. ἔστωσαν οὖν αἱ κ, η. αἱ δὲ ι, θ εἰλημμέναι. ὥστε τῷ ἴσῳ ἀλλήλων ὑπερέχειν, τὴν κ τῆς ι, καὶ τὴν ι τῆς θ, καὶ τὴν θ τῆς η. νοείσθω δὲ καὶ εἰς τὸν α β γ δ κύκλον ἐγγεγραμμένον πολύγωνον, οὗ τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν μετρείσθω ὑπὸ τετράδος. καὶ ἄλλο περιγεγραμμένον ὅμοιον τῷ ἐγγεγραμμένῳ, καθάπερ ἐπὶ τοῦ πρότερον. ἡ δὲ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου, ἐλάσσονα λόγον ἐχέτω τοῦ ὃν ἔχει ἡ κ πρὸς ι. καὶ ἔστωσαν αἱ α γ, β δ διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις. εἰ οὖν μενούσης τῆς α γ διαμέτρου, περιενεχθείη τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ τὰ πολύγωνα, ἔσται τὸ σχῆμα τὸ μὲν ἐγγεγραμμένον ἐν τῇ σφαίρᾳ, τὸ δὲ περιγεγραμμένον. καὶ ἕξει τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον τριπλασίονα λόγον, ἤπερ ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν α β γ δ κύκλον. ἡ δὲ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευρὰν ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ κ πρὸς τὴν ι. ὥστε τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ τριπλασίονα τοῦ κ πρὸς ι. ἔχει δὲ καὶ ἡ κ πρὸς η μείζονα λόγον, ἢ τριπλάσιον τοῦ ὃν ἔχει ἡ κ πρὸς ι. τοῦτο γὰρ φανερὸν διὰ λημμάτων. πολλῷ ἄρα τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχει, τοῦ ὃν ἔχει ἡ κ πρὸς η. ἡ δὲ κ πρὸς η ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ σφαῖρα πρὸς τὸν ξ κῶνον, καὶ ἐναλλάξ, ὅπερ ἀδύνατον. τὸ γὰρ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον μεῖζόν ἐστι τῆς σφαίρας. τὸ δὲ ἐγγεγραμμένον ἔλασσον τοῦ ξ κώνου. διότι ὁ μὲν ξ κῶνος τετραπλάσιος ἐστὶ τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος ἴσην τῷ α β γ δ κύκλῳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. τὸ δὲ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἔλασσον τοῦ εἰρημένου κώνου, ἢ τετραπλάσιον. οὐκ ἄρα μείζων ἢ τετραπλασία ἡ σφαῖρα τοῦ εἰρημένου. ἔστω εἰ δυνατὸν ἐλάσσων ἢ τετραπλασία, ὥστε ἐλάσσων ἐστὶν ἡ σφαῖρα τοῦ ξ κώνου. εἰλήφθωσαν δὴ αἱ κ, η εὐθεῖαι, ὥστε τὴν κ μείζονα εἶναι τῆς η, καὶ ἐλάσσονα λόγον ἔχειν πρὸς αὐτήν, τοῦ ὃν ἔχει ὁ ξ κῶνος πρὸς τὴν σφαῖραν. καὶ αἱ θ, ι ἐκκείσθωσαν καθὼς πρότερον, καὶ εἰς τὸν α β γ δ κύκλον νοείσθω πολύγωνον ἐγγεγραμμένον. καὶ ἄλλο περιγεγραμμένον. ὥστε τὴν



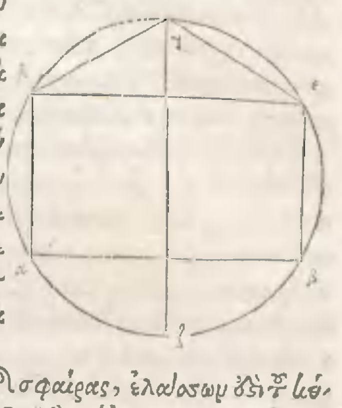
πλευρὰν τοῦ περιγεγραμμένου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, ἤπερ ἡ κ πρὸς ι. καὶ τὰ ἄλλα κατεσκευασμένα τὸν αὐτὸν τρόπον τοῖς πρότερον. ἕξει ἄρα καὶ τὸ περιγεγραμμένον στερεὸν σχῆμα, πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον τριπλασίονα λόγον, ἤπερ ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸν α β γ δ κύκλον, πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου, ἡ δὲ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευρὰν ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ κ πρὸς ι. ἔχει οὖν τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον, ἐλάσσονα λόγον ἢ τριπλάσιον τοῦ ὃν ἔχει ἡ κ πρὸς τὴν ι. ἡ δὲ κ πρὸς τὴν η μείζονα λόγον ἔχει, ἢ τριπλάσιον τοῦ ὃν ἔχει ἡ κ πρὸς τὴν ι. ὥστε ἐλάσσονα λόγον ἔχει τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον, ἢ ἡ κ πρὸς τὴν η. ἡ δὲ κ πρὸς τὴν η, ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ὁ ξ κῶνος πρὸς τὴν σφαῖραν, ὅπερ ἀδύνατον. τὸ μὲν γὰρ ἐγγεγραμμένον ἔλασσόν ἐστι τῆς σφαίρας, τὸ δὲ περιγεγραμμένον μεῖζον τοῦ ξ κώνου. οὐκ ἄρα οὐδὲ ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τετραπλασία ἡ σφαῖρα τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος ἴσην τῷ α β γ δ κύκλῳ. ὕψος δὲ τὴν ἴσην τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ μείζων. τετραπλασία ἄρα.

Προδεδειγμένων δὲ τούτων, φανερὸν ὅτι πᾶς κύλινδρος βάσιν μὲν ἔχων τὸν μέγιστον κύκλον τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ διαμέτρῳ τῆς σφαίρας, ἡμιόλιός ἐστι τῆς σφαίρας. ὁ μὲν γὰρ κύλινδρος ὁ προειρημένος ἑξαπλάσιός ἐστι τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὴν αὐτήν, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου. ἡ δὲ σφαῖρα δέδεικται τοῦ αὐτοῦ κώνου τετραπλασία οὖσα. δῆλον οὖν, ὅτι ὁ κύλινδρος ἡμιόλιός ἐστι τῆς σφαίρας. πάλιν ἐπεὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου χωρὶς τῶν βάσεων ἴση δέδεικται κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέση ἀνὰ λόγον ἐστὶ τῆς τοῦ κυλίνδρου πλευρᾶς, καὶ τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως. τοῦ δὲ εἰρημένου κυλίνδρου περὶ τὴν σφαῖραν, ἡ πλευρὰ ἴση ἐστὶ τῇ διαμέτρῳ τῆς βάσεως, δῆλον ὅτι ἡ μέση αὐτῶν ἀνὰ λόγον, ἴση γίνεται τῇ διαμέτρῳ τῆς βάσεως. ὁ δὲ κύκλος ὁ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου ἔχων ἴσην τῇ διαμέτρῳ τῆς βάσεως, τετραπλάσιός ἐστι τῆς βάσεως τῆς τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ. ἔσται ἄρα καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου χωρὶς τῶν βάσεων, τετραπλασία τοῦ μεγίστου κύκλου. ὅλη ἄρα μετὰ τῶν βάσεων ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου ἑξαπλασία ἔσται τοῦ μεγίστου κύκλου. ἔστι δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια τετραπλασία τοῦ μεγίστου κύκλου. ὅλη ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου ἡμιολία ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

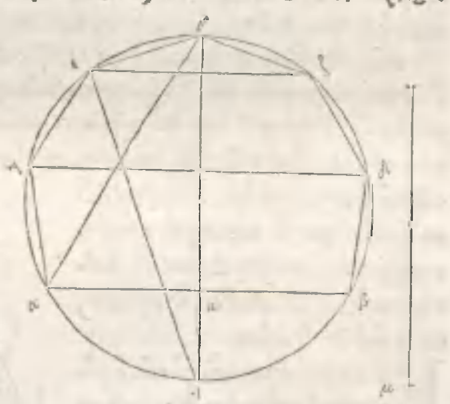


λγ Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος εἰς τὸ τμῆμα τῆς σφαίρας, ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου ἐν τῷ τμήματι τοῦ μεγίστου κύκλου, καὶ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς παραλλήλοις τῇ βάσει τοῦ τμήματος, σὺν τῇ ἡμισείᾳ τῆς τοῦ τμήματος βάσεως. ἔστω σφαῖρα, καὶ ἐν αὐτῇ τμῆμα, οὗ βάσις ὁ περὶ τὴν α η κύκλος. ἐγγεγράφθω σχῆμα εἰς αὐτὸ οἷον εἴρηται, περιεχόμενον ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν. καὶ μέγιστος κύκλος ὁ α η θ. καὶ ἀρτιόπλευρον πολύγωνον τὸ α γ ε θ ζ δ η χωρὶς τῆς α η πλευρᾶς. καὶ εἰλήφθω κύκλος ὁ λ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τῆς α γ πλευρᾶς, καὶ ὑπὸ πασῶν τῶν ε ζ, γ δ. καὶ ἔτι τῆς ἡμισείας τῆς βάσεως, τουτέστι τῆς α κ. δεικτέον οὖν, ὅτι ὁ λ κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ τοῦ σχήματος ἐπιφανείᾳ. εἰλήφθω γὰρ κύκλος ὁ μ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ε θ πλευρᾶς, καὶ τῆς ἡμισείας τῆς ε ζ. γίνεται δὴ ὁ μ κύκλος ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, οὗ βάσις μὲν ὁ περὶ τὴν ε ζ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ θ σημεῖον. εἰλήφθω δὲ καὶ ἄλλος ὁ ν, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τῆς ε γ, καὶ τῆς ἡμισείας συναμφοτέρου τῆς ε ζ, γ δ. ἔσται οὗτος ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς ε ζ, γ δ. καὶ ἄλλος ὁμοίως ὁ ξ εἰλήφθω κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς α γ καὶ τῆς ἡμισείας συναμφοτέρων τῶν γ δ, α η. καὶ αὐτὸς οὖν ἴσος ἐστὶ τῇ κωνικῇ ἐπιφανείᾳ τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τοῦ κατὰ τὰς α η, γ δ. πάντες οὖν οἱ κύκλοι ἴσοι ἔσονται τῇ ὅλῃ τοῦ σχήματος ἐπιφανείᾳ. καὶ αἱ ἐκ τῶν κέντρων αὐτῶν ἴσον δυνήσονται τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ μιᾶς πλευρᾶς τῆς α γ, καὶ τῆς ἴσης ταῖς ε ζ, γ δ. καὶ τῇ ἡμισείᾳ τῆς βάσεως τῇ α κ. ἐδύνατο δὲ καὶ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ λ κύκλου, ἴσον τῷ αὐτῷ χωρίῳ. ὁ ἄρα λ κύκλος ἴσος ἔσται τοῖς μ, ν, ξ κύκλοις. ὥστε καὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος.

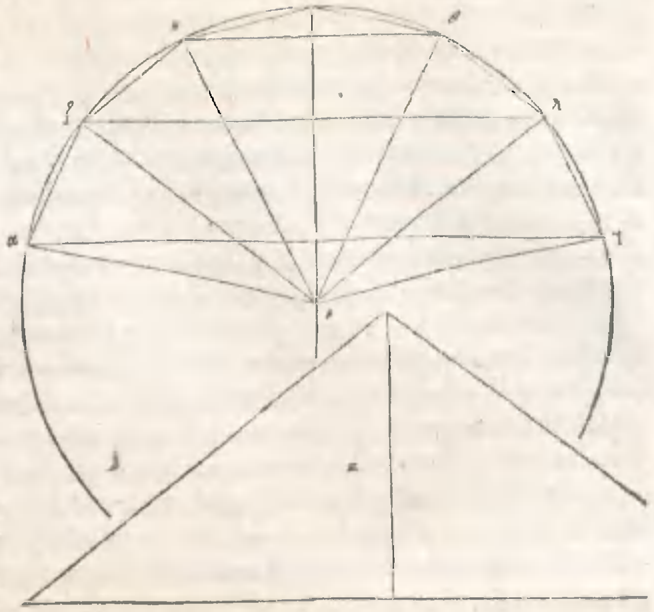
Τετμήσθω σφαῖρα μὴ διὰ τοῦ κέντρου ἐπιπέδῳ, καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος ὁ α ε ζ, τέμνων πρὸς ὀρθὰς τὸ ἐπίπεδον τὸ τέμνον. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸ α β γ πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιογώνιον, χωρὶς τῆς βάσεως τῆς α β. ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον ἐὰν μενούσης τῆς γ ζ περιενεχθῇ τὸ σχῆμα, αἱ μὲν δ, ε, α, β γωνίαι κατὰ κύκλων οἰσθήσονται, ὧν διάμετροι αἱ δ ε, α β. αἱ δὲ πλευραὶ τοῦ τμήματος, κατὰ κωνικῆς ἐπιφανείας. καὶ ἔσται τὸ γενηθὲν σχῆμα στερεὸν ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενον, βάσιν μὲν ἔχον κύκλον οὗ διάμετρος ἡ α β, κορυφὴ δὲ τὸ γ. ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον τὴν ἐπιφάνειαν ἐλάσσονα ἕξει, τῆς τοῦ τμήματος ἐπιφανείας τοῦ περιλαμβάνοντος. τὸ γὰρ αὐτὸ πέρας αὐτῶν ἐστὶν ἐν ἐπιπέδῳ τοῦ τε τμήματος, καὶ τοῦ σχήματος ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου, οὗ διάμετρος ἡ α β. καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι ἀμφότεραι εἰσὶν αἱ ἐπιφάνειαι, καὶ περιλαμβάνεται ἡ ἑτέρα ὑπὸ τῆς ἑτέρας. λδ



Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος, ἐν τῷ τμήματι τῆς σφαίρας, ἐλάσσων ἐστὶ τοῦ κύκλου, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἠγμένῃ τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος. ἔστω σφαῖρα, καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος ὁ α β ε ζ. καὶ ἔστω τμῆμα ἐν τῇ σφαίρᾳ, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν α β. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸ τὸ εἰρημένον σχῆμα. καὶ ἐν τῷ τμήματι τοῦ κύκλου πολύγωνον, καὶ τὰ λοιπὰ τὰ αὐτά, διαμέτρου μὲν τῆς σφαίρας οὔσης τῆς θ λ. ἐπεζευγμένων δὲ τῶν λ ε, θ α. καὶ ἔστω κύκλος ὁ μ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἔστω τῇ α θ. δεικτέον ὅτι ὁ μ κύκλος μείζων ἐστὶ τῆς τοῦ σχήματος ἐπιφανείας. ἡ γὰρ ἐπιφάνεια τοῦ σχήματος δέδεικται ἴση οὖσα κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τῆς ε θ, καὶ τῶν ε ζ, γ δ, κ α. τὸ δὲ ὑπὸ τῆς ε θ, καὶ τῶν ε ζ, γ δ, κ α δέδεικται ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ε λ, κ θ περιεχομένῳ. τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ε λ, κ θ, ἔλασσόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς α θ. καὶ γὰρ τοῦ ὑπὸ λ θ, θ κ, ἴσου ὄντος τῷ ἀπὸ θ α. φανερὸν οὖν ὅτι ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ὅς ἐστιν ἴσος ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος, ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μ. δῆλον ἄρα, ὅτι ὁ μ κύκλος μείζων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ σχήματος. λε



Τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐν τῷ τμήματι ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενον, σὺν τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν τὴν αὐτὴν ἔχοντι τῷ σχήματι, κορυφὴν δὲ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, ἴσον ἐστὶ τῷ κώνῳ τῷ βάσιν ἔχοντι ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος, ὕψος δὲ τὴν ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ τοῦ πολυγώνου κάθετον ἠγμένην. ἔστω γὰρ σφαῖρα, καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος, καὶ τμῆμα ἔλασσον ἡμικυκλίου τὸ α β γ. καὶ κέντρον τὸ ε. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸ α β γ τμῆμα πολύγωνον ἀρτιόπλευρον χωρὶς τῆς α γ, ὁμοίως τοῖς πρότερον. καὶ μενούσης τῆς β ε περιενεχθεῖσα ἡ σφαῖρα ποιείτω σχῆμά τι ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενον. καὶ ἀπὸ τοῦ κύκλου τοῦ περὶ διάμετρον τὴν α γ, κῶνος ἀναγεγράφθω κορυφὴν ἔχων τὸ κέντρον. καὶ εἰλήφθω κῶνος ὁ κ, βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος, ὕψος δὲ τὴν ἀπὸ τοῦ ε κέντρου ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου κάθετον ἠγμένην. δεικτέον ὅτι ὁ κ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ περιεχομένῳ σχήματι, σὺν τῷ κώνῳ τῷ α ε γ. ἀναγε- λς γραφθῶσαν δὲ καὶ κῶνοι ἀπὸ τῶν κύκλων τῶν περὶ διαμέτρους τὰς η θ, ζ λ, κορυφὴν ἔχοντες τὸ ε σημεῖον. ἔσται δὴ ὁ μὲν η β θ ε ῥόμβος στερεὸς ἴσος ἐστὶ κώνῳ, οὗ ἡ μὲν βάσις ἴση ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ η β θ κώνου, τὸ ὕψος δὲ τῇ ἀπὸ τοῦ ε ἐπὶ τὴν η β ἀγομένῃ καθέτῳ. τὸ δὲ περίλημμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς η θ, ζ λ, καὶ τῶν κωνικῶν τῶν ζ ε λ, η ε θ ἴσον ἐστὶ κώνῳ, οὗ βάσις μὲν ἐστὶν ἴση τῇ ἐπιφανείᾳ τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς η θ, ζ λ, ὕψος δὲ τῇ ἀπὸ τοῦ ε ἐπὶ τὴν ζ η καθέτῳ ἠγμένῃ. πάλιν τὸ περίλημμα τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς ζ λ, α γ, καὶ τῶν κωνικῶν τῶν α ε γ, ζ ε λ, ἴσον ἐστὶ κώνῳ, οὗ ἡ μὲν βάσις ἴση ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς ζ λ, α γ, ὕψος δὲ τῇ ἀπὸ τοῦ ε ἐπὶ τὴν ζ α καθέτῳ ἠγμένῃ. οἱ οὖν εἰρημένοι κῶνοι ἴσοι ἔσονται τῷ σχήματι, καὶ μετὰ τοῦ α ε γ κώνου. καὶ ὕψος μὲν ἴσον ἔχουσι τῇ ἀπὸ τοῦ ε ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου καθέτῳ ἠγμένῃ. τὰς δὲ βάσεις ἴσους τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ α ζ η β λ γ σχήματος. ἔχει δὲ καὶ ὁ κ κῶνος τὸ αὐτὸ ὕψος, καὶ βάσιν ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ κῶνος τοῖς εἰρημένοις κώνοις. οἱ δὲ εἰρημένοι κῶνοι ἐδείχθησαν ἴσοι τῷ σχήματι, καὶ τῷ α ε γ κώνῳ. καὶ ὁ κ ἄρα κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ τε σχήματι, καὶ τῷ ε α γ κώνῳ. ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ὁ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἠγμένῃ τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, μείζων ἐστὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος σὺν τῷ κώνῳ. ὁ γὰρ προειρημένος κῶνος μείζων ἐστὶ τοῦ κώνου τοῦ ἴσου τῷ σχήματι, σὺν τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν βάσιν τοῦ τμήματος. τὴν δὲ κορυφὴν πρὸς τῷ κέντρῳ, τουτέστι τὴν βάσιν μὲν ἔχοντος ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος, ὕψος δὲ τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου καθέτῳ ἠγμένῃ. ἥ τε γὰρ βάσις τῆς βάσεως μείζων ἐστί. δέδεικται γὰρ τοῦτο, καὶ τὸ ὕψος τοῦ ὕψους.



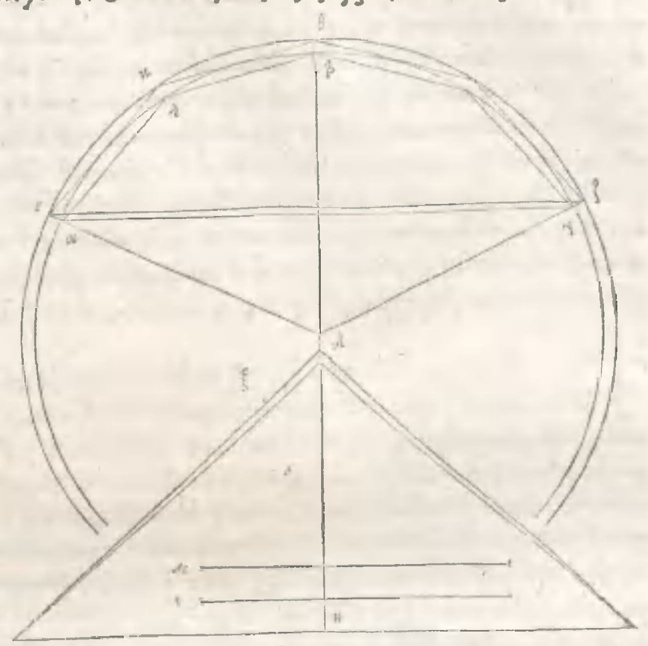
λζ Ἔστω σφαῖρα, καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος ὁ α β γ. καὶ τετμήσθω ἔλασσον ἡμικυκλίου ὃ ἀποτέμνει ἡ α β. καὶ κέντρον τὸ δ. καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ δ ἐπὶ τὰ α β ἐπεζεύχθωσαν αἱ α δ, δ β. καὶ περὶ τὸν γενηθέντα τομέα περιγεγράφθω πολύγωνον, καὶ περὶ αὐτὸ κύκλος. ἕξει δὴ τὸ αὐτὸ κέντρον τῷ α β γ κύκλῳ. ἐὰν δὴ μενούσης τῆς ε κ, περιενεχθὲν τὸ πολύγωνον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὁ περιγεγραμμένος κύκλος κατὰ ἐπιφανείας οἰσθήσεται σφαίρας. καὶ αἱ γωνίαι τοῦ πολυγώνου κύκλους γράψουσιν, ὧν αἱ διάμετροι ἐπιζευγνύουσι τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου, οὖσαι παράλληλοι

παράλληλοι τῇ α β. τὰ δὲ σημεῖα καθ᾽ ἃ ἅπτονται τοῦ ἐλάσσονος κύκλου αἱ τοῦ πολυγώνου πλευραί, κύκλους γράφουσιν ἐν τῇ ἐλάσσονι σφαίρᾳ, ὧν διάμετροι ἔσονται αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς ἁφάς, παράλληλοι οὖσαι τῇ α β. αἱ δὲ πλευραὶ κατὰ κωνικῶν ἐπιφανειῶν οἰσθήσονται. καὶ ἔσται τὸ περιγεγραφὲν σχῆμα ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενον, οὗ βάσις ὁ περὶ τὴν ζ η κύκλος. ἡ δὲ τοῦ εἰρημένου σχήματος ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶ τῆς τοῦ ἐλάσσονος τμήματος ἐπιφανείας. οὗ βάσις ὁ περὶ τὴν α β κύκλος. ἤχθωσαν γὰρ ἐφαπτόμεναι αἱ α μ, β ν. κατὰ κωνικῆς ἄρα ἐπιφανείας οἰσθήσονται, καὶ τὸ σχῆμα τὸ γενηθὲν ὑπὸ τοῦ πολυγώνου τοῦ α μ θ ε ν β ἕξει μείζονα τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ τμήματος τῆς σφαίρας. οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν α β κύκλος ἐστί. πέρας γὰρ ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ τῷ αὐτῷ ἔχουσι τὸν περὶ διάμετρον τὴν α β κύκλον. καὶ περιλαμβάνεται τὸ τμῆμα ὑπὸ τοῦ σχήματος. ἀλλ᾽ ἡ γεγενημένη ὑπὸ τῶν ζ μ, η ν ἐπιφάνεια κώνου, μείζων ἐστὶ τῆς γεγενημένης ὑπὸ τῶν μ α, ν β. ἡ μὲν γὰρ ζ μ τῆς μ α μείζων ἐστί. ὑπὸ γὰρ ὀρθὴν ὑποτείνει. ἡ δὲ ν η τῆς ν β. ὅταν δὲ τοῦτο ᾖ, μείζων ἐστὶν ἡ ἐπιφάνεια τῆς ἐπιφανείας. ταῦτα γὰρ δέδεικται ἐν τοῖς λήμμασι. δῆλον οὖν ὅτι καὶ τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος ἡ ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶ τῆς τοῦ τμήματος ἐπιφανείας τοῦ ἐλάσσονος σφαίρας. καὶ φανερόν, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος τοῦ περὶ τὸν τομέα, ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ πολυγώνου, καὶ τῶν ἐπιζευγνυουσῶν πασῶν τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου, καὶ τῆς ἐπὶ ἡμισείας τῆς βάσεως τοῦ εἰρημένου πολυγώνου. *ἐγγεγραμμένου σχῆμα, ἐγγεγραμμένον ἐστὶν εἰς τὸ τμῆμα τῆς μείζονος σφαίρας. τοῦτο δὲ δῆλον, διὰ τὸ προγεγραμμένον.

Τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος τῷ τομεῖ, ἡ ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶ κύκλου. οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση λη
ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος ἠγμένῃ ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος. ἔστω γὰρ σφαῖρα, καὶ μέγιστος κύκλος ἐπ᾽ αὐτῆς ὁ α β γ δ. καὶ κέντρον τὸ ε, καὶ περὶ τὸν τομέα περιγεγράφθω τὸ λ κ ζ πολύγωνον, καὶ περὶ αὐτὸ κύκλος περιγεγράφθω. καὶ γεγενήσθω σχῆμα, καθάπερ πρότερον. καὶ ἔστω κύκλος ὁ ν, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ πολυγώνου, καὶ πασῶν τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰς γωνίας σὺν τῇ ἡμισείᾳ τῆς κ λ. ἀλλὰ τὸ εἰρημένον χωρίον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῆς μ θ καὶ ζ η. ὃ δή ἐστιν ὕψος τοῦ τμήματος τοῦ μείζονος σφαίρας. τοῦτο γὰρ προδέδεικται. τοῦ ἄρα ν κύκλου ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ ὑπὸ μ θ, η ζ περιεχομένῳ. ἀλλ᾽ ἡ μὲν η ζ μείζων ἐστὶ τῆς δ ξ, ὅ ἐστιν ὕψος τοῦ ἐλάσσονος τμήματος. ἐὰν γὰρ ἐπιζεύξωμεν τὴν κ ζ, ἔσται παράλληλος τῇ δ α. ἔστι δὲ καὶ ἡ α β τῇ κ λ παράλληλος. καὶ κοινὴ ἡ ζ ε. ὅμοιον ἄρα τὸ ζ κ η τρίγωνον, τῷ δ α ξ τριγώνῳ. καὶ ἔστι μείζων ἡ ζ κ τῆς α δ. μείζων ἄρα καὶ ἡ ζ η τῆς δ ξ. ἴση δὲ ἡ μ θ τῇ διαμέτρῳ τῇ γ δ. ἐὰν ἐπιζευχθῇ ἡ ε η. ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν μ ο τῇ ο ζ, ἡ δὲ θ ε τῇ ε ζ. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ε ο τῇ μ θ. διπλασία ἄρα ἐστὶν ἡ μ θ τῆς ε ο. ἀλλὰ καὶ ἡ γ δ διπλασία ἐστὶ τῆς ε ο. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μ θ τῇ γ δ. τὸ δὲ ὑπὸ τῶν γ δ, δ ξ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς α δ. ἡ ἄρα τοῦ σχήματος τοῦ κ ζ λ ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶ τοῦ κύκλου, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος, ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἠγμένῃ τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος τοῦ περὶ διάμετρον τὴν α β. ὁ γὰρ ν κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸν τομέα σχήματος.

Γίνεται δὴ καὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα περὶ τὸν τομέα σὺν τῷ κώνῳ, οὗ βάσις ὁ περὶ διά- λθ
μετρον τὴν κ λ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ κέντρον, ἴσον κώνῳ οὗ ἡ μὲν βάσις ἴση ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος, ὕψος δὲ τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν πλευρὰν καθέτῳ ἠγμένῃ, ἡ δὴ ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. τὸ γὰρ περιγεγραμμένον σχῆμα τῷ τομεῖ, ἐγγεγραμμένον ἐστὶν εἰς τὸ τμῆ

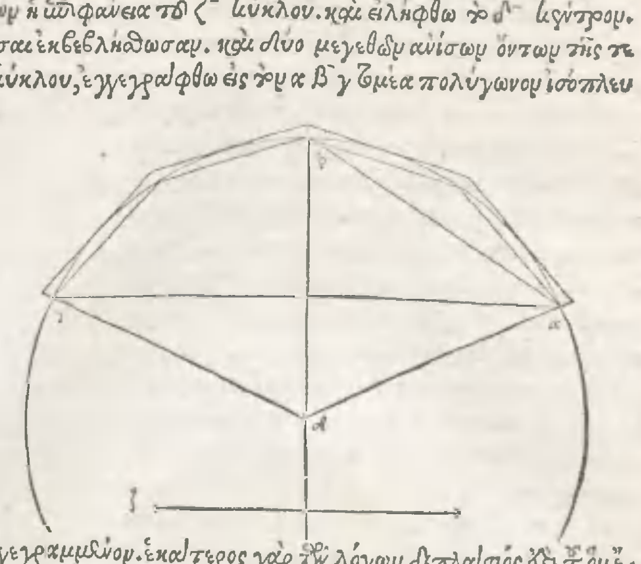
μα τῆς μείζονος σφαίρας, ἧς κέντρον ἐστὶ τὸ αὐτό. δῆλον οὖν τὸ λεγόμενον ἐστὶν ἐκ τοῦ περιγεγραμμένου. ἐκ τούτου δὲ φανερόν, ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα σὺν τῷ κώνῳ μεῖζόν ἐστι κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος τῆς ἐλάσσονος σφαίρας, ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἠγμένῃ τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος, ὕψος δὲ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου. ὁ γὰρ ἴσος κῶνος τῷ σχήματι σὺν τῷ κώνῳ τὴν μὲν βάσιν μείζονα ἕξει τοῦ εἰρημένου κύκλου, τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας. ἔστω πάλιν σφαῖρα, καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος, καὶ τμῆμα ἔλασσον ἡμικυκλίου τὸ α β γ. καὶ κέντρον τὸ δ. καὶ εἰς τὸν α β γ τομέα ἐγγεγράφθω πολύγωνον ἀρτιόγωνον, καὶ τούτῳ ὅμοιον περιγεγράφθω, καὶ παράλληλοι ἔστωσαν αἱ πλευραὶ ταῖς πλευραῖς. καὶ κύκλος περιγεγράφθω περὶ τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον. καὶ ὁμοίως τοῖς πρότερον μενούσης τῆς η β περιενεχθέντες οἱ κύκλοι, ποιείτωσαν σχήματα ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενα, δεικτέον ὅτι ἡ τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐπιφάνειαν, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἢ πλευρὰ ἡ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου, πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου. τὸ δὲ σχῆμα σὺν τῷ κώνῳ τριπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ αὐτοῦ. ἔστω γὰρ ὁ μ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου, καὶ πασῶν τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰς γωνίας, καὶ ἔτι τῆς ἡμισείας τῆς ε ζ. ἔσται δὴ ὁ μ κύκλος ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος, εἰλήφθω δὴ καὶ ὁ ν κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου, καὶ πασῶν τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰς γωνίας σὺν τῇ ἡμισείᾳ τῆς α γ. ἔσται δὴ καὶ οὗτος ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος. ἀλλὰ τὰ εἰρημένα χωρία ἐστὶ πρὸς ἄλληλα, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ε κ πλευρᾶς πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς α λ πλευρᾶς. καὶ ὡς ἄρα τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον, ὁ μ κύκλος πρὸς τὸν ν κύκλον. φανερὸν οὖν ὅτι καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ε κ πρὸς τὴν α λ. τὸν δὲ αὐτόν, ὃν καὶ τὸ πολύγωνον. ἔστω πάλιν κῶνος ὁ ξ, βάσιν μὲν ἔχων τῷ μ ἴσην, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας. ἴσος δὴ οὗτος ἐστὶν ὁ κῶνος τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι σὺν τῷ κώνῳ, οὗ βάσις ὁ περὶ τὴν ε ζ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ δ. καὶ ἔστω ἄλλος κῶνος ὁ ο, βάσιν μὲν ἴσην ἔχων τῷ ν. ὕψος δὲ τὴν ἀπὸ τοῦ δ ἐπὶ τὴν α λ, κάθετον ἠγμένην. ἔσται δὴ καὶ οὗτος ἴσος τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι σὺν τῷ κώνῳ, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν α γ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ δ κέντρον. ταῦτα γὰρ πάντα προγέγραπται. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ε κ πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας, ὡς ἡ α λ πρὸς τὴν ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ δ ἐπὶ τὴν α λ κάθετον ἠγμένην. ἐδείχθη δὲ ὡς ἡ ε κ πρὸς τὴν α λ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μ κύκλου πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ν κύκλου. καὶ ἡ διάμετρος πρὸς τὴν διάμετρον. ἔσται ἄρα ὡς ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ ξ, πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ ο. οὕτω τὸ ὕψος τοῦ ξ κώνου, πρὸς τὸ ὕψος τοῦ ο κώνου. ὅμοιοι εἰσὶν οἱ κῶνοι. ὁ ξ ἄρα κῶνος πρὸς τὸν ο κῶνον τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ διάμετρος πρὸς τὴν διάμετρον. φανερὸν οὖν, ὅτι καὶ τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον σὺν τῷ κώνῳ πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον σὺν τῷ κώνῳ τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ε κ πρὸς α λ.



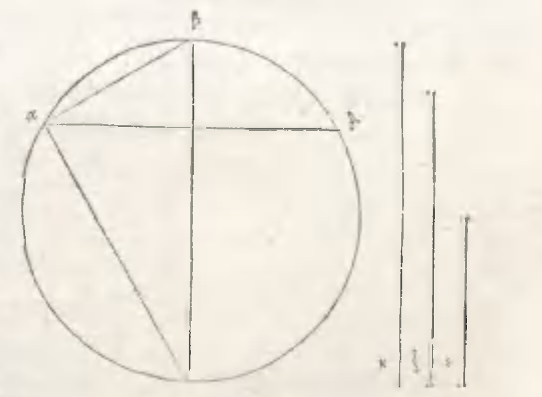
μ Παντὸς τμήματος σφαίρας, ἐλάσσονος ἡμισφαιρίου, ἡ ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἠγμένῃ τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος τῆς σφαίρας. ἔστω σφαῖρα, ἐν ᾗ μέγιστος ἐν αὐτῇ κύκλος ὁ α β γ. καὶ τμῆμα ἐν αὐτῇ ἔλασσον ἡμισφαιρίου. οὗ βάσις ὁ περὶ τὴν α γ κύκλος, πρὸς ὀρθὰς ὢν τῷ α β γ κύκλῳ. καὶ εἰλήφθω

κύκλος

κύκλος ὁ ζ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ α β. δεικτέον ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ α β γ τμήματος, ἴση ἐστὶ τῷ ζ κύκλῳ. εἰ γὰρ μή, ἔστω μείζων ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ζ κύκλου. καὶ εἰλήφθω τὸ δ κέντρον. καὶ ἀπὸ τοῦ δ ἐπὶ τὰ α, γ ἐπιζευχθεῖσαι ἐκβεβλήσθωσαν. καὶ δύο μεγεθῶν ἀνίσων ὄντων τῆς τε ἐπιφανείας τοῦ τμήματος, καὶ τοῦ ζ κύκλου, ἐγγεγράφθω εἰς τὸν α β γ τομέα πολύγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἀρτιογώνιον, καὶ ἄλλο τούτῳ ὅμοιον περιγεγράφθω. ὥστε τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, ἤπερ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τμήματος τῆς σφαίρας πρὸς τὸν κύκλον. περιενεχθέντος δὲ τοῦ κύκλου ὡς καὶ πρότερον, ἔσται δύο σχήματα ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενα. ὧν τὸ μὲν περιγεγραμμένον, τὸ δὲ ἐγγεγραμμένον. καὶ ἡ τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου, ἔσται ὡς τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον. ἑκάτερος γὰρ τῶν λόγων διπλάσιός ἐστι τοῦ ὃν ἔχει τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πλευρά, πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου πλευράν. ἀλλὰ τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον, πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ τοῦ εἰρημένου τμήματος ἐπιφάνεια πρὸς τὸν ζ κύκλον. μείζων δὲ ἐστιν ἡ τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος ἐπιφάνεια τῆς ἐπιφανείας τοῦ τμήματος. καὶ ἡ τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐπιφάνεια ἄρα μείζων ἐστὶ τοῦ ζ κύκλου, ὅπερ ἀδύνατον. δέδεικται γὰρ ἡ εἰρημένη τοῦ σχήματος ἐπιφάνεια ἐλάσσων οὖσα τοῦ τηλικούτου κύκλου. ἔστω πάλιν ὁ κύκλος μείζων τῆς ἐπιφανείας. καὶ ὁμοίως περιγεγράφθω καὶ ἐγγεγράφθω ὅμοια πολύγωνα. καὶ τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἐχέτω, τοῦ ὃν ἔχει ὁ κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ σχήματος. οὐκ ἄρα μείζων ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ζ κύκλου. ἐδείχθη δὲ ὡς οὐδὲ ἐλάσσων, ἴση ἄρα.



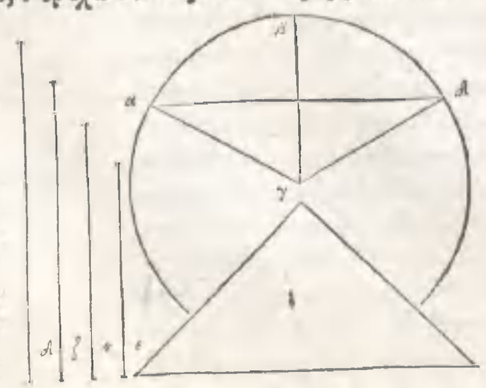
Ἐὰν μείζων ἡμισφαιρίου ᾖ τμῆμα, ὁμοίως αὐτοῦ ἡ ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση μα
ἔσται τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἠγμένῃ τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος. ἔστω γὰρ σφαῖρα, ἐν ᾗ αὐτὴ μέγιστος κύκλος, καὶ νοείσθω τετμημένη ἐπιπέδῳ ὀρθῷ πρὸς τὴν α δ. καὶ τὸ α β δ ἔλασσον ἔστω ἡμισφαιρίου. καὶ διάμετρος ἡ β γ πρὸς ὀρθὰς τῇ α δ. καὶ ἀπὸ τῶν β γ ἐπὶ τὸ α ἐπεζεύχθωσαν αἱ β α, α γ. καὶ ἔστω ὁ μὲν ε κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ α β. ὁ δὲ ζ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ α γ. ὁ δὲ η κύκλος οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ γ β, καὶ ὁ η κύκλος ἄρα ἴσος ἐστὶ τοῖς δυσὶ κύκλοις τοῖς ε, ζ. ὁ δὲ η κύκλος ἴσος ἐστὶν ὅλῃ τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας. ἐπειδήπερ ἑκάτερα τετραπλάσιά ἐστι τοῦ περὶ διάμετρον τὴν β γ κύκλου. ὁ δὲ ε κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ α β δ τμήματος. δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐπὶ τοῦ ἐλάσσονος ἡμισφαιρίου. λοιπὸς ἄρα ὁ ζ κύκλος, ἴσος ἐστὶ τῇ τοῦ α γ δ τμήματος ἐπιφανείᾳ. ὅ ἐστι μείζων ἡμισφαιρίου.



Παντὶ τομεῖ σφαίρας, ἴσος ἐστὶ κῶνος, ὁ βά- μβ
σιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ τμήματος τῆς σφαίρας τοῦ κατὰ τὸν τομέα, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ἔστω σφαῖρα, καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος ὁ α β δ. καὶ κέντρον τὸ γ. καὶ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον, τὸν ἴσον τῇ κατὰ τὴν α β δ περιφέρειαν ἐπιφανείᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ β γ. δεικτέον ὅτι ὁ τομεὺς ὁ α β γ δ ἴσος ἐστὶ τῷ εἰρημένῳ κώνῳ. εἰ γὰρ μή, ἔστω μείζων ὁ τομεὺς τοῦ κώνου, οἷος ὑπόκειται ὁ θ κῶνος, οἷος εἴρηται. δύο δὴ μεγεθῶν ἀνίσων ὄντων, τοῦ τε τομέως καὶ τοῦ θ κώνου, εὑρήσθωσαν δύο γραμμαὶ αἱ δ, ε. μείζων δὲ ἡ δ τῆς ε, καὶ ἐλάσσονα λόγον ἐχέτω ἡ δ πρὸς ε, ἤπερ ὁ τομεὺς πρὸς τὸν κῶνον. καὶ εἰλήφθωσαν δύο γραμμαὶ αἱ ζ, η. ὅπως τῷ ἴσῳ ὑπερέχῃ ἡ δ τῆς ζ, καὶ ἡ ζ τῆς η, καὶ ἡ η τῆς ε. καὶ περὶ τὸ ἐπίπεδον τομέα τοῦ κύκλου περιγεγράφθω πολυ-

γωνον

γώνου ἰσοπλεύρου, καὶ ἀρτιογωνίου. καὶ τούτῳ ὅμοιον ἐγγεγράφθω. ὥσπερ ἡ τοῦ περιγεγραμμένου πλευρὰ ἐλάσσονα λόγον ἔχει πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου, τοῦ ὃν ἔχει ἡ δ πρὸς ζ. καὶ ὁμοίως τοῖς πρότερον περιενεχθέντος τοῦ κύκλου, γεγενήσθω δύο σχήματα ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενα. τὸ ἄρα περιγεγραμμένον, σὺν τῷ κώνῳ τῷ κορυφὴν ἔχοντι τὸ γ σημεῖον, πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον σὺν τῷ κώνῳ τριπλασίονα λόγον ἔχει, τοῦ ὃν ἔχει ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου. ἀλλὰ ἡ τοῦ περιγεγραμμένου ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ δ πρὸς ζ. ἐλάσσονα λόγον ἄρα ἕξει, ἢ τριπλάσιον, τὸ εἰρημένον στερεὸν σχῆμα τοῦ τῆς δ πρὸς ζ. ἡ δὲ δ πρὸς ε μείζονα λόγον ἔχει, ἢ τριπλάσιον τοῦ τῆς δ πρὸς ζ. τὸ ἄρα περιγεγραμμένον σχῆμα στερεὸν τῷ τομεῖ, πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐλάσσονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει ἡ δ πρὸς ε. ἡ δὲ δ πρὸς ε ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ὁ στερεὸς τομεὺς πρὸς τὸν θ κῶνον. τὸ ἄρα περιγεγραμμένον τῷ τομεῖ σχῆμα πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ὁ στερεὸς τομεὺς πρὸς τὸν θ κῶνον. καὶ ἐναλλάξ. μεῖζον δέ ἐστι τὸ περιγεγραμμένον στερεὸν σχῆμα τοῦ τμήματος. καὶ τὸ ἐγγεγραμμένον ἄρα σχῆμα ἐν τῷ τομεῖ, μεῖζόν ἐστι τοῦ θ κώνου. ὅπερ ἀδύνατον. δέδεικται γὰρ ἐν τοῖς ἄνω, ἔλασσον ὂν τοῦ τηλικούτου κώνου, τουτέστι τοῦ ἔχοντος βάσιν μὲν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἐπιζευγνυμένῃ εὐθείᾳ τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος. ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. οὗτος δέ ἐστιν ὁ εἰρημένος κῶνος ὁ θ. βάσιν τε γὰρ ἔχει κύκλον ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ τμήματος, τουτέστι τῷ εἰρημένῳ κύκλῳ, καὶ ὕψος ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. οὐκ ἄρα ὁ στερεὸς τομεὺς μείζων ἐστὶ τοῦ θ κώνου. ἔστω δὴ πάλιν ὁ θ κῶνος τοῦ στερεοῦ τομέως μείζων. πάλιν δὴ ὁμοίως ἡ δ πρὸς τὴν ε μείζων αὐτῆς οὖσα, ἐλάσσονα λόγον ἐχέτω, τοῦ ὃν ἔχει ὁ κῶνος πρὸς τὸν τομέα. καὶ ὁμοίως εἰλήφθωσαν αἱ ζ, η. ὥστε εἶναι τὰς δύο πλευρὰς τὰς αὐτάς, καὶ τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸν ἐπίπεδον τομέα πολυγώνου ἀρτιογωνίου ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου, ἐλάσσονα λόγον ἐχέτω, τοῦ ὃν ἔχει ἡ δ πρὸς τὴν ζ. καὶ γεγενήσθω τὰ περὶ τὸν στερεὸν τομέα στερεὰ σχήματα. ὁμοίως οὖν δείξομεν, ὅτι τὸ περιγεγραμμένον περὶ τὸν τομέα στερεὸν σχῆμα πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, τοῦ ὃν ἡ δ πρὸς ε. καὶ τοῦ ὃν ἔχει ὁ θ κῶνος πρὸς τὸν τομέα. ὥστε καὶ ὁ τομεὺς πρὸς τὸν κῶνον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἐγγεγραμμένον στερεὸν ἐν τῷ τμήματι πρὸς τὸ περιγεγραμμένον. μείζων δέ ἐστιν ὁ τομεὺς τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὸν σχήματος. μείζων ἄρα ὁ θ κῶνος τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος. ὅπερ ἀδύνατον. δέδεικται γὰρ ἔμπροσθεν, ὅτι ὁ τηλικοῦτος κῶνος ἐλάσσων ἐστὶ τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος περὶ τὸν τομέα. ἴσος ἄρα ὁ τομεὺς τῷ θ κώνῳ.



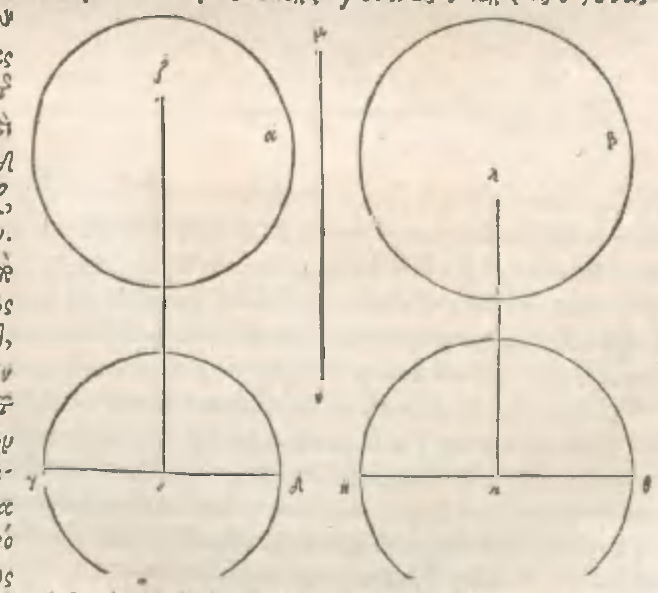
Ἀρχιμήδους

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΠΕΡΙ ΣΦΑΙΡΑΣ
ΚΑΙ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ ΒΙΒΛΙΟΝ Β.

ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ ΔΩΣΙΘΕΟ ΧΑΙΡΕΙΝ.

Πρότερον μὲν ἀπέστειλάς μοι γράψαι τῶν προβλημάτων τὰς ἀποδείξεις, ὧν αὐτὸς τὰς προτάσεις ἀπέστειλα Κόνωνι. συμβαίνει δὲ αὐτῶν τὰ πλεῖστα γράφεσθαι διὰ τῶν θεωρημάτων, ὧν πρότερον ἀπέστειλά σοι τὰς ἀποδείξεις. ὅτι τε πάσης σφαίρας ἡ ἐπιφάνεια τετραπλασία ἐστὶ τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, καὶ δὴ ὅτι παντὸς τμήματος σφαίρας τῇ ἐπιφανείᾳ ἴσος ἐστὶ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ εὐθείᾳ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος, ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως ἀγομένῃ. καὶ διότι πάσης σφαίρας ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν μέγιστον κύκλον τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ διαμέτρῳ τῆς σφαίρας, αὐτός τε ἡμιόλιός ἐστι τῷ μεγέθει τῆς σφαίρας, καὶ ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ ἡμιολία τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας. καὶ διότι πᾶς τομεὺς στερεὸς ἴσος ἐστὶ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὸν κύκλον τὸν ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ τμήματος τῆς σφαίρας τοῦ ἐν τῷ τομεῖ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ὅσα μὲν οὖν τῶν θεωρημάτων καὶ προβλημάτων γράφεται διὰ τούτων τῶν θεωρημάτων, ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ γράψας ἀπέσταλκά σοι. ὅσα δὲ δι᾽ ἄλλης εὑρίσκονται θεωρίας, τά τε περὶ ἑλικῶν καὶ τὰ περὶ τῶν κωνοειδῶν, πειράσομαι διὰ τάχους ἀποστεῖλαι. τὸ δὲ πρῶτον ἦν τῶν προβλημάτων, τόδε· σφαίρας δοθείσης ἐπίπεδον χωρίον εὑρεῖν, ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας. ἔστι δὲ τοῦτο φανερόν, δεδειγμένον ἐκ τῶν προειρημένων θεωρημάτων. τὸ γὰρ τετραπλάσιον τοῦ μεγίστου κύκλου τοῦ ἐν τῇ σφαίρᾳ, ἐπίπεδόν τε χωρίον ἐστί, καὶ ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας.

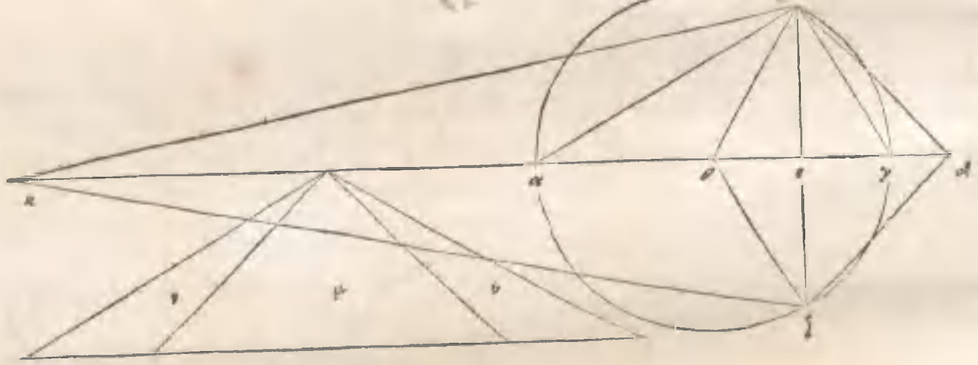
α Τὸ δεύτερον ἦν κώνου δοθέντος ἢ κυλίνδρου σφαῖραν εὑρεῖν τῷ κώνῳ ἢ τῷ κυλίνδρῳ ἴσην. ἔστω ὁ δεδομένος κῶνος ἢ κύλινδρος ὁ α, καὶ τῷ α ἴση ἡ β σφαῖρα. καὶ κείσθω τοῦ α κώνου ἢ κυλίνδρου ἡμιόλιος κύλινδρος ὁ γζδ. τῆς δὲ β σφαίρας ἡμιόλιος κύλινδρος, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν ηθ κύκλος. ἄξων δὲ ὁ κλ ἴσος τῇ διαμέτρῳ τῆς β σφαίρας. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ε κύλινδρος τῷ κ κυλίνδρῳ. τῶν δὲ ἴσων κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. ὡς ἄρα ὁ ε κύκλος πρὸς τὸν κ κύκλον, τουτέστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς γδ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ηθ, οὕτως ἡ κλ πρὸς εζ. ἴση δὲ ἡ κλ τῇ ηθ. ὁ γὰρ ἡμιόλιος κύλινδρος τῆς σφαίρας ἴσον ἔχει τὸν ἄξονα τῇ διαμέτρῳ τῆς σφαίρας. καὶ ὁ κ κύκλος μέγιστός ἐστι τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ. ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ γδ πρὸς τὸ ἀπὸ ηθ, οὕτως ἡ ηθ πρὸς τὴν εζ. ἔστω τῷ ἀπὸ ηθ ἴσον τὸ ὑπὸ γδ, μν. ὡς ἄρα ἡ γδ πρὸς μν, οὕτως τὸ ἀπὸ γδ πρὸς τὸ ἀπὸ ηθ. τουτέστιν ἡ ηθ πρὸς εζ. καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ γδ πρὸς τὴν ηθ, οὕτως ἡ ηθ πρὸς τὴν μν, καὶ ἡ μν πρὸς εζ. καὶ ἔστι δοθεῖσα ἑκατέρα τῶν γδ, εζ. δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν γδ, εζ, δύο μέσαι ἀνὰ λόγον εἰσὶν αἱ ηθ, μν. δοθεῖσα ἄρα ἑκατέρα τῶν ηθ, μν. συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως. ἔστω δὴ ὁ δοθεὶς κῶνος ἢ κύλινδρος ὁ α. δεῖ δὴ τῷ α κώνῳ ἢ κυλίνδρῳ ἴσην σφαῖραν εὑρεῖν. ἔστω τοῦ α κώνου, ἢ κυλίνδρου, ἡμιόλιος κύλινδρος, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν γδ κύκλος, ἄξων δὲ ὁ εζ. καὶ εἰλήφθωσαν τῶν γδ, εζ δύο μέσαι ἀνὰ λόγον, αἱ ηθ, μν. ὥστε εἶναι ὡς τὴν γδ πρὸς τὴν ηθ, οὕτω τὴν ηθ πρὸς τὴν μν, καὶ τὴν μν πρὸς τὴν εζ. καὶ νοείσθω κύλινδρος, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν ηθ κύκλος. ἄξων δὲ ὁ κλ ἴσος τῇ ηθ διαμέτρῳ. λέγω δὴ ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ ε κύλινδρος τῷ κ κυλίνδρῳ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ γδ πρὸς ηθ, ἡ μν πρὸς εζ. καὶ ἐναλλάξ, καὶ ἴση ἡ ηθ τῇ κλ. ὡς ἄρα ἡ γδ πρὸς μν, του-



τέστιν

τέστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς γ δ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς α θ, οὕτως ὁ ε κύκλος πρὸς τὸν κ κύκλον. ὡς ἄρα ὁ ε κύκλος πρὸς τὸν κ κύκλον, οὕτως ἡ κ λ πρὸς τὴν ε ζ. τῶν ἄρα ε, κ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις ταῖς ὕψεσιν. ἴσος ἄρα ὁ ε κύλινδρος τῷ κ κυλίνδρῳ. ὁ δὲ κ κύλινδρος τῆς σφαίρας, ἧς διάμετρος ἡ κ θ, ἡμιόλιός ἐστι. καὶ ἡ σφαῖρα ἄρα ἧς ἡ διάμετρος ἴση ἐστὶ τῇ κ θ, τουτέστιν ἡ β, ἴση ἐστὶ τῷ α κώνῳ ἢ κυλίνδρῳ.

β Παντὶ τμήματι τῆς σφαίρας ἴσος ἐστὶ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι, ὕψος δὲ εὐθεῖαν, ἥτις πρὸς τὸ ὕψος τοῦ τμήματος τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει, ὃν συναμφότερος, ἥ τε ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, καὶ τὸ ὕψος τοῦ λοιποῦ τμήματος, πρὸς τὸ ὕψος τοῦ λοιποῦ τμήματος. ἔστω σφαῖρα, ἐν ᾗ μέγιστος κύκλος οὗ διάμετρος ἡ α γ. καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ ἡ σφαῖρα, τῷ διὰ τῆς β ζ πρὸς ὀρθὰς τῇ α γ. καὶ ἔστω κέντρον τὸ θ. καὶ πεποιήσθω ὡς συναμφότερος ἡ θ α, α ε, πρὸς τὴν α ε, οὕτως ἡ δ ε πρὸς γ ε. καὶ πάλιν πεποιήσθω ὡς συναμφότερος ἡ θ γ, γ ε πρὸς γ ε, οὕτως ἡ κ ε πρὸς ε α. καὶ ἀναγεγράφθωσαν κῶνοι ἀπὸ τοῦ κύκλου τοῦ περὶ διάμετρον τὴν β ζ, κορυφὰς ἔχοντες τὰ κ, δ σημεῖα. λέγω ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ μὲν β δ ζ κῶνος, τῷ κατὰ τὸ γ τμήματι τῆς σφαίρας. ὁ δὲ β κ ζ τῷ κατὰ τὸ α σημεῖον. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ β θ, θ ζ, καὶ νενοήσθω κῶνος βάσιν μὲν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν β ζ κύκλον, κορυφὴν δὲ τὸ θ σημεῖον. καὶ ἔστω κῶνος ὁ μ, βάσιν μὲν ἔχων κύκλον ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ β γ ζ τμήματος τῆς σφαίρας, τουτέστιν οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ β γ. ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ἔσται δὴ ὁ μ κῶνος ἴσος τῷ β γ ζ θ στερεῷ τομεῖ. τοῦτο γὰρ δέδεικται ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ. ἐπεὶ δ' ἐστὶν ὡς ἡ δ ε πρὸς ε γ, οὕτως συναμφότερος ἡ θ α, α ε. πρὸς α ε διελόντι ἔσται ὡς ἡ γ δ πρὸς γ ε, οὕτως ἡ θ α πρὸς α ε. καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ δ γ πρὸς

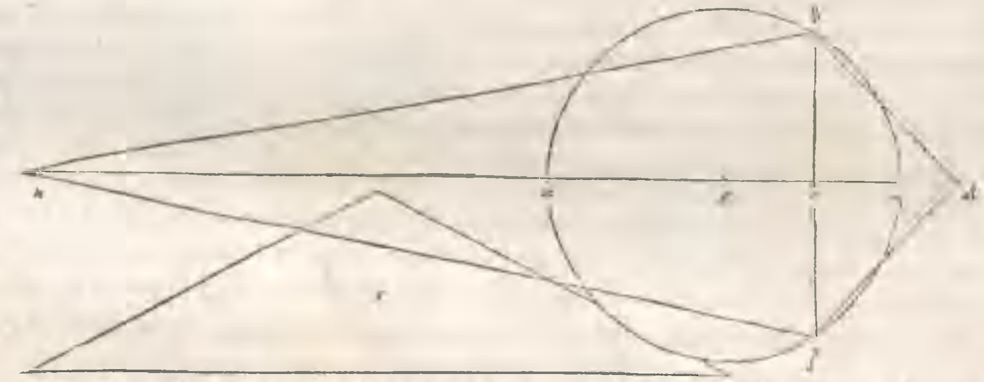


γ θ ἐστιν, οὕτως ἡ γ ε πρὸς ε α. καὶ συνθέντι, ὡς ἡ θ δ πρὸς θ γ, ἡ γ α πρὸς α ε, τουτέστι τὸ ἀπὸ γ β πρὸς τὸ ἀπὸ β ε. ὡς ἄρα ἡ δ θ πρὸς γ θ, τὸ ἀπὸ γ β πρὸς τὸ ἀπὸ β ε. ἴση δέ ἐστιν ἡ γ β τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μ κύκλου. ἡ δὲ β ε ἐκ τοῦ κέντρου ἐστὶ τοῦ περὶ διάμετρον τὴν β ζ κύκλου. ὡς ἄρα ἡ δ θ πρὸς θ γ, ὁ μ κύκλος πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν β ζ κύκλον. καὶ ἐστὶν ἴση ἡ θ γ τῷ ἄξονι τοῦ μ κώνου. καὶ ὡς ἄρα ἡ δ θ πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ μ κώνου, οὕτως ὁ μ κύκλος πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν β ζ κύκλον, ἴσος ἄρα ὁ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν μ κύκλον, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, τῷ β δ ζ θ στερεῷ ῥόμβῳ. τοῦτο γὰρ ἐν τοῖς λήμμασι τοῦ πρώτου βιβλίου δέδεικται. ἢ οὕτως, ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ δ θ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ μ κώνου, οὕτως ὁ μ κύκλος πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν β ζ κύκλον, ἴσος ἄρα ὁ μ κῶνος τῷ κώνῳ, οὗ βάσις μὲν ὁ περὶ διάμετρον τὴν β ζ κύκλος, ὕψος δὲ ἡ δ θ. ἀντιπεπόνθασι γὰρ αὐτῶν αἱ βάσεις ταῖς ὕψεσιν. ἀλλ' ὁ κῶνος, ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν β ζ κύκλον, ὕψος δὲ τὴν δ θ. ἴσος ἐστὶ τῷ β δ ζ θ στερεῷ ῥόμβῳ. ἀλλ' ὁ μ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ β γ ζ θ στερεῷ τομεῖ, καὶ ὁ β γ ζ θ στερεὸς τομεὺς ἄρα ἴσος ἐστὶ τῷ β δ ζ θ στερεῷ ῥόμβῳ. κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ κώνου, οὗ βάσις μὲν ἐστιν ὁ περὶ διάμετρον τὴν β ζ κύκλος, ὕψος δὲ ἡ ε θ, λοιπὸς ἄρα ὁ β δ ζ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ β ζ γ τμήματι τῆς σφαίρας. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ ὁ β κ ζ κῶνος, ἴσος τῷ β α ζ τμήματι τῆς σφαίρας. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς συναμφότερος, ἡ θ γ, γ ε πρὸς γ ε, οὕτως ἡ κ ε πρὸς ε α. διελόντι ἄρα ὡς ἡ κ α πρὸς α ε, οὕτως ἡ θ γ πρὸς γ ε. ἴση δὲ ἡ θ γ τῇ θ α. ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ κ α πρὸς α θ, οὕτως ἡ α ε πρὸς ε γ. ὥστε καὶ συνθέντι, ὡς ἡ κ θ πρὸς θ α, ἡ α γ πρὸς γ ε, τουτέστι τὸ ἀπὸ β α πρὸς τὸ ἀπὸ β ε. κείσθω δὴ πάλιν κύκλος ὁ ν, ἴσην ἔχων τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῇ α β. ὁ ἄρα ν κύκλος ἴσος

ἔσται

ἔσται τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ β α ζ τμήματος. καὶ νοείσθω ὁ κῶνος ὁ ν, ἴσον ἔχων τὸ ὕψος τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, ἴσος ἄρα ἐστὶ τῷ β θ ζ α στερεῷ τομεῖ. τοῦτο γὰρ ἐν τῷ πρώτῳ δέδεικται. καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ὡς ἡ κ θ πρὸς θ α, οὕτως τὸ ἀπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ β ε, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ν κύκλου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ περὶ διάμετρον τὴν β ζ κύκλου, τουτέστιν ὁ ν κύκλος πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν β ζ κύκλον. ἴση δὲ ἡ α θ τῷ ὕψει τοῦ ν κώνου. ὡς ἄρα ἡ κ θ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ κώνου, οὕτως ὁ ν κύκλος πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν β ζ κύκλον. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ν κῶνος, τουτέστιν ὁ β θ ζ α τομεὺς τῷ β θ ζ κ σχήματι. κοινὸς προσκείσθω ὁ κῶνος, οὗ βάσις μὲν ὁ περὶ τὴν β ζ κύκλος, ὕψος δὲ ἡ ε θ. ὅλον ἄρα τὸ α β ζ τμῆμα τῆς σφαίρας ἴσον ἐστὶ τῷ β ζ κ κώνῳ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι. καὶ φανερὸν ὅτι γίγνεται καθόλου τμῆμα σφαίρας πρὸς κῶνον τὸν βάσιν μὲν ἔχοντα τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι, καὶ ὕψος ἴσον ὡς συναμφότερος, ἥ τε ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, καὶ ἡ κάθετος τοῦ λοιποῦ τμήματος πρὸς τὴν κάθετον τοῦ λοιποῦ τμήματος. ὡς γὰρ ἡ δ ε πρὸς ε γ, οὕτως ὁ δ ζ β κῶνος, τουτέστι τὸ β γ ζ τμῆμα πρὸς τὸν β γ ζ κῶνον.

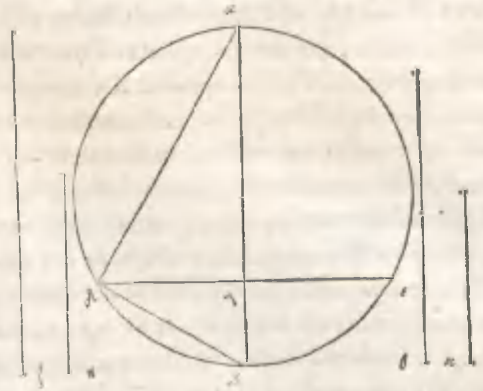
Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων, δείξομεν ὅτι καὶ ὁ κ β ζ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ α ζ β τμήματι τῆς σφαίρας. ἔστω γὰρ ὁ ν κῶνος βάσιν μὲν ἔχων τὴν ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ κῶνος τῇ σφαίρᾳ. ἡ γὰρ σφαῖρα δέδεικται τετραπλασία τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν μέγιστον κύκλον, καὶ ὕψος τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ ν κῶνος τοῦ αὐτοῦ ἐστι τετραπλάσιος. ἐπεὶ καὶ ἡ βάσις τῆς βάσεως, καὶ ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν αὐτῇ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς συναμφότερος ἡ θ α, α ε πρὸς α ε, ἡ δ ε πρὸς ε γ. διελόντι καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ θ γ πρὸς γ δ, ἡ α ε πρὸς ε γ. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ κ ε πρὸς ε α, συναμφότερος ἡ θ γ, γ ε πρὸς γ ε. διελόντι καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ κ α πρὸς γ θ, τουτέστι πρὸς θ α, οὕτως ἡ α ε πρὸς ε γ. τουτέστιν ἡ θ γ πρὸς γ δ. καὶ συνθέντι, ἴση δὲ ἡ α θ τῇ θ γ, ὡς ἄρα ἡ κ θ πρὸς θ γ, ἡ θ δ πρὸς δ γ. καὶ ὅλη ἡ κ δ πρὸς δ θ. ἐστὶν ὡς ἡ δ θ πρὸς δ γ. τουτέστιν ὡς ἡ κ θ



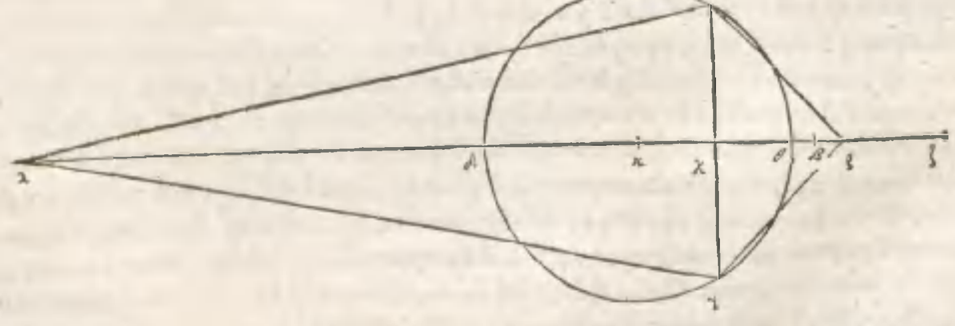
πρὸς θ α. ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ δ θ κ, θ α τῷ ὑπὸ τῶν δ κ. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ κ θ πρὸς θ γ, ἡ θ δ πρὸς γ δ, ἐναλλὰξ ὡς ἡ κ θ πρὸς θ δ, ἡ θ γ πρὸς γ δ. ὡς δὲ ἡ θ γ πρὸς γ δ, ἐδείχθη ἡ α ε πρὸς ε γ, ὡς ἄρα ἡ κ θ πρὸς θ δ, ἡ α ε πρὸς ε γ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ κ δ πρὸς τὸ ὑπὸ κ θ δ. τὸ ἀπὸ α γ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν α ε γ. τὸ δὲ ὑπὸ τῶν κ θ δ ἴσον ἐδείχθη τῷ ὑπὸ κ δ, α θ. ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ κ δ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν κ δ, α θ, τουτέστιν ἡ κ δ πρὸς α θ. τὸ ἀπὸ α γ πρὸς τὸ ὑπὸ α ε γ, τουτέστι πρὸς τὸ ἀπὸ ε β. καὶ ἐστὶν ἴση ἡ α γ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ν κύκλου. ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ν κύκλου πρὸς τὸ ἀπὸ β ε, τουτέστιν ὁ ν κύκλος πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν β ζ κύκλον, οὕτως ἡ κ δ πρὸς α θ. τουτέστιν ἡ κ δ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ ν κώνου. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ν κῶνος, τουτέστιν ἡ σφαῖρα τῷ β δ ζ κ στερεῷ ῥόμβῳ. ἢ οὕτως ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ ν κύκλος πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν β ζ κύκλον, οὕτως ἡ κ δ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ ν κώνου. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ν κῶνος τῷ κώνῳ, οὗ βάσις μὲν ἐστὶν ὁ περὶ διάμετρον τὴν β ζ κύκλος. ὕψος δὲ ἡ δ κ. ἀντιπεπόνθασι γὰρ αὐτῶν αἱ βάσεις ταῖς ὕψεσιν. ἀλλ' οὗτος ὁ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ β κ ζ δ στερεῷ ῥόμβῳ. καὶ ὁ ν ἄρα κῶνος, τουτέστιν ἡ σφαῖρα ἴση ἐστὶ τῷ β ζ κ δ στερεῷ ῥόμβῳ, ὧν ὁ β δ ζ κῶνος ἴσος ἐδείχθη τῷ β γ ζ τμήματι τῆς σφαίρας. λοιπὸς ἄρα ὁ β κ ζ κῶνος, ἴσος ἐστὶ τῷ β α ζ τμήματι τῆς σφαίρας.

Τρίτον ἦν πρόβλημα τόδε. τὴν δοθεῖσαν σφαῖραν ἐπιπέδῳ τεμεῖν, ὅπως αἱ τῶν τμημάτων γ
ἐπιφάνειαι πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχωσι τὸν αὐτὸν τῷ δοθέντι. γεγονέτω, καὶ ἔστω τῆς σφαίρας μέγιστος κύκλος ὁ α δ β ε. διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ α β. καὶ ἐκβεβλήσθω πρὸς τὴν α β ἐπίπε-

δου ὀρθόν. καὶ πιπτέτω τὸ ἐπίπεδον ἐν ᾧ ὁ αδβε κύκλος, τεμεῖ τὴν δε. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αδ, βδ. ἐπεὶ οὖν λόγος ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ δαε τμήματος, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ δβε τμήματος. ἀλλὰ τῇ μὲν ἐπιφανείᾳ τοῦ δαε τμήματος ἴσος ἐστὶ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ αδ. τῇ δὲ ἐπιφανείᾳ τοῦ δβε τμήματος ἴσος ἐστὶ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ δβ. ὡς δὲ οἱ εἰρημένοι κύκλοι πρὸς ἀλλήλους, οὕτως τὸ ἀπὸ αδ πρὸς τὸ ἀπὸ δβ. τουτέστιν ἡ αγ πρὸς γβ. λόγος ἄρα τῆς αγ πρὸς γβ δοθείς, ὥστε δοθέν ἐστι τὸ γ σημεῖον. καὶ ἔστι τῇ αβ πρὸς ὀρθὰς ἡ δε. θέσει ἄρα καὶ τὸ διὰ τῆς δε ἐπίπεδον. συντεθήσεται δὲ οὕτως. ἔστω σφαῖρα, ἧς μέγιστος κύκλος ὁ αβδε. ὁ δὲ δοθεὶς λόγος ὁ τῆς ζ πρὸς η. καὶ τετμήσθω ἡ αβ, κατὰ τὸ γ. ὥστε εἶναι ὡς τὴν αγ πρὸς βγ, οὕτως τὴν ζ πρὸς η. καὶ διὰ τοῦ γ ἐπιπέδῳ τετμήσθω ἡ σφαῖρα πρὸς ὀρθὰς τῇ αβ εὐθείᾳ. καὶ ἔστω κοινὴ τομὴ ἡ δε. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αδ, δβ. καὶ ἐκκείσθωσαν δύο κύκλοι οἱ θ, κ, ὁ μὲν θ ἴσην ἔχων τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῇ αδ, ὁ δὲ κ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου ἴσην ἔχων τῇ δβ. ἔστιν ἄρα ὁ θ κύκλος ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ δαε τμήματος. ὁ δὲ κ τοῦ δβε τμήματος. τοῦτο γὰρ ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ. καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ αδβ, καὶ κάθετος ἡ γδ. ἐστὶν ὡς ἡ αγ πρὸς γβ, τουτέστιν ἡ ζ πρὸς η, τὸ ἀπὸ αδ πρὸς τὸ ἀπὸ δβ. τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ θ κύκλου, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κ κύκλου. τουτέστιν ὁ θ κύκλος πρὸς τὸν κ κύκλον. τουτέστιν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ δαε τμήματος, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ δβε τμήματος τῆς σφαίρας.



δ Τὴν δοθεῖσαν σφαῖραν τεμεῖν, ὥστε τὰ τμήματα τῆς σφαίρας πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχειν τὸν αὐτὸν τῷ δοθέντι. ἔστω ἡ δοθεῖσα σφαῖρα ἡ αβγδ. δεῖ δὴ αὐτὴν τεμεῖν ἐπιπέδῳ, ὥστε τὰ τμήματα τῆς σφαίρας πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχειν τὸν δοθέντα. τετμήσθω διὰ τῆς αγ ἐπιπέδῳ. λόγος ἄρα τοῦ αδγ τμήματος τῆς σφαίρας πρὸς τὸ αβγ τμῆμα τῆς σφαίρας δοθείς. τετμήσθω δὲ ἡ σφαῖρα διὰ τοῦ κέντρου, καὶ ἔστω ἡ τομὴ μέγιστος κύκλος ὁ αβγδ. κέντρον δὲ τὸ κ. καὶ διάμετρος ἡ δβ. καὶ πεποιήσθω, ὡς μὲν συναμφότερος ἡ κδχ πρὸς δχ, οὕτως ἡ ρχ πρὸς χβ. ὡς δὲ συναμφότερος ἡ κβχ πρὸς βχ, οὕτως ἡ λχ πρὸς χδ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αλ, λγ, αρ, ργ. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ μὲν αλγ κῶνος, τῷ αδγ τμήματι τῆς σφαίρας. ὁ δὲ αργ, τῷ αβγ. λόγος ἄρα καὶ τοῦ αλγ κώνου πρὸς τὸν αργ κῶνον δοθείς. ὡς δὲ ὁ κῶνος πρὸς τὸν κῶνον, οὕτως ἡ λχ πρὸς χρ. ἐπείπερ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχουσι τὸν περὶ διάμετρον τὴν αγ κύκλον. λόγος ἄρα καὶ τῆς λχ πρὸς χρ δοθείς. καὶ διὰ ταῦτα τοῖς πρότερον διὰ τῆς κατασκευῆς, ὡς ἡ λδ πρὸς κδ, ἡ κβ πρὸς βρ,

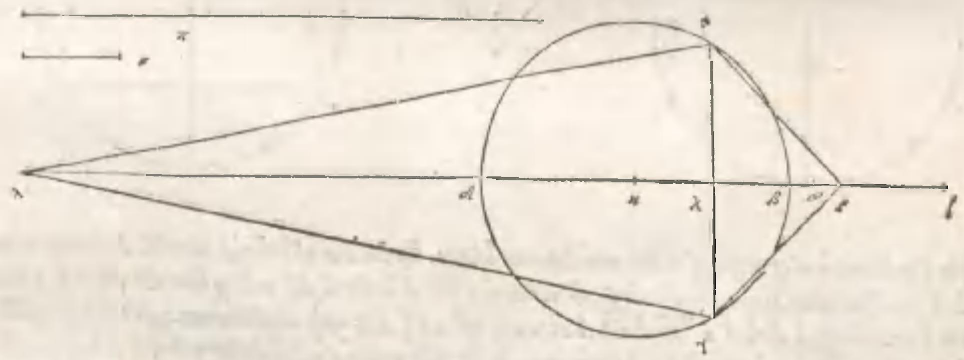


καὶ ἡ δχ πρὸς χβ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ρβ πρὸς βκ, ἡ κδ πρὸς λδ. συνθέντι ὡς ἡ ρκ πρὸς κβ, τουτέστι πρὸς κδ, οὕτως ἡ κλ πρὸς λδ. καὶ ὅλη ἄρα ἡ ρλ πρὸς ὅλην τὴν κλ ἐστίν, ὡς ἡ κλ πρὸς λδ. ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ρλδ, τῷ ἀπὸ λκ. ὡς ἄρα ἡ ρλ πρὸς λδ, τὸ ἀπὸ κλ πρὸς τὸ ἀπὸ λδ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ λδ πρὸς δκ, οὕτως ἡ δχ πρὸς χβ. ἔσται ἀνάπαλιν καὶ συνθέντι, ὡς ἡ κλ πρὸς λδ, οὕτως ἡ βδ πρὸς δχ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ κλ πρὸς τὸ ἀπὸ λδ, οὕτω τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ.

πάλιν

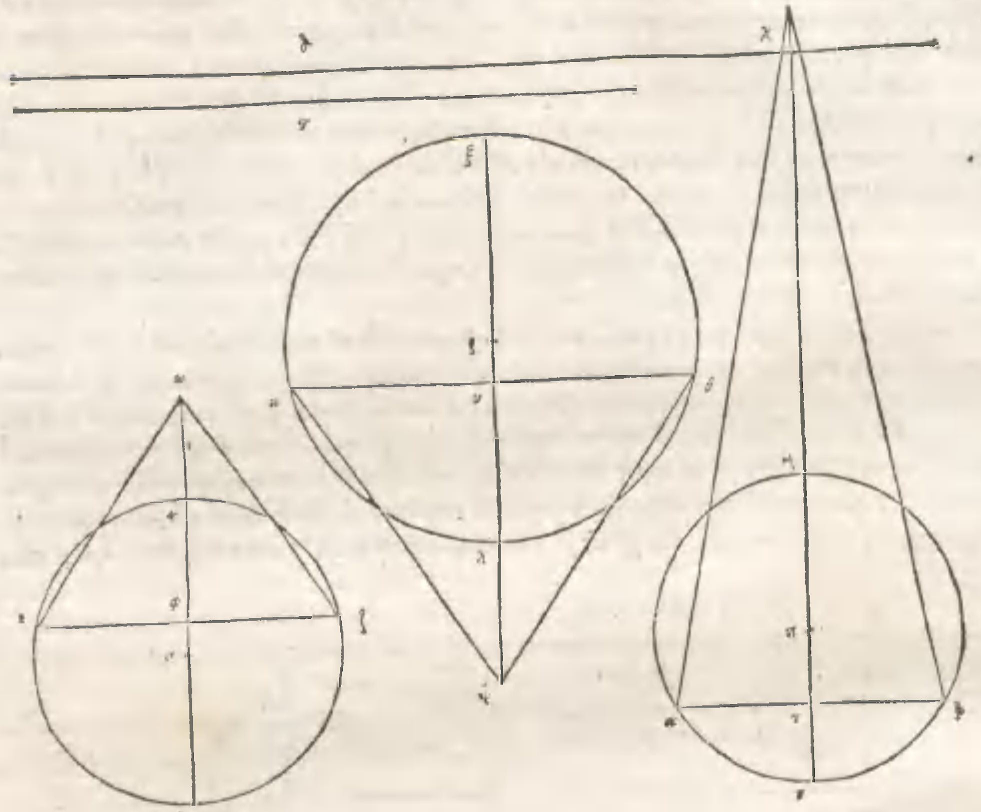
πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ λχ πρὸς δχ, συναμφότερος ἡ κβ, βχ πρὸς βχ. διελόντι, ὡς ἡ λδ πρὸς δχ, οὕτως ἡ κβ πρὸς βχ. καὶ κείσθω τῇ κβ ἴση ἡ βζ. ὅτι γὰρ ἐκτὸς τοῦ ρ πεσεῖται, δῆλον. καὶ ἔσται ὡς ἡ λδ πρὸς δχ, οὕτως ἡ ζβ πρὸς βχ. ὥστε καὶ ὡς ἡ δλ πρὸς λχ, ἡ βζ πρὸς ζχ. ἐπεὶ δὲ λόγος ἐστὶ τῆς δλ πρὸς λχ δοθείς, καὶ τῆς ρλ ἄρα πρὸς λχ λόγος ἐστὶ δοθείς. ἐπεὶ οὖν ὁ τῆς ρλ πρὸς λχ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ρλ πρὸς λδ, καὶ ἡ δλ πρὸς λχ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ρλ πρὸς λδ, τὸ ἀπὸ δβ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ. ὡς δὲ ἡ δλ πρὸς λχ, οὕτως ἡ βζ πρὸς ζχ. ὁ ἄρα τῆς ρλ πρὸς λχ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ, καὶ ἡ βζ πρὸς ζχ. πεποιήσθω δὲ ὡς ἡ ρλ πρὸς λχ, ἡ βζ πρὸς ζθ. λόγος δὲ τῆς ρλ πρὸς λχ δοθείς, λόγος ἄρα καὶ τῆς ζβ πρὸς ζθ δοθείς. δοθεῖσα δὲ ἡ βζ, ἴση γάρ ἐστι τῇ ἐκ τοῦ κέντρου. δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ζθ, καὶ ὁ τῆς βζ ἄρα λόγος πρὸς ζθ σύγκειται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ, καὶ ἡ βζ πρὸς ζχ. ἀλλ' ὁ βζ πρὸς ζθ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ τῆς βζ πρὸς ζχ, καὶ τοῦ τῆς ζχ πρὸς ζθ. κοινὸς ἀφῃρήσθω ὁ τῆς βζ πρὸς ζχ, λοιπὸς ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ βδ, τουτέστι δοθὲν πρὸς τὸ ἀπὸ δχ, οὕτως ἡ χζ πρὸς ζθ, τουτέστι πρὸς δοθέν. καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ ζδ εὐθεῖα. δεῖ ἄρα δοθεῖσαν τὴν δζ τεμεῖν κατὰ τὸ χ, καὶ ποιεῖν ὡς τὴν χζ πρὸς δοθεῖσαν τὴν ζθ, οὕτως τὸ δοθὲν τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ. τοῦτο οὕτως ἁπλῶς μὲν λεγόμενον οὐκ ἔχει διορισμόν. προστιθεμένων δὲ τῶν προβλημάτων, τῶν ἐνθάδε ὑπαρχόντων, τουτέστι τοῦ τε διπλασίαν εἶναι τὴν δβ τῆς βζ, καὶ τοῦ μείζονα τὴν ζθ τῆς βθ, ὡς κατὰ τὴν ἀνάλυσιν οὐκ ἔχει διορισμόν. καὶ ἔσται τὸ πρόβλημα τοιοῦτον. δύο δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν δβ, βζ, καὶ διπλασίας οὔσης τῆς δβ τῆς βζ, καὶ σημείου ἐπὶ τῆς βζ τοῦ θ, τεμεῖν τὴν δβ κατὰ τὸ χ, καὶ ποιεῖν ὡς τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ, τὴν χζ πρὸς ζθ. ἑκάτερα δὲ ταῦτα ἐπὶ τέλει ἀναλυθήσεταί τε καὶ συντεθήσεται.

Συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως. ἔστω ὁ δοθεὶς λόγος ὁ τῆς π πρὸς σ, μείζων πρὸς ἐλάσσονα. καὶ δεδόσθω τις σφαῖρα. καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ κέντρου. καὶ ἔστω τομὴ ὁ αβγδ κύκλος, καὶ διάμετρος ἔστω ἡ βδ, κέντρον δὲ τὸ κ. καὶ τῇ κβ ἴση κείσθω ἡ βζ, καὶ τετμήσθω ἡ βζ κατὰ τὸ θ. ὥστε εἶναι ὡς τὴν θζ πρὸς θβ, τὴν π πρὸς σ. καὶ ἔτι τετμήσθω ἡ βδ κατὰ τὸ χ, ὥστε εἶναι ὡς τὴν χζ πρὸς θζ, τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ. καὶ διὰ τοῦ χ ἐπίπεδον ἐκβεβλήσθω ὀρθὸν πρὸς τὸ βδ. λέγω ὅτι τὸ ἐπίπεδον τοῦτο τέμνει τὴν σφαῖραν, ὥστε εἶναι ὡς τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὸ ἔλασσον, τὴν π πρὸς σ. πεποιήσθω γὰρ ὡς μὲν συναμφότερος ἡ κβχ πρὸς βχ, οὕτως ἡ λχ πρὸς



δχ. ὡς δὲ συναμφότερος ἡ κδχ πρὸς χδ, ἡ ρχ πρὸς χβ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αλ, λγ, αρ, ργ. ἔσται δὴ διὰ τὴν κατασκευὴν ὡς ἐδείξαμεν ἐν τῇ ἀναλύσει, ἴσον τὸ ὑπὸ ρλδ τῷ ὑπὸ λκ. καὶ ὡς ἡ κλ πρὸς λδ, ἡ βδ πρὸς δχ. ὥστε καὶ ὡς τὸ ἀπὸ κλ πρὸς τὸ ἀπὸ λδ, τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ρλδ τῷ ἀπὸ λκ ἐστὶν ἴσον, ὡς ἡ ρλ πρὸς λδ, τὸ ἀπὸ λκ πρὸς τὸ ἀπὸ λδ. ἔσται ἄρα καὶ ὡς ἡ ρλ πρὸς λδ, τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ, τουτέστιν ἡ χζ πρὸς ζθ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς συναμφότερος ἡ κβχ πρὸς βχ, οὕτως ἡ λχ πρὸς χδ. ἴση δέ ἐστιν ἡ κβ τῇ βζ. ἔσται ἄρα καὶ ὡς ἡ ζχ πρὸς χβ, οὕτως ἡ δχ πρὸς χδ. ἀναστρέψαντι, ὡς ἡ χζ πρὸς ζβ, οὕτως ἡ χλ πρὸς λδ. ὥστε καὶ ὡς ἡ λδ πρὸς λχ, οὕτως ἡ βζ πρὸς ζχ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ρλ πρὸς λδ, οὕτως ἡ χζ πρὸς ζθ. ὡς δὲ ἡ δλ πρὸς λχ, οὕτως ἡ βζ πρὸς ζχ. καὶ δι' ἴσου ἐν τῇ τεταραγμένῃ ἀναλογίᾳ, ὡς ἡ ρλ πρὸς λχ, οὕτως ἡ βζ πρὸς ζθ. καὶ ὡς ἄρα ἡ λχ πρὸς χρ, οὕτως ἡ ζθ πρὸς θβ. ὡς δὲ ἡ ζθ πρὸς θβ, οὕτως ἡ π πρὸς σ. καὶ ὡς ἄρα ἡ λχ πρὸς χρ, τουτέστιν ὁ αγλ κῶνος πρὸς τὸν αργ κῶνου, τουτέστι τὸ αλγ τμῆμα τῆς σφαίρας, πρὸς τὸ αβγ τμῆμα τῆς σφαίρας, οὕτως ἡ π πρὸς σ.

ε Τῷ δοθέντι τμήματι σφαίρας ὅμοιον, καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι ἴσον τὸ αὐτὸ συστήσασθαι. ἔστω τὰ δύο δοθέντα τμήματα σφαίρας τὰ αβγ, εζη. καὶ ἔστω τοῦ μὲν αβγ τμήματος βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν αβ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ γ σημεῖον. τοῦ δὲ εζη βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν εζ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ η σημεῖον. δεῖ δὴ εὑρεῖν τμῆμα σφαίρας, ὃ ἔσται τῷ μὲν αβγ τμήματι ἴσον, τῷ δὲ εζη ὅμοιον. εὑρήσθω. καὶ ἔστω τὸ θκλ. καὶ ἔστω αὐτοῦ μὲν βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν θκ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ λ σημεῖον. ἔστωσαν δὴ καὶ κύκλοι ἐν ταῖς σφαίραις οἱ ανβγ, θξκλ, εοζη, διάμετροι δὲ αὐτῶν πρὸς ὀρθὰς ταῖς βάσεσι τῶν τμημάτων αἱ γν, λξ, ηο. καὶ ἔστω κέντρα τὰ π, ρ, σ. καὶ πεποιήσθω ὡς μὲν συναμφότερος ἡ πν, ντ πρὸς τὴν ντ, οὕτως ἡ χτ πρὸς τγ. ὡς δὲ συναμφότερος ἡ ρξ, ξυ πρὸς ξυ, οὕτως ἡ ψυ πρὸς υλ. καὶ ὡς συναμφότερος ἡ σο, οφ

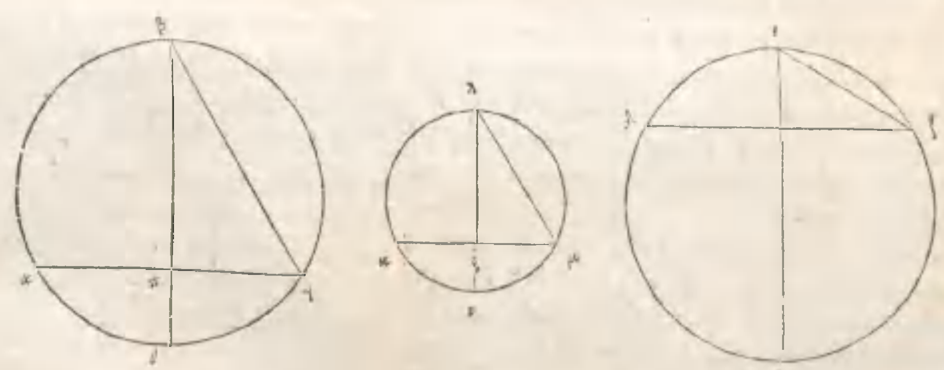


πρὸς οφ, οὕτως ἡ ωφ πρὸς φη. καὶ νοείσθωσαν κῶνοι, ὧν βάσεις μέν εἰσιν οἱ περὶ διάμετρον τὴν αβ, θκ, εζ κύκλοι, κορυφαὶ δὲ τὰ χ, ψ, ω σημεῖα. ἔστι δὲ ἴσος ὁ μὲν αβχ κῶνος τῷ αβγ τμήματι τῆς σφαίρας, ὁ δὲ ψθκ τῷ θκλ, ὁ δὲ εωζ τῷ εηζ. τοῦτο γὰρ δέδεικται. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ αβγ τμῆμα τῆς σφαίρας τῷ θκλ τμήματι, ἴσος ἄρα καὶ ὁ αχβ κῶνος τῷ ψθκ κώνῳ. τῶν δὲ ἴσων κώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις ταῖς ὕψεσιν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν αβ πρὸς τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὴν θκ, οὕτως ἡ ψυ πρὸς χτ. ὡς δὲ ὁ κύκλος πρὸς τὸν κύκλον, τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ θκ. ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ θκ, οὕτως ἡ ψυ πρὸς χτ. καὶ ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ εζη τμῆμα τῷ θκλ τμήματι, ὅμοιος ἄρα ἐστὶ καὶ ὁ εζω κῶνος τῷ ψθκ κώνῳ. τοῦτο γὰρ δειχθήσεται. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ωφ πρὸς τὴν εζ, οὕτως ἡ ψυ πρὸς θκ. λόγος δὲ τῆς ωφ πρὸς τὴν εζ δοθείς, λόγος ἄρα καὶ τῆς ψυ πρὸς τὴν θκ δοθείς. ὁ αὐτὸς ἔστω ὁ τῆς χτ πρὸς δ. καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ χτ, δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ δ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ψυ πρὸς χτ, τουτέστι τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ θκ, οὕτως ἡ θκ πρὸς δ. κείσθω τῷ ἀπὸ θκ ἴσον τὸ ὑπὸ αβ, ς. ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ θκ, οὕτως ἡ αβ πρὸς τὴν ς. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ θκ, οὕτως ἡ θκ πρὸς δ. καὶ ἐναλλάξ. ὡς ἡ αβ πρὸς θκ, οὕτως ἡ ς πρὸς δ. ὡς δὲ ἡ αβ πρὸς θκ, οὕτως ἡ θκ πρὸς ς διὰ τὸ ἴσον εἶναι τὸ ἀπὸ θκ τῷ ὑπὸ τῶν αβ, ς. ὡς ἄρα ἡ αβ πρὸς θκ, οὕτως ἡ θκ πρὸς ς, καὶ ἡ ς πρὸς δ. δύο ἄρα δοθεισῶν τῶν αβ, δ, δύο μέσαι κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογόν εἰσιν αἱ θκ, ς.

Συντε-

Συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως. ἔστω ᾧ μὲν δεῖ ἴσον τμῆμα συστήσασθαι τὸ αβγ, ᾧ δὲ ὅμοιον τὸ εζη. καὶ ἔστωσαν μέγιστοι κύκλοι τῶν σφαιρῶν οἱ αβγν, ηεοζ. διάμετροι δὲ αὐτῶν αἱ γν, ηο. καὶ κέντρα τὰ π, σ. καὶ πεποιήσθω ὡς μὲν συναμφότερος ἡ πν, ντ πρὸς ντ, οὕτως ἡ χτ πρὸς τγ. ὡς δὲ συναμφότερος ἡ σοφ πρὸς οφ, ἡ ωφ πρὸς φη. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ μὲν χαβ κῶνος τῷ αβγ τμήματι τῆς σφαίρας. ὁ δὲ ζωε τῷ εηζ. πεποιήσθω ὡς ἡ ωφ πρὸς εζ, οὕτως ἡ χτ πρὸς δ. καὶ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν αβ, δ, δύο μέσαι ἀνὰ λόγον εἰλήφθωσαν αἱ θκ, ς. ὥστε εἶναι, ὡς τὴν αβ πρὸς θκ, οὕτως τὴν κθ πρὸς ς, καὶ τὴν ς πρὸς δ. καὶ ἐπὶ τῆς θκ κύκλου τμῆμα ἐφεστάσθω τὸ θκλ, ὅμοιον τῷ εζη κύκλου τμήματι, καὶ ἀναπεπληρώσθω ὁ κύκλος. καὶ ἔστω αὐτοῦ διάμετρος ἡ λξ. καὶ νοείσθω σφαῖρα ἧς μέγιστος κύκλος ἐστὶν ὁ λθξκ, κέντρον δὲ τὸ ρ. καὶ διὰ τῆς θκ ἐπίπεδον ὀρθὸν ἐκβεβλήσθω πρὸς τὴν λξ. ἔσται δὴ τὸ τμήματι τῆς σφαίρας τὸ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ λ, ὅμοιον τῷ εζη τμήματι τῆς σφαίρας. ἐπειδὴ καὶ τῶν κύκλων τὰ τμήματα ἦν ὅμοια, λέγω δὲ ὅτι καὶ ἴσον ἐστὶ τῷ αβγ τμήματι τῆς σφαίρας. πεποιήσθω ὡς συναμφότερος ἡ ρξυ πρὸς τὴν ξυ, οὕτως ἡ ψυ πρὸς υλ. ἴσος ἄρα ψθκ κῶνος τῷ θκλ τμήματι τῆς σφαίρας. καὶ ἐπειδὴ ὅμοιός ἐστιν ὁ ψθκ κῶνος τῷ ζωε κώνῳ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ωφ πρὸς εζ, τουτέστιν ἡ χτ πρὸς δ, οὕτως ἡ ψυ πρὸς θκ. καὶ ἐναλλὰξ καὶ ἀνάπαλιν, ὡς ἄρα ἡ ψυ πρὸς χτ, ἡ θκ πρὸς δ. καὶ ἐπειδὴ ἀνὰ λόγον εἰσὶν αἱ αβ, κθ, ς, δ, ἔστιν ὡς τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ θκ, ἡ θκ πρὸς δ. ὡς δὲ ἡ θκ πρὸς δ, ἡ ψυ πρὸς χτ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ κθ, τουτέστιν ὁ περὶ διάμετρον τὴν θκ κύκλος, οὕτως ἡ ψυ πρὸς τὴν χτ. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ χαβ κῶνος τῷ ψθκ κώνῳ. ὥστε καὶ τὸ αβγ τμῆμα τῆς σφαίρας ἴσον ἐστὶ τῷ θκλ τμήματι τῆς σφαίρας. τῷ δοθέντι ἄρα τμήματι τῷ αβγ ἴσον, καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι ὅμοιον τῷ εζη, τὸ αὐτὸ συνέσταται τὸ θκλ.

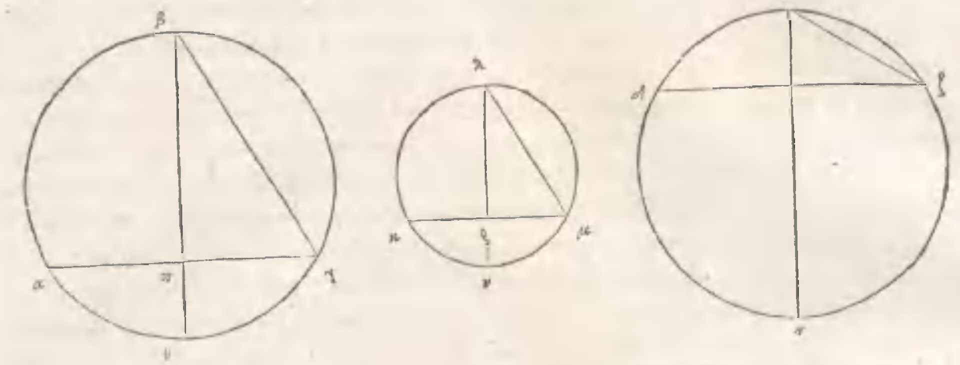
Δύο δοθέντων σφαίρας τμημάτων, εἴτε τῆς αὐτῆς, εἴτε μή, εὑρεῖν τμῆμα σφαίρας, ὃ ἔσται ἑνὶ μὲν τῶν δοθέντων ὅμοιον, τὴν δὲ ἐπιφάνειαν ἕξει ἴσην τῇ τοῦ ἑτέρου τμήματος ἐπιφανείᾳ. ἔστω τὰ δοθέντα τμήματα σφαιρικὰ ἐπὶ τὰς αβγ, δεζ περιφερείας. καὶ ἔστω ᾧ μὲν δεῖ ὅμοιον εὑρεῖν τὸ ἐπὶ τὴν αβγ περιφέρειαν. οὕτως δὲ τὴν ἐπιφάνειαν ἴσην ἔχειν τῇ ἐπιφανείᾳ, τὸ ἐπὶ τὴν δεζ. καὶ γεγενήσθω καὶ ἔστω τὸ κλμ τῆς σφαίρας, τῷ μὲν αβγ τμήματι ὅμοιον. τὴν δὲ ἐπιφάνειαν ἴσην ἐχέτω τῇ τοῦ δεζ τμήματος ἐπιφανείᾳ. καὶ νοείσθω τὰ κέντρα τῶν σφαιρῶν. καὶ δι' αὐτῶν ἐπίπεδα ἐκβεβλήσθω ὀρθὰ πρὸς τὰς τῶν τμημάτων βάσεις. καὶ ἐν μὲν ταῖς σφαίραις τομαὶ ἔστωσαν οἱ κλμν, βαγθ, εζηδ μέγιστοι κύκλοι. ἐν δὲ ταῖς βάσεσι τῶν τμημάτων, αἱ κμ, αγ, δζ εὐθεῖαι. διάμετροι δὲ τῶν σφαιρῶν πρὸς ὀρθὰς οὖσαι ταῖς κμ, αγ, δζ, ἔστωσαν αἱ λν, βθ, εη. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ λμ, βγ, εζ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ τοῦ κλμ τμήματος τῆς σφαίρας ἐπιφά- ϛ



νεια τῇ τοῦ δεζ τμήματος ἐπιφανείᾳ, ἴσος ἄρα ἐστὶ καὶ ὁ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ εζ. αἱ γὰρ ἐπιφάνειαι τῶν εἰρημένων τμημάτων ἴσαι ἐδείχθησαν κύκλοις, ὧν αἱ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσαι εἰσὶ ταῖς ἀπὸ τῶν κορυφῶν τῶν τμημάτων ἐπὶ τὰς βάσεις ἐπιζευγνυούσαις. ὥστε καὶ ἡ μλ τῇ εζ ἴση ἐστίν. ἐπεὶ δὲ ὅμοιόν ἐστι τὸ κλμ τῷ αβγ τμήματι, ἔστιν ὡς ἡ ρλ πρὸς ρν, ἡ βπ πρὸς πθ. καὶ ἀνάπαλιν. καὶ συνθέντι ὡς ἡ νλ πρὸς λρ, οὕτως ἡ θβ πρὸς βπ. ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ρλ πρὸς λμ, οὕτως ἡ βπ πρὸς γβ. ὅμοια γὰρ τὰ τρίγωνα. ὡς ἄρα ἡ νλ πρὸς λμ, τουτέστι πρὸς εζ, οὕτως ἡ θβ πρὸς βγ. καὶ ἐναλλάξ. λόγος δὲ τῆς εζ πρὸς βγ δοθείς. δοθεῖσα γὰρ ἑκατέρα. λόγος ἄρα καὶ τῆς λν πρὸς βθ δοθείς. καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ βθ. δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ λν. ὥστε καὶ ἡ σφαῖρα δοθεῖσά ἐστι.

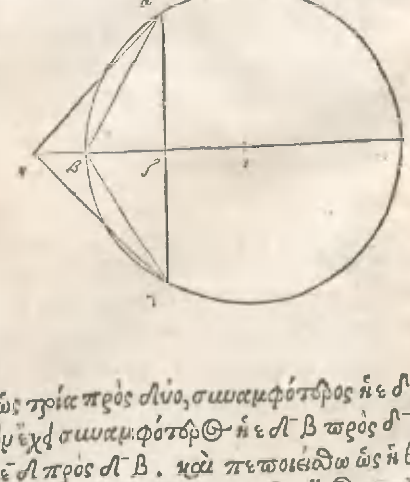
Συντεθήσεται

Συντεθήσεται δὴ οὕτως. ἔστω τὰ δοθέντα δύο τμήματα σφαίρας, τὰ α β γ, δ ε ζ. τὸ μὲν α β γ, ᾧ δεῖ ὅμοιον· τὸ δὲ δ ε ζ, οὗ τῇ ἐπιφανείᾳ ἴσην ἔχειν τὴν ἐπιφάνειαν. καὶ τὰ αὐτὰ κατασκευάσθω τοῖς ἐπὶ τῆς ἀναλύσεως. καὶ πεποιήσθω, ὡς μὲν ἡ β γ πρὸς ε ζ, οὕτως ἡ β θ πρὸς λ ν. καὶ περὶ διάμετρον τὴν λ ν κύκλος γεγράφθω. καὶ νοείσθω σφαῖρα ἧς μέγιστος ἔστω κύκλος ὁ λ κ ν μ. καὶ τετμήσθω ἡ λ ν τῷ ρ, ὥς τε εἶναι ὡς τὴν θ π πρὸς π β, τὴν ν ρ πρὸς ρ λ. καὶ διὰ τοῦ ρ ἐπιπέδῳ τετμήσθω ἡ ἐπιφάνεια ὀρθῷ πρὸς τὴν λ ν. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ λ μ. ὅμοια ἄρα ἐστὶ τὰ ἐπὶ τῶν κ μ, α γ



εὐθειῶν τῶν κύκλων τμήματα, ὥς τε καὶ τὰ τμήματα τῶν σφαιρῶν ἐστιν ὅμοια. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ θ β πρὸς β π, οὕτως ἡ ν λ πρὸς λ ρ. καὶ γὰρ τοῦτο κατὰ διαίρεσιν. ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ π β πρὸς β γ, οὕτως ἡ ρ λ πρὸς λ μ. καὶ ὡς ἄρα ἡ θ β πρὸς β γ, οὕτως ἡ ν λ πρὸς λ μ. ἦν δὲ καὶ ὡς ἡ θ β πρὸς λ ν, ἡ β γ πρὸς ε ζ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ε ζ τῇ λ μ. ὥστε καὶ ὁ κύκλος οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἐστὶν ἡ ε ζ, ἴσος ἐστὶ κύκλῳ οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ λ μ. καὶ ὁ μὲν τὴν ἐκ τοῦ κέντρου ἔχων τὴν ε ζ κύκλος, ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ δ ε ζ τμήματος. ὁ δὲ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ λ μ, ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κ λ μ τμήματος. τοῦτο γὰρ ἐν τῷ πρώτῳ δέδεικται. ἴση ἄρα καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κ λ μ τμήματος τῆς σφαίρας, τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ δ ε ξ τμήματος, καὶ ἔστιν ὅμοιον τὸ κ λ μ τῷ α β γ.

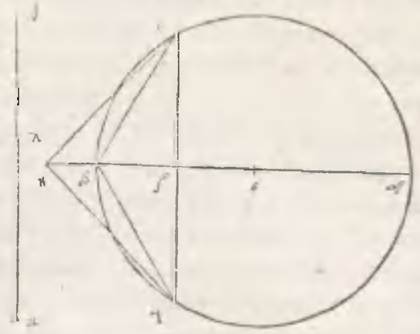
Ἀπὸ τῆς δοθείσης σφαίρας τμῆμα τεμεῖν ἐπιπέδῳ, ὥστε τὸ τμῆμα πρὸς τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι, καὶ ὕψος ἴσον, τὸν δοθέντα λόγον ἔχειν. ἔστω ἡ δοθεῖσα σφαῖρα, ἧς μέγιστος κύκλος ὁ α β γ δ, διάμετρος δὲ αὐτῆς ἡ β δ. δεῖ δὴ τὴν σφαῖραν ἐπιπέδῳ τεμεῖν τῷ διὰ τῆς α γ, ὅπως τὸ α β γ τμῆμα τῆς σφαίρας πρὸς τὸν α β γ κῶνον λόγον ἔχῃ τὸν αὐτὸν τῷ δοθέντι. γεγονέτω καὶ ἔστω κέντρον τῆς σφαίρας τὸ ε. καὶ ὡς συναμφότερος ἡ ε δ ζ πρὸς δ ζ, οὕτως ἡ η ζ πρὸς ζ β. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ α γ η κῶνος τῷ α β γ τμήματι. λόγος ἄρα καὶ τοῦ α η γ κώνου πρὸς τὸν α β γ κῶνον δοθείς. λόγος ἄρα τῆς η ζ πρὸς ζ β δοθείς. ὡς δὲ ἡ η ζ πρὸς ζ β συναμφότερος ἡ ε δ ζ πρὸς δ ζ. λόγος ἄρα συναμφοτέρου τῆς ε δ ζ πρὸς δ ζ δοθείς, ὥς τε καὶ τῆς ε δ πρὸς δ ζ. δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ δ ζ, ὥς τε καὶ ἡ α γ. καὶ ἐπεὶ συναμφότερος ἡ ε δ ζ πρὸς δ ζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ ε δ β πρὸς δ β. καὶ ἔστι συναμφότερος μὲν ἡ ε δ β τρὶς ἡ ε δ. ἡ δὲ β δ δὶς ἡ ε δ. συναμφότερος ἄρα ἡ ε δ ζ πρὸς δ ζ, μείζονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει τρία πρὸς δύο. καὶ ἔστιν ὁ συναμφοτέρου τῆς ε δ ζ πρὸς ζ δ λόγος ὁ αὐτὸς τῷ δοθέντι. δεῖ ἄρα τὸν διδόμενον λόγον εἰς τὴν σύνθεσιν μείζονα εἶναι, τοῦ ὃν ἔχει τρία πρὸς δύο.



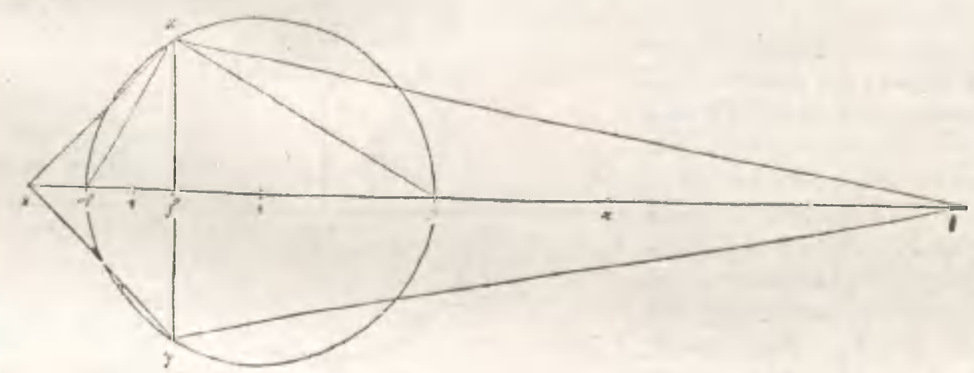
Συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως. ἔστω ἡ δοθεῖσα σφαῖρα, ἧς μέγιστος κύκλος ὁ α β γ δ. διάμετρος ἡ β δ. κέντρον δὲ τὸ ε. ὁ δὲ δοθεὶς λόγος ὁ τῆς θ κ πρὸς κ λ, μείζων τοῦ ὃν ἔχει τρία πρὸς δύο. ἔστι δὲ ὡς τρία πρὸς δύο, συναμφότερος ἡ ε δ β πρὸς δ β. καὶ ἡ θ κ ἄρα πρὸς κ λ μείζονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει συναμφότερος ἡ ε δ β πρὸς δ β. διελόντι ἄρα ἡ θ λ πρὸς λ κ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ε δ πρὸς δ β. καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ θ λ πρὸς λ κ, οὕτως ἡ ε δ πρὸς δ ζ. καὶ διὰ τοῦ ζ τῇ β δ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ α ζ γ. καὶ διὰ τῆς α γ ἐκ-

θω ἐπίπεδον

θω ἐπίπεδον ὀρθὸν πρὸς τὴν β δ. λέγω ὅτι τὸ α β γ τμῆμα τῆς σφαίρας πρὸς τὸν α β γ κῶνον λόγον ἔχει τὸν αὐτὸν τῷ θ κ πρὸς κ λ. πεποιήσθω γὰρ ὡς συναμφότερος ἡ ε δ ζ πρὸς δ ζ, οὕτως ἡ η ζ πρὸς ζ β. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ γ α η κῶνος τῷ α β γ τμήματι τῆς σφαίρας. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ θ κ πρὸς κ λ, οὕτως συναμφότερος ἡ ε δ ζ πρὸς δ ζ, τουτέστιν ἡ η ζ πρὸς ζ β. τουτέστιν ὁ α η γ κῶνος, πρὸς τὸν α β γ κῶνον. ἴσος δὲ ὁ α η γ κῶνος τῷ α β γ τμήματι τῆς σφαίρας. ὡς ἄρα τὸ α β γ τμῆμα πρὸς τὸν α β γ κῶνον, οὕτως ἡ θ κ πρὸς κ λ.



Ἐὰν σφαῖρα ἐπιπέδῳ τμηθῇ, μὴ διὰ τοῦ κέντρου, τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὸ ἔλασσον, ἐλάσσονα μὲν λόγον ἔχει, ἢ διπλάσιον τοῦ ὃν ἔχει ἡ τοῦ μείζονος τμήματος ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ ἐλάσσονος ἐπιφάνειαν. μείζονα δὲ ἢ ἡμιόλιον. ἔστω σφαῖρα, καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος ὁ α β γ δ. καὶ διάμετρος ἡ β δ. καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ διὰ τῆς α γ ὀρθῷ πρὸς τὸν α β γ δ κύκλον. καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τῆς σφαίρας τὸ α β γ, λέγω ὅτι τὸ α β γ τμῆμα πρὸς τὸ α δ γ, ἐλάσσονα μὲν ἢ διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ μείζονος τμήματος, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐλάσσονος τμήματος. μείζονα δὲ ἢ ἡμιόλιον. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ β α, α δ. καὶ ἔστω κέντρον τὸ ε. καὶ πεποιήσθω ὡς μὲν συναμφότερος ἡ ε δ ζ πρὸς δ ζ, ἡ θ ζ πρὸς ζ β. ὡς δὲ συναμφότερος ἡ ε β ζ πρὸς β ζ, οὕτως ἡ

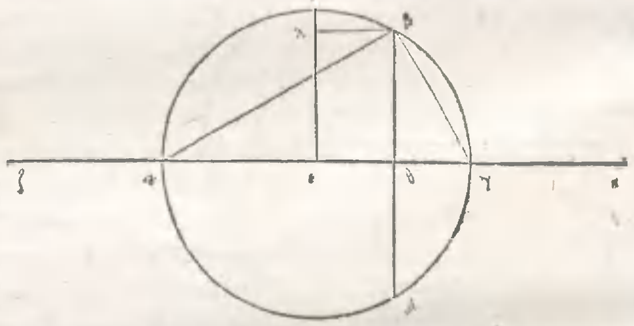


κ ζ πρὸς ζ δ. καὶ νοείσθωσαν κῶνοι, βάσιν ἔχοντες τὸν περὶ διάμετρον τὴν α β γ κύκλον, κορυφὰς δὲ τὰ θ, κ σημεῖα. ἔσται δὴ ἴσος ὁ μὲν α θ γ κῶνος τῷ α β γ τμήματι τῆς σφαίρας, ὁ δὲ α κ γ τῷ α δ γ. καὶ ἔστιν ὡς τὸ ἀπὸ β α πρὸς τὸ ἀπὸ α δ, οὕτως ἡ ἐπιφάνεια τοῦ α β γ τμήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ α δ γ τμήματος. τοῦτο γὰρ προγέγραπται. δεικτέον ὅτι τὸ μεῖζον τμῆμα τῆς σφαίρας πρὸς τὸ ἔλασσον, ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ διπλάσιον, ἤπερ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐλάσσονος τμήματος. λέγω ὅτι καὶ ὁ α θ γ κῶνος πρὸς τὸν α κ γ, τουτέστιν ἡ ζ θ πρὸς ζ κ, ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ διπλάσιον τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ β α πρὸς τὸ ἀπὸ α δ, τουτέστιν ἡ β ζ πρὸς ζ δ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς μὲν συναμφότερος ἡ ε δ ζ πρὸς δ ζ, οὕτως ἡ θ ζ πρὸς ζ β. ὡς δὲ συναμφότερος ἡ ε β ζ πρὸς β ζ, οὕτως ἡ ζ κ πρὸς ζ δ. ἔσται καὶ ὡς ἡ β ζ πρὸς ζ δ, ἡ θ β πρὸς β ε. ἴση γὰρ ἡ β ε τῇ δ ε. τοῦτο γὰρ ἐν τοῖς ἐπάνω συναποδέδεικται. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς συναμφότερος ἡ ε β ζ πρὸς β ζ, ἡ κ ζ πρὸς ζ δ. ἔστω τῇ β ε ἴση ἡ β κ. δῆλον γὰρ ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ θ β τῆς β ε. ἐπεὶ καὶ ἡ β ζ τῆς ζ δ. καὶ ἔσται ὡς ἡ κ ζ πρὸς ζ β, ἡ κ ζ πρὸς ζ δ. ὡς δὲ ἡ ζ β πρὸς ζ δ, ἐδείχθη ἡ θ β πρὸς β ε. ἴση δὲ ἡ β ε τῇ κ β. ὡς ἄρα ἡ θ β πρὸς β κ, οὕτως ἡ κ ζ πρὸς ζ η. καὶ ἐπεὶ ἡ θ ζ πρὸς ζ κ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ θ β πρὸς β κ. ὡς δὲ ἡ θ β πρὸς β κ, ἐδείχθη ἡ κ ζ πρὸς ζ η. ἡ θ ζ ἄρα πρὸς ζ κ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ κ ζ πρὸς ζ η. ἔλασσον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν θ ζ η, τοῦ ἀπὸ ζ κ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν θ ζ η πρὸς τὸ ἀπὸ ζ η, τουτέστιν ἡ ζ θ πρὸς ζ η, ἐλάσσονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ τῆς κ ζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζ η. τὸ δὲ ἀπὸ κ ζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζ η, διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ κ ζ πρὸς ζ η. ἡ ἄρα θ ζ πρὸς ζ η ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ διπλασίονα τοῦ ὃν ἔχει ἡ κ ζ πρὸς ζ η. (ἡ

ζ κ ζ πρὸς

ἡ ζ πρὸς ζ η ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ διπλασίονα τοῦ ὃν ἔχει ἡ β ζ πρὸς ζ δ.) τοῦτο γὰρ ἐζητοῦμεν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ β ε τῇ ε δ, ἔλασσον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν β ζ δ τοῦ ὑπὸ τῶν β ε δ. ἡ ζ β ἄρα πρὸς β ε ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ε δ πρὸς δ ζ, τουτέστιν ἡ θ β πρὸς β ζ. ἔλασσον ἄρα τὸ ἀπὸ ζ β τοῦ ὑπὸ τῶν θ β ε. τουτέστι τοῦ ὑπὸ τῶν θ β κ. ἔστω ἴσον τὸ ἀπὸ β ν τῷ ὑπὸ θ β κ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ θ β πρὸς β κ, τὸ ἀπὸ θ ν πρὸς τὸ ἀπὸ ν κ. τὸ δὲ ἀπὸ θ ζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζ κ, μείζονα λόγον ἔχει ἢ τὸ ἀπὸ θ ν πρὸς τὸ ν κ. τὸ ἀπὸ θ ζ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ ζ κ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ θ β πρὸς β κ, τουτέστιν ἡ θ β πρὸς β ε, τουτέστιν ἡ κ ζ πρὸς ζ η. ἡ ἄρα θ ζ πρὸς ζ η μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ἡμιόλιον τῆς κ ζ πρὸς ζ η. τοῦτο γὰρ ἐπὶ τέλει. καὶ ἔστιν ὡς μὲν ἡ θ ζ πρὸς ζ η, ὁ α θ γ κῶνος πρὸς τὸν α η γ κῶνον. τουτέστι τὸ α β γ τμῆμα πρὸς τὸ α δ γ τμῆμα. ὡς δὲ ἡ κ ζ πρὸς ζ η, ἡ β ζ πρὸς ζ δ, τουτέστι τὸ ἀπὸ β δ πρὸς τὸ ἀπὸ α δ. τουτέστιν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ α β γ τμήματος, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ α δ γ τμήματος. ἄλλοις τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὸ ἔλασσον, ἐλάσσονα μὲν ἢ διπλασίονα λόγον ἔχει, τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐλάσσονος τμήματος. μείζονα δὲ ἢ ἡμιόλιον.

Ἄλλως. Ἔστω σφαῖρα, ἧς ἡ μέγιστος κύκλος ὁ α β γ δ. διάμετρος δὲ ἡ α γ. κέντρον δὲ τὸ ε. καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ ὀρθῷ διὰ τῆς β δ πρὸς τὴν α γ. λέγω ὅτι τὸ μεῖζον τμῆμα τὸ δ α β πρὸς τὸ ἔλαττον τὸ β γ δ, ἐλάσσονα ἢ διπλάσιον λόγον ἔχει, τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ α β δ τμήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ β γ δ τμήματος. μείζονα δὲ ἢ ἡμιόλιον. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ α β, β γ. ὁ δὲ τῆς ἐπιφανείας πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν λόγος, ὁ τοῦ κύκλου ἐστὶν οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἡ α β, πρὸς τὸν κύκλον οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἡ β γ, τουτέστιν ὁ τῆς α θ πρὸς τὴν θ γ. κείσθω τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἴση ἑκατέρα τῶν α ζ, γ η. ὁ δὲ τοῦ β α δ τμήματος πρὸς τὸ β γ δ λόγος συνῆπται ἐκ τοῦ ὃν ἔχει τὸ β α δ τμῆμα πρὸς τὸν κῶνον, οὗ ἡ βάσις μέν ἐστιν ὁ περὶ διάμετρον τὴν β δ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ α σημεῖον. καὶ ὁ αὐτὸς κῶνος πρὸς τὸν κῶνον βάσιν μὲν ἔχοντα τὴν αὐτήν, κορυφὴν δὲ τὸ γ σημεῖον, καὶ ὁ εἰρημένος κῶνος πρὸς τὸ β γ δ τμῆμα. ἀλλ᾽ ὁ μὲν τοῦ β α δ τμήματος λόγος, πρὸς τὸν β α δ κῶνον, ὁ τῆς η θ ἐστὶ πρὸς θ γ. ὁ δὲ τοῦ κώνου πρὸς τὸν κῶνον ὁ τῆς α θ πρὸς θ γ. ὁ δὲ τοῦ β γ δ κώνου πρὸς τὸ τμῆμα τὸ β γ δ, ὁ τῆς α θ ἐστὶ πρὸς θ ζ. ὁ δὲ συνημμένος ἐκ τῆς η θ πρὸς θ γ, καὶ τῆς α θ πρὸς θ γ, ὁ τοῦ ὑπὸ τῶν α θ η ἐστὶ πρὸς τὸ ἀπὸ θ γ. ὁ δὲ τοῦ ὑπὸ η θ, θ α, πρὸς τὸ ἀπὸ θ γ μετὰ τοῦ τῆς α θ

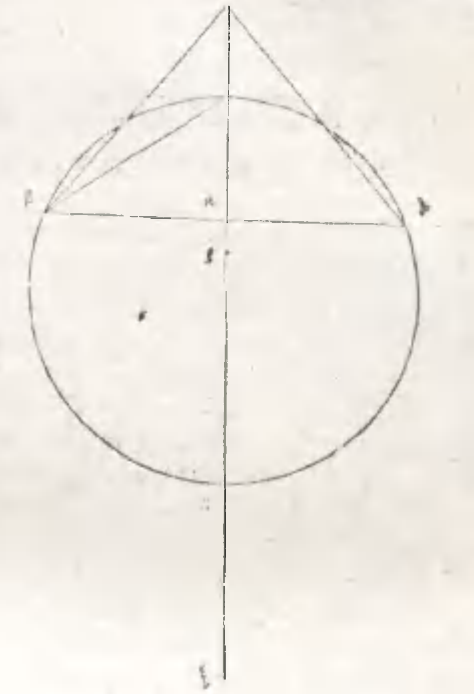


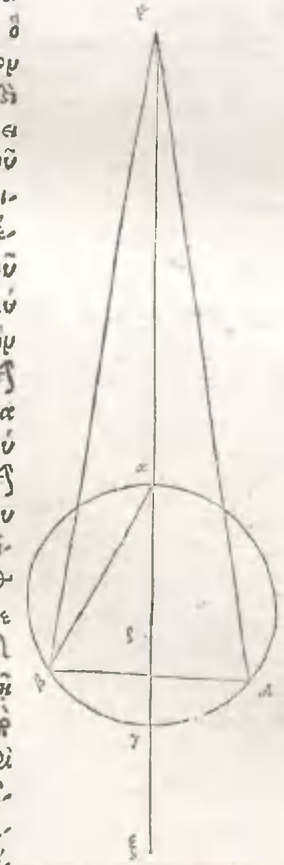
πρὸς θ ζ. ὁ τοῦ ὑπὸ τῶν η θ, θ α ἐστὶν ἐπὶ τὴν θ α, πρὸς τὸ ἀπὸ θ γ, ἐπὶ τὴν θ ζ. ὁ δὲ τοῦ ὑπὸ τῶν η θ α ἐπὶ τὴν θ α, πρὸς τὸ ἀπὸ θ γ ἐπὶ τὴν θ η, ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς θ α ἐστὶ πρὸς τὸ ἀπὸ θ γ. ὅτι ἄρα τὸ ἀπὸ θ α ἐπὶ τὴν θ η, πρὸς τὸ ἀπὸ γ θ ἐπὶ τὴν ζ θ, ἐλάσσονα λόγον ἔχει τῆς α θ πρὸς θ γ. διπλασίων ἐστὶν ὁ τοῦ ἀπὸ α θ πρὸς τὸ ἀπὸ θ γ. τὸ ἄρα ἀπὸ α θ ἐπὶ τὴν η θ, πρὸς τὸ ἀπὸ θ γ ἐπὶ τὴν θ ζ. ὅτι ἄρα μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ γ θ ἐπὶ τὴν ζ θ, τοῦ ἀπὸ γ θ ἐπὶ τὴν θ η. ὅτι ἄρα μείζων ἐστὶν ἡ θ ζ τῆς θ η, φημὶ διότι καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὸ ἔλασσον λόγον μείζονα ἔχει, ἢ ἡμιόλιον τῆς ἐπιφανείας πρὸς ἐπιφάνειαν λόγου. ἀλλ᾽ ὁ μὲν τῶν τμημάτων ἐδείχθη, ὁ αὐτὸς ὢν ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ α θ ἐπὶ τὴν θ η, πρὸς τὸ ἀπὸ θ γ ἐπὶ τὴν θ ζ. τοῦ δὲ τῆς ἐπιφανείας λόγου, ἡμιόλιος ἐστὶν ὁ τοῦ ἀπὸ α β κύβου πρὸς τὸν ἀπὸ β γ κύβον. φημὶ δή, ὅτι τὸ ἀπὸ α θ ἐπὶ τὴν θ η, πρὸς τὸ ἀπὸ γ θ ἐπὶ τὴν θ ζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ ἀπὸ τῆς α β κύβος, πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς β γ κύβον. τουτέστιν ὁ ἀπὸ τῆς α θ κύβος, πρὸς τὸν ἀπὸ θ β κύβον. τουτέστιν ὁ τοῦ ἀπὸ α θ πρὸς τὸ ἀπὸ β θ. καὶ ὅταν α θ πρὸς θ β, ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ α θ πρὸς τὸ ἀπὸ θ β, προσλαβὼν τὸν τῆς α θ πρὸς θ β ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ α θ ἐστὶν πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν γ θ β. ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ α θ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν θ β γ, ὁ τοῦ ἀπὸ α θ ἐστὶν ἐπὶ τὴν θ η πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν θ β γ ἐπὶ τὴν θ η. φημὶ δὴ ὅτι ἄρα τὸ ἀπὸ α θ ἐπὶ τὴν θ η πρὸς τὸ ἀπὸ γ θ ἐπὶ τὴν θ ζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ α θ πρὸς τὸ ἀπὸ β θ γ. τουτέστι τὸ ἀπὸ α θ ἐπὶ τὴν θ η, πρὸς τὸ ὑπὸ β θ γ ἐπὶ τὴν θ η. δεικτέον οὖν ὅτι τὸ ἀπὸ γ θ ἐπὶ τὴν θ ζ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν β θ γ, ἐπὶ τὴν η θ. ὅ ταὐτόν ἐστι τῷ δεῖξαι, ὅτι τὸ ἀπὸ γ θ πρὸς τὸ ὑπὸ β θ γ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ η θ πρὸς θ ζ. δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι ἡ η θ πρὸς θ ζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γ θ πρὸς θ β. ἤχθω ἀπὸ τοῦ ε τῇ ε γ πρὸς ὀρθὰς ἡ ε κ. ἤχθω ἀπὸ τοῦ β κάθετος ἐπ᾽ αὐτὴν ἡ β λ. ἐπίλοιπον ἡμῖν δεῖξαι, διότι ἡ η θ πρὸς θ ζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γ θ πρὸς θ β. ἴση δὲ ἐστὶν ἡ θ ζ

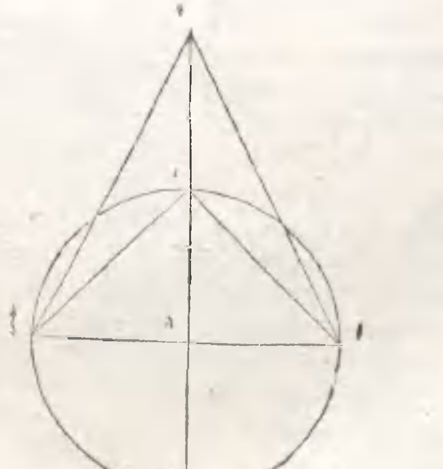
συναμφοτέρῳ

συναμφοτέρῳ τῇ α θ, κ ε. δεῖξαι ἄρα δεῖ, ὅτι ἡ η θ πρὸς συναμφότερον τὴν θ α, κ ε, μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ γ θ πρὸς θ β. καὶ ἀφαιρεθείσης ἄρα ὑπὸ τῆς η θ, ἡ γ θ, ἀπὸ δὲ τῆς κ ε, ἡ ε λ ἴσης τῇ β θ, δεήσει δειχθῆναι, ὅτι λοιπὴ ἡ η γ πρὸς λοιπὴν συναμφότερον τὴν α θ, κ λ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ γ θ πρὸς θ β, τουτέστιν ἡ θ β πρὸς θ α, τουτέστιν ἡ λ ε πρὸς θ α. καὶ ἐναλλάξ. ὅτι ἡ κ ε πρὸς ε λ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ κ λ, θ α, πρὸς θ α. καὶ διελόντι, ἡ κ λ πρὸς λ ε μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ κ λ πρὸς θ α. ὅτι ἐλάσσων ἐστὶν ἡ λ ε τῆς θ α.

Τῶν ὑπὸ τῇ ἴσῃ ἐπιφανείᾳ περιεχομένων σφαιρικῶν τμημάτων, μεῖζόν ἐστι τὸ ἡμισφαίριον. ἔστω γὰρ σφαίρας μέγιστος κύκλος ὁ α β γ δ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ α γ. καὶ ἄλλης σφαίρας, ἧς μέγιστος κύκλος ὁ ε ζ η θ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ε η. καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ ἡ μὲν ἑτέρα σφαῖρα διὰ τοῦ κέντρου, ἡ δὲ ἑτέρα μὴ διὰ τοῦ κέντρου. ἔστω δὲ τὰ μὲν τέμνοντα ἐπίπεδα ὀρθὰ πρὸς τὰς α γ, ε η διαμέτρους. καὶ τετμήσθωσαν κατὰ τὰς δ β, ζ θ γραμμάς. ἔστι δὴ τὸ μὲν κατὰ τὴν ζ ε θ περιφέρειαν τμῆμα τῆς σφαίρας ἡμισφαίριον, τὸ δὲ κατὰ τὴν β α δ περιφέρειαν τομῶν, τὸ μὲν τῷ ἑτέρῳ σχήματι πρὸς ὃ τὸ σ σημεῖον μεῖζον ἡμισφαιρίου. ἐν δὲ τῷ ἑτέρῳ ἔλασσον ἡμισφαιρίου. ἴσαι δὲ ἔστωσαν αἱ τῶν εἰρημένων τμημάτων ἐπιφάνειαι. λέγω οὖν ὅτι μεῖζόν ἐστι τὸ κατὰ τὴν ζ ε θ περιφέρειαν ἡμισφαίριον, τοῦ κατὰ τὴν β α δ περιφέρειαν τμήματος. ἐπεὶ γὰρ ἴσαι εἰσὶν αἱ ἐπιφάνειαι τῶν εἰρημένων τμημάτων, φανερὸν ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ β α τῇ ε ζ εὐθείᾳ. δέδεικται γὰρ ἑκάστου τμήματος ἡ ἐπιφάνεια ἴση οὖσα κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος ἐπιζευγνυμένῃ ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος. καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡμίσεως κύκλου ἡ β α δ περιφέρεια ἐν τῷ ἑτέρῳ σχήματι, δῆλον ὅτι ἡ β α ἐλάσσων ἐστὶν ἢ διπλασίων δυνάμει τῆς α κ, τῆς δὲ ἐκ τοῦ κέντρου μείζων ἢ διπλασίων δυνάμει. ἔστω δὲ καὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ α β γ δ κύκλου ἴση ἡ γ ξ. καὶ ὃν ἔχει λόγον ἡ γ ξ πρὸς τὴν γ κ, τοῦτον ἐχέτω ἡ μ α πρὸς α κ. ἀπὸ δὲ τοῦ κύκλου περὶ διάμετρον τὴν β δ κῶνος ἔστω, κορυφὴν ἔχων τὸ μ σημεῖον. ἴσος δὴ ἐστὶν ὁ κῶνος τῷ κατὰ τὴν β α δ περιφέρειαν τμήματι τῆς σφαίρας. ἔστω καὶ τῇ ε λ ἴση ἡ ε ν. καὶ ἀπὸ τοῦ κύκλου τοῦ περὶ διάμετρον τὴν θ ζ κῶνος, ἔστω κορυφὴν ἔχων τὸ ν σημεῖον. ἴσος δὴ καὶ οὗτος ἐστὶ τῷ κατὰ τὴν θ ε ζ περιφέρειαν ἡμισφαιρίῳ. τὸ δὴ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν







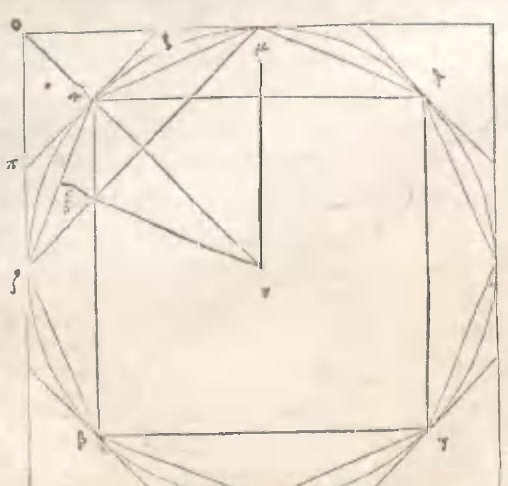
α ρ γ μεῖζον ἐστὶ τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τῶν α κ γ. διότι τὴν ἐλάσσονα πλευρὰν τοῦ ἐλάσσονος τοῦ ἑτέρου μείζονα ἔχει. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς α ρ, ἴσον ἐστὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν α κ, γ ξ. ἥμισυ γάρ ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς α β. μείζων οὖν ἐστὶ καὶ τὸ συναμφότερον τοῦ συναμφοτέρου. τὸ ἄρα περιεχόμενον ὑπὸ τῶν γ α ρ, μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν ξ κ α. τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ξ κ α, ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν μ κ γ. ὥστε μεῖζόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν γ α ρ, τοῦ ὑπὸ τῶν μ κ γ. ὥστε μείζονα λόγον ἔχει ἡ γ α πρὸς τὴν κ γ, ἤπερ ἡ μ κ πρὸς τὴν α ρ. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἡ α γ πρὸς τὴν γ κ, τοῦτον ἔχει τὸ ἀπὸ τῆς α β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς β κ. δῆλον οὖν, ὅτι μείζονα λόγον ἔχει τὸ ἥμισυ τοῦ ἀπὸ τῆς α β, ὃ ἐστιν ἴσον τῷ ἀπὸ α ρ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς β κ, ἤπερ ἡ μ κ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς α ρ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ λ ν. μείζονα ἄρα λόγον ἔχει καὶ ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν ζ θ, πρὸς τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὴν β δ, ἢ ἡ μ κ πρὸς τὴν μ λ. ὥστε μείζων ἐστὶν ὁ κῶνος, ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον μὲν τὴν ζ θ κύκλον, κορυφὴν δὲ τὸ ν σημεῖον τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος κύκλον τὸν περὶ διάμετρον μὲν τὴν β δ, κορυφὴν δὲ τὸ μ σημεῖον. δῆλον οὖν, ὅτι καὶ τὸ ἡμισφαίριον τὸ κατὰ τὴν ε ζ θ περιφέρειαν, μεῖζόν ἐστι τοῦ τμήματος τοῦ κατὰ τὴν β α δ περιφέρειαν.

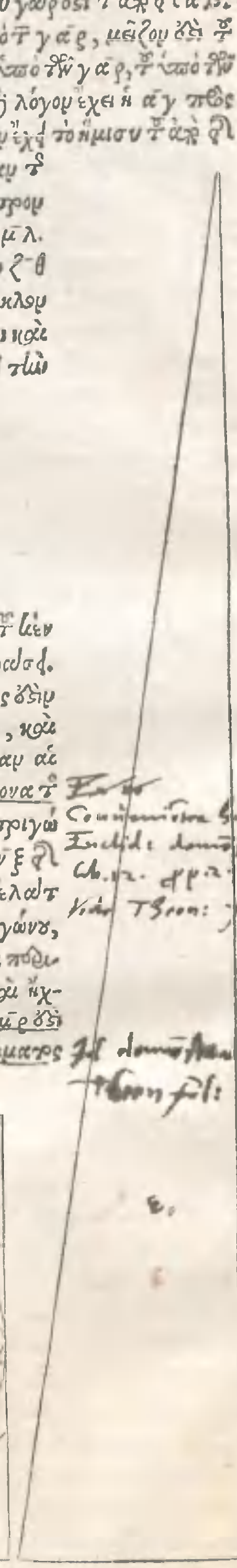
ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΚΥΚΛΟΥ ΜΕΤΡΗΣΙΣ.

α Πᾶς κύκλος ἴσος ἐστὶ τριγώνῳ ὀρθογωνίῳ, οὗ ἡ μὲν ἐκ τοῦ κέντρου ἴση μιᾷ τῶν περὶ τὴν ὀρθήν, ἡ δὲ περίμετρος τῇ βάσει. ἐχέτω ὁ α β γ δ κύκλος, ὡς ὑπόκειται. λέγω ὅτι ἴσος ἐστὶ τριγώνῳ τῷ ε. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω μείζων ὁ κύκλος, καὶ ἐγγεγράφθω τὸ α γ τετράγωνον, καὶ τετμήσθωσαν αἱ περιφέρειαι δίχα. καὶ ἔστω τὰ τμήματα ἤδη ἐλάσσονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ κύκλος τοῦ τριγώνου. τὸ εὐθύγραμμον ἄρα ἔτι τοῦ τριγώνου ἐστὶ μεῖζον. εἰλήφθω κέντρον τὸ ν, καὶ κάθετος ἡ ν ξ. ἐλάσσων ἄρα ἡ ν ξ τῆς τοῦ τριγώνου πλευρᾶς. ἔστι δὲ καὶ ἡ περίμετρος τοῦ εὐθυγράμμου τῆς λοιπῆς ἐλάττων. ἐπεὶ καὶ τῆς τοῦ κύκλου περιμέτρου. ἔλαττον ἄρα τὸ εὐθύγραμμον τοῦ ε τριγώνου, ὅπερ ἄτοπον. ἔστω δὲ ὁ κύκλος, εἰ δυνατόν, ἐλάττων τοῦ ε τριγώνου. καὶ περιγεγράφθω τὸ τετράγωνον, καὶ τετμήσθωσαν αἱ περιφέρειαι δίχα. καὶ ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι διὰ τῶν σημείων, ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ο α ρ. ἡ ο ρ ἄρα τῆς μ ρ ἐστὶ μείζων. ἡ γὰρ ρ μ τῇ ρ α ἴση ἐστί. καὶ τὸ ρ ο π τρίγωνον ἄρα τοῦ ο ζ α μ σχήματος μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ. λελείφθωσαν οἱ τῷ π ζ α τομεῖ ὅμοιοι ἐλάσσους τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει τὸ ε τρίγωνον τοῦ α β γ δ κύκλου. ἔστιν ἄρα τὸ περιγεγραμμένον εὐθύγραμμον ἔτι τοῦ ε ἔλασσον, ὅπερ ἄτοπον. ἔστι γὰρ μεῖζον, ὅτι ἡ μὲν ν α ἴση ἐστὶ τῇ καθέτῳ τοῦ τριγώνου. ἡ δὲ περίμετρος μείζων ἐστὶ τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου. ἴσος ἄρα ὁ κύκλος τῷ ε τριγώνῳ.

Ex Commentaria [illegible] Euclid demonstrat Ch. 12. App. Vide Theon: fol. 13.

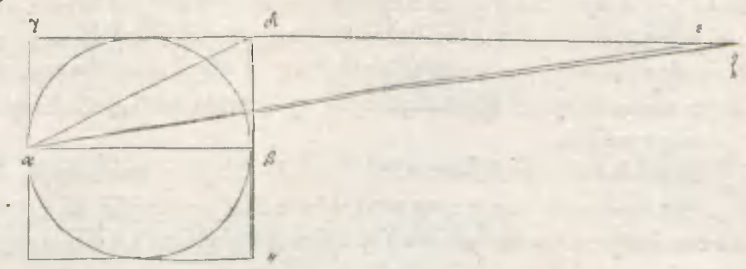
Id demonstratum [illegible] Theon fol: 12.



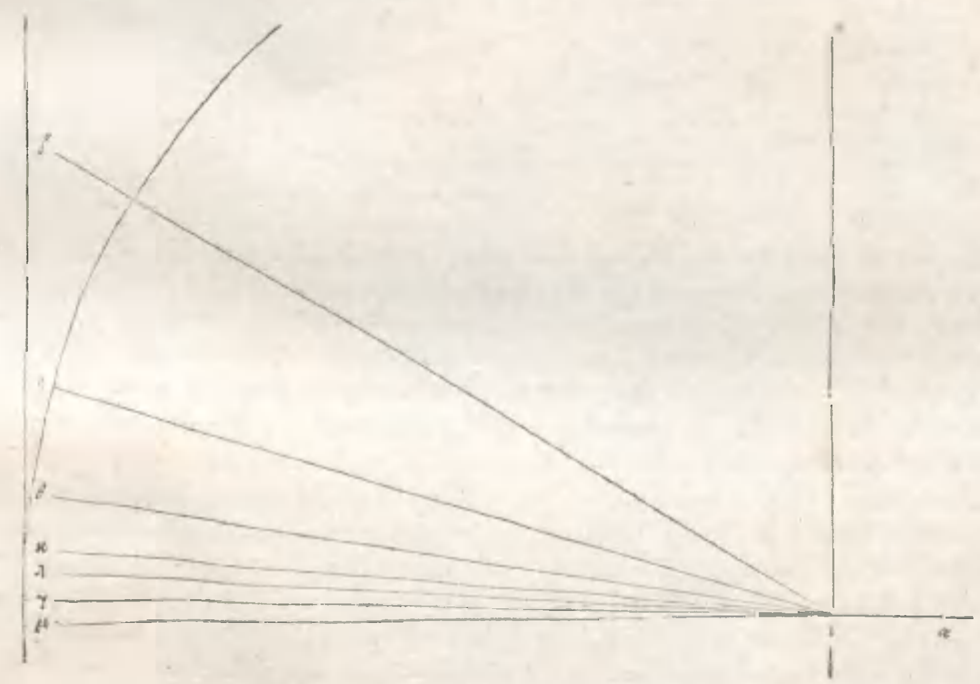


β Ὁ κύκλος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τετράγωνον, λόγον ἔχει, ὃν ια πρὸς ιδ. ἔστω κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ α β.

α β. καὶ περιγεγράφθω τετράγωνον τὸ γ η δ. καὶ τῆς γ δ διπλῆ, ἡ δ ε. ἕβδομον δὲ ἡ ε ζ τῆς γ δ. ἐπεὶ οὖν τὸ α γ ε πρὸς τὸ α γ δ λόγον ἔχει, ὃν κα πρὸς ζ. πρὸς δὲ τὸ α ε ζ τὸ α γ δ λόγον ἔχει, ὃν ἑπτὰ πρὸς ἕν. τὸ α γ ζ πρὸς τὸ α γ δ ἐστίν, ὡς κβ πρὸς ζ. ἀλλὰ τοῦ α γ δ τετραπλάσιον ἐστί, τὸ γ η τετράγωνον. τὸ δὲ α γ ζ τρίγωνον, τῷ α β κύκλῳ ἴσον ἐστίν, ἐπεὶ ἡ μὲν α γ κάθετος ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου. ἡ δὲ βάσις τῆς διαμέτρου τριπλασίων, καὶ τῷ ζ ἔγγιστα ὑπερέχουσα δειχθήσεται. ὁ κύκλος οὖν πρὸς τὸ γ η τετράγωνον λόγον ἔχει, ὃν ια πρὸς ιδ.

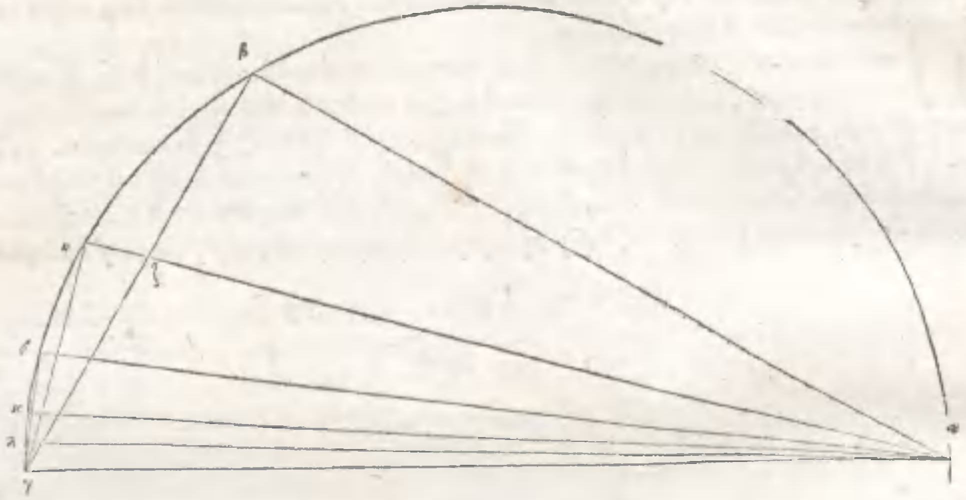


γ Παντὸς κύκλου ἡ περίμετρος τῆς διαμέτρου τριπλασίων ἐστί. καὶ ἔτι ὑπερέχει ἐλάσσονι μὲν ἢ ἑβδόμῳ μέρει τῆς διαμέτρου, μείζονι δὲ ἢ δέκα ἑβδομηκοστομόνοις. ἔστω κύκλος, καὶ διάμετρος ἡ α γ, καὶ κέντρον τὸ ε, καὶ ἡ γ λ ζ ἐφαπτομένη. καὶ ἡ ὑπὸ ζ ε γ τρίτον ὀρθῆς. ἡ ε ζ ἄρα πρὸς ζ γ λόγον ἔχει, ὃν τς πρὸς ρνγ. ἡ δὲ ε γ πρὸς τὴν γ ζ λόγον ἔχει, ὃν σξε πρὸς ρνγ. τετμήσθω οὖν ἡ ὑπὸ ζ ε γ δίχα τῇ ε η. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ζ ε πρὸς ε γ, ἡ ζ η πρὸς η γ. καὶ ἐναλλάξ. καὶ συνθέντι, ὡς ἄρα συναμφότερος ἡ ζ ε, ε γ πρὸς ζ γ, ἡ ε γ πρὸς γ η. ὥστε ἡ γ ε πρὸς γ η μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ φοα πρὸς ρνγ. ἡ ε η ἄρα πρὸς η γ δυνάμει, λόγον ἔχει, ὃν μ θ ν πρὸς μ, γ υ θ. μήκει ἄρα ὃν φ ϙα πρὸς ρνγ. πάλιν δίχα ἡ ὑπὸ η ε γ τῇ ε θ. διὰ τὰ αὐτὰ ἄρα ἡ ε γ πρὸς γ θ, μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ὃν αρξβ η΄ πρὸς ρνγ. ἡ θ ε ἄρα πρὸς θ γ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ὃν αροβ η΄ πρὸς ρνγ. ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ θ ε γ τῇ ε κ. ἡ ε γ ἄρα πρὸς γ κ μείζονα λόγον ἔχει ἢ ὃν βτλδ δ΄ πρὸς ρνγ. ἡ ε κ ἄρα πρὸς γ κ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ὃν βτλθ δ΄ πρὸς ρνγ. ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ κ ε γ τῇ λ ε. ἡ ε γ ἄρα πρὸς λ γ μείζονα μήκει λόγον ἔχει, ἤπερ δχογ L΄ πρὸς ρνγ. ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ ζ ε γ τρίτον οὖσα ὀρθῆς τέτμηται τετράκις δίχα, ἡ ὑπὸ λ ε γ, ὀρθῆς ἐστὶ μη΄. κείσθω οὖν αὐτῇ ἴση, ἡ πρὸς τῷ ε, ἡ ὑπὸ γ ε μ. ἡ ἄρα ὑπὸ λ ε μ ὀρθῆς ἐστὶ κδ΄. καὶ ἡ λ μ ἄρα εὐθεῖα πλευρά ἐστι τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφομένου πολυγώνου πλευρὰς ἔχοντος ϙς. ἐπεὶ οὖν ἡ ε γ πρὸς τὴν γ λ ἐδείχθη μείζονα λό- λδ β μ μ



γον ἔχουσα, ἤπερ ͵δχογ ∠ πρὸς ͵εν γ. ἀλλὰ τῆς μὲν ε γ διπλῆ ἡ α γ. τῆς δὲ γ λ διπλασίων ἡ λ μ. καὶ ἡ α γ ἄρα πρὸς τὴν τοῦ ϙϛ πολυγώνου περίμετρον μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵δχογ ∠ πρὸς ͵μ ͵δχπη. καί ἐστι τριπλασία. καὶ ὑπερέχουσι χξζ ∠ ἅπερ τῶν ͵δχογ ∠ ἐλάσσονά ἐστι τὸ ἕβδομον. ὥστε τὸ πολύγωνον τὸ περὶ τὸν κύκλον τῆς διαμέτρου ἐστὶ τριπλάσιον, καὶ ἔλαττον ἢ τῷ ἑβδόμῳ μέρει μεῖζον. ἡ τοῦ κύκλου ἄρα περίμετρος πολὺ μᾶλλον ἐλάσσων ἐστὶ, ἢ τριπλασίων, καὶ ἑβδόμῳ μέρει μείζων.

Ἔστω κύκλος, καὶ διάμετρος ἡ α γ. ἡ δὲ ὑπὸ β α γ τρίτου ὀρθῆς. ἡ α β ἄρα πρὸς β γ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ὃν ͵ατνα πρὸς ψ π. ἡ δὲ α γ πρὸς γ β, ὃν ͵αφξ πρὸς ψ π. τετμήσθω δίχα ἡ ὑπὸ β α γ τῇ α η. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ β α η τῇ ὑπὸ η γ β, ἀλλὰ καὶ τῇ ὑπὸ η α γ. καὶ ἡ ὑπὸ



η γ β ἄρα, τῇ ὑπὸ η α γ ἐστὶν ἴση. καὶ κοινὴ ἡ ὑπὸ α η γ ὀρθή, καὶ τρίτη ἄρα ἴση ἔσται ἡ ὑπὸ η ζ γ τρίτῃ τῇ ὑπὸ α γ η. ἰσογώνιον ἄρα τὸ α η γ τῷ γ η ζ τριγώνῳ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ α η πρὸς η γ, ἡ γ η πρὸς η ζ, καὶ ἡ α γ πρὸς γ ζ. ἀλλ' ὡς ἡ α γ πρὸς γ ζ, καὶ συναμφότερος ἡ γ α β πρὸς β γ. καὶ ὡς συναμφότερος ἄρα ἡ β α γ πρὸς β γ, ἡ α η πρὸς η γ. διὰ τοῦτο οὖν ἡ α η πρὸς τὴν η γ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵β϶ια πρὸς ψ π. ἡ δὲ α γ πρὸς τὴν γ η ἐλάσσονα, ἢ ὃν ͵γιγ ∠ δ΄ πρὸς ψ π. δίχα ἡ ὑπὸ γ α η τῇ α θ. ἡ α θ ἄρα διὰ τὰ αὐτὰ πρὸς τὴν θ γ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ὃν ͵ε λ κδ ∠ δ΄ πρὸς ψ π, ἢ ὃν ͵αωκγ πρὸς σμ. ἑκατέρα γὰρ ἑκατέρας δ ιγ. ὥστε ἡ α γ πρὸς τὴν γ θ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ὃν ͵αωλη θ΄ πρὸς σμ. ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ θ α γ τῇ κ α. καὶ ἡ κ α, πρὸς τὴν κ γ ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει, ἢ ὃν ͵αζ πρὸς ξϛ. ἑκατέρα γὰρ ἑκατέρας οἶμαι ἄρα πρὸς τὴν κατάλογον ͵αος πρὸς ξϛ. ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ κ α γ τῇ λ α. ἡ α λ ἄρα πρὸς τὴν α γ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ὃν τὰ ͵βιϛ ϛ πρὸς ξϛ. ἡ δὲ α γ πρὸς γ λ ἐλάσσονα, ἢ τὰ ͵βιζ δ΄ πρὸς ξϛ. ἀνάπαλιν ἄρα ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου πρὸς τὴν διάμετρον μείζονα ἔχει λόγον ἤπερ ϛτ ιλϛ πρὸς μ ͵ζιβδ. ἅπερ τῶν ͵βιζδ μείζονά ἐστιν ἢ τριπλασίονα καὶ δέκα οα. καὶ ἡ περίμετρος ἄρα τοῦ ϙϛ πολυγώνου τοῦ ἐν τῷ κύκλῳ τῆς διαμέτρου, τριπλασίων ἐστὶ καὶ μείζων ἢ δέκα οα. ὥστε καὶ ὁ κύκλος ἔτι μᾶλλον τριπλασίων ἐστὶ καὶ μείζων, ἢ δέκα οα. ἡ ἄρα τοῦ κύκλου περίμετρος τῆς διαμέτρου τριπλασίων ἐστὶ, καὶ ἐλάσσων μὲν ἢ ἑβδόμῳ μέρει, μείζων δέ.

ΑΡΧΙ-

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΠΕΡΙ ΚΩΝΟΕΙΔΕΩΝ ΚΑΙ ΣΦΑΙΡΟΕΙΔΕΩΝ.

ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ ΔΩΣΙΘΕΩ ΕΥΠΡΑΤΤΕΙΝ.

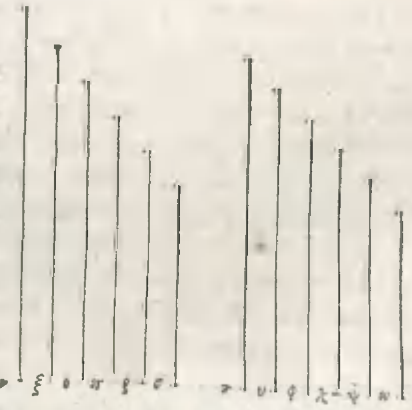
ΑΠΟΣΤΕΛΛΩ σοι γράψας ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ τῶν τε λοιπῶν θεωρημάτων τὰς ἀποδείξεις, ὧν οὐκ εἶχες ἐν τοῖς πρότερον ἀπεσταλμένοις, καὶ ἄλλων ὕστερον ποτεξευρημένων, ἃ πρότερον μὲν ἤδη πολλάκις ἐγχειρήσας ἐπισκέπτεσθαι δύς ποτ' ὅλον ἔχειν φανείσας μοι τᾶς εὑρέσιας αὐτῶν ἠπόρησα. διόπερ οὐδὲ συνεξεδόθεν τοῖς ἄλλοις αὐτὰ τὰ προβεβλημένα. ὕστερον δὲ ἐπιμελέστερον ποτ' αὐτοῖς γενόμενος ἐξεῦρον τὰ ἀπορηθέντα. ἦν δὲ τὰ μὲν λοιπὰ τῶν προτέρων θεωρημάτων περὶ τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος προβεβλημένα, τὰ δὲ νῦν ἐντὶ ποτεξευρημένα περί τε ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος, καὶ περὶ σφαιροειδέων σχημάτων, ὧν τὰ μὲν παραμάκεα, τὰ δὲ ἐπιπλατέα καλέω. περὶ μὲν οὖν τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος ὑπόκειτο τάδε. εἴκα ὀρθογωνίου κώνου τομὰ μενούσας τᾶς διαμέτρου περιενεχθεῖσα ἀποκατασταθῇ πάλιν, ὅθεν ὥρμασεν, τὸ περιλαφθὲν σχῆμα ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς ὀρθογώνιον κωνοειδὲς καλεῖσθαι, καὶ ἄξονα μὲν αὐτοῦ, τὰν μεμενακοῖσαν διάμετρον καλεῖσθαι. κορυφὰν δὲ τὸ σαμεῖον, καθ' ὃ ἅπτεται ὁ ἄξων τᾶς τοῦ κωνοειδέος ἐπιφανείας. καὶ εἴκα τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος σχήματος ἐπίπεδον ἐπιψαύῃ, παρὰ δὲ τὸ ἐπιψαῦον ἐπίπεδον ἄλλο ἐπίπεδον ἀχθὲν ἀποτέμνῃ τι τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος, βάσιν μὲν καλεῖσθαι τοῦ ἀποτμαθέντος τμάματος τὸ ἐπίπεδον τὸ περιλαφθὲν ὑπὸ τᾶς τοῦ κωνοειδέος τομᾶς, ἐν τῷ ἀποτέμνοντι ἐπιπέδῳ, κορυφὰν δὲ τὸ σαμεῖον καθ' ὃ ἐπιψαύει τὸ ἕτερον ἐπίπεδον τοῦ κωνοειδέος, ἄξονα δὲ τὰν ἐναπολαφθεῖσαν εὐθεῖαν ἐν τῷ τμάματι, ἀπὸ τᾶς ἀχθείσας διὰ τᾶς κορυφᾶς τοῦ τμάματος παρὰ τὸν ἄξονα τοῦ κωνοειδέος. προεβαλλόντο δὲ τάδε θεωρῆσαι, διὰ τί εἴκα τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος τμάματα ἀποτμαθῇ ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, τὸ ἀποτμαθὲν τμᾶμα ἡμιόλιον ἐσσεῖται τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. καὶ διὰ τί εἴκα ἀπὸ ὀρθογωνίου κωνοειδέος δύο τμάματα ἀποτμαθέντα ἐπιπέδοις ὁπωσοῦν ἀγμένοις, τὰ ἀποτμαθέντα τμάματα διπλάσιον λόγον ἕξοντι ποτὶ τὰ ἄλλα τῶν ἀξόνων. περὶ δὲ τοῦ ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος ὑποτιθέμεθα μὲν τάδε. εἴκα ἐν ἐπιπέδῳ ἐῶντι ἀμβλυγωνίου κώνου τομά, καὶ διάμετρος αὐτᾶς, καὶ ἔγγιστα τᾶς τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομᾶς. μενούσας δὲ τᾶς διαμέτρου περιενεχθὲν τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐντὶ αἱ εἰρημέναι γραμμαί, ἀποκατασταθῇ πάλιν ὅθεν ὥρμασεν, αἱ μὲν ἔγγιστα εὐθεῖαι τᾶς τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομᾶς, δῆλον ὡς κῶνον ἰσοσκελῆ περιλαψοῦντι, οὗ κορυφὴ ἐσσεῖται τὸ σαμεῖον καθ' ὃ ἔγγιστα συμπίπτοντι, ἄξων δὲ ἁ μεμενακοῖσα διάμετρος. τὸ δ' ὑπὸ τᾶς τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομᾶς σχῆμα περιλαφθὲν, ἀμβλυγώνιον κωνοειδὲς καλεῖσθαι. ἄξονα δὲ αὐτοῦ τὰν μεμενακοῖσαν διάμετρον. κορυφὰν δὲ τὸ σαμεῖον, καθ' ὃ ἅπτεται ὁ ἄξων τᾶς ἐπιφανείας τοῦ κωνοειδέος. τὸν δὲ κῶνον τὸν περιλαφθέντα ὑπὸ τᾶς τοῦ ἔγγιστα τᾶς τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομᾶς, περιέχοντα τὸ κωνοειδὲς καλεῖσθαι. τὰν δὲ μεταξὺ εὐθεῖαν τᾶς τε κορυφᾶς τοῦ κωνοειδέος καὶ τᾶς κορυφᾶς τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδὲς, ποτεοῦσαν τῷ ἄξονι καλεῖσθαι. καὶ εἴκα τοῦ ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος ἐπίπεδον ἐπιψαύῃ, παρὰ δὲ τὸ ἐπιψαῦον ἐπίπεδον ἄλλο ἐπίπεδον ἀχθὲν ἀποτέμνῃ τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος, βάσιν μὲν καλεῖσθαι τοῦ ἀποτμαθέντος τμάματος τὸ ἐπίπεδον τὸ περιλαφθὲν ὑπὸ τᾶς τοῦ κωνοειδέος τομᾶς, ἐν τῷ ἀποτέμνοντι ἐπιπέδῳ. κορυφὰν δὲ τὸ σαμεῖον, καθ' ὃ ἅπτεται τὸ ἐπίπεδον τὸ ἐπιψαῦον τοῦ κωνοειδέος. ἄξονα δὲ τὰν ἀπολαφθεῖσαν ἐν τῷ τμάματι, ἀπὸ τᾶς ἀχθείσας διὰ τᾶς κορυφᾶς τοῦ τμάματος, καὶ τᾶς κορυφᾶς τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδές. καὶ τὰν μεταξὺ τὰν εἰρημέναν κορυφὰν εὐθεῖαν ποτεοῦσαν τῷ ἄξονι καλεῖσθαι. τὰ μὲν οὖν ὀρθογώνια κωνοειδέα πάντα, ὅμοιά ἐντι. τῶν δὲ ἀμβλυγωνίων κωνοειδέων ὅμοια καλείσθω, ὧν καὶ οἱ κῶνοι οἱ περιέχοντες τὰ κωνοειδέα ὅμοιοι ἐῶντι. προβάλλεται δὲ τάδε θεωρῆσαι, διὰ τί εἴκα τοῦ ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος ἀποτμαθῇ τμάματα ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, τὸ ἀποτμαθὲν τμᾶμα ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ συναμφοτέρα ἴσα τῷ ἄξονι τοῦ τμάματος. καὶ τᾷ τριπλασίᾳ τᾶς ποτεούσας τῷ ἄξονι ποτὶ τὰν ἴσαν ἀμφοτέραις, τῷ τε ἄξονι τοῦ τμάματος, καὶ τᾷ διπλασίᾳ τᾶς ποτεούσας τῷ ἄξονι. καὶ διὰ τί, εἴκα τοῦ ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος δὲ τμᾶμα ἀποτμαθῇ ἐπιπέδῳ μὴ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, τὸ ἀποτμαθὲν τμᾶμα ποτὶ τὸ σχῆμα τὸ βάσιν ἔχον τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, ὃ γίγνεται ἀπότμαμα κώνου, τὸν αὐτὸν ἕξει τὸν λόγον, ὃν ἁ συναμφοτέρος ἴσα τῷ ἄξονι τοῦ τμάματος καὶ τᾷ τριπλασίᾳ τᾶς ποτεούσας τῷ ἄξονι, ποτὶ τὰν ἴσαν ἀμφοτέραις τῷ τε ἄξονι τοῦ τμάματος, καὶ τᾷ διπλασίᾳ τᾶς ποτεούσας τῷ ἄξονι. περὶ δὲ τῶν σφαιροειδέων σχημάτων ὑποτιθέμεθα τάδε. εἴκα ὀξυγωνίου κώνου τομὰ μενούσας τᾶς μείζονος διαμέτρου περιενεχθεῖσα, ἀποκατασταθῇ πάλιν ὅθεν ὥρμασεν, τὸ περιγραφὲν σχῆμα, ὑπό τε τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς παραμακὲς σφαιροειδὲς καλείσθω. εἰ δὲ τᾶς ἐλάσσονος διαμέτρου μενούσας περιενεχθεῖσα, ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ ἀποκατασταθῇ πάλιν ὅθεν ὥρμασεν, τὸ περιγραφὲν σχῆμα ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἐπιπλατὺ σφαιροειδὲς καλείσθω. ἑκατέρου δὲ τῶν σφαιροειδέων ἄξονα μὲν καλεῖσθαι τὰν μενοῦσαν διάμετρον. κορυφὴ δὲ τὸ σαμεῖον καθ' ὃ ἅπτεται ὁ ἄξων τᾶς ἐπιφανείας τοῦ σφαιροειδέος. κέντρον δὲ καλεῖσθαι τὸ μέσον τοῦ ἄξονος, καὶ διάμετρον τὰν διὰ τοῦ κέντρου ποτ' ὀρθὰς ἀγομέναν τῷ ἄξονι. καὶ εἴκα τῶν σφαιροειδέων σχημάτων ὁποτερονοῦν ἐπίπεδα παράλληλα ἐπιψαύοντι μὴ τέμνοντα. παρὰ δὲ τὰ ἐπίπεδα τὰ ψαύοντα, ἄλλο ἐπίπεδον ἀχθῇ, τέμνον τὸ σφαιροειδὲς τῶν γενομένων τμαμάτων, βάσιν μὲν καλεῖσθαι τὸ περιλαφθὲν ὑπὸ τᾶς τοῦ σφαιροειδέος τομᾶς ἐν τῷ τέμνοντι ἐπιπέδῳ. κορυφὰς δὲ τὰ σαμεῖα, καθ' ἃ ἐπιψαύοντι τοῦ σφαιροειδέος τὰ παράλληλα ἐπίπεδα. ἄξονας δὲ τὰς ἀπολαφθείσας εὐθείας ἐν τοῖς τμαμάτεσσιν ἀπὸ τᾶς εὐθείας τᾶς κορυφὰς αὐτῶν ἐπιζευγνυούσας. ὅτι δὲ τά τε ἐπιψαύοντα ἐπίπεδα τοῦ σφαιροειδέος καθ' ἓν μόνον ἅπτονται σαμεῖον τᾶς ἐπιφανείας αὐτοῦ, καὶ ὅτι ἁ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα διὰ τοῦ κέντρου τοῦ σφαιροειδέος πορεύεται, δειχθησεῖται. ὁμοῖα δὲ καλεῖσθαι τῶν σφαιροειδέων σχημάτων, ὧν καὶ οἱ ἄξονες ποτὶ τὰς διαμέτρους τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντι. τμάματα δὲ σφαιροειδέων σχημάτων καὶ κωνοειδέων ὁμοῖα καλείσθω. εἴκα ἀφ' ὁμοίων σχημάτων ἀφαιρημένα ἔωντι, καὶ τάς τε βάσεις ὁμοίας ἔχοντι καὶ οἱ ἄξονες αὐτῶν, ἤτοι ὀρθοὶ ἐόντες ποτὶ τὰ ἐπίπεδα τᾶν βάσιων, ἢ γωνίας ἴσας ποιοῦντες, ποτὶ τὰς ὁμολόγους διαμέτρους τῶν βάσιων τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον, ποτ' ἀλλήλως ταῖς ὁμολόγοις διαμέτροις τῶν βάσιων. προβάλλεται δὲ περὶ τῶν σφαιροειδέων τάδε θεωρῆσαι. διότι εἴκα τι τῶν σφαιροειδέων σχημάτων ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τοῦ κέντρου ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα τῶν γεναμένων τμαμάτων, ἑκάτερον διπλάσιον ἐσσεῖται τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. εἴκα δὲ ὀρθῷ μὲν ποτὶ τὸν ἄξονα τῷ ἐπιπέδῳ τμηθῇ, διὰ τοῦ κέντρου δὲ μή, τῶν γεναμένων τμαμάτων τὸ μὲν μεῖζον ποτὶ τὸν κῶνον τὸν τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντα τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν ἕξει τὸν λόγον, ὃν ἁ συναμφοτέραις ἴσα, τᾷ τε ἡμισέᾳ τᾶς εὐθείας, ἅ ἐστιν ἄξων τοῦ σφαιροειδέος, καὶ τῷ ἄξονι τοῦ ἐλάσσονος τμάματος ποτὶ τὸν ἄξονα τοῦ ἐλάσσονος τμάματος. τὸ δὲ ἔλασσον τμᾶμα ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, τὸν αὐτὸν ἔχει τὸν λόγον ὃν ἁ συναμφοτέραις ἴσα, τᾷ τε ἡμισέᾳ τᾶς εὐθείας, ἅ ἐστιν ἄξων τοῦ σφαιροειδέος, καὶ τῷ ἄξονι τοῦ μείζονος τμάματος πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ μείζονος τμάματος. καὶ διότι εἴκα τι τῶν σφαιροειδέων τι ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τοῦ κέντρου μὴ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, τῶν γεναμένων τμαμάτων ἑκάτερον διπλάσιον ἐσσεῖται τοῦ σχήματος, τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. γίγνεται δὲ τὸ σχῆμα ἀπότμαμα κώνου. εἴκα δὲ μήτε διὰ τοῦ κέντρου, μήτε ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα τῷ ἐπιπέδῳ τμαθῇ τὸ σφαιροειδὲς, τῶν γεναμένων τμαμάτων, τὸ μὲν μεῖζον ποτὶ τὸ σχῆμα τὸ βάσιν ἔχον τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, ὃν ἁ συναμφοτέραις ἴσα τᾷ τε ἡμισέᾳ αὐτᾶς τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰς κορυφὰς τῶν τμαμάτων, καὶ τῷ ἄξονι τοῦ ἐλάσσονος τμάματος, ποτὶ τὸν ἄξονα τὸν τοῦ ἐλάσσονος τμάματος. τὸ δὲ ἔλασσον τμᾶμα ποτὶ τὸ σχῆμα τὸ βάσιν ἔχον τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, τὸν αὐτὸν ἕξει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἁ συναμφοτέραις ἴσα τᾷ τε ἡμισέᾳ τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰς κορυφὰς τῶν τμαμάτων, καὶ τῷ ἄξονι τοῦ μείζονος τμάματος ποτὶ τὸν ἄξονα τὸν τοῦ μείζονος τμάματος. γίγνεται δὲ καὶ ἐν τούτοις τὸ σχῆμα ἀπότμαμα κώνου. ἀποδειχθέντων δὲ τῶν εἰρημένων θεωρημάτων διὰ τούτων εὑρίσκονται θεωρήματά τε πολλὰ καὶ προβλήματα. οἷον καὶ τόδε, ὅτι τὰ ὁμοῖα σφαιροειδέα, καὶ τὰ ὁμοῖα τμάματα τῶν τε σφαιροειδέων σχημάτων καὶ τῶν κωνοειδέων, τριπλασίονα λόγον ἔχοντι ποτὶ τὰ ἄλλα τῶν ἀξόνων, καὶ διότι τῶν ἰσοσφαιροειδέων σχημάτων τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων ἀντιπεπόνθασι τοῖς ἀξόνεσσιν. καὶ εἴκα τῶν σφαιροειδέων σχημάτων τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων ἀντιπεπόνθασι τοῖς ἀξόνεσσιν, ἴσα ἐντὶ τὰ σφαιροειδέα. πρόβλημα δὲ οἷον καὶ τόδε, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σφαιροειδέος τμάματος ἢ κωνοειδέος τμᾶμα, ἀποτεμεῖν ἐπιπέδῳ παραλλήλῳ ἐπιπέδῳ δοθέντι ἀγο-

μένῳ,

μένῳ. εἰ μὲν δὲ τὸ ἀποτμαθὲν τμᾶμα ἴσον τῷ δοθέντι κώνῳ, ἢ κυλίνδρῳ, ἢ σφαίρᾳ τᾷ δοθείσᾳ. προγράψαντες οὖν τά τε θεωρήματα καὶ τὰ ἐπιτάγματα τὰ χρείαν ἔχοντα εἰς τὰς ἀποδείξεις αὐτῶν, μετὰ ταῦτα γραψοῦμαί σοι τὰ προβλήματα. εὐτύχει.

Εἴκα κῶνος ἐπιπέδῳ τμηθῇ συμπίπτοντι πάσαις ταῖς τοῦ κώνου πλευραῖς, ἁ τομὰ ἐσσεῖται α
ἤτοι κύκλος, ἢ ὀξυγωνίου κώνου τομά. εἰ μὲν οὖν κύκλος ἁ τομά, δῆλον ὅτι τὸ ἀπολαφθὲν ἀπ' αὐτοῦ τμᾶμα ἐπὶ τὰ αὐτὰ τᾷ τοῦ κώνου κορυφᾷ, κῶνος ἐσσεῖται. εἴκα δὲ ἁ τομὰ γίγνηται ὀξυγωνίου κώνου τομά, τὸ ἀπολαφθὲν ἀπὸ τοῦ κώνου σχῆμα ἐπὶ τὰ αὐτὰ τᾷ τοῦ κώνου κορυφᾷ ἀπότμαμα κώνου καλείσθω. τοῦ δ' ἀποτμάματος βάσις μὲν καλείσθω τὸ ἐπίπεδον, τὸ περιλαφθὲν ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς. κορυφὰ δὲ τὸ σαμεῖον, ὃ καὶ τοῦ κώνου κορυφά. ἄξων δὲ, ἁ ἀπὸ τᾶς κορυφᾶς τοῦ κώνου ἐπὶ τὸ κέντρον τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἐπιζευχθεῖσα εὐθεῖα. καὶ εἴκα κύλινδρος δυσὶν ἐπιπέδοισιν παραλλήλοις τμηθῇ, συμπιπτόντεσσι πάσαις ταῖς τοῦ κυλίνδρου πλευραῖς, αἱ τομαὶ ἐσσοῦνται, ἤτοι κύκλοι, ἢ ὀξυγωνίων κώνων τομαὶ ἴσαι καὶ ὁμοῖαι ἀλλήλαις. εἰ μὲν οὖν καὶ αἱ τομαὶ κύκλοι γένωνται, δῆλον ὅτι τὸ ἀποτμαθὲν ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου σχῆμα, μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων κύλινδρος ἐσσεῖται. εἰ δὲ καὶ αἱ τομαὶ γένωνται ὀξυγωνίων κώνων τομαί, τὸ ἀπολαφθὲν ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου σχῆμα μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τόμος κυλίνδρου καλείσθω. τοῦ δὲ τόμου βάσιες μὲν καλείσθω τὰ ἐπίπεδα τὰ περιλαφθέντα ὑπὸ τᾶν ὀξυγωνίων κώνων τομᾶν. ἄξων δὲ ἁ ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα τὰ κέντρα τᾶν τῶν ὀξυγωνίων κώνων τομᾶν. ἐσσεῖται δὲ αὐτὰ ἐπὶ τᾶς αὐτᾶς εὐθείας τῷ ἄξονι τοῦ κυλίνδρου. εἴκα ἔωντι μεγέθεα, ὁποσαοῦν τῷ ἴσῳ ἀλλάλων ὑπερέχοντα, ᾖ δὲ ἁ ὑπεροχὰ ἴσα τῷ ἐλαχίστῳ, καὶ ἄλλα μεγέθεα τῷ μὲν πλήθει ἴσα τούτοις, τῷ δὲ μεγέθει ἕκαστον ἴσον τῷ μεγίστῳ, πάντα τὰ μεγέθεα, ὧν ἐστιν ἕκαστον ἴσον τῷ μεγίστῳ, πάντων μὲν τῶν τῷ ἴσῳ ὑπερεχόντων ἐλάσσονα ἐσσοῦνται ἢ διπλάσια. τῶν δὲ λοιπῶν χωρὶς τοῦ μεγίστου μείζονα ἢ διπλάσια. ἁ δὲ ἀπόδειξις τούτου φανερά.

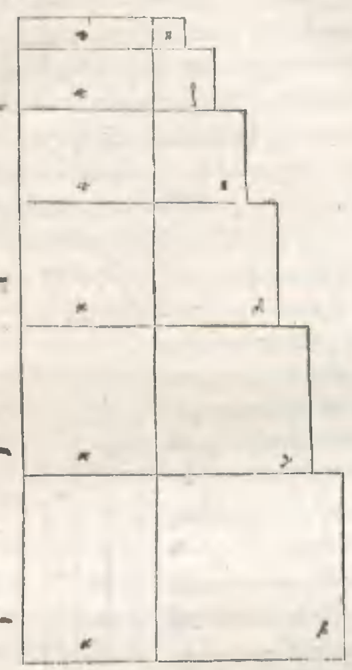
Εἴκα μεγέθεα ὁποσαοῦν τῷ πλήθει, ἄλλοις μεγέθεσιν ἴσοις τῷ πλήθει κατὰ δύο τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντι τὰ ὁμοίως τεταγμένα, λέγηται δὲ τά τε πρῶτα μεγέθεα ποτὶ τὰ ἄλλα μεγέθεα, ἢ πάντα, ἤ τινα αὐτῶν ἐν λόγοις ὁποιοισοῦν, καὶ τὰ ὕστερον ποτ' ἄλλα μεγέθεα τὰ ὁμόλογα ἐν τοῖς αὐτοῖς λόγοις, πάντα τὰ πρῶτα μεγέθεα, ποτὶ πάντα ἃ λέγονται, τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον, ὃν ἔχοντι πάντα τὰ ὕστερον μεγέθεα ποτὶ πάντα ἃ λέγονται. ἔστω τινὰ μεγέθεα τὰ α β γ δ ε ζ ἄλλοις μεγέθεσιν ἴσοις τῷ πλήθει τοῖς η θ ι κ λ μ, κατὰ δύο τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον. καὶ ἐχέτω τὸ μὲν α ποτὶ τὸ β τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ η ποτὶ τὸ θ. τὸ δὲ β ποτὶ τὸ γ, ὃν τὸ θ ποτὶ τὸ ι. καὶ τὰ ἄλλα ὁμοίως τούτοις. λεγέσθω δὲ τὰ μὲν α β γ δ ε ζ μεγέθεα, ποτὶ τὰ ἄλλα μεγέθεα τὰ ν ξ ο π ρ σ, ἐν λόγοις ὁποιοισοῦν. τὰ δὲ η θ ι κ λ μ ποτὶ τὰ ἄλλα τὰ τ υ φ χ ψ ω, τὰ ὁμόλογα ἐν τοῖς αὐτοῖς λόγοις. ὃν μὲν ἔχει λόγον τὸ α ποτὶ τὸ ν, τὸ η ἐχέτω ποτὶ τὸ τ. ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ β ποτὶ τὸ ξ, τὸ θ ἐχέτω ποτὶ τὸ υ. καὶ τὰ ἄλλα ὁμοίως τούτοις. δεικτέον, ὅτι πάντα τὰ α β γ δ ε ζ ποτὶ πάντα τὰ ν ξ ο π ρ σ, τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ὃν πάντα τὰ η θ ι κ λ μ, ποτὶ πάντα τὰ τ υ φ χ ψ ω. ἐπεὶ γὰρ τὸ μὲν ν ποτὶ τὸ α τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ τ ποτὶ τὸ η, τὸ δὲ α ποτὶ τὸ β ὃν τὸ η ποτὶ τὸ θ, τὸ δὲ β ποτὶ τὸ ξ ὃν τὸ θ ποτὶ τὸ υ, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον τὸ ν ποτὶ τὸ ξ, ὃν τὸ τ ποτὶ τὸ υ. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ τὸ ξ ποτὶ τὸ ο, ὃν τὸ υ ποτὶ τὸ φ. καὶ τούτοις τὰ ἄλλα ὁμοίως. ἔχοντι δὴ τὰ μὲν α β γ δ ε ζ πάντα ποτὶ τὸ α τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχοντι τὰ η θ ι κ λ μ πάντα ποτὶ τὸ η. τὸ δὲ α ποτὶ τὸ ν, ὃν τὸ η ποτὶ τὸ τ. τὸ δὲ ν ποτὶ πάντα τὰ ν ξ ο π ρ σ, τὸν αὐτὸν λόγον ὃν τὸ τ ποτὶ πάντα τὰ τ υ φ χ ψ ω. δῆλον οὖν, ὅτι β

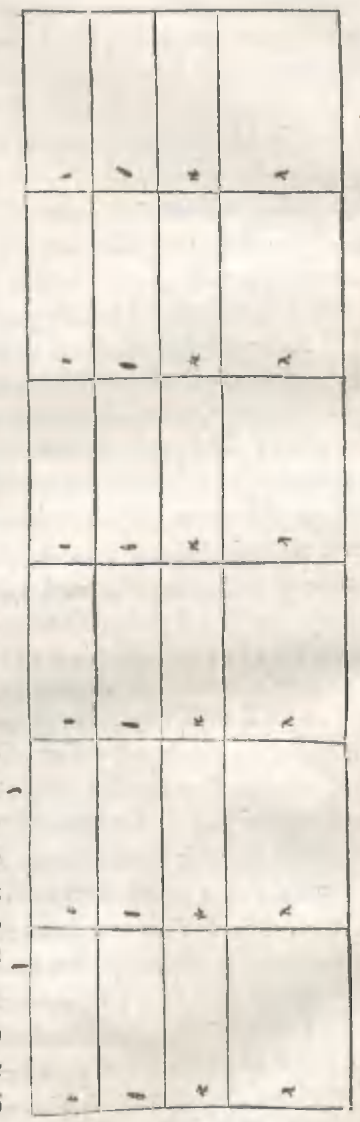


η πάντα

πάντα τὰ α β γ δ ε ζ ποτὶ πάντα τὰ ν ξ ο π ρ σ τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον, ὃν πάντα τὰ η θ ι κ λ μ ποτὶ πάντα τὰ τ υ φ χ ψ ω. φανερὸν δὲ ὅτι καὶ εἴκα τῶν τε α β γ δ ε ζ μεγέθεων, τὰ μὲν α β γ δ ε λέγωντι ποτὶ τὰ ν ξ ο π ρ σ. τὸ δὲ ζ μηδὲ ποθὲν λέγηται, καὶ τὰ η θ ι κ λ μ λέγοντι ποτὶ τὰ τ υ φ χ ψ ω, τὰ ὁμοία ἐν τοῖς αὐτοῖς λόγοις, τὸ δὲ μ μηδὲ ποθὲν λέγηται, ὁμοίως πάντα τὰ α β γ δ ε ζ ποτὶ πάντα τὰ ν ξ ο π ρ σ, τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον, ὃν πάντα τὰ η θ ι κ λ μ ποτὶ πάντα τὰ τ υ φ χ ψ ω.

Εἴκα γραμμαὶ ἴσαι ἀλλήλαις ἐῶντι, ὁπόσαι οὖν τῷ πλήθει, καὶ παρ' ἑκάσταν αὐτᾶν παραπέσῃ τι χωρίον ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ, ἐῶντι δὲ καὶ αἱ πλευραὶ τῶν ὑπερβλημάτων τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι, καὶ ἁ ὑπεροχὰ ἴσα τᾷ ἐλαχίστᾳ, ἐῶντι δὲ καὶ ἄλλα χωρία τῷ μὲν πλήθει ἴσα τούτοις, τῷ δὲ μεγέθει ἕκαστον ἴσον τῷ μεγίστῳ. ποτὶ μὲν πάντα τὰ ἕτερα χωρία ἐλάσσονα λόγον ἑξοῦντι τοῦ ὃν ἔχει ἁ ἴσα συναμφοτέραις ταῖς τε τοῦ μεγίστου ὑπερβλήματος πλευραῖς. καὶ μία τᾶν ἴσαν ἐουσᾶν ποτὶ τὰν ἴσαν συναμφοτέραις, τῷ τε τρίτῳ μέρει τᾶς τοῦ μεγίστου ὑπερβλήματος πλευρᾶς. καὶ τᾷ ἡμισέᾳ μιᾶς τᾶν ἴσαν ἐουσᾶν. ποτὶ δὲ τὰ λοιπὰ χωρία ἄνευ τοῦ μεγίστου μείζονα λόγον ἑξοῦντι τοῦ αὐτοῦ λόγου. ἔστω γὰρ ἴσαι εὐθεῖαι ὁποσαιοῦν τῷ πλήθει ἐφ' ἂν τὰ α, καὶ παραπεπτωκέτω παρ' ἑκάσταν αὐτᾶν χωρίον ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ. ἔστων δὲ ὑπερβλημάτων πλευραὶ αἱ β, γ, δ, ε, ζ, η τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι. καὶ ἁ ὑπεροχὰ ἔστω ἴσα τᾷ ἐλαχίστᾳ. καὶ μεγίστα μὲν ἔστω ἁ β, ἐλαχίστα δὲ ἁ η. ἔστω δὲ καὶ ἄλλα χωρία ὧν ἕκαστον τῶν θ ι κ λ τῷ μὲν πλήθει ἴσα τούτοις, τῷ δὲ μεγέθει ἕκαστον ἴσον ἔστω τῷ μεγίστῳ τῷ παρὰ τὰν α β παρακειμένῳ. ἔστω δὲ ἁ μὲν θ ι γραμμὰ ἴσα τᾷ α. ἁ δὲ κ λ ἴσα τᾷ β. καὶ τᾶν μὲν θ ι γραμμᾶν ἑκάστα ἔστω διπλασία τᾶς ι. τᾶν δὲ κ λ ἑκάστη τριπλασία τᾶς κ. δεικτέον ὅτι τὰ χωρία πάντα ἐν οἷς τὰ θ ι κ λ ποτὲ μὲν πάντα τὰ ἕτερα χωρία τὰ α β, α γ, α δ, α ε, α ζ, α η ἐλάσσονα λόγον ἔχει, τοῦ ὃν ἔχει ἁ θ ι κ λ εὐθεῖα ποτὶ τὰν ι κ. ποτὶ δὲ τὰ λοιπὰ ἄνευ τοῦ μεγίστου τοῦ α β μείζονα λόγον ἔχοντι τοῦ αὐτοῦ λόγου. ἐστὶ γάρ τινα χωρία, ἐν οἷς τὰ α τῷ ἴσῳ ἀλλάλων ὑπερέχοντα. καὶ ἁ ὑπεροχὰ ἴσα τῷ ἐλαχίστῳ. ἐπεί τε τὰ παραβλήματα καὶ τὰ πλάτη τῷ ἴσῳ ὑπερέχουσιν, καὶ ἄλλα χωρία, ἐν οἷς τὰ θ ι τῷ μὲν πλήθει ἴσα τούτοις, τῷ δὲ μεγέθει ἕκαστον ἴσον τῷ μεγίστῳ. σύμπαντα οὖν τὰ χωρία ἐν οἷς τὰ θ ι, πάντων μὲν τῶν ἐν οἷς τὰ α ἐλάσσονα ἐντί, ἢ διπλασίονα. τῶν δὲ λοιπῶν χωρὶς τοῦ μεγίστου μείζον ἢ διπλασίονα. αὐτὰ οὖν τὰ χωρία ἐν οἷς τὰ ι, πάντων μὲν τῶν ἐν οἷς τὰ α ἐλάσσονα ἐντί. τῶν δὲ λοιπῶν ἄνευ τοῦ μεγίστου μείζονα. πάλιν ἐντὶ γραμμαί τινες αἱ β γ δ ε ζ η, τῷ ἴσῳ ἀλλάλων ὑπερέχουσαι, καὶ ἁ ὑπεροχὰ ἴσα τᾷ ἐλαχίστᾳ, καὶ ἄλλαι γραμμαὶ ἐφ' ἂν τὰ κ λ, τῷ μὲν πλήθει ἴσαι ταύταις, τῷ δὲ μεγέθει ἑκάστα ἴσαι τᾷ μεγίστᾳ. τὰ οὖν τετράγωνα τὰ ἀπὸ πασᾶν τᾶν ἴσαν ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ, πάντων μὲν τῶν

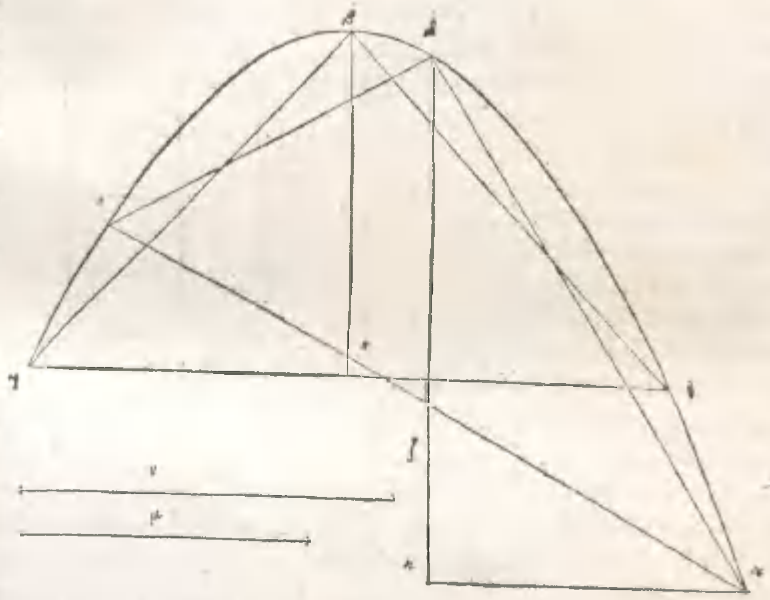




μὲν τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ πάντων τῶν ἴσῳ ἀλλάλων ὑπερεχουσᾶν, ἐλάσσονα ἐντὶ ἢ τριπλασία. τῶν δὲ λοιπῶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας τετραγώνου μείζονα ἢ τριπλάσια. δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς περὶ τᾶν ἑλικᾶν ἐκδεδομένοις. τὰ οὖν χωρία ἐν οἷς τὸ κ, πάντων μὲν τῶν χωρίων ἐν οἷς β γ δ ε ζ η ἐλάσσονα ἐστίν. αὐτῶν δὲ τῶν ἐν οἷς τὰ γ δ ε ζ η μείζονα. ὥστε καὶ πάντα τὰ χωρία ἐν οἷς τὰ ι κ, πάντων μὲν τῶν ἐν οἷς α β, α γ, α δ, α ε, α ζ, α η ἐλάσσονα ἐστὶ τῶν δὲ ἐν οἷς α γ, α δ, α ε, α ζ, α η μείζονα. δῆλον οὖν ὅτι πάντα τὰ χωρία ἐν οἷς τὰ θ ι, κ λ, ποτὶ μὲν τὰ χωρία ἐν οἷς τὰ α β, α γ, α δ, α ε, α ζ, α η ἐλάσσονα λόγον ἔχοντι, τοῦ ὃν ἔχει ἁ θ λ ποτὶ τὰν ι κ. ποτὶ δὲ τὰ λοιπὰ χωρὶς τοῦ ἐν ᾧ τὸ α β μείζονα τοῦ αὐτοῦ λόγου.

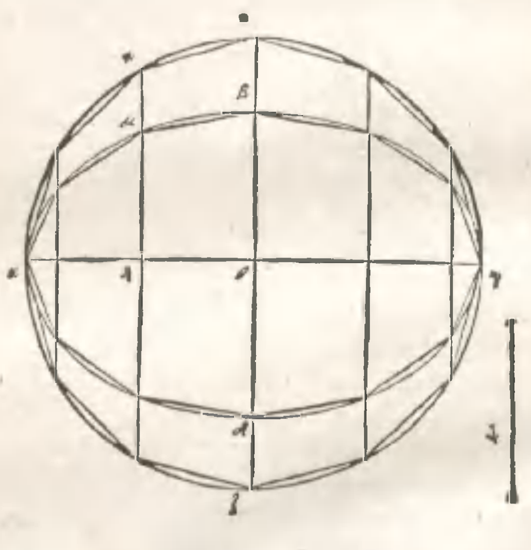
Εἴκα κώνου τομᾶς ὁποιασοῦν εὐθεῖαι, ἐπιψαύοντι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σαμείου ἀγμέναι, ἐῶντι δὲ καὶ ἄλλαι εὐθεῖαι ἐν τᾷ τοῦ κώνου τομᾷ, παρὰ τὰς ἐπιψαυούσας ἀγμέναι, καὶ τέμνουσαι ἀλλάλας τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν τμαμάτων, τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον ποτὶ τὰ ἄλλα ὄντα τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν ἐπιψαυουσᾶν. ὁμόλογον δὲ ἐσσεῖται τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τᾶς ἑτέρας γραμμᾶς τμαμάτων τετραγώνου, τὸ ἀπὸ τᾶς ἐπιψαυούσας παραλλήλου αὐτᾶς. ἀποδέδεικται δὲ τοῦτο ἐν τοῖς κωνικοῖς στοιχείοις.

Εἴκα ἀπὸ τᾶς αὐτᾶς ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς δύο τμάματα ἀποτμηθέωντι ὁπωσοῦν, ἴσας ἔχοντα τὰς διαμέτρους, αὐτά τε τὰ τμάματα ἴσα ἐσσοῦνται, καὶ τὰ τρίγωνα τὰ ἐγγραφόμενα εἰς αὐτά, τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντα τοῖς τμαμάτεσσι, καὶ ὕψος τὸ αὐτό. διάμετρον δὲ καλέω παντὸς τμάματος, τὰν δίχα τέμνουσαν τὰς εὐθείας πάσας, τὰς παρὰ τὰν βάσιν αὐτοῦ ἀγομένας. ἔστω ὀρθογωνίου κώνου τομὰ ἁ α β γ. καὶ ἀποτετμάσθω ἀπ' αὐτᾶς δύο τμάματα, τό τε α δ ε, καὶ τὸ θ β γ. ἔστω δὲ τοῦ μὲν α δ ε τμάματος διάμετρος ἁ δ ζ, τοῦ δὲ θ β γ ἁ β η. καὶ ἔστων ἴσαι αἱ δ ζ, β η. δεικτέον ὅτι τὰ τμάματα ἴσα ἐντὶ τὰ α δ ε, θ β γ, καὶ τὰ τρίγωνα τὰ ἐγγραφόμενα τὸν εἰρημένον τρόπον ἐν αὐτοῖς. ἔστω δὴ πρῶτον ἀποτεμνόμενον τὸ ἕτερον τμᾶμα τὸ θ β γ, ποτ' ὀρθὰς τᾷ διαμέτρῳ τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς. λελάφθω δὲ ἂν δυνάνται, αἱ ἀπὸ τᾶς τομᾶς ἁ διπλασία τᾶς μέχρι τοῦ ἄξονος. καὶ ἔστω ἐφ' ἃ τὸ μ. ἀπὸ δὲ τοῦ α κάθετος ἄχθω ἐπὶ τὰν δ ζ ἁ α κ. ἐπεὶ οὖν διάμετρός ἐντι ἁ δ ζ τοῦ τμάματος, ἁ α ε δίχα τέμνεται κατὰ τὸ ζ. καὶ ἁ δ ζ παρὰ τὰν διάμετρον ἐστὶ τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς. οὕτω γὰρ δίχα τέμνει πάσας τὰς παρὰ τὰν α ε ἀγομένας. ὃν δὴ λόγον ἔχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς α ζ ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς α κ, τοῦτον ἐχέτω ἁ ν ποτὶ τὰν μ. αἱ δὴ ἀπὸ τᾶς τομᾶς ἐπὶ τὰν δ ζ ἀγόμεναι παρὰ τὰν α ε, δυνάνται τὰ παρὰ τὰν ἴσαν τᾷ μ παραπίπτοντα πλάτη ἔχοντα, ἃς αὐταὶ ἀπολαμβάνοντι ἀπὸ τᾶς δ ζ ποτὶ τῷ δ πέρας. δέδεικται γὰρ ἐν τοῖς κωνικοῖς. δύναται ἄρα καὶ ἁ α ζ ἴσον τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς μ, καὶ ὑπὸ τᾶς δ ζ. δύναται δὲ καὶ ἁ θ η, ἴσον τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς μ, καὶ ὑπὸ τᾶς β η. ἐπεὶ ἴσαι ἐντὶ αἱ β η, δ ζ. ἔχοι καὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς α ζ, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς θ η τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ ν ποτὶ τὰν μ. ἐπεὶ ἴσαι ὑπόκεινται αἱ δ ζ, β η. ἔχει δὲ τὸ ἀπὸ τᾶς α ζ τετράγωνον καὶ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς α κ, τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ ν ποτὶ τὰν μ. ἴσαι ἄρα ἐντὶ αἱ θ η, α κ. ἐντὶ δὲ ἴσαι καὶ αἱ β η, δ ζ. ὥστε ἴσον ἐστὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν β η, θ η, τῷ ὑπὸ τᾶν α κ, δ ζ. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ θ β η τρίγωνον τῷ α δ ζ τριγώνῳ, ὥστε καὶ τὰ διπλάσια. ἐστὶ δὲ τοῦ μὲν α δ ε τριγώνου ἐπίτριτον τὸ



αδ τμῆμα. τοῦ δὲ βδγ τριγώνου, ἐπίτριτον τὸ θβγ τμῆμα. δῆλον οὖν ὅτι τὰ τμήματα ἴσα ἐστὶ, καὶ τὰ τρίγωνα τὰ ἐγγραφόμενα εἰς αὐτά. εἰ δὲ μηδ' ἕτερα τᾶν τὰ τμήματα ἀποτεμνουσᾶν ποτ' ὀρθὰς ἐντὶ τᾷ διαμέτρῳ τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, ἀπολαφθείσας ἀπὸ τᾶς μετὰ τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς ἴσας τᾷ διαμέτρῳ τᾶς τοῦ ἑνὸς τμάματος, καὶ ἀπὸ τοῦ πέρατος τᾶς ἀπολαφθείσας ποτ' ὀρθὰς ἀχθείσας τᾷ διαμέτρῳ τὸ γενόμενον τμᾶμα, ἑκατέρῳ τῶν τμαμάτων ἴσον ἐσσεῖται. δῆλον οὖν ὃ ἔδει ποιῆσαι.

ε Πᾶν χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ποτὶ τὸν κύκλον τὸν ἔχοντα διάμετρον ἴσαν τᾷ μείζονι διαμέτρῳ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ἐλάσσων διάμετρος αὐτᾶς ποτὶ τὰν μείζω, τουτέστι ποτὶ τὰν τοῦ κύκλου διάμετρον. ἔστω γὰρ ὀξυγωνίου κώνου τομά, ἐφ' ἇς τὰ αβγδ. διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἁ μὲν μείζων ἔστω, ἐφ' ἇς τὰ αγ, ἁ δὲ ἐλάσσων ἐφ' ἇς τὰ βδ. ἔστω δὲ κύκλος περὶ διάμετρον τὰν αγ. δεικτέον ὅτι τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ποτὶ τὸν κύκλον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ βδ ποτὶ τὰν γα, τουτέστι ποτὶ τὰν εζ. ὃν δὴ λόγον ἔχει ἁ βδ ποτὶ τὰν εζ, τοῦτον ἐχέτω ὁ κύκλος ἐν ᾧ τὸ ψ ποτὶ τὸν αεγζ κύκλον. λέγω ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ ψ κύκλος τᾷ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾷ. εἰ γὰρ μὴ ἐστὶν ἴσος ὁ ψ κύκλος τῷ περιεχομένῳ χωρίῳ ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ἔστω πρότερον εἰ δυνατὸν μείζων. δυνατὸν δή ἐστιν εἰς τὸν ψ κύκλον πολύγωνον ἐγγράψαι ἀρτιόγωνον, μεῖζον τοῦ αβγδ χωρίου. νοείσθω δὴ ἐγγεγραμμένον. ἐγγεγράφθω δὴ καὶ εἰς τὸν αεγζ κύκλον εὐθύγραμμον, ὅμοιον τῷ ἐν τῷ ψ κύκλῳ ἐγγεγραμμένῳ. καὶ ἀπὸ τᾶν γωνιᾶν αὐτοῦ κάθετοι ἄχθωσαν ἐπὶ τὰν αγ διάμετρον. ἐπὶ δὲ τὰ σαμεῖα καθ' ἃ τέμνονται αἱ κάθετοι ταῖς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, εὐθεῖαι ἐπιζεύχθωσαν. ἐσσεῖται δέ τι εὐθύγραμμον, ἐν τᾷ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾷ ἐγγεγραμμένον, καὶ ἕξει τὸ αὐτὸ ποτὶ τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ αεγζ κύκλῳ ἐγγεγραμμένον, τὸν αὐτὸν λόγον ὃν ἁ βδ ποτὶ τὰν εζ. ἐπεὶ γὰρ αἱ εθ, κλ κάθετοι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον τέτμηνται κατὰ τὰ μ, β, δῆλον ὅτι τὸ λε τραπέζιον ποτὶ τὸ θμ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ θε ποτὶ τὰν βθ. διὰ ταῦτα δὲ καὶ τῶν ἄλλων τραπεζίων ἕκαστον τῶν ἐν τῷ κύκλῳ ποθ' ἕκαστον τῶν τραπεζίων τῶν ἐν τᾷ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾷ, τὸν αὐτὸν ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ εθ ποτὶ τὰν βθ. ἔχωντι δὲ καὶ τὰ τρίγωνα τὰ ποτὶ τοῖς α, γ τὰ ἐν τῷ κύκλῳ, ποτὶ τὰ ἐν τᾷ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾷ τὸν αὐτὸν λόγον. ἕξει οὖν καὶ ὅλον τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ αεγζ κύκλῳ ἐγγεγραμμένον, ποτὶ ὅλον τὸ ἐγγεγραμμένον εὐθύγραμμον ἐν τᾷ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾷ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ εζ ποτὶ τὰν βδ. ἔχει δὲ τὸ αὐτὸ τὸ εὐθύγραμμον καὶ ποτὶ τὸ ἐν τῷ ψ κύκλῳ ἐγγεγραμμένον, τὸν αὐτὸν λόγον, διότι καὶ οἱ κύκλοι τὸν αὐτὸν εἶχον λόγον. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ ψ κύκλῳ ἐγγεγραμμένον, τῷ εὐθυγράμμῳ τῷ ἐν τᾷ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾷ ἐγγεγραμμένῳ, ὅπερ ἀδύνατον. μεῖζον γὰρ ἦν ὅλου τοῦ περιεχομένου χωρίου ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου τομᾶς. ἀλλ' ἔστω εἰ δυνατὸν ἐλάσσων, πάλιν δὴ δυνατὸν εἰς τὰν τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰν ἐγγράψαι πολύγωνον ἀρτιόπλευρον μεῖζον τοῦ ψ κύκλου. ἐγγεγράφθω οὖν καὶ ἀπὸ τᾶν γωνιᾶν αὐτοῦ κάθετοι, ἀχθεῖσαι ἐπὶ τὰν αγ. ἐκβεβλήσθωσαν ποτὶ τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν. πάλιν οὖν ἐσσεῖταί τι ἐν τῷ δε κύκλῳ εὐθύγραμμον ἐγγεγραμμένον, ὃ ἕξει ποτὶ τὰν ἐν τᾷ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾷ ἐγγεγραμμένον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ εζ ποτὶ τὸν βδ. ἐγγεγραφέντος δὴ καὶ εἰς τὸν ψ κύκλον ὁμοίου αὐτῷ, δειχθήσεται τὸ ἐν τῷ ψ κύκλῳ ἐγγεγραμμένον ἴσον ἐὸν τῷ ἐν τᾷ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾷ ἐγγεγραμμένῳ, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἔστιν οὖν οὐδὲ ἐλάσσων ὁ ψ κύκλος τοῦ χωρίου, τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς. δῆλον οὖν ὅτι τὸ εἰρημένον χωρίον ποτὶ τὸν αεγζ κύκλον, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ βδ ποτὶ τὰν εζ.



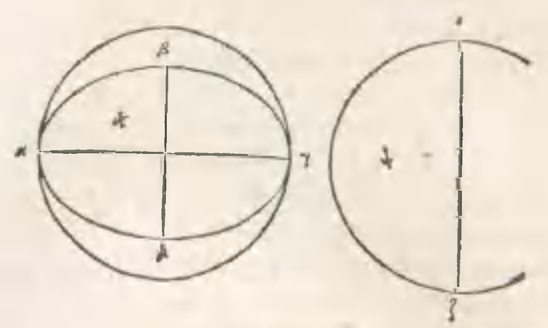
ἐπεζεύχθωσαν.

ἔχοντι.

ἐγγεγραφέντος. ... ὄσ. lin. 4

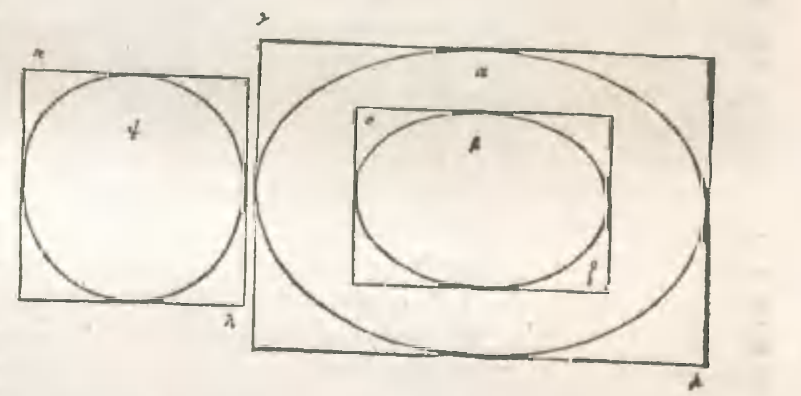
τᾶν

Πᾶν χωρίον περιεχόμενον ὑπὸ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ποτὶ πάντα κύκλον, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν διαμέτρων τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς τοῦ κύκλου διαμέτρου τετράγωνον. ς ἔστω γάρ τι χωρίον περιεχόμενον ὑπὸ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ἐν ᾧ τὸ χ, διάμετροι δὲ ἔστωσαν τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς αἱ αγ, βδ, μείζων δὲ ἁ αγ. καὶ κύκλος ἔστω, ἐν ᾧ τὸ ψ. διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἁ εζ. δεικτέον ὅτι τὸ χ χωρίον ποτὶ τὸν ψ κύκλον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν αγ, βδ, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς εζ τετράγωνον. περιγεγράφθω δὴ κύκλος περὶ διάμετρον τὰν αγ. τὸ δὴ χ χωρίον ποτὶ τὸν κύκλον, οὗ διάμετρος ἁ αγ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν αγ, βδ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς αγ τετράγωνον. δέδεικται γὰρ ἔχον ὃν ἁ βδ ποτὶ τὰν αγ. ἔχει δὲ καὶ ὁ κύκλος, οὗ διάμετρος ἁ αγ, ποτὶ τὸν κύκλον οὗ διάμετρος ἁ εζ, τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς αγ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς εζ. δῆλον οὖν, ὅτι τὸ χ χωρίον ποτὶ τὸν ψ κύκλον, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν αγ, βδ περιεχόμενον, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς εζ τετράγωνον.



Τὰ περιεχόμενα χωρία ὑπὸ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ποτ' ἄλλαλα, ὃν τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τᾶν διαμέτρων * τμαμάτων ὀξυγωνίων κώνων τομᾶν ποτ' ἄλλαλα. ἔστω περιεχόμενα χωρία ὑπὸ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ἐν οἷς τὰ α, β. ἔστω δὲ καὶ τὸ μὲν γδ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν διαμέτρων τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς τᾶς περιεχούσας τὸ α χωρίον, τὸ δὲ εζ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν διαμέτρων τᾶς ἑτέρας τομᾶς. δεικτέον ὅτι τὸ α χωρίον ποτὶ τὸ β τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ γδ ποτὶ τὸ εζ. λελάφθω δὴ κύκλος τις, ἐν ᾧ τὸ ψ. ἀπὸ δὲ τᾶς διαμέτρου αὐτοῦ τετράγωνον ἔστω τὸ κλ. ἔχει δὲ τὸ μὲν α χωρίον, ποτὶ τὸν ψ κύκλον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ γδ ποτὶ τὸ κλ. ὁ δὲ ψ κύκλος ποτὶ τὸ β χωρίον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ κλ ποτὶ τὸ εζ. δῆλον οὖν, ὅτι τὸ α χωρίον ποτὶ τὸ β τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ γδ ποτὶ τὸ εζ. ἐκ τούτου δὲ φανερόν, ὅτι τὰ περιεχόμενα χωρία ὑπὸ ὁμοιᾶν ὀξυγωνίων κώνων τομᾶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντι δυνάμει ποτ' ἄλλαλα, ὃν αἱ ὁμόλογοι διάμετροι τᾶν τομᾶν.

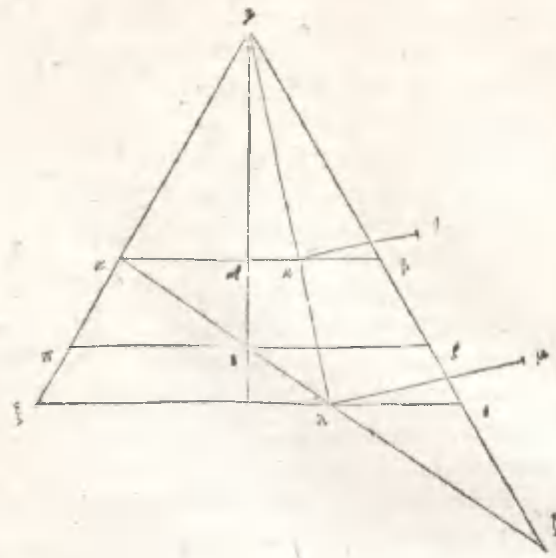
τᾶν τῶν



Ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς δοθείσας, καὶ γραμμᾶς ἀπὸ τοῦ κέντρου τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἀνεστακούσας ὀρθᾶς ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστὶν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά, δυνατόν ἐστι κῶνον εὑρεῖν κορυφὰν ἔχοντα τὸ πέρας τᾶς ἀνεστακούσας εὐθείας, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ δοθεῖσα τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά. ζ δεδόσθω τις ὀξυγωνίου κώνου τομά, καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου αὐτᾶς εὐθεῖα γραμμὰ ἀνεστακοῦσα ὀρθὰ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστὶν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά. διὰ δὲ τᾶς ἀνεστακούσας εὐθείας, καὶ τᾶς ἐλάσσονος διαμέτρου ἐπίπεδον ἐκβεβλήσθω, καὶ ἔστω ἐν αὐτῷ ἁ μὲν ἐλάσσων διάμετρος ἁ αβ. τὸ δὲ κέντρον τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς τὸ δ. ἁ δὲ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀνεστακοῦσα ὀρθὰ ἁ γδ. πέρας δὲ αὐτᾶς τὸ γ. ἁ δὲ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά, νοείσθω περὶ διάμετρον τὰν αβ ἐγγεγραμμένα ἐν ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὰν γδ. δεῖ δὴ κῶνον εὑρεῖν κορυφὰν ἔχοντα τὸ γ σαμεῖον, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά. ἀπὸ δὲ τοῦ γ ἐπὶ τᾷ αβ εὐθεῖα ἀχθεῖσα ἐκβεβλήσθω, καὶ ἀπὸ τοῦ α διάχθω ἁ αζ. ὥστε τὸ περιεχόμενον

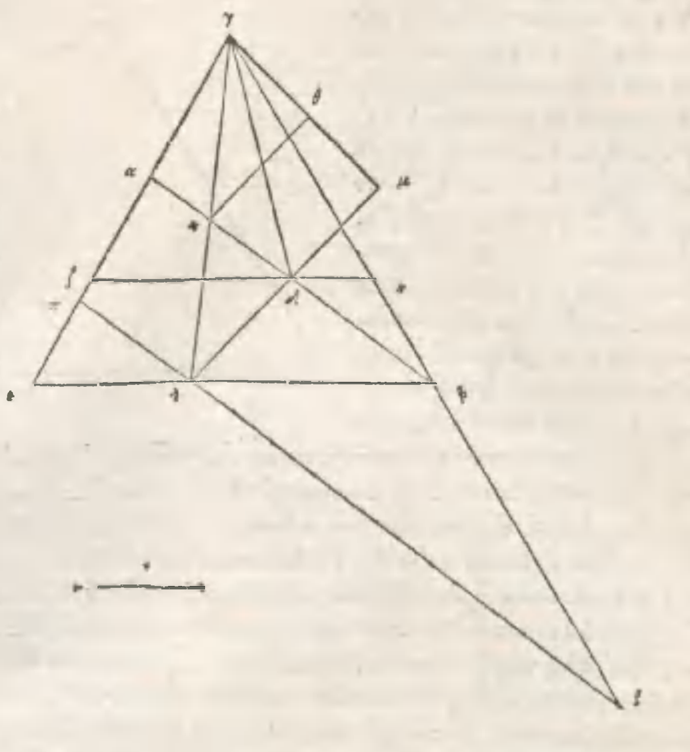
ὑπὸ

ὑπὸ τᾶν αε, εζ ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς εγ, τὸν αὐτὸν ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ἡμισείας μείζονος διαμέτρου, ποτὶ τὸ ἀπὸ δγ τετράγωνον. δυνατὸν δέ ἐστιν, ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ὁ λόγος τοῦ ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ τᾶς αδ, δβ περιεχόμενον, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς δγ τετράγωνον. ἀπὸ δὲ τᾶς αζ ἐπίπεδον ἀνεστακέτω ὀρθὸν ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐντὶ αἱ γα, ζ. ἐν δὲ τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ κύκλος γεγράφθω περὶ διάμετρον τὰν αζ, ἀπὸ δὲ τοῦ κύκλου τούτου κῶνος ἔστω, κορυφὰν ἔχων τὸ γ σαμεῖον. ἐν δὲ τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, δειχθήσεται οὖσα ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά. εἰ μὴ ἐστὶν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, ἀναγκαῖον ἦμεν τι σαμεῖον ἐπὶ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ὃ μή ἐστιν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου. νοείσθω δὲ τὸ σαμεῖον, λελαμμένον ἐπὶ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς τὸ θ, ὃ οὐκ ἔστιν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου. καὶ ἀπὸ τοῦ θ κάθετος ἄχθω ἁ θκ, ἐπὶ τὰν αβ. ἐσσεῖται δὴ αὕτα ὀρθὰ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, τὸ ἐν ᾧ ἐντὶ αἱ γα, ζ. ἀπὸ δὲ τοῦ γ ἐπὶ τὸ κ ἐπιζευχθεῖσα ἐκβεβλήσθω. συμπιπτέτω δὴ αὕτα τᾷ αζ, κατὰ τὸ λ. καὶ ἀπὸ τοῦ λ ἄχθω ποτ' ὀρθὰς τᾷ ζα, ἁ λμ, ἐν τῷ κύκλῳ τῷ περὶ τὰν αζ. τὸ δὲ μ νοείσθω μετέωρον ἐπὶ τᾶς περιφερείας αὐτοῦ. ἄχθω δὲ καὶ παρὰ τὰν αβ, διὰ μὲν τοῦ λ ἁ ξο. διὰ δὲ τοῦ ε, ἁ πρ. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ὑπὸ τᾶν εα, εζ περιεχόμενον, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς εγ τετράγωνον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς ἡμισείας τᾶς μείζονος διαμέτρου, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς δγ. τὸ δὲ ἀπὸ τᾶς εγ ποτὶ τὸ ὑπὸ επ, ερ. καὶ ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς δγ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν αδ, δβ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον τὸ ὑπὸ τᾶν αε, εζ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν πε, ερ, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ἡμισείας τᾶς μείζονος διαμέτρου ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν αδ, δβ. ἔστι δὲ ὡς μὲν τὸ ὑπὸ τᾶν αε, εγ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν επ, ερ. οὕτω τὸ ὑπὸ τᾶν αλ, λζ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν λξ, λο. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τᾶς ἡμισείας τᾶς μείζονος διαμέτρου ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν αδ, δβ, οὕτως τὸ ἀπὸ τᾶς θκ τετράγωνον, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ακ, κβ. τὸν αὐτὸν ἄρα ἔχει λόγον τὸ ὑπὸ τᾶν αλ, λζ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ξλ, λο, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς θκ τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ακ, κβ. ἔχει δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ξλ, λο ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς γλ τετράγωνον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν ακ, κβ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς γκ τετράγωνον. ἔχει ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τᾶν αλ, λζ περιεχόμενον, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς γλ τετράγωνον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς θκ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς κγ. τῷ δὲ ὑπὸ τᾶν αλ, λζ περιεχομένῳ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τᾶς λμ τετράγωνον. ἐν ἡμικυκλίῳ γὰρ τῷ περὶ τὰν αζ κάθετος ἄχθη ἁ λμ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον τὸ ἀπὸ τᾶς λμ τετράγωνον, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς λγ, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς θκ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς κγ. ὥστε ἐπ' εὐθείας ἐστὶ τὰ γθμ σαμεῖα. ἁ δὲ γμ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐστὶ τοῦ κώνου. δῆλον οὖν, ὅτι καὶ τὸ θ σαμεῖον ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται τοῦ κώνου. ὑπέκειτο δὲ μὴ εἶμεν, οὐκ ἄρα ἐστὶ σαμεῖον οὐδὲν ἐπὶ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ὃ οὐκ ἔστιν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ προειρημένου κώνου. ὅλα οὖν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐστὶ τοῦ αὐτοῦ κώνου.



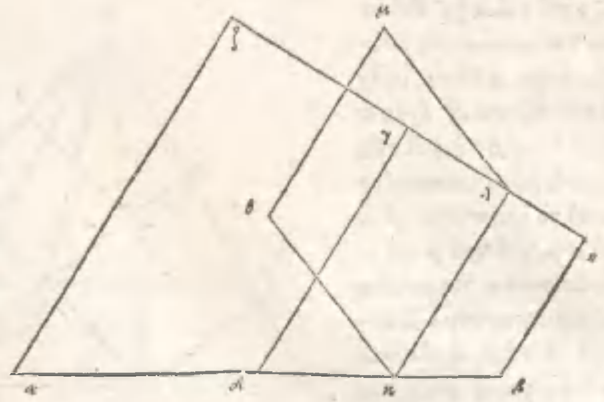
θ Ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς δοθείσας, καὶ γραμμᾶς μὴ ὀρθᾶς ἀνεστακούσας, ἀπὸ τοῦ κέντρου τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἐν ἐπιπέδῳ ἐστὶν ὀρθὸν ἀνεστακός, διὰ τᾶς ἑτέρας διαμέτρου ποτὶ τὸ ἐπίπεδον ἐν ᾧ ἐστιν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά, δυνατόν ἐστι κῶνον εὑρεῖν, κορυφὰν ἔχοντα τὸ πέρας τᾶς ἀνεστακούσας εὐθείας, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ δοθεῖσα τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά. ἔστω δὲ διάμετρος μὲν τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἁ βα, κέντρον δὲ τὸ δ. καὶ ἁ δγ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀνεστακοῦσα, ὡς εἴρηται. ἁ δὲ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ νοείσθω περὶ διάμετρον τὰν αβ ἐν ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον ἐν ᾧ ἐντὶ αἱ αβ, γδ. δεῖ δὴ κῶνον εὑρεῖν κορυφὰν ἔχοντα τὸ γ σαμεῖον. οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά.

νου τομά. οὐ δὴ ἐντὶ ἴσαι αἱ αγ, γβ. ἐπεὶ ἁ γδ οὐκ ἐστὶν ὀρθὰ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστιν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά. ἔστω οὖν ἴσα ἁ εγ τᾷ γβ. ἁ δὲ ν εὐθεῖα ἴσα ἔστω τᾷ ἡμισείᾳ τᾶς ἑτέρας διαμέτρου, ἃ ἐστὶ συζυγὴς ἁ αβ. καὶ διὰ τοῦ δ ἄχθω ἁ ζη παρὰ τὰν εβ. ἀπὸ δὲ τᾶς εβ ἐπίπεδον ἀνεστακέτω ὀρθὸν ποτὶ τὸ ἐπίπεδον ἐν ᾧ ἐντὶ αἱ αγ, γβ. καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ γεγράφθω περὶ διάμετρον τὰν εβ κύκλος, ἢ ἔλλειψις. εἰ μὲν ἴσον ἐστὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ν, τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν ζδ, δη, κύκλος. εἰ δὲ μὴ ἐστὶν ἴσον, ὀξυγωνίου κώνου τομὰ τοιαύτα, ὥστε τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ἑτέρας διαμέτρου ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς εβ τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς ν τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ζδ, δη. κῶνος λελάφθω κορυφὰν ἔχων τὸ γ σαμεῖον, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ὁ κύκλος, ἢ ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ περὶ διάμετρον τὰν εβ. δυνατὸν δέ ἐστι τοῦτο, ἐπεὶ ἀπὸ τοῦ γ ἐπὶ μέσαν τὰν εβ ἀχθεῖσαι ὀρθά ἐντι ποτὶ τὸ ἐπίπεδον κατὰ τὰν εβ. ἐν ταύτᾳ δὴ τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐστὶ καὶ ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ περὶ διάμετρον τὰν αβ. εἰ γὰρ μή ἐστιν, ἐσσεῖταί τι σαμεῖον ἐπὶ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ὃ οὐκ ἔστιν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου. νοείσθω τι σαμεῖον λελαμμένον τὸ θ, ὃ οὐκ ἐστὶν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, καὶ ἀπὸ τοῦ θ κάθετος ἄχθω ἁ κθ ἐπὶ τὰν αβ, ἁ δὲ γκ ἐπιζευχθεῖσα, ἐκβεβλήσθω καὶ συμπιπτέτω τᾷ εβ κατὰ τὸ λ. διὰ δὲ τοῦ λ ἄχθω τις ἐν τῷ ὀρθῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὰν εβ ποτ' ὀρθὰς τᾷ εβ, ἁ λμ. τὸ δὲ μ νοείσθω μετέωρον ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου. ἄχθω δὲ καὶ διὰ τοῦ λ παρὰ τὰν αβ ἁ πρ. ἐστὶν δὴ ὡς μὲν τὸ ἀπὸ τᾶς ν τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ζδ, δη, οὕτως τὸ ἀπὸ τᾶς λμ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ελ, λβ. ὡς δὲ τὸ ὑπὸ τᾶν ζδ, δη ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν αδ, δβ, οὕτως τὸ ὑπὸ τᾶν ελ, λβ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν πλ, λρ. ἐσσεῖται οὖν ὡς τὸ ἀπὸ τᾶς ν τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν αδ, δβ περιεχόμενον, οὕτως τὸ ἀπὸ τᾶς λμ τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν πλ, λρ. ἔχει δὲ ὡς τὸ ἀπὸ τᾶς ν τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν αδ, δβ, οὕτω τὸ ἀπὸ τᾶς θκ τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ακ, κβ. ἐπεὶ ἐν τᾷ αὐτᾷ ὀξυγωνίου κώνου τομᾷ κάθετοι ἐντὶ ἀγμέναι ἐπὶ διάμετρον τὰν αβ, τὸν αὐτὸν ἄρα ἔχει λόγον τὸ ἀπὸ τᾶς λμ τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν πλ, λρ, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς θκ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ακ, κβ. ἔχει καὶ τὸ ὑπὸ τᾶν πλ, λρ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς γλ τετράγωνον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν ακ, κβ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς κγ. τὸν αὐτὸν οὖν λόγον ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς λμ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς λγ τετράγωνον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς θκ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς κγ. ὥστε ἐπ' εὐθείας ἐντὶ τὰ γθμ σαμεῖα. ἁ δὲ γμ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, δῆλον οὖν ὅτι καὶ τὸ θ σαμεῖον ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐστὶ τοῦ κώνου. ὑπέκειτο δὲ μὴ εἶμεν. φανερὸν οὖν ἐστιν ὃ ἔδει δεῖξαι.



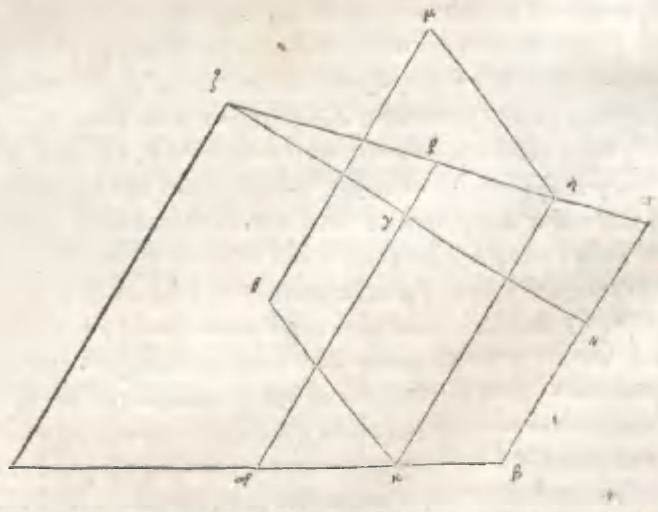
ι Ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς δοθείσας, καὶ γραμμᾶς ἀπὸ τοῦ κέντρου τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἀνεστακούσας ἐν ἐπιπέδῳ, ὃ ἐστιν ἀπὸ τᾶς ἑτέρας διαμέτρου ὀρθὸν ἀνεστακὸς ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστιν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά, δυνατόν ἐντι κύλινδρον εὑρεῖν τὸν ἄξονα ἔχοντα ἐπ' εὐθείας τᾷ ἀνεστακούσᾳ γραμμᾷ, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ δοθεῖσα τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά. ἔστω τᾶς δοθείσας τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἑτέρα διάμετρος ἁ βα. κέντρον δὲ τὸ δ. ἁ δὲ γδ γραμμὰ ἔστω ἀνεστακοῦσα ἀπὸ τοῦ κέντρου, ὡς εἴρηται. ἁ δὲ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά, νοείσθω περὶ διάμετρον τὰν αβ ἐν ἐπιπέδῳ ὀρθῷ, ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ἐν ᾧ ἐντὶ αἱ αβ, γδ. δεῖ δὴ κύλιν-

δὴ κύλινδιὰ κυλίνδρου εὑρεῖν, τὸν ἄξονα ἔχοντα ἐπὶ τᾶς εὐθείας τᾶς γδ, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ δοθεῖσα τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά. ἀπὸ δὴ τῶν α, β σαμείων ἄχθω παρὰ τὰν γδ αἱ αζ, βη. ἁ δὴ ἑτέρα διάμετρος τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ἤτοι ἴσα ἐντὶ τῷ διαστήματι τᾶν αζ, βη, ἢ μείζων ἢ ἐλάσσων. ἔστω δὴ πρότερον ἴσα τᾷ ζη. ἁ δὲ ζη ἔστω ποτ' ὀρθὰς τᾷ γδ. ἀπὸ δὲ τᾶς ζη, ἀνεστακέτω ἐπίπεδον ὀρθὸν ποτὶ τὰν γδ. καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ κύκλος, ἔστω περὶ διάμετρον τὰν ζυ. καὶ ἀπὸ τοῦ κύκλου τούτου κύλινδρος ἔστω, ἄξονα ἔχων τὰν γδ. ἐν δὴ τᾷ ἐπιφανείᾳ



τοῦ κυλίνδρου τούτου ἐστὶν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά. εἰ γὰρ μή ἐστιν, ἐσσεῖταί τι σαμεῖον ἐπὶ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ὃ οὐκ ἔστιν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου. νοείσθω δή τι σαμεῖον λελαμμένον ἐπὶ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς τὸ θ, ὃ οὐκ ἔστιν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου. καὶ ἀπὸ τοῦ θ κάθετος ἄχθω ἐπὶ τὰν αβ ἁ θκ. ἐσσεῖται δὲ αὐτὰ ὀρθὰ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐντὶ αἱ αβ, γδ. ἀπὸ δὲ τοῦ κ ἄχθω παρὰ τὰν γδ ἁ κλ, καὶ ἀπὸ τοῦ λ ἀνεστακέτω ἁ λμ ποτ' ὀρθὰς τᾷ ζη ἐν τῷ κύκλῳ τῷ περὶ τὰν ζη. τὸ δὲ μ νοείσθω μετέωρον ἐν τᾷ περιφερείᾳ τοῦ ἡμικυκλίου τοῦ περὶ διάμετρον τὰν ζη. τὸ αὐτὸ δὴ ἔχει λόγον τὸ τετράγωνον, τὸ ἀπὸ τᾶς θκ καθέτου, ποτὶ τὸ ὑπὸ τῶν ακ, κβ περιεχόμενον, καὶ τὸ ἀπὸ ζγ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν αδ, δβ περιεχόμενον. ἐπεὶ ἴσα ἐστὶν ἁ ζη τᾷ ἑτέρᾳ διαμέτρῳ. ἔχει δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ζλ, λη περιεχόμενον ποτὶ τὸ ὑπὸ ακ, κβ περιεχόμενον λόγον ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς ζγ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ αδ διὰ τὰν ἔλλειψιν. ἴσον οὖν ἐντὶ τὸ ὑπὸ τᾶς ζλ, λη περιεχόμενον, τῷ ἀπὸ τᾶς θκ τετραγώνῳ. ἐστὶ δὲ ἴσον καὶ τῷ ἀπὸ λμ, ἴσαι ἄρα ἐντὶ αἱ θκ, μλ κάθετοι. παράλληλοι οὖν ἐντὶ αἱ λκ, μθ. ὥστε καὶ αἱ δγ, μθ παράλληλοι ἐντί. καὶ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἄρα ἐστὶ τοῦ κυλίνδρου ἁ θμ. ἐπεὶ ἀπὸ τοῦ μ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐόντος ἆκται περὶ τὸν ἄξονα. δῆλον οὖν ὅτι καὶ τὸ θ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐστὶν αὐτοῦ. ὑπέκειτο δὲ μὴ εἶμεν. φανερὸν οὖν ἐστιν ὃ ἔδει δεῖξαι. δῆλον δή, ὅτι καὶ ὁ κύλινδρος ὁ περιλαμβάνων τὰν ἔλλειψιν, ὀρθὸς ἐσσεῖται. εἴκα ἡ ἑτέρα διάμετρος ἴσα τῷ διαστήματι τᾶν ἀπὸ τῶν περάτων τᾶς ἑτέρας διαμέτρου ἀγμένας παρὰ τὰν ἀνεστακοῦσαν εὐθεῖαν.

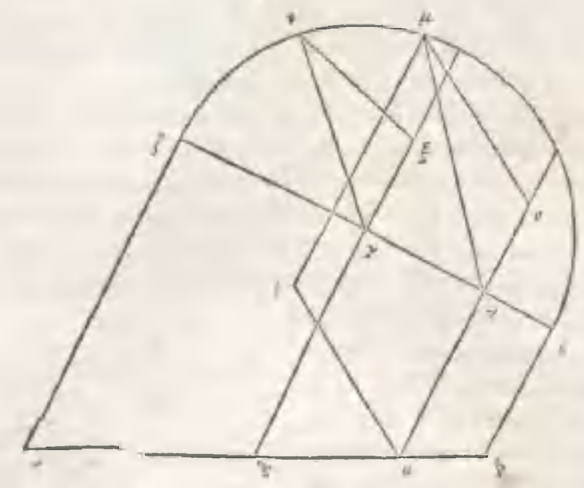
Ἔστω πάλιν ἑτέρα διάμετρος μείζων τᾶς ζη, καὶ ἴσα ἔστω ἁ πζ τᾷ ἑτέρᾳ διαμέτρῳ. ἀπὸ δὲ τᾶς πζ ἐπίπεδον ἀνεστακέτω ὀρθόν, ποτὶ ἐπίπεδον τὸ ἐν ᾧ ἐντὶ ἁ βγδ. καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ κύκλος ἔστω περὶ διάμετρον τὰν πζ. ἀπὸ δὲ τοῦ κύκλου τούτου κύλινδρος ἔστω, ἄξονα ἔχων τὰν δρ. ἐν



δὴ τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου τούτου, διὰ τῶν αὐτῶν δειχθήσεται οὖσα ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά.

Ἀλλ' ἔστω ἐλάσσων ἁ ἑτέρα διάμετρος τᾶς ζη, ᾧ δὴ μείζων δύναται ἁ ζγ τᾶς ἡμισείας τᾶς

ἑτέρας διαμέτρου. ἔστω τὸ ἀπὸ τᾶς γξ τετράγωνον. καὶ ἀπὸ τοῦ ξ ἀνεστακέτω γραμμὰ ἴσα τᾷ ἡμισείᾳ τᾶς ἑτέρας διαμέτρου, ὀρθὰ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον ἐν ᾧ ἐντὶ αἱ αβ, γδ, ἁ ξν. τὸ δὲ ν νοείσθω μετέωρον. ἁ οὖν γν ἴσα ἐντὶ τᾷ γζ. ἐν δὴ τῷ ἐπιπέδῳ, ἐν ᾧ ἐντὶ αἱ ζη, γν κύκλος γεγράφθω περὶ διάμετρον τὰν ζη. ἥξει δὲ οὗτος διὰ τοῦ ν, καὶ ἀπὸ τοῦ κύκλου κύλινδρος ἔστω ἄξονα ἔχων τὸν γδ. ἐν δὴ τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου τούτου ἐστὶν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά. εἰ γὰρ μή ἐστιν, ἐσσεῖταί τι σαμεῖον ἐπ' αὐτᾶς, ὃ οὐκ ἔστιν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου. λελάφθω δή τι σαμεῖον



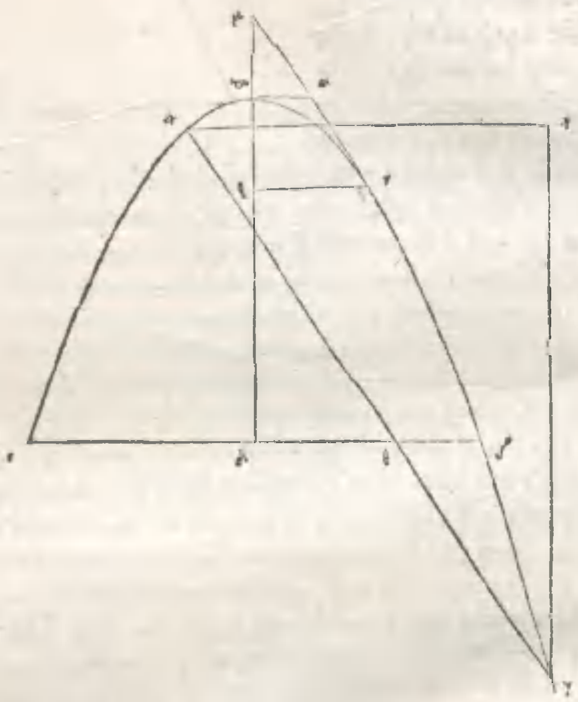
ἐπ' αὐτᾶς τὸ θ. καὶ ἁ θκ κάθετος ἄχθω ἐπὶ τὰν αβ. καὶ ἀπὸ τοῦ κ παρὰ τὰν γδ ἔστω ἁ κλ, καὶ ἀπὸ τοῦ λ ἄχθω ποτ' ὀρθὰς τᾶς ζη ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ τῷ περὶ διάμετρον τὰν ζμη ἁ λμ. νοείσθω δὲ τὸ μ ἐπὶ τᾶς τοῦ ἡμικυκλίου τοῦ περὶ τὰν ζη. καὶ ἀπὸ τοῦ μ κάθετος ἄχθω ἐπὶ τὰν κλ ἐκβληθεῖσαν, ἁ μο. ἐσσεῖται δὲ αὐτὰ ὀρθὰ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐντὶ αἱ αβ, γδ. ἐπεὶ ποτ' ὀρθάς ἐντι ἁ κλ τᾷ ζη. ἔστιν δὴ ὡς μὲν τὸ ἀπὸ τᾶς μο ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς μλ, οὕτως τὸ ἀπὸ τᾶς ξν ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς νγ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τᾶς μλ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ακ, κβ, οὕτως τὸ ἀπὸ γν ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς αδ. ἐπεὶ τὸ μὲν ἀπὸ τᾶς μλ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τᾶν λζ, λη περιεχομένῳ. τῷ δὲ ἀπὸ τᾶς γν τῷ ἀπὸ τᾶς γζ. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τᾶς μο τετράγωνον ποτὶ ὑπὸ τᾶν ακ, κβ, οὕτως τὸ ἀπὸ τᾶς νξ ποτὶ ἀπὸ τᾶς αδ. ἐντὶ δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τᾶς κθ τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ακ, κβ, ὡς τὸ ἀπὸ τᾶς ξν ποτὶ ἀπὸ τᾶς αδ. ἐπεὶ ἴσα ἐστὶν ἁ ξν τᾷ ἡμισείᾳ τᾶς ἑτέρας διαμέτρου. δῆλον οὖν ὅτι ἴσαι ἐντὶ αἱ μο, θκ κάθετοι. ὥστε ἴσαι αἱ κθ, θμ. ἐπεὶ δὲ ἁ μθ παρὰ τὸν ἄξονα ἐντὶ τοῦ κυλίνδρου, καὶ τὸ μ σαμεῖον ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ αὐτοῦ, ἀναγκαῖον καὶ τὰν μθ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ εἶμεν τοῦ κυλίνδρου, δρου. φανερὸν οὖν ὅτι καὶ τὸ θ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐντὶ αὐτοῦ. οὐκ ἦν δέ. δῆλον οὖν ὅτι ἀναγκαῖον ἐστὶ τὰν τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ εἶμεν τοῦ κυλίνδρου.

Ὅτι μὲν πᾶς κῶνος ποτὶ κῶνον τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἔκ τε τοῦ τῶν βάσιων λόγου, καὶ ια
ἐκ τῶν ὑψέων, ἀποδέδεικται ὑπὸ τῶν πρότερον. ἁ αὐτὰ δὲ ἀπόδειξίς ἐντι. καὶ διότι πᾶν ἀπότμαμα κώνου ποτὶ ἀπότμαμα κώνου τὸν συγκείμενον λόγον ἔχει, ἔκ τε τοῦ τῶν βάσιων λόγου, καὶ τοῦ τῶν ὑψέων. καὶ ὅτι πᾶς τόμος κυλίνδρου, τριπλάσιον ἐστὶ τοῦ ἀποτμάματος τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τόμῳ, καὶ ὕψος ἴσον, ἁ αὐτὰ ἀπόδειξις, ἅπερ καὶ ὅτι ὁ κύλινδρος τριπλάσιός ἐστι τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ κυλίνδρῳ, καὶ ὕψος ἴσον.

Εἴκα τὸ ὀρθογώνιον κωνοειδὲς ἐπιπέδῳ τμαθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, ἢ παρὰ τὸν ἄξονα, ἁ τομὰ ἐσσεῖται ιβ
ὀρθογωνίου κωνοειδέος τομὰ αὐτὰ ἁ περιλαμβάνουσα τὸ σχῆμα. διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἐσσεῖται, ἁ κοινὰ τομὰ τῶν ἐπιπέδων τοῦ τέμνοντος τὸ σχῆμα, καὶ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος ἀχθέντος ὀρθοῦ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ τέμνον. εἰ δέ κα τμαθῇ τῷ ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, ἁ τομὰ κύκλος ἐσσεῖται, τὸ κέντρον ἔχων ἐπὶ τοῦ ἄξονος. εἴκα τὸ ἀμβλυγώνιον κωνοειδὲς ἐπιπέδῳ τμαθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, ἢ παρὰ τὸν ἄξονα διὰ τᾶς κορυφᾶς τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδές, ἁ τομὰ ἐσσεῖται ἀμβλυγωνίου κώνου τομά. εἰ μὲν διὰ τοῦ ἄξονος, αὐτὰ ἁ περιλαμβάνουσα τὸ σχῆμα, εἰ δὲ καὶ παρὰ τὸν ἄξονα ὁμοία αὐτᾷ. εἰ δὲ καὶ διὰ τᾶς κορυφᾶς τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδές, οὐχ ὁμοία. διάμετρος δὲ τᾶς τομᾶς ἐσσεῖται, ἁ κοινὰ τομὰ τῶν ἐπιπέδων τοῦ τέμνοντος τὸ σχῆμα, καὶ τοῦ ἀχθέντος διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθοῦ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον. εἴκα τμαθῇ ὀρθῷ τῷ ἐπιπέδῳ ποτὶ τὸν ἄξονα ἁ τομὰ κύκλος ἐσσεῖται, τὸ κέντρον ἔχων ἐπὶ τοῦ ἄξονος. εἴκα τῶν σφαιροειδέων σχημάτων ὁποτερὸν ἐπιπέδῳ τμαθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, ἢ παρὰ τὸν ἄξονα, ἁ τομὰ ἐσσεῖται ὀξυγωνίου κώνου τομά. εἰ μὲν καὶ διὰ τοῦ ἄξονος, αὐτὰ ἁ περιλαμβάνουσα τὸ σχῆμα. εἰ δὲ καὶ παρὰ τὸν ἄξονα ὁμοία αὐτᾷ, διάμετρος δὲ τᾶς τομᾶς ἐσσεῖται ἁ κοινὰ τῶν ἐπιπέδων τοῦ τέμνοντος τὸ σχῆμα, καὶ τοῦ ἀχθέν-

τος διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον. εἰ δὲ καὶ τμαθῇ τῷ ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα κύκλος ἐσσεῖται, τὸ κέντρον ἔχων ἐπὶ τοῦ ἄξονος. εἴκα τῶν εἰρημένων σχημάτων ὁποιονοῦν ἐπιπέδῳ τμαθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, αἱ ἀπὸ τῶν σαμείων τῶν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος μὴ ἐπὶ τᾶς τομᾶς ἐόντων κάθετοι ἀγόμεναι ἐπὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον, ἐντὸς πεσοῦνται τᾶς τοῦ σχήματος τομᾶς. τούτων δὲ πάντων φανερόν ἐντι αἱ ἀποδείξιες.

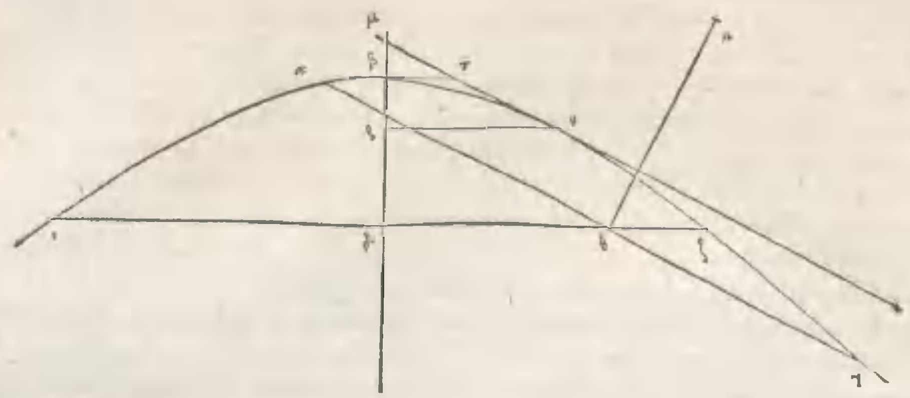
Εἴκα τὸ ὀρθογώνιον κωνοειδὲς ἐπιπέδῳ τμαθῇ, μήτε διὰ τοῦ ἄξονος, μήτε παρὰ τὸν ἄξονα, μήτε ποτ᾽ ὀρθὰς τῷ ἄξονι, ἁ τομὰ ἐσσεῖται ὀξυγωνίου κώνου τομά. διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἁ μείζων ἐσσεῖται ἁ ἐναπολαφθεῖσα ἐν τῷ κωνοειδεῖ, ἀπὸ τᾶς γενομένας τομᾶς τῶν ἐπιπέδων τοῦ τέμνοντος τὸ σχῆμα, καὶ τοῦ ἀχθέντος διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθοῦ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον. ἁ δὲ ἐλάσσων διάμετρος ἴσα ἐσσεῖται τῷ διαστήματι τᾶν ἀχθεισᾶν παρὰ τὸν ἄξονα, ἀπὸ τῶν περάτων τᾶς μείζονος διαμέτρου. τετμάσθω γὰρ τὸ ὀρθογώνιον κωνοειδὲς ἐπιπέδῳ, ὡς εἴρηται. τμαθέντος δὲ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ἄλλῳ, διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον. ἔστω τοῦ μὲν κωνοειδέος τομὰ ἁ α β γ, τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ τέμνοντος τὸ σχῆμα ἁ γ α εὐθεῖα. ἄξων δὲ ἔστω τοῦ κωνοειδέος, καὶ διάμετρος τᾶς τομᾶς ἁ β δ. δεικτέον ὅτι ἁ τομὰ τοῦ κωνοειδέος, ἁ ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου κατὰ τὰν α γ, ὀξυγωνίου ἐστὶ κώνου τομά. καὶ διάμετρος αὐτᾶς ἁ μείζων ἐστὶν ἁ α γ. ἁ δὲ ἐλάσσων διάμετρος ἴσα ἐντὶ τᾷ λ α, τᾶς μὲν γ λ παρὰ τὰν β δ ἐούσας, τᾶς δὲ α λ καθέτου ἐπὶ τὰν γ λ. νοείσθω τι σαμεῖον ἐπὶ τᾶς τομᾶς λελαμμένον τὸ κ, καὶ ἀπὸ τοῦ κ κάθετος ἤχθω ἐπὶ τὰν γ α, ἁ κ θ. ἐσσεῖται οὖν ἁ κ θ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ἐν ᾧ ἐστιν ἁ α γ β ὀρθογωνίου κώνου τομά. διότι καὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστι ποτὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον.



διὰ δὲ τοῦ θ ἄχθω ἁ ε ζ ὀρθὰς ποιοῦσα γωνίας ποτὶ τὰν β δ. καὶ διὰ τᾶν ε ζ, κ θ εὐθειᾶν ἐπίπεδον ἐκβεβλήσθω. ἐσσεῖται δὲ τοῦτο ὀρθὸν ποτὶ τὰν β δ. τετμάσεται δὲ τὸ κωνοειδὲς σχῆμα ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, ὥστε ἁ τομὰ κύκλος ἐσσεῖται, κέντρον δὲ αὐτοῦ τὸ δ. ἁ ἄρα κ θ ἴσον δυνασεῖται τῷ ὑπὸ ζ θ, θ ε. ἡμικύκλιον γάρ ἐστι τὸ ἐπὶ τᾶς ε ζ. καὶ ἡ κ θ κάθετος οὖσα, μέση γίνεται ἀνὰ λόγον τῶν ὑπὸ τᾶν ε θ, θ ζ περιεχομένων. ἄχθω δὲ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς, ἁ μὲν μ ν παρὰ τὰν α γ, ἐπιψαυέτω δὲ κατὰ τὸ ν, ἁ δὲ β τ παρὰ τὰν ε ζ. τὸ δὴ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν α θ, θ γ, ποτὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ε θ, θ ζ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶν ν τ, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς β τ. δέδεικται γὰρ τοῦτο. τὰ δὲ ν τ ἴσα ἐντὶ τᾷ τ μ. διότι καὶ ἁ β ρ τᾷ β μ. ἔχει οὖν καὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν α θ, θ γ, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς κ θ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς τ μ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς τ β. ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ τᾶς θ κ καθέτου τετράγωνον, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν α θ, θ γ περιεχόμενον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς β τ τετράγωνον, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς τ μ. ἐπεὶ οὖν ὅμοια ἐντὶ τὰ γ α λ, τ μ β τρίγωνα * ὁμοίως δειχθήσονται καὶ τὰ ἀπὸ τᾶν ἄλλαν καθέτων τετράγωνα, τᾶν ἀγομέναν ἀπὸ τᾶς τομᾶς ἐπὶ τὰν α γ, ποτὶ τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν τᾶς α γ τμαμάτων, τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς α λ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς α γ. δῆλον οὖν ὅτι ἁ τομὰ ἐστὶν ὀξυγωνίου κώνου τομά. διάμετρος δὲ αὐτᾶς εἰσὶν ἁ μὲν μείζων ἁ α γ, ἁ δὲ ἐλάσσων ἴσα τᾷ α λ.

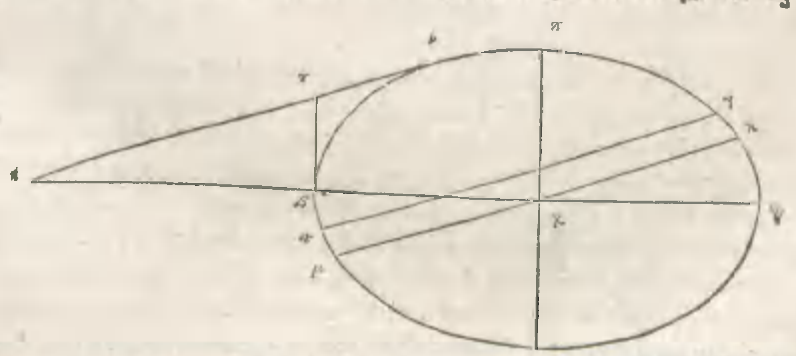
Εἴκα τὸ ἀμβλυγώνιον κωνοειδὲς ἐπιπέδῳ τμαθῇ συμπίπτοντι πάσαις ταῖς τοῦ κώνου πλευραῖς τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδὲς, μὴ ποτ᾽ ὀρθὰς τῷ ἄξονι, ἁ τομὰ ἐσσεῖται ὀξυγωνίου κώνου τομά. διά-

μετρος δὲ αὐτᾶς ἁ μείζων ἐσσεῖται, ἁ ἐναπολαφθεῖσα ἐν τῷ κωνοειδεῖ ἀπὸ τᾶς γενομένας τομᾶς τῶν ἐπιπέδων, τοῦ τε τέμνοντος τὸ σχῆμα καὶ τοῦ ἀχθέντος διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθοῦ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον. τεμνέσθω γὰρ τὸ ἀμβλυγώνιον κωνοειδὲς ἐπιπέδῳ, ὡς εἴρηται. καὶ ἄλλῳ ἐπιπέδῳ τμαθέντος αὐτοῦ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον, τοῦ μὲν κωνοειδέος τομὰ ἔστω ἁ α β γ ἀμβλυγωνίου κώνου τομά, τοῦ δὲ τέμνοντος τὸ σχῆμα ἐπιπέδου ἁ α γ εὐθεῖα. ἄξων δὲ τοῦ κωνοειδέος,



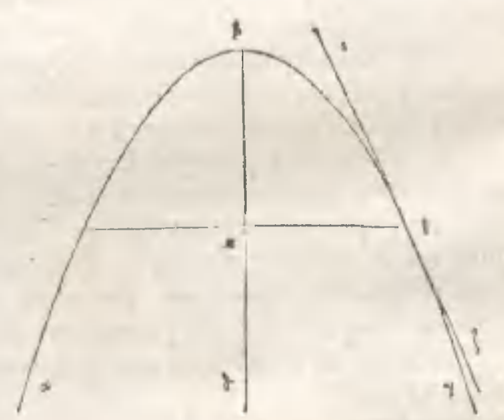
καὶ διάμετρος τᾶς τομᾶς ἁ β δ. νοείσθω δή τι ἐπὶ τᾶς τομᾶς λελαμμένον σαμεῖον τὸ κ, καὶ ἀπὸ τοῦ κ κάθετος ἄχθω ἐπὶ τὰν α γ, ἁ κ θ. ἐσσεῖται δὴ αὕτα ὀρθὰ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ἐν ᾧ ἐντὶ ἁ α β γ κώνου τομά. διὰ δὲ τοῦ θ ἄχθω ἁ ε ζ ποτ᾽ ὀρθὰς τᾷ β δ. καὶ διὰ τᾶν ε ζ, κ θ εὐθειᾶν ἐπίπεδον ἄχθω, τέμνον τὸ κωνοειδές. τετμάσεται δὴ ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, ὥστε ἁ τομὰ κύκλος ἐσσεῖται, κέντρον δὲ αὐτοῦ τὸ δ. ἁ ἄρα κάθετος ἁ κ θ ἴσον δυνασεῖται τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν ε θ, θ ζ. ἄχθω δὴ πάλιν ἁ μὲν μ ν παρὰ τὰν α γ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ ν. ἁ δὲ β τ παρὰ τὰν ε ζ. τὸ δὴ περιεχόμενον ὑπὸ ε θ, θ ζ ποτὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν α θ, θ γ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς β τ πρὸς τὸ ἀπὸ τᾶς τ ν. ὥστε τὸ ἀπὸ τᾶς κ θ καθέτου τετράγωνον ποτὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν α θ, θ γ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς β τ, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς τ ν. ὁμοίως οὖν δειχθήσονται, καὶ τὰ ἀπὸ τᾶν ἄλλαν καθετᾶν τᾶν ἀπὸ τᾶς τομᾶς ἀγομένων, ἐπὶ τὰν α γ ποτὶ τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν τμαμάτων τᾶς α γ, ὧν αἱ κάθετοι ποιοῦντι, τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς β τ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς τ ν. καὶ ἔστιν ἐλάσσων ἁ β τ τᾶς τ ν. διότι καὶ ἁ μ τ ἐλάσσων ἐστὶ τᾶς τ ν. καὶ γὰρ ἁ μ β, ἐλάσσων τᾶς β ρ. τοῦτο γάρ ἐστιν ἐν ταῖς τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομαῖς συμπίπτοντι. δῆλον ὅτι ἁ τομὰ, ὀξυγωνίου κώνου τομά. ἡ διάμετρος αὐτᾶς μείζων ἁ α γ. ὁμοίως καθέτου οὔσης τᾶς ν ρ ἐν τᾷ τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομᾷ, διάμετρος ταύτας μείζων ἐστὶν ἁ γ λ.

Εἴκα καὶ τὸ παραμακὲς σφαιροειδὲς ἐπιπέδῳ τμαθῇ, μὴ ποτ᾽ ὀρθὰς τῷ ἄξονι, ἁ τομὰ ἐσσεῖται ὀξυγωνίου κώνου τομά. διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἁ μείζων ἐσσεῖται, ἁ ἐναπολαφθεῖσα ἐν τῷ σφαιροειδεῖ ἀπὸ τᾶς γενομένας τομᾶς τῶν ἐπιπέδων τοῦ τέμνοντος τὸ σχῆμα, καὶ τοῦ ἀχθέντος διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθοῦ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον. εἰ μὲν οὖν κατατμαθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, ἢ παρὰ τὸν ἄξονα δῆλον. τετμάσθω δὲ ἄλλῳ ἐπιπέδῳ. τμαθέντος δὲ αὐτοῦ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὸ τέμνον τοῦ σφαιροειδέος τομά. ἔστω ἁ α β γ δ ὀξυγωνίου κώνου τομά. τοῦ δὲ τέμνοντος αὐτὸ ἐπιπέδου, ἁ γ α εὐθεῖα. ἄξων δὲ ἔστω



τοῦ σφαιροειδέος, καὶ διάμετρος τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἁ β δ. κέντρον δὲ τὸ χ. καὶ ἐλάσσαν διάμετρος ἔστω ἁ π ρ. ἄχθω δὲ ἁ μὲν β τ ποτ' ὀρθὰς τᾷ β δ, ἁ δὲ ν παρὰ τὰν α γ, ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς κατὰ τὸ ν. ἄχθω δὲ καὶ ἁ ν λ διὰ τοῦ χ παρὰ τὰν α γ. ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον δειχθησοῦντι τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν καθέτων τᾶν ἀπὸ τᾶς τομᾶς ἐπὶ τὰν α γ ἀγομένας ποτὶ τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν τᾶς α γ τμαμάτων, τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον ἐν τῷ ἀπὸ τᾶς β τ τετράγωνον, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς τ ν. ὅτι μὲν οὖν ἁ τομὰ οὐ ἐστὶν ὀξυγωνίου κώνου τομά, ἃ διάμετρος αὐτᾶς ἁ γ α, δῆλον. ὅτι δὲ μείζων, δεικτέον. τὸ γὰρ ὑπὸ τᾶν π χ, χ ρ περιεχόμενον ποτὶ τὸ ὑπὸ μ χ, χ λ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς β τ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ν τ. ἐπεὶ παρὰ τὰς ἐπιψαυούσας ἐντὶ αἱ π ρ, μ λ. ἔλασσον δέ ἐστι τὸ ὑπὸ τᾶν π χ, χ ρ περιεχόμενον τοῦ ὑπὸ τᾶν μ χ, χ λ. ἐπεὶ καὶ ἁ χ π τᾶς χ λ. ἔλασσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τᾶς β τ τετραγώνου, τοῦ ἀπὸ τᾶς τ ν. ὥστε καὶ τὰ ἀπὸ τῶν καθέτων τετράγωνα τῶν ἀπὸ τᾶς τομᾶς ἐπὶ τὰν α γ ἀγομένων ἐλάσσω ἐντὶ τῶν ὑπὸ τᾶν τμαμάτων περιεχομένων. δῆλον οὖν ὅτι μείζων ἐντὶ διάμετρος ἁ γ α. εἴκα τὸ πλατὺ σφαιροειδὲς ἐπιπέδῳ τμαθῇ, τὰ μὲν ἄλλα τὰ αὐτὰ ἐσσεῖται. τᾶν δὲ διαμέτρων ἐλάσσων ἐσσεῖται ἁ ἐναπολαφθεῖσα ἐν τῷ σφαιροειδεῖ. ἐξ αὐτῶν δὲ φανερὸν ἐν πᾶσι τοῖς σχημάτεσσιν, ὅτι εἴκα παραλλήλοις ἐπιπέδοις τμαθῇ, αἱ αὐτῶν τομαὶ ὁμοῖαι ἐσσοῦνται. τὰ γὰρ τετράγωνα τᾶν ἀπὸ τῶν καθέτων ποτὶ τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν τμαμάτων τοὺς αὐτοὺς λόγους ἕξοντι.

ιε Εἴκα τῷ ὀρθογωνίῳ κωνοειδεῖ ἀπὸ παντὸς οὗ δήποκα σαμείου τῶν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κωνοειδέος ἀχθῶντι αὐτᾶν ἀγομέναν εὐθεῖαν παρὰ τὸν ἄξονα, αἱ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἀγόμεναι, ἐφ' ἃ ἐντὶ τὰ κυρτὰ αὐτοῦ, ἐκτὸς πεσοῦνται τοῦ κωνοειδέος, αἱ δὲ ἐπὶ θάτερα ἐντός. ἀχθέντος γὰρ ἐπιπέδου διά τε τοῦ ἄξονος καὶ τοῦ σαμείου, ἀφ' οὗ ἁ παράλληλος ἄγεται τῷ ἄξονι, τομὰ ἐσσεῖται ὀρθογωνίου κώνου τομά. διάμετρος δὲ αὐτᾶς ὁ ἄξων τοῦ κωνοειδέος. ἐν δὲ τᾷ τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾷ, ἀπὸ παντὸς σαμείου τῶν ἐπὶ τᾶς τομᾶς ἀγομέναν παρὰ τὰν διάμετρον εὐθεῖαν, αἱ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἀγόμεναι, ἐφ' ἃ ἐντὶ τὰ κυρτὰ αὐτῆς, ἐκτὸς πίπτοντι, αἱ δὲ ἐπὶ τὰ θάτερα ἐντός. δῆλον οὖν τὸ προτεθέν. ἐν τῷ ἀμβλυγωνίῳ κωνοειδεῖ ἀπὸ παντὸς σαμείου τῶν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ αὐτοῦ τὰν ἀγομέναν εὐθεῖαν παρά τινα γραμμάν, ἅ ἐστιν ἐν τῷ κωνοειδεῖ ἀγομένας διὰ τᾶς κορυφᾶς τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδές, αἱ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἀγόμεναι, ἐφ' ἃ ἐντὶ τὰ κυρτὰ αὐτοῦ ἐκτὸς πεσοῦνται τοῦ κωνοειδέος, αἱ δὲ ἐπὶ θάτερα ἐντός. ἀχθέντος γὰρ ἐπιπέδου διά τε τᾶς εὐθείας τᾶς ἐν τῷ κωνοειδεῖ ἀγομένας διὰ τᾶς κορυφᾶς τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδές, καὶ διὰ τοῦ σαμείου ἀφ' οὗ ἄγεται ἁ εὐθεῖα, ἁ τομὰ ἐσσεῖται ἀμβλυγωνίου κώνου τομά. διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἁ ἀπὸ τᾶς κορυφᾶς τοῦ κώνου ἐν τῷ κωνοειδεῖ ἀγομένα. ἐν δὲ τᾷ τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομᾷ ἀπὸ παντὸς σαμείου τῶν ἐπὶ τᾶς τομᾶς τὰν ἀγομέναν εὐθεῖαν παρὰ τὰν οὕτως ἀγμέναν γραμμάν, αἱ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἀγόμεναι, ἐφ' ἃ ἐστὶν αὐτᾶς τὰ κυρτὰ ἐκτὸς πίπτοντι, αἱ δὲ ἐπὶ θάτερα ἐντός.



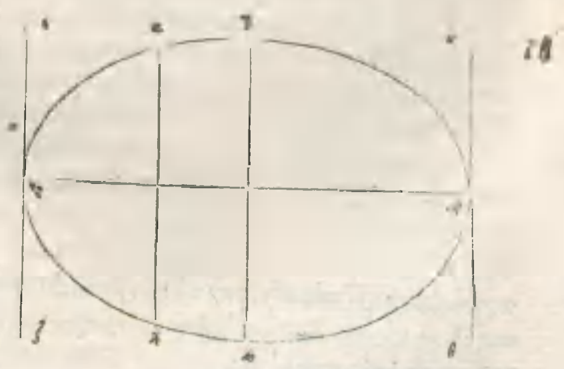
εἴκα τῶν κωνοειδέων σχημάτων ἐπίπεδον ἐφάπτηται, μὴ τέμνον τὸ κωνοειδές, καθ' ἓν μόνον ἅψεται σαμεῖον. καὶ τὸ διὰ τᾶς ἁφᾶς καὶ τοῦ ἄξονος ἐπίπεδον ἀχθὲν ὀρθὸν ἐσσεῖται ποτὶ τὸ ἐπιψαῦον ἐπίπεδον. ἐφαπτέσθω γὰρ εἰ δυνατὸν κατὰ πλείονα σαμεῖα. λαφθέντων δὲ δύο σαμείων καθ' ἃ ἅπτεται τὸ ἐπιψαῦον ἐπίπεδον τοῦ κωνοειδέος, καὶ ἀφ' ἑκατέρου παρὰ τὸν ἄξονα εὐθειᾶν ἀχθεισᾶν. ἀπὸ δὲ τᾶν ἀχθεισᾶν παρὰ τὸν ἄξονα ἐπίπεδον ἐκβληθὲν, ἤτοι διὰ τοῦ ἄξονος, ἢ παρὰ τὸν ἄξονα ἐσσεῖται ἀγμένον. ὥστε τὰν τομὰν ποιήσει κώνου τομάν, καὶ τὰ σαμεῖα ἐσσοῦνται ἐν τᾷ τοῦ κώνου τομᾷ. ἐπεὶ οὖν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐντί, καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ. ἁ οὖν μεταξὺ τῶν σαμείων εὐθεῖα ἐντὸς ἐσσεῖται τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς, ὥστε καὶ τᾶς τοῦ κωνοειδέος ἐπιφανείας ἐντὸς ἐσσεῖται. ἔστι δὲ ἁ εὐθεῖα αὐτὰ ἐν τῷ ἐπιψαύοντι ἐπιπέδῳ. διότι καὶ τὰ σαμεῖα. τοῦ ἄρα ἐπιψαύοντος ἐπιπέδου ἐσσεῖταί τι ἐντὸς τοῦ κωνοειδέος, ὅπερ ἀδύνατον. ὑπέκειτο γάρ, μὴ τέμνειν. καθ' ἓν ἄρα μόνον ἅψεται σαμεῖον. ὅτι δὲ καὶ διὰ τᾶς ἁφᾶς καὶ τοῦ ἄξονος ἐπίπεδον ἀχθὲν ὀρθὸν ἐσσεῖται ποτὶ τὸ ἐπιψαῦον κατὰ τὰν κορυφὰν τοῦ κωνοειδέος, ἐφάπτεται δῆλον. ἀχθέντων γὰρ διὰ τοῦ ἄξονος

δύο ἐπιπέδων τοῦ κωνοειδέος αἱ τομαὶ ἐσσοῦνται κώνων τομαί, διάμετρον ἔχουσαι τὸν ἄξονα. τοῦ δὲ ἐπιψαύοντος ἐπιπέδου αἱ εὐθεῖαι ἐπιψαύουσαι τᾶν τῶν κώνων τομᾶν κατὰ τὸ πέρας τᾶς διαμέτρου ὀρθὰς ποιοῦντι γωνίας ποτὶ τὰν διάμετρον. ἐσσοῦνται οὖν ἐν τῷ ἐπιψαύοντι ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι ποτ' ὀρθὰς τῷ ἄξονι, ὀρθὸν οὖν ἐσσεῖται ποτὶ τὸν ἄξονα τὸ ἐπίπεδον. ὥστε καὶ πρὸς τὸ διὰ τοῦ ἄξονος. ἀλλὰ ἔστω μὴ κατὰ τὰν κορυφὰν τοῦ κωνοειδέος ἐπιψαῦον τὸ ἐπίπεδον. ἄχθω δὴ ἐπίπεδον διὰ τᾶς ἁφᾶς καὶ τοῦ ἄξονος. καὶ τοῦ μὲν κωνοειδέος τομά, ἔστω ἁ β γ κώνου τομά. ἄξων δὲ ἔστω καὶ διάμετρος τᾶς τομᾶς ἁ β δ. τοῦ δὲ ἐπιψαύοντος ἐπιπέδου τομά, ἔστω ἁ ε θ ζ εὐθεῖα, τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς ἁπτομένα κατὰ τὸ θ. ἀπὸ δὲ τοῦ θ κάθετος ἄχθω ἐπὶ τὰν β δ, ἁ θ κ καὶ ἐπίπεδον ἀνεστακέτω ὀρθὸν ἐπὶ τὸν ἄξονα. ποιήσει δὲ τοῦτο τὰν τομὰν κύκλον, οὗ κέντρον τὸ κ. ἁ δὲ τομὰ τούτου τοῦ ἐπιπέδου καὶ τοῦ ἐπιψαύοντος ἐσσεῖται ἐπιψαύουσα τοῦ κύκλου, ὀρθὰς ἄρα ποιήσει γωνίας ποτὶ τὰν θ κ. ὥστε ὀρθὰ ἐσσεῖται ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, τῷ ἐν ᾧ ἐντὶ αἱ κ θ, β δ. δῆλον οὖν ὅτι καὶ τὸ ἐπιψαῦον ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστι ποτὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, ἐπεὶ καὶ αἱ ἐν αὐτῷ εὐθεῖαι.

ιζ Εἴκα τῶν σφαιροειδέων σχημάτων ὁποτερονοῦν ἐπίπεδον ἅπτηται μὴ τέμνον τὸ σχῆμα, καθ' ἓν μόνον ἅψεται σαμεῖον, καὶ τὸ διὰ τᾶς ἁφᾶς καὶ τοῦ ἄξονος ἐπίπεδον ἀχθὲν ὀρθὸν ἐσσεῖται ποτὶ τὸ ἐπιψαῦον ἐπίπεδον. ἁπτέσθω γὰρ κατὰ πλείονα σαμεῖα. λαφθέντων δὲ τῶν σαμείων καθ' ἃ ἅπτεται τὸ ἐπίπεδον τοῦ σφαιροειδέος, καὶ ἀφ' ἑκατέρου αὐτῶν παρὰ τὸν ἄξονα εὐθειᾶν ἀχθεισᾶν, καὶ διὰ τῶν ἀχθεισᾶν ἐπιπέδου ἐκβληθέντος ἁ τομὰ ἐσσεῖται ὀξυγωνίου κώνου τομά. καὶ τὰ σαμεῖα ἐσσοῦνται ἐν τᾷ τοῦ κώνου τομᾷ. ἁ οὖν μεταξὺ τῶν σαμείων εὐθεῖα ἐντὸς ἐσσεῖται τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς. ὥστε καὶ τᾶς τοῦ σφαιροειδέος ἐπιφανείας ἐντὸς ἐσσεῖται. ἔστι δὲ ἁ εὐθεῖα ἐν τῷ ἐπιψαύοντι ἐπιπέδῳ, διότι καὶ τὰ σαμεῖα. τοῦ οὖν ἐπιψαύοντος ἐπιπέδου ἐσσεῖταί τι ἐντὸς τοῦ σφαιροειδέος. οὐκ ἔστι δέ, ὑπέκειτο γὰρ μὴ τέμνειν. δῆλον οὖν ὅτι καθ' ἓν σαμεῖον μόνον ἅψεται. ὅτι δὲ τὸ διὰ τᾶς ἁφᾶς, καὶ τοῦ ἄξονος ἐπίπεδον ἀχθὲν, ὀρθὸν ἐσσεῖται ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ἐπιψαῦον, ὁμοίως δείκνυται τοῖς ἐπὶ τῶν κωνοειδέων σχημάτων. εἴκα τῶν σφαιροειδέων σχημάτων ὁποιονοῦν ἐπιπέδῳ τμαθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ τᾶς γενομένας τομᾶς ἐπιψαύουσά τις ἀχθῇ εὐθεῖα, καὶ διὰ τᾶς ἐπιψαυούσας ἐπίπεδον ἀνασταθῇ ὀρθὸν ποτὶ τὸ τέμνον, ἐπιψαύσει τοῦ σχήματος κατὰ τὸ αὐτὸ σαμεῖον, καθ' ὃ καὶ ἁ εὐθεῖα ἐπιψαύει τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς. οὐ γὰρ ἅψεται κατ' ἄλλο σαμεῖον τᾶς ἐπιφανείας αὐτοῦ. εἰ δὲ μή, ἁ ἀπὸ τοῦ σαμείου κάθετος ἀγομένα ἐπὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον πεσεῖται ἐντὸς τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς, ἐπεὶ καὶ τὰν ἐπιψαύουσαν πεσεῖται. ἐπεὶ ὀρθὰ ποτ' ἄλλαλα ἐντὶ τὰ ἐπίπεδα, ὅπερ ἀδύνατον. ἐδείχθη γὰρ ὅτι ἐντὸς πεσεῖται.

Εἴκα τῶν σφαιροειδέων τινὸς σχημάτων δύο ἐπίπεδα παράλληλα ἐπιψαύοντι, ἁ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα διὰ τοῦ κέντρου τοῦ σφαιροειδέος πορεύσεται. ὅτι μὲν οὖν κατ' ὀρθὰς τῷ ἄξονι τὰ ἐπίπεδα ἐόντα δῆλον. ἀλλ' ἔστω μὴ ποτ' ὀρθάς. τὸ δὴ ἐπίπεδον τὸ ἀχθὲν διὰ τοῦ ἄξονος καὶ τᾶς ἁφᾶς τᾶς ἑτέρας, ὀρθόν ἐσσεῖται πρὸς τὸ ἐπιψαῦον ἐπίπεδον. ὥστε καὶ ποτὶ τὸ παράλληλον αὐτῷ. ἀναγκαῖον ἄρα τὸ αὐτὸ εἶμεν ἐπίπεδον, ὃ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ἑκατέρας ἁφᾶς ἀγμένον. εἰ δὲ μὴ ἐσσοῦνται δύο ἐπίπεδα ποτὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, ὀρθὰ διὰ τᾶς αὐτᾶς γραμμᾶς ἀγμένα. οὐκ ἐσσᾶς ὀρθᾶς ποτὶ τὸ ἐπίπεδον. ὑπέκειτο γὰρ ὁ ἄξων μὴ εἶμεν ὀρθὸς ποτὶ τὰ παράλληλα ἐπίπεδα. ἐν τῷ αὐτῷ ἄρα ἐσσοῦνται ἐπιπέδῳ ὅ τε ἄξων καὶ αἱ ἁφαί, καὶ τετμημένος ἐσσεῖται τὸ σφαιροειδὲς διὰ τοῦ ἄξονος. ἁ οὖν τομὰ ἐσσεῖται, ὀξυγωνίου κώνου τομά. αἱ δὲ τῶν ἐπιψαυουσᾶν ἐπιπέδων τομαὶ παράλληλοι ἐσσοῦνται. αἱ ἐπιψαύουσαι τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς κατὰ τὰς ἁφὰς τῶν ἐπιπέδων. εἰ δέ κα δύο εὐθεῖαι ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἐπιψαύωντι παράλληλοι ἐοῦσαι, τὸ κέντρον τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, καὶ αἱ ἁφαὶ ἐπ' εὐθείαν ἐόντι.

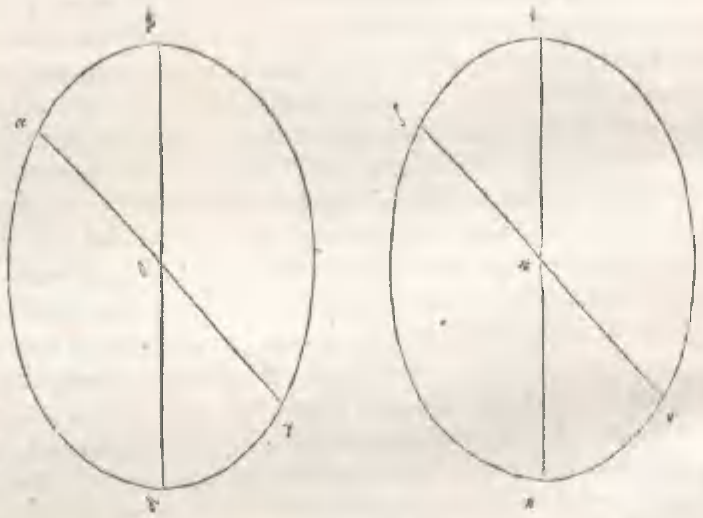
ιη Εἴκα τοῦ σφαιροειδέος σχήματος ὁποτερουοῦν δύο παράλληλα ἐπίπεδα ἀχθῇ ἐπιψαύοντα, ἀχθῇ δὲ καὶ ἐπίπεδον διὰ τοῦ κέντρου τοῦ σφαιροειδέος παρὰ τὰ ἐπιψαύοντα, αἱ διὰ τᾶς γενομένας τομᾶς ἀγόμεναι παρὰ τὰν τᾶς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν, ἐκτὸς πεσοῦνται τοῦ σφαιροειδέος. ὑποκείσθω τὰ εἰρημένα, καὶ λελάφθω τι σαμεῖον ἐπὶ τᾶς γενομένας τομᾶς. καὶ διὰ τοῦ γενομένου σαμείου, καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσας ἐπίπεδον ἄχθω. τέμνει δὲ τοῦτο τὸ σφαιροειδὲς καὶ τὰ παράλληλα ἐπίπεδα. ἔστω οὖν ἁ μὲν τοῦ



σφαιροειδέος τομὰ ἁ αβγδ ὀξυγωνίου κώνου τομά. αἱ δὲ τῶν ἐπιπέδων τῶν ἐπιψαυόντων τομαί, αἱ εζ, ηθ εὐθεῖαι. τὸ δὴ λαφθὲν σαμεῖον, τὸ α. ἁ δὲ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσα ἔστω ἁ βδ. πεσεῖται δὴ αὐτὰ διὰ τοῦ κέντρου. ἁ δὲ τοῦ παραλλήλου ἐπιπέδου τοῖς ἐπιψαύουσιν ἐπιπέδοις τομὰ ἁ γα. ἐσσεῖται δὴ αὐτὰ διὰ τοῦ κέντρου ἀγομένα, ἐπεὶ καὶ τὸ ἐπίπεδον. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ἁ αβγδ, ἤτοι κύκλος ἢ ὀξυγωνίου κώνου τομά, καὶ ἐπιψαύοντι αὐτᾶς αἱ δύο εὐθεῖαι αἱ εζ, ηθ. διὰ δὲ τοῦ κέντρου παράλληλος αὐταῖς ἁ γα. δῆλον ὡς αἱ ἀπὸ τῶν α, γ ἀγόμεναι σαμείων παρὰ τὰν βδ ἐπιψαυόντι τᾶς τομᾶς, ἐκτὸς πεσοῦνται τοῦ σφαιροειδέος. ἁ δὲ καὶ τὸ παράλληλον ἐπίπεδον τοῖς ἐπιψαύουσι σαμείοις, μὴ διὰ τοῦ κέντρου ἀγμένον, ὡς τὸ κλ. δῆλον ὡς τὰν ἀπὸ τᾶς τομᾶς τὰν γνωμόναν εὐθεῖαν, αἱ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ γινόμεναι τῷ ἐλάσσονι τμάματι, ἐκτὸς πεσοῦνται τοῦ σφαιροειδέος, αἱ δὲ ἐπὶ θάτερα ἐντός.

κ

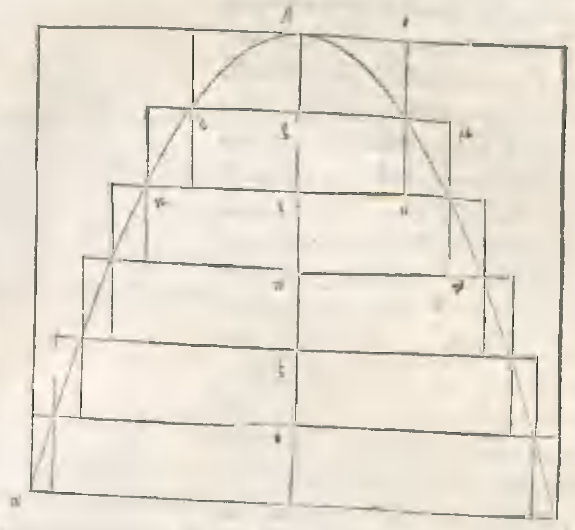
Πᾶν σχῆμα σφαιροειδὲς ἐπιπέδῳ τμηθὲν διὰ τοῦ κέντρου, δίχα τέμνεται ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου, καὶ αὐτὸ καὶ ἁ ἐπιφάνεια αὐτοῦ. τετμάσθω γὰρ τὸ σφαιροειδὲς ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ κέντρου, ἤτοι δὴ καὶ διὰ τοῦ ἄξονος ἐσσεῖται τετμημένον, ἢ ποτ᾽ ὀρθὰς τῷ ἄξονι. εἰ μὲν οὖν διὰ τοῦ ἄξονος τέμνεται, ἢ ποτ᾽ ὀρθὰς τῷ ἄξονι, δῆλον ὡς δίχα τέμνεται τό τε αὐτὸ καὶ ἁ ἐπιφάνεια αὐτοῦ. φανερὸν γὰρ ὅτι ἐφαρμόζει τὸ ἕτερον μέρος αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἕτερον, καὶ ἁ ἐπιφάνεια τοῦ ἑτέρου μέρεος ἐπὶ τὰν ἑτέρου. ἀλλ᾽ ἔστω μὴ διὰ τοῦ ἄξονος τετμημένον, μήτε ποτ᾽ ὀρθὰς τῷ ἄξονι. τμηθέντος δὴ τοῦ σφαιροειδέος ἐπιπέδῳ ὀρθῷ, ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον διὰ τοῦ ἄξονος, αὐτοῦ μὲν τοῦ σχήματος τομὰ ἔστω ἁ αβγδ ὀξυγωνίου κώνου τομά. διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἔστω καὶ ἄξων τοῦ σφαιροειδέος, ἁ βδ. καὶ κέντρον τὸ θ. τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ τετμηκότος διὰ τοῦ κέντρου τοῦ σφαιροειδέος, ἔστω τομὰ ἁ αγ εὐθεῖα. λελάφθω δὴ καὶ ἄλλο σφαιροειδές, ἴσον καὶ ὅμοιον τούτῳ. καὶ τμηθέντος αὐτοῦ διὰ τοῦ ἄξονος ἐπιπέδῳ τομά, ἔστω ἁ εζην ὀξυγωνίου κώνου τομά. διάμετρος δὲ αὐτᾶς καὶ ἄξων τοῦ σφαιροειδέος ἁ εη, καὶ κέντρον τὸ κ. καὶ διὰ τοῦ κ ἄχθω ἁ ζν γωνίαν ποιοῦσα τὰν κ, ἴσαν τᾷ θ. ἀπὸ δὲ τᾶς ζν ἐπίπεδον ἔστω ἀνεστακὸς ὀρθὸν ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστιν ἁ εζην τομὰ ἐντὶ διὰ τῶν ὀξυγωνίων κώνων τομαί, αἱ αβγδ, εζην, ἴσαι καὶ ὅμοιαι ἀλλήλαις.



ουτι. ἐφαρμόζοντι οὖν ἐπ᾽ ἀλλάλας τεθείσας τᾶς εη ἐπὶ τὰν βδ, καὶ ἁ ζν ἐπὶ τὰν αγ. ἐφαρμόζει δὲ καὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ κατὰ τὰν νζ τῷ ἐπιπέδῳ τῷ κατὰ τὰν αγ. ἐπεὶ ἀπὸ τᾶς αὐτᾶς γραμμᾶς ποτὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ἀμφότερα ἐντί, ἐφαρμόζει οὖν καὶ τὸ τμᾶμα τὸ ὑπὸ ἐπιπέδου ἀποτεμνόμενον τοῦ κατὰ τὰν νζ, ἀπὸ τοῦ σφαιροειδέος τοῦ ἐπὶ τὰ ἕτερα τμάματι τῷ ἀποτεμνομένῳ ἀπὸ τοῦ ἑτέρου σφαιροειδέος, ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κατὰ τὰν αγ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ β. καὶ λοιπὸν τμᾶμα ἐπὶ τὸ λοιπόν. καὶ ἁ ἐπιφάνεια τῶν τμαμάτων ἐπὶ τὰς ἐπιφανείας. πάλιν δὲ καὶ τεθείσας τᾶς εη ἐπὶ τὰν βδ οὕτως, ὥστε τὸ μὲν ε κατὰ τὸ δ κεῖσθαι. τὸ δὲ η κατὰ τὸ β. τὰ δὲ μεταξὺ τῶν ν ζ σαμείων γραμμὰν

ουτι ἐπὶ τὰν μεταξὺ τῶν α γ σαμείων. δῆλον ὡς αἵ τε τῶν ὀξυγωνίων κώνων τομαὶ ἐφαρμόζοντι ἐπ᾽ ἀλλάλας. καὶ τὸ μὲν ζ ἐπὶ τὸ γ πεσεῖται, τὸ δὲ ν ἐπὶ τὸ α. ὁμοίως καὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ κατὰ τὰν νζ, ἐφαρμόζει τῷ ἐπιπέδῳ τῷ κατὰ τὰν αγ. καὶ τῶν τμαμάτων τῶν ἀποτεμνομένων ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κατὰ τὰν νζ. τὸ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ η ἐφαρμόζει τῷ τμάματι, τῷ ἀποτεμνομένῳ ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κατὰ τὰν αγ, ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ β. τὸ δὲ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ ε τῷ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ δ. ἐπεὶ δὲ τὸ αὐτὸ τμᾶμα ἑκατέρου τῶν τμαμάτων ἐφαρμόζει, δῆλον ὅτι ἴσα ἐντὶ τὰ τμάματα. διὰ ταῦτα δὲ καὶ αἱ ἐπιφάνειαι.

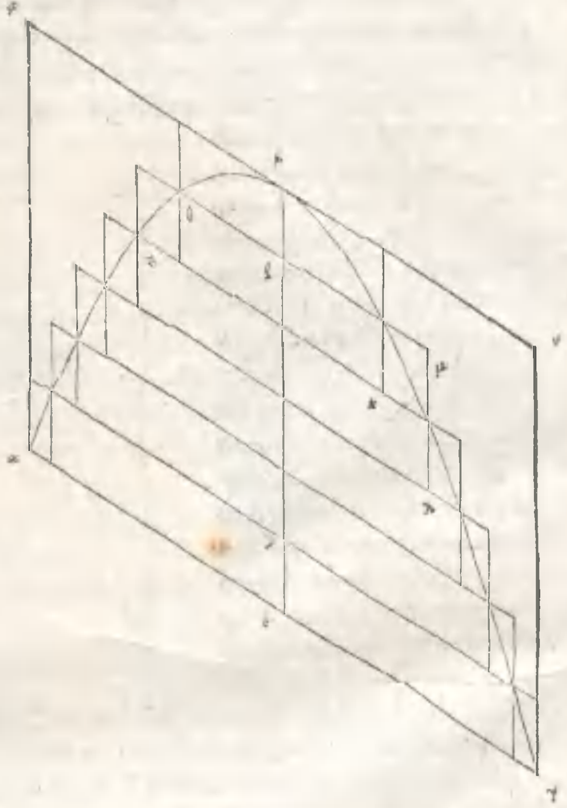
Τμάματος δοθέντος ὁποτερουοῦν τῶν κωνοειδέων, ἀποτεμνομένου ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, ἢ τῶν σφαιροειδέων ὁποτερουοῦν, μὴ μείζονος ἡμίσεος τοῦ σφαιροειδέος, ὁμοίως ἀποτεμνομένου, δυνατόν ἐστι σχῆμα στερεὸν ἐγγράψαι, καὶ ἄλλο περιγράψαι ἐκ κυλίνδρων ἴσον ὕψος ἐχόντων τῶν συγκειμένων. ὥστε τὸ περιγραφόμενον σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ἐλάσσονι ὑπερέχειν παντὸς τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος. δεδόσθω τμῆμα, οἷόν ἐστι τὸ αβγ. τμηθέντος δὲ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος τμάματος, τομὰ ἔστω ἁ αβγ κώνου τομά, τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἀποτέμνοντος τὸ τμᾶμα ἁ αγ εὐθεῖα. ἄξων δὲ ἔστω τοῦ τμάματος καὶ διάμετρος τᾶς τομᾶς, ἁ βδ. ἐπεὶ οὖν ὑπόκειται τὸ ἀποτέμνον ἐπίπεδον ὀρθὸν εἶμεν ἐπὶ τὸν ἄξονα, ἁ τομὰ κύκλος ἐστί, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἁ γα. ἀπὸ δὲ τοῦ κύκλου τούτου κύλινδρος ἔστω, ἄξονα ἔχων τὸν βδ. πεσεῖται δὲ ἁ ἐπιφάνεια αὐτοῦ ἐκτὸς τοῦ τμάματος. ἐπεὶ ἐστὶ δὲ ἢ τὸ κωνοειδές, ἢ σφαιροειδὲς μὴ μεῖζον τοῦ ἡμίσεος τοῦ σφαιροειδέος, τοῦ δὴ κυλίνδρου τούτου ἀεὶ δίχα τεμνομένου ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, ἐσσεῖταί ποτε τὸ καταλειπόμενον ἔλασσον τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος. ἔστω δὲ τὸ καταλελειμμένον ἀπ᾽ αὐτοῦ κύλινδρος, ἔχων βάσιν τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν αγ, ἄξονα δὲ τὸν εδ, ἔλασσον τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος.



διαιρησθῶ. διαιρήσθω δὴ ἁ βδ εἰς τὰς ἴσας τᾶς εδ, κατὰ τὰ ρ ο, π ξ. καὶ ἀπὸ τῶν διαιρεσίων ἄχθων εὐθεῖαι παρὰ τὰν αγ. ἔστε ποτὶ τὰν τοῦ κώνου τομάν. ἀπὸ δὲ τῶν ἀχθεισῶν ἐπίπεδα ἀνεστακέτω ὀρθὰ ποτὶ τὰν βδ. ἐσσοῦνται δὴ αἱ τομαὶ κύκλοι, τὰ κέντρα ἔχοντες ἐπὶ τᾶς βδ. ἐφ᾽ ἑκάστου δὴ τῶν κύκλων δύο κύλινδροι ἀναγεγράφθω, ἑκάτερος ἔχων ἄξονα ἴσον τῷ εδ, ὁ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἐφ᾽ ἅ ἐστι τὸ β. ἐσσεῖται δή τι ἐν τῷ τμάματι σχῆμα στερεὸν ἐγγεγραμμένον ἐκ τῶν κυλίνδρων συγκείμενον τῶν ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἀναγραφέντων, ἐφ᾽ ἅ ἐστι τὸ δ. καὶ ἄλλο περιγεγραμμένον, καὶ συγκείμενον ἐκ τε τῶν κυλίνδρων τῶν ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἀναγραφέντων τῶν ἐφ᾽ ἃ τὸ β ἐστί. λοιπὸν δὲ δεῖξαι, ὅτι τὸ περιγεγραμμένον τοῦ ἐγγεγραμμένου ὑπερέχει ἐλάσσονι τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος. ἕκαστος δὴ τῶν κυλίνδρων τῶν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι ἴσος ἐστὶ τῷ κυλίνδρῳ τῷ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ κύκλου ἀναγραφομένῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ β, ὥστε ὁ μὲν θυ τῷ θι, ὁ δὲ κλ τῷ κμ. καὶ οἱ λοιποὶ ὡσαύτως. καὶ πάντες δὲ οἱ κύλινδροι πᾶσιν ἴσοι εἰσίν. δῆλον οὖν ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου ὑπερέχει τῷ κυλίνδρῳ, τῷ βάσιν ἔχοντι τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν αγ, ἄξονα δὲ τὰν εδ. οὗτος δέ ἐστιν ἐλάσσων τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος.

κβ

Τμάματος δοθέντος ὁποτερουοῦν τῶν κωνοειδέων ἀποτετμημένου ἐπιπέδῳ μὴ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, ἢ τῶν σφαιροειδέων ὁποτερουοῦν μὴ μείζονος ἡμίσεος τοῦ σφαιροειδέος, ὁμοίως ἀποτετμημένου, δυνατόν ἐστιν εἰς τὸ τμᾶμα στερεὸν ἐγγράψαι ἐκ κυλίνδρων τμαμάτων ὕψος ἴσον ἐχόντων τῶν συγκειμένων. ἔστω τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος. δεδόσθω τμᾶμα οἷον εἴρηται. τμηθέντος δὲ τοῦ σχήματος ἐπιπέδῳ ἄλλῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ, ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ἀποτετμηκὸς τὸ δοθὲν τμᾶμα, τοῦ μὲν σχήματος τομὰ ἔστω ἁ αβγδ κώνου τομά. τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἀποτεθμηκότος τὸ τμᾶμα, ἁ γα εὐθεῖα. ἐπεὶ οὖν ὑπόκειται τὸ ἐπίπεδον τὸ ἀποτετμηκὸς τὸ τμᾶμα μὴ εἶμεν ὀρθὸν ποτὶ τὸν ἄξονα, ἁ τομὰ ἐσσεῖται ὀξυγωνίου κώνου τομά, διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἁ δγ. καὶ ἁ φυ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς, ἐπιψαυέτω δὲ κατὰ τὸ β, καὶ ἀπὸ τᾶς φυ ἀνεστακέτω ἐπίπεδον παράλληλον τῷ κατὰ τὰν αγ, ἐπιψαύσει δὲ τοῦ σχήματος κατὰ τὸ β. καὶ εἰ μὲν ἐστὶ τὸ τμᾶμα ὀρθογωνίου κωνοειδέος, ἀπὸ τοῦ β ἄχθω παρὰ τὸν ἄξονα ἁ βδ. εἰ δὲ ἀμβλυγωνίου, ἀπὸ τᾶς κορυφᾶς τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδὲς εὐθεῖα ἀχθεῖσα ἐπὶ τὸ β ἐκβεβλήσθω, ἁ βδ. εἰ δὲ σφαιροειδέος ἐπὶ τὸ β ἀχθεῖσα εὐθεῖα ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐκβεβλήσθω ἁ βδ. δῆλον δὲ ὅτι τέμνει ἁ βδ δίχα τὰν αγ. ἐστὶν οὖν τὸ μὲν β κορυφὰ τοῦ τμάματος, ἁ δὲ βδ εὐθεῖα ἄξων. ἔστι δὲ ἁ τᾶς ὀξυγωνίου κώνου τομὰ περὶ διάμετρον τὰν αγ. ἁ γραμμὰ ἁ βδ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀνεστακοῦσα ἐν ὀρθῷ ἐπιπέδῳ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστιν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ διὰ τᾶς ἑτέρας διαμέτρου ἐόντος τοῦ ἐπιπέδου. δυνατὸν οὖν ἐστι κύλινδρον εὑρεῖν ἄξονα ἔχοντα τὰν βδ, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ περὶ διάμετρον τὰν αγ. πεσεῖται δὲ ἁ ἐπιφάνεια αὐτοῦ ἐκτὸς τοῦ τμάματος. ἐπεὶ ἐστὶν ἤτοι κωνοειδέος ἢ σφαιροειδέος τμᾶμα, καὶ οὐ μεῖζον ἐστὶν ἡμίσεως τοῦ σφαιροειδέος. ἐσεῖται δέ τις κυλίνδρου τόμος, βάσιας μὲν ἔχων τὰς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομάς, τὰν περὶ διάμετρον τὰν αγ, ἄξονα δὲ τὰν βδ. τοῦ μὲν τόμου δίχα τεμνομένου ἐπιπέδοις παραλλήλοις τῷ ἐπιπέδῳ τῷ κατὰ τὰν αγ, ἐσεῖται τὸ καταλειπόμενον ἔλασσον τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος. Ἔστω τόμος βάσιν μὲν ἔχων τὰν τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰν περὶ διάμετρον τὰν αγ, ἄξονα δὲ τὰν εδ, ἐλάσσων τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος. διῃρήσθω δὴ ἁ δβ εἰς τὰς ἴσας τᾷ δε. καὶ ἀπὸ τᾶν διαιρεσίων ἄχθων εὐθεῖαι παρὰ τὰν αγ, ἔστε ποτὶ τὰν τοῦ κώνου τομάν. ἀπὸ δὲ τᾶν ἀχθεισᾶν ἐπίπεδα ἀνεστακότων παράλληλα τῷ κατὰ τὰν αγ ἐπιπέδῳ,



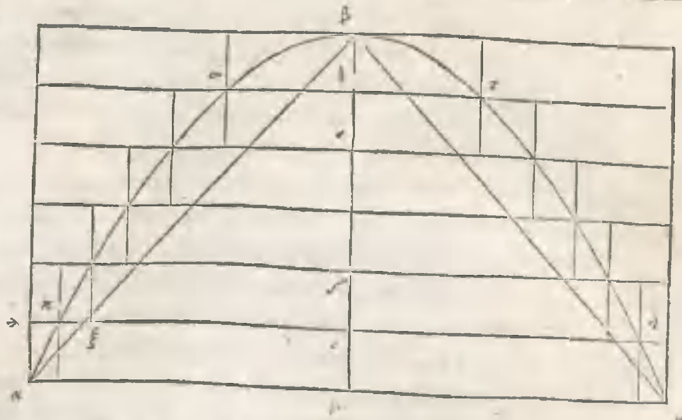
τεμοῦντι δὴ ταῦτα τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ τμάματος, καὶ ἐσσοῦνται ὀξυγωνίων κώνων τομαὶ ὁμοῖαι τᾷ περὶ τὰν αγ διάμετρον. ἐπεὶ παράλληλα ἐντὶ τὰ ἐπίπεδα. ἐφ' ἑκάστης δὴ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἀναγεγράφθωσαν κυλίνδρου τομοὶ δύο, ὁ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ τᾷ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾷ τῷ δ, ὁ δὲ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ β, ἄξονα ἔχοντες ἴσον τῷ δε. ἐσσοῦνται δή τινα σχήματα στερεὰ, τὸ μὲν ἐγγεγραμμένον ἐν τῷ τμάματι, τὸ δὲ περιγεγραμμένον ἐκ κυλίνδρου τομῶν ἴσον ὕψος ἐχόντων συγκείμενα. λοιπὸν δέ ἐστι δεῖξαι, ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου ἔλασσον ὑπερέχει τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος. δειχθήσεται δὲ ὁμοίως τῷ πρότερον, ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου ὑπερέχει τῷ τόμῳ, τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὰν τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰν, τὰν περὶ διάμετρον τὰν αγ, ἄξονα δὲ τὰν εδ. οὗτος δέ ἐστιν ἐλάσσων τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος.

ε. ἀναγεγράφθω τῷ δ.

κγ Τούτων προγεγραμμένων ἀποδεικνύωμες τὰ προβεβλημένα τῶν σχημάτων. πᾶν τμᾶμα ὀρθογωνίου κωνοειδέος ἀποτετμημένου ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, ἡμιόλιόν ἐστι τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα. ἔστω γὰρ τμᾶμα ὀρθογωνίου κωνοειδέος, ἀποτετμημένου ὀρθῷ ἐπιπέδῳ ποτὶ τὸν ἄξονα, καὶ τμαθέντος αὐτοῦ ἐπιπέδῳ ἄλλῳ διὰ τοῦ ἄξονος, τᾶς μὲν ἐπιφανείας τομὰ ἔστω ἁ αβγ ὀρθογωνίου κώνου τομά. τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἀποτέμνοντος τὸ τμᾶμα ἁ γα εὐθεῖα. ἄξων δὲ ἔστω τοῦ τμάματος ἁ βδ. ἔστω δὲ καὶ κῶνος τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχων τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, οὗ κορυφὰ τὸ β. δεικτέον ὅτι τὸ τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος ἡμιόλιόν ἐστι τοῦ κώνου τούτου. ἐκκείσθω γὰρ κῶνος ὁ ψ, ἡμιόλιος ὢν τοῦ κώνου, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὰν αγ, ἄξονα δὲ τὰν βδ. ἔστω δὲ καὶ κύλινδρος βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν αγ, ἄξονα δὲ τὰν βδ. ἐσεῖται οὖν ὁ ψ κῶνος ἥμισυς ὅλου τοῦ κυλίνδρου. ἐπεί περ ἡμιόλιός ἐστιν ὁ ψ κῶνος τοῦ αὐτοῦ κώνου. λέγω, ὅτι τὸ τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος ἴσον ἐστὶ τῷ ψ κώνῳ. εἰ γὰρ μή ἐστιν ἴσον, ἤτοι μεῖζον ἐντὶ ἢ ἔλασσον. ἔστω δὴ πρότερον, εἰ δυνατόν, μεῖζον. ἐγγεγράφθω δὴ σχῆμα στερεὸν εἰς τὸ τμᾶμα, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρων, ὕψος ἴσον ἐχόντων τῶν συγκειμένων, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι τηλικούτῳ ὑπερέχει τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα

μα τοῦ

μα τοῦ ψ κώνου. καὶ ἔστω τῶν κυλίνδρων, ἐξ ὧν σύγκειται τὸ περιγραφὲν σχῆμα, μέγιστος μὲν, ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν αγ, ἄξονα δὲ τὰν εδ, ἐλάχιστος δὲ, ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν στ, ἄξονα δὲ τὰν βθ. τῶν δὲ κυλίνδρων ἐξ ὧν σύγκειται τὸ ἐγγραφὲν σχῆμα, μέγιστος μὲν ἔστω, ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον, τὸν περὶ διάμετρον τὰν κλ, ἄξονα δὲ τὰν δε. ἐλάχιστος δὲ ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν στ, ἄξονα δὲ τὰν θι. ἐκβεβλήσθω δὲ τὰ ἐπίπεδα πάντων τῶν κυλίνδρων ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου, τοῦ βάσιν ἔχοντος τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν αγ, ἄξονα δὲ τὰν βδ. ἐσσεῖται δὴ ὅλος κύλινδρος



διῃρημένος εἰς κυλίνδρους, τῷ μὲν πλήθει ἴσους τοῖς κυλίνδροις τοῖς ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι, τῷ δὲ μεγέθει ἴσους τῷ μεγίστῳ αὐτῶν. καὶ ἐπεὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα περὶ τὸ τμᾶμα, ἐλάσσονι ὑπερέχει τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος, ἢ τὸ τμᾶμα τοῦ κώνου, δῆλον ὅτι καὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐν τῷ τμάματι μεῖζόν ἐστι τοῦ ψ κώνου. ὁ δὴ πρῶτος κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ἔχων ἄξονα τὰν δε, ποτὶ τὸν πρῶτον κύλινδρον τὸν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν δε, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ὃν ἁ δα ποτὶ τὰν κε δυνάμει. οὗτος δέ ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει ἁ βδ ποτὶ τὰν βε, καὶ τῷ ὃν ἔχει ἁ δα ποτὶ τὰν εξ. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ ὁ δεύτερος κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ὁ ἔχων ἄξονα τὸν εζ, ποτὶ τὸν δεύτερον κύλινδρον τὸν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ὃν ἁ πε, τουτέστιν ἁ δα ποτὶ τὰν ζε. καὶ τῶν ἄλλων κυλίνδρων ἕκαστος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ἄξονα ἐχόντων τὸν αὐτόν, ἕξει ποτὶ τὸν λόγον ὃν ἁ ἡμίσεια τᾶς διαμέτρου τᾶς βάσεως αὐτοῦ ποτὶ τὰν ἀπολελαμμέναν ἀπ' αὐτᾶς μεταξὺ τᾶν αβ, βδ εὐθειᾶν. καὶ πάντες οἱ κύλινδροι οἱ ἐν τῷ κυλίνδρῳ, οὗ βάσις μέν ἐστιν ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὰν αγ, ἄξων δέ ἐστιν ἁ δγ εὐθεῖα ποτὶ πάντας τοὺς κυλίνδρους τοὺς ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι, τὸν αὐτὸν ἕξουσι λόγον, ὃν πᾶσαι αἱ εὐθεῖαι αἱ ἐκ τῶν κέντρων τῶν κύκλων, οἱ ἐν τῇ βάσει εἰσὶ τῶν εἰρημένων κυλίνδρων, ποτὶ πάσας τὰς εὐθείας τὰς ἀπολελαμμένας ἀπὸ τᾶς μεταξὺ τᾶν αβ, βδ. αἱ δὲ εἰρημέναι εὐθεῖαι τῶν εἰρημένων χωρὶς τᾶν αδ μείζων ἐντὶ ἢ διπλάσιαι. ὥστε καὶ οἱ κύλινδροι πάντες οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, οὗ ὁ ἄξων ὁ δι, μείζονες ἐντί, ἢ διπλάσιοι τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος. πολλῷ ἄρα καὶ ὁ ὅλος κύλινδρος, οὗ ὁ ἄξων ἁ δβ, μείζων ἐντὶ ἢ διπλασίων τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος. τοῦ δὲ ψ κώνου ἦν διπλασίων. ἔλασσον ἄρα τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ψ κώνου, ὅπερ ἀδύνατον. ἐδείχθη γὰρ μεῖζον. οὐκ ἄρα ἐστὶ μεῖζον τὸ κωνοειδὲς τοῦ ψ κώνου. ὁμοίως δὲ οὐδὲ ἔλασσον. πάλιν γὰρ ἐγγεγράφθω τὸ σχῆμα, καὶ περιγεγράφθω, ὥστε ὑπερέχειν ἕκαστον ἔλασσον. ἢ πάλιν ὧν ὑπερέχει ὁ ψ κῶνος τοῦ κωνοειδέος. καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον κατασκευάσθω. ἐπεὶ οὖν ἔλασσόν ἐστι τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τοῦ τμάματος, καὶ τὸ ἐγγραφὲν τοῦ περιγραφέντος ἐλάσσονι λείπεται, ἢ τὸ τμᾶμα τοῦ ψ κώνου, δῆλον ὡς ἔλασσόν ἐστι τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ψ κώνου. πάλιν δὲ ὁ πρῶτος κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ὁ ἔχων ἄξονα τὰν δε, ποτὶ τὸν πρῶτον κύλινδρον τὸν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι, τὸν αὐτὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν εδ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς αδ τετράγωνον ποτὶ τὸ αὐτό. ὁ δὲ δεύτερος κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ὁ ἔχων ἄξονα τὰν εζ, ποτὶ τὸν δεύτερον κύλινδρον τὸν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν εζ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ δα ποτὶ τὰν κε δυνάμει. οὗτος δέ ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει ἁ βδ ποτὶ τὰν βε, καὶ τῷ ὃν ἔχει ὁ δα ποτὶ τὰν εξ, καὶ τῶν ἄλλων κυλίνδρων ἕκαστος

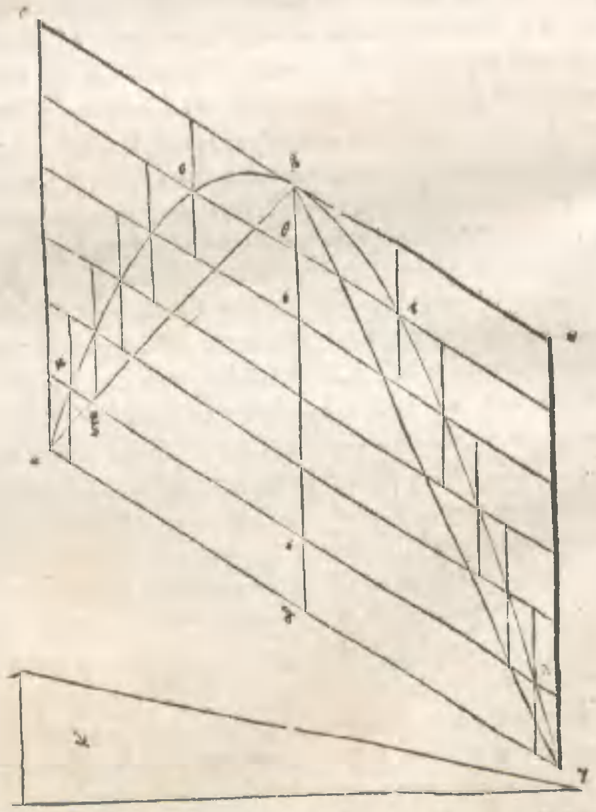
μείζονες

κατεσκευάσθω

τῶν ἐν

τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ἄξονα ἐχόντων ἴσαν τᾷ δε, ποτὶ ἕκαστον τῶν κυλίνδρων τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι, ἄξονα ἐχόντων τὸν αὐτόν, ἕξει τοῦτον λόγον, ὃν ἁ ἡμίσεα τᾶς βάσιος αὐτοῦ ποτὶ τὰν ἀπολελαμμέναν ἀπ' αὐτᾶς μεταξὺ τᾶν αβ, βδ εὐθειᾶν. καὶ πάντες οὖν οἱ κύλινδροι οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ὧν ἄξων ἐστὶν ἁ βδ εὐθεῖα, ποτὶ πάντας τοὺς κυλίνδρους τοὺς ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον ὃν πᾶσαι αἱ εὐθεῖαι ποτὶ πάσας τὰς εὐθείας. αἱ δὲ εὐθεῖαι πᾶσαι αἱ ἐκ τῶν κέντρων τῶν κύκλων οἱ βάσιές ἐντι τῶν κυλίνδρων πρὸς τὰν εὐθεῖαν πᾶσαν τὰν ἀπολελαμμέναν ἀπ' αὐτᾶν σὺν τᾷ αδ ἐλάσσονές ἐντι, ἢ διπλάσιαι. δῆλον οὖν ὅτι καὶ οἱ κύλινδροι πάντες οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ἐλάσσονές ἐντι ἢ διπλάσιοι τῶν κυλίνδρων τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι. ὁ ἄρα κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν αγ, ἄξονα δὲ τὰν βδ, ἐλάσσων ἐστὶν ἢ διπλάσιος τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος. οὐκ ἔστι δέ, ἀλλὰ μείζων ἢ διπλάσιος. τοῦ γὰρ κώνου διπλάσιός ἐστι. τὸ δὲ περιγεγραμμένον σχῆμα ἔλαττον ἐδείχθη τοῦ κώνου. οὐκ ἄρα ἐστὶν οὐδὲ ἔλασσον τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα τοῦ κώνου. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὔτε μεῖζον, ἡμιόλιον ἄρα ἐστὶ τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν.

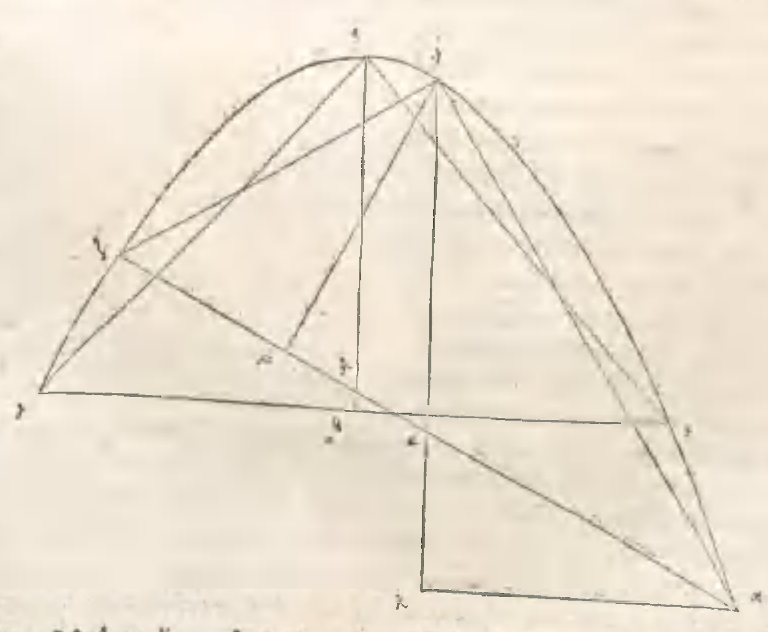
κδ Καὶ τοίνυν εἴκα μὴ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα ἐπιπέδῳ ἀποτμαθῇ τὸ τμᾶμα ἀπὸ τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος, ὁμοίως ἡμιόλιον ἔσσεται τοῦ ἀποτμάματος τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. ἔστω τμᾶμα ὀρθογωνίου κωνοειδέος ἀποτετμημένον ὡς εἴρηται. καὶ τμαθέντος αὐτοῦ ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ἀποτετμηκὸς τὸ σχῆμα, τοῦ μὲν σχήματος ἔστω ἁ αβγ ὀρθογωνίου τομά, τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἀποτετμηκότος τὸ τμᾶμα ἁ αγ εὐθεῖα. παρὰ δὲ τὰν αγ ἁ φυ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς κατὰ τὸ β, καὶ ἁ βδ ἄχθω παρὰ τὸν ἄξονα. τεμεῖ δὴ αὐτὰ δίχα τὰν αγ. ἀπὸ δὲ τᾶς φυ ἐπίπεδον ἀνεστακέτω παράλληλον κατὰ τῷ τὰν αδ. ἐπιψαύσει δὴ τοῦτο τὸ κωνοειδὲς κατὰ τὸ β. καὶ ἐσσεῖται τοῦ τμάματος κορυφὰ τὸ β σαμεῖον, ἄξων δὲ ἁ βδ. ἐπεὶ οὖν τὸ ἐπίπεδον τὸ κατὰ τὰν αγ, οὐ ποτ' ὀρθὰς ἐὸν τῷ ἄξονι τετμήκει τὸ κωνοειδές, ἁ τομὰ ἐστὶν ὀξυγωνίου κώνου τομά, διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἁ μείζων ἁ αγ, ἐούσας δὴ ὀξυγωνίου τομᾶς περὶ διάμετρον τὰν γα, καὶ γραμμᾶς τᾶς βδ, ἅ ἐστιν ἀπὸ τοῦ κέντρου τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ἀνεστακούσα ἐν ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ἀνεστακότι ἀπὸ διαμέτρου ποτὶ τὸ ἐπίπεδον ἐν ᾧ ἐστιν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά, δυνατόν ἐστι κύλινδρον εὑρεῖν τὸν ἄξονα ἔχοντα ἐπ' εὐθείας τᾷ βδ, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά. δυνατὸν δέ ἐστι καὶ κῶνον εὑρεῖν κορυφὰν ἔχοντα τὸ β σαμεῖον, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ ἐσσεῖται τόμος κυλίνδρου τις, βάσιν ἔχων τὰν τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομάν, τὰν περὶ διάμετρον τὰν αγ, ἄξονα δὲ τὰν βδ. καὶ ἀπότμημα κώνου βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τε τόμῳ καὶ τῷ τμάματι, ἄξονα δὲ τὸν αὐτόν. δεικτέον ὅτι τὸ κωνοειδὲς τμᾶμα, ἡμιόλιόν ἐστι τούτου τοῦ κώνου. ἔστω δὴ ὁ ψ κῶνος ἡμιόλιος τοῦ ἀποτμάματος τούτου. ἐσσεῖται δὴ ὁ τόμος τοῦ κυλίνδρου, ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, διπλάσιος τοῦ ψ κώνου. οὗτος γὰρ ἡμιόλιός ἐστι τοῦ ἀποτμάματος τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. τὸ δὲ ἀπότμημα τοῦ κώνου, τὸ εἰρημένον τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ τόμου τοῦ κυλίνδρου, τοῦ βάσιν ἔχον



ἔχον

τος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. ἀναγκαῖον δέ ἐστι τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα ἴσον εἶμεν τοῦ ψ κώνου. εἰ γὰρ μή ἐστιν ἴσον, ἤτοι μεῖζόν ἐστιν ἢ ἔλασσον. ἔστω δὴ πρότερον εἰ δυνατὸν μεῖζον. ἐγγεγράφθω δὴ τι ἐς τὸ τμᾶμα στερεόν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρων τομῶν ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενα, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι ἢ ἁλίκῳ ὑπερέχει τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα τοῦ ψ κώνου. καὶ τὰ ἐπίπεδα τῶν τομῶν ἐσσεῖται ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ τόμου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. πάλιν δὴ ὁ πρᾶτος τόμος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ τόμῳ, ὁ ἔχων ἄξονα τὰν δε, ποτὶ τὸν πρᾶτον τόμον τὸν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν δε, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς δα τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς κε. οἱ γὰρ τόμοι οἱ ἴσον ὕψος ἔχοντες τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ποτ' ἀλλάλους ταῖς βάσεσιν. αἱ δὲ βάσιες αὐτῶν ἐπεὶ ὁμοῖαι ἐντὶ ὀξυγωνίου κώνου τομαὶ τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον, ὃν αἱ ὁμόλογοι διάμετροι αὐτᾶν δυνάμει. ἡμίσεαι δ' ἐντὶ τῶν ὁμολόγων διαμέτρων αἱ δα, κε. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ αδ ποτὶ τὰν κε δυνάμει, τοῦτον ἔχει ἁ βδ ποτὶ τὰν βε μάκει. ἐπεὶ ἁ μὲν βδ παρὰ τὰν διάμετρόν ἐστιν. αἱ δὲ δα, κε παρὰ τὰν κατὰ τὸ β ἐπιψαύουσαν. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ βδ ποτὶ τὰν βε, τοῦτον ἔχει ἁ δα ποτὶ τὰν εξ. ἕξει ἐν ὁ πρᾶτος τόμος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ τόμῳ ποτὶ τὸν πρᾶτον τόμον τὸν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι, τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ δα ποτὶ τὰν εξ. καὶ τῶν ἄλλων τομῶν ἕκαστος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ τόμῳ ἄξονα ἴσον ἐχόντων τᾷ δε, πρὸς ἕκαστον τῶν τομῶν τῶν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι τὸν αὐτὸν ἄξονα ἐχόντων, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, ὃν αἱ ἡμίσεαι τᾶν διαμέτρων τῶν βάσιων αὐτῶν ποτὶ τὰν ἀπολελαμμέναν ἀπ' αὐτᾶς μεταξὺ τᾶν αβ, βδ. λαφθήσεται δὲ ὁμοίως τοῖς πρότερον τὸ μὲν ἐγγεγραμμένον σχῆμα μεῖζον ἐὸν τοῦ ψ κώνου, ὁ δὲ τοῦ κυλίνδρου τόμος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, μείζων ἐὼν ἢ διπλάσιος τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος. ὥστε καὶ τοῦ ψ κώνου μείζων ἐσσεῖται ἢ διπλάσιος. οὐκ ἔστι δέ, ἀλλὰ διπλάσιος. οὐκ ἄρα ἐστὶ μεῖζον τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα τοῦ ψ κώνου. διὰ τῶν αὐτῶν δὲ δειχθήσεται, ὅτι οὐδὲ ἔλασσον. δῆλον οὖν ὅτι ἴσον. ἡμιόλιον ἄρα ἐστὶ τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα τοῦ ἀποτμάματος τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν.

κε Εἴκα ὀρθογωνίου κωνοειδέος δύο τμάματα ἀποτμηθέωντι ἐπιπέδοις, τὸ μὲν ἕτερον ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, τὸ δὲ ἕτερον μὴ ὀρθῷ, ἔωντι δὲ οἱ τῶν τμαμάτων ἄξονες ἴσοι, ἴσα ἐσσοῦνται τὰ τμάματα. θέωντι ἀποτετμάσθω γὰρ ὀρθογωνίου κωνοειδέος δύο τμάματα, ὡς εἴρηται. τμαθέντος δὲ τοῦ κωνοειδέος ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ἄλλῳ ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, τοῦ μὲν κωνοειδέος ἔστω τομὰ ἁ βγ ὀρθογωνίου κώνου τομά, διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἁ βδ. τῶν δὲ ἐπιπέδων αἱ αζ, εγ εὐθεῖαι, τοῦ μὲν ὀρθοῦ ποτὶ τὸν ἄξονα ἁ εγ, τοῦ δὲ μὴ ὀρθοῦ ἁ ζα. ἄξονες δὲ ἔσω τῶν τμαμάτων ἔστων αἱ βθ, κλ ἴσαι ἀλλήλαις, κορυφαὶ δὲ τὰ β, λ. δεικτέον ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ τμᾶμα κωνοειδέος, οὗ κορυφὰ τὸ β, τῷ τμάματι τοῦ κωνοειδέος οὗ κορυφὰ τὸ λ. ἐπεὶ γὰρ ἀπὸ τᾶς αὐτᾶς ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, δύο τμάματα ἐντὶ ἀφῃρημένα, τό τε αλζ, καὶ τὸ εβγ, καὶ ἐντὶ αὐτῶν διάμετροι ἴσαι αἱ κλ, θβ, ἴσον ἐστὶ τὸ τρίγωνον τὸ αλκ τῷ εθβ. δέδεικται γὰρ ὅτι τὸ αλζ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ εβγ τριγώνῳ. ἄχθω δὴ ἁ αχ κάθετος ἐπὶ τὰν κλ ἐκβληθεῖσαν. καὶ ἐπεὶ ἴσαι αἱ βθ, κλ, ἴσαι καὶ αἱ εθ, αχ. ἔσω δὴ ἐν τῷ τμάματι οὗ κορυφὰ τὸ β κῶ

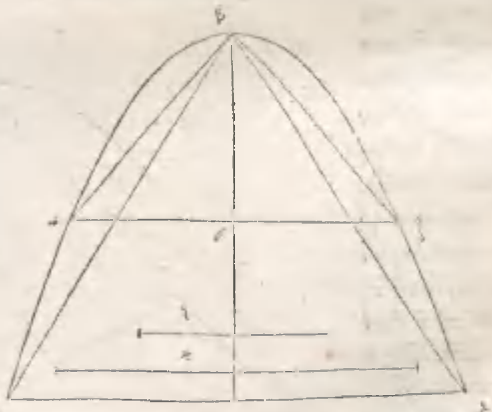


νος

νος ἐγγεγραμμένος τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχων τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. ἐν δὲ τῷ τμάματι οὗ κορυφὰ τὸ λ, ἀπότμαμα κώνου τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχων τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. ἄχθω δὲ καὶ ἀπὸ τοῦ λ κάθετος ἐπὶ τὰν δ ζ ἁ λ μ, ἐσσεῖται δὴ αὕτα ὕψος τοῦ ἀποτμάματος τοῦ κώνου οὗ κορυφὰ τὸ λ. τὸ δὲ ἀπότμαμα τοῦ κώνου, οὗ κορυφὰ τὸ λ, καὶ ὁ κῶνος οὗ κορυφὰ τὸ β τὸν συγκείμενον λόγον ἔχοντι ποτ' ἄλλαλα ἔκ τε τοῦ τᾶν βάσεων λόγου, καὶ ἐκ τοῦ τῶν ὑψέων. τὸν συγκείμενον οὖν ἔχοντι λόγον, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει τὸ περιεχόμενον χωρίον, ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, τᾶς περὶ διαμέτρους τὰν α ζ ποτὶ τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ε γ. καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἁ λ μ ποτὶ τὰν β θ. τὸ δὲ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ποτὶ τὸν αὐτὸν κύκλον, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν διαμέτρων ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ε γ. ἔχει καὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου οὗ κορυφὰ τὸ λ, πρὸς τὸν κῶνον οὗ κορυφὰ τὸ β τὸν συγκείμενον λόγον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἁ κ α ποτὶ τὰν ε θ. καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἁ λ μ, ποτὶ τὰν β θ. ἁ μὲν γὰρ κ α ἡμίσεά ἐντι τᾶν διαμέτρων τᾶς βάσιος τᾶς τοῦ ἀποτμάματος τοῦ κώνου, οὗ κορυφὰ τὸ λ. ἁ δὲ ε θ ἡμίσεα τᾶς διαμέτρου τᾶς βάσεως τοῦ κώνου. αἱ δὲ λ μ, β θ ὕψεα ἐντὶ αὐτῶν. ἔχει δὲ ἁ λ μ ποτὶ τὰν β θ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν καὶ ποτὶ τὰν κ λ. ἐπεὶ ἁ β θ ἴσα ἐστὶ τᾷ κ λ. ἔχει δὲ καὶ ἁ λ μ ποτὶ τὰν κ λ, ὃν ἁ χ α ποτὶ τὰν α κ ἔχοι, καὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου ποτὶ τὸν κῶνον τὸν συγκείμενον λόγον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἁ α κ ποτὶ τὰν α χ. ἴσα γάρ ἐστιν ἁ α χ τᾷ ε θ. καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἁ λ μ ποτὶ τὰν β θ. ὁ δὲ ἐκ τῶν εἰρημένων λόγος ὁ τᾶς α κ πρὸς α χ ὁ αὐτός ἐστι τῷ τᾶς λ κ πρὸς λ μ. τὸ ἄρα ἀπότμαμα πρὸς τὸν κῶνον λόγον ἔχει, ὃν ἁ λ κ ποτὶ τὰν λ μ. καὶ τῷ ὃν ἔχει ἁ λ μ ποτὶ τὰν β θ. ἴσα δὲ ἁ β θ τᾷ κ λ. δῆλον οὖν, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου οὗ κορυφὰ τὸ λ, τῷ κώνῳ οὗ κορυφὰ τὸ β. φανερὸν οὖν ὅτι καὶ τὰ τμάματα ἴσα ἐντὶ ἑτέρου αὐτῶν. ἐπεὶ τὸ μὲν ἡμιόλιόν ἐστι τοῦ κώνου, τὸ δὲ ἕτερον ἡμιόλιον τοῦ ἀποτμάματος τοῦ κώνου ἴσων ἐόντων.

θέοντι

κε Εἴκα τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος δύο τμάματα ἀποτμηθέοντι ἐπιπέδοις ὁπωσοῦν ἀγμένοις, τὰ τμάματα ποτ' ἄλλαλα τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον τοῖς τετραγώνοις τοῖς ἀπὸ τῶν ἀξόνων αὐτοῖς. ἀποτετμάσθω γὰρ τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος δύο τμάματα, ὡς ἔτυχεν. ἔστω δὲ τῷ μὲν τοῦ ἑτέρου τμάματος ἄξονι ἴσα ἁ κ, τῷ δὲ τοῦ ἑτέρου ἴσα ἁ λ. δεικτέον ὅτι τὰ τμάματα τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ποτ' ἄλλαλα τοῖς ἀπὸ τᾶν κ, λ τετραγώνοις. τμαθέντος δὴ τοῦ κωνοειδέος ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ τμάματος, ἔστω τομὰ ἁ α β γ ὀρθογωνίου κώνου τομά, ἄξων δὲ ἁ β δ. καὶ ἀπολελάφθω ἁ β δ τᾷ κ ἴσα. καὶ διὰ τοῦ δ ἐπίπεδον ἐκβεβλήσθω ὀρθὸν ποτὶ τὸν ἄξονα. τὸ δὲ τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος, τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν α γ, ἄξονα δὲ τὰν β δ, ἴσον ἐντὶ τῷ τμάματι τῷ ἄξονα ἔχοντι ἴσον τᾷ κ. εἰ μὲν οὖν καὶ ἁ κ ἴσα ἐστὶ τᾷ λ, φανερὸν ὅτι καὶ τὰ τμάματα ἴσα ἐσσοῦνται ἀλλάλοις. ἑκατέρου γὰρ αὐτῶν καὶ τῷ αὐτῷ καὶ τὰ τετράγωνα, τὰ ἀπὸ τῶν κ, λ ἴσα, ὥς τε τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον τὰ τμάματα τοῖς τετραγώνοις, τοῖς ἀπὸ τῶν ἀξόνων. εἰ δὲ μὴ ἴσα ἐστὶν ἁ λ τᾷ κ, ἔστω ἁ λ ἴσα τᾷ β θ. καὶ διὰ τοῦ θ ἐπίπεδον ἄχθω ὀρθὸν ποτὶ τὸν ἄξονα. τὸ δὲ τμᾶμα τὸ βάσιν ἔχον τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ε ζ, ἄξονα δὲ τὰν β θ, ἴσον ἐστὶ τῷ τμάματι τῷ ἔχοντι ἄξονα ἴσον τῷ λ. ἐγγεγράφθωσαν δύο κῶνοι βάσιν μὲν ἔχοντες τοὺς κύκλους τοὺς περὶ διαμέτρους τὰς α γ, ε ζ, κορυφὰν δὲ τὸ β σαμεῖον.



ὁ δὲ κῶνος ὁ ἔχων ἄξονα τὰν β δ, ποτὶ τὸν κῶνον τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν β θ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἁ α δ ποτὶ τὰν θ ε δυνάμει. καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἁ β δ ποτὶ τὰν β θ μήκει. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ δ α ποτὶ τὰν θ ε δυνάμει, τοῦτον ἔχει ἁ β δ ποτὶ τὰν β θ μάκει. ὁ ἄρα κῶνος ὁ ἔχων ἄξονα τὰν β δ ποτὶ τὸν κῶνον τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν β θ, τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἁ δ β ποτὶ τὰν θ β, καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἁ δ β ποτὶ τὰν β θ. οὗτος δὲ ἐστὶν ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς δ β, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς θ β. ὃν δὲ λόγον ἔχει ὁ κῶνος ἄξονα ἔχων τὰν β δ, ποτὶ τὸν κῶνον τὸν ἄξονα ἔχοντα τὰν θ β, τοῦτον ἔχει τὸν

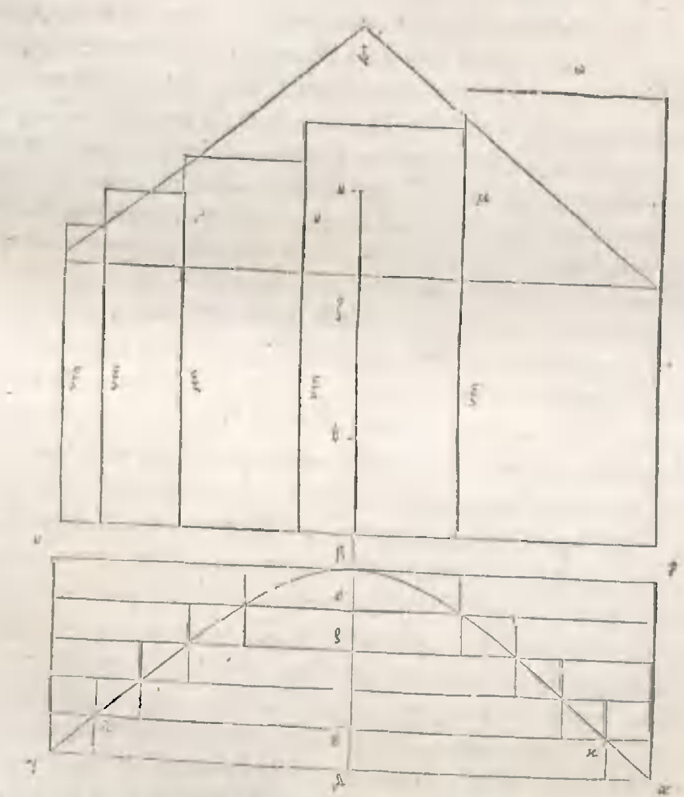
τὸν λόγον τὸ τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος τὸ ἄξονα ἔχον τὰν δ β, ποτὶ τὸ τμᾶμα τὸ ἄξονα ἔχον τὰν θ β. ἑκάτερον γὰρ ἡμιόλιόν ἐστι. καί ἐστι τῷ μὲν τμάματι τῷ ἄξονα ἔχοντι τὰν β δ, ἴσον τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος, τὸ ἄξονα ἔχον ἴσον τᾷ κ. τῷ δὲ τμάματι τῷ ἄξονα ἔχοντι τὰν θ β, ἴσον τὸ τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος τὸ ἄξονα ἔχον ἴσον τᾷ λ. καὶ τᾷ μὲν β δ ἴσα ἁ κ. τᾷ δὲ θ β ἴσα ἁ λ. δῆλον οὖν, ὅτι τὸ τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος τὸ ἄξονα ἔχον ἴσον τᾷ κ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ποτὶ τὸ τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος, τὸ ἄξωνα ἔχον ἴσον τᾷ λ, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς κ ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς λ.

ἄξονα

κζ Πᾶν τμᾶμα ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος ἀποτετμημένον ἐπιπέδῳ καὶ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα ποτὶ τὸν κῶνον, τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ὕψος ἴσον, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερα ἴσα τῷ τε ἄξονι τοῦ τμάματος, καὶ τᾷ τριπλασίᾳ τᾶς ποτεούσας τῷ ἄξονι, ποτὶ τὰν ἴσαν ἀμφοτέραις, τῷ τε ἄξονι τοῦ τμάματος, καὶ τᾷ διπλασίᾳ τᾶς ποτεούσας τῷ ἄξονι. ἔστω τι τμᾶμα ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος, ἀποτετμημένον ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα. καὶ τμαθέντος αὐτοῦ ἐπιπέδῳ ἄλλῳ διὰ τοῦ ἄξονος, ἁ τομὰ ἔστω αὐτοῦ μὲν τοῦ κωνοειδέος ἁ α β γ ἀμβλυγωνίου κώνου τομά, τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἀποτέμνοντος τὸ τμᾶμα εὐθεῖα ἁ α γ. ἄξων δὲ ἔστω τοῦ τμάματος ἁ β δ. ἁ δὲ ποτεοῦσα τῷ ἄξονι ἔστω ἁ β θ. καὶ τᾷ β θ ἴσα ἁ ζ θ, καὶ ἁ ζ η. δεικτέον ὅτι τὸ τμᾶμα ποτὶ τὸν κῶνον τὰν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, λόγον ἔχει ὃν ἁ η δ ποτὶ τὰν ζ δ. ἔστω δὴ κύλινδρος τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχων τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. πλευραὶ δὲ αὐτοῦ ἔστωσαν αἱ φ α, γ υ. ἔστω δὴ καὶ κῶνος τις ἐν ᾧ τὸ ψ. καὶ ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὰν β δ, τοῦτον ἐχέτω τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἁ η δ ποτὶ τὰν δ ζ. φημὶ δὴ τὸ τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος ἴσον εἶμεν τῷ ψ κώνῳ. εἰ γὰρ μή ἐστιν ἴσον, ἤτοι μεῖζον ἢ ἔλασσον ἐστίν. ἔστω πρότερον εἰ δυνατόν, μεῖζον. ἐγγεγράφθω δὴ εἰς τὸ τμᾶμα σχῆμα στερεόν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρων ὕψος

ἐχόντων

ἴσον ἐχώντων συγκείμενον. ὥς τε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι, ἢ ᾧ λίκῳ ὑπερέχει τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα τοῦ ψ κώνου. διήχθω δὴ τὰ ἐπίπεδα πάντων τῶν κυλίνδρων ποτὶ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου, τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν α γ. ἄξονα δὲ τὰν β δ. ἐσσεῖται δὴ ὅλος ὁ κύλινδρος διῃρημένος εἰς κυλίνδρους, τῷ μὲν πλήθει ἴσους τοῖς κυλίνδροις τοῖς ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι, τῷ δὲ μεγέθει ἴσους τῷ μεγίστῳ αὐτῶν. καὶ ἐπεὶ ἐλάσσονι ὑπερέχει τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου, ἢ τὸ τμᾶμα τοῦ ψ κώνου,



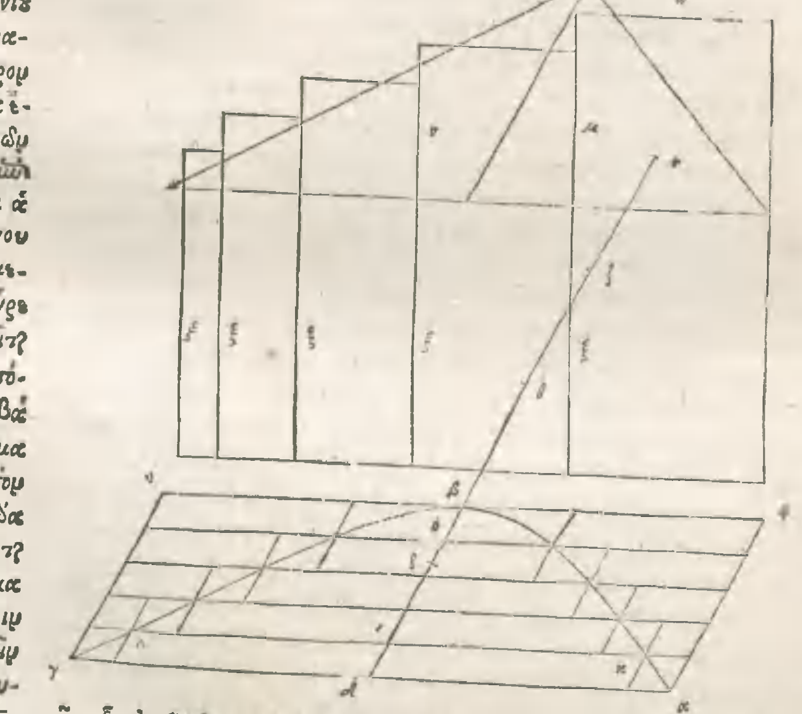
καὶ μεῖζόν ἐστι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ τμάματος, δῆλον ὅτι καὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μεῖζόν ἐστι τοῦ ψ κώνου. ἔστω δὴ τρίτον μέρος τᾶς β δ, ἁ β ρ. ἐσσεῖται οὖν ἁ η δ τριπλασία τᾶς θ ρ. ἐπεὶ ὁ μὲν κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν α γ, ἄξονα δὲ τὰν β δ, ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ η δ ποτὶ τὰν θ ρ. ἔχει δὲ καὶ ὁ εἰρημένος κῶνος ποτὶ τὸν ψ κῶνον ὃν ἁ ζ δ ποτὶ τὰν η δ ἐξ ἀμετρίαν, ὁμοίως τῶν λόγων τεταραγμένων τὸν αὐτὸν λόγον ὁ κύλινδρος ὁ εἰρημένος ποτὶ τὸν ψ κῶνον, ὃν ἁ ζ δ

ποτὶ

ποτὶ τὰν θ ρ. ἔστω δὲ αἱ γραμμαὶ κείμεναι ἐφ' αὐτὰ ξ, τῷ μὲν πλήθει ἴσαι τοῖς τμαμάτεσσι τοῖς ἐν τᾷ β δ εὐθείᾳ, τῷ δὲ μεγέθει ἑκάστα ἴσα τᾷ ζ β. καὶ παρ' ἑκάσταν αὐτᾶν παραπεπτωκέτω χωρίον ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ. καὶ τὸ μὲν μέγιστον ἔστω ἴσον τῷ ὑπὸ ζ δ β. τὸ δὲ ἐλάχιστον ἴσον τῷ ὑπὸ ζ ο β. αἱ δὲ πλευραὶ τῶν ὑπερβλημάτων τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχόντων. καὶ γὰρ αἱ ἴσαι αὐτοῖς αἱ ἐπὶ τᾶς β δ εὐθείας, τῷ ἴσῳ ἀλλάλων ὑπερέχουσιν. καὶ ἔστω ἁ μὲν τοῦ μεγίστου ὑπερβλήματος πλευρά, ἐφ' ἃς τὸ μ ἴσα τᾷ β δ. ἁ δὲ τοῦ ἐλαχίστου ἴσα τᾷ β ο. ἔστω δὲ καὶ ἄλλα χωρία ἐν οἷς τὸ ω τῷ μὲν πλήθει ἴσα τούτοις, τῷ δὲ μεγέθει ἕκαστον ἴσον τῷ μεγίστῳ, τῷ ὑπὸ τᾶν ζ δ β. ὁ δὴ κύλινδρος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν α γ, ἄξονα δὲ τὰν δ ε, ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν βάσιν μὲν ἔχοντα τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν κ λ, ἄξονα δὲ τὰν δ ε, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ὃν ἁ δ α ποτὶ τὰν κ ε δυνάμει. οὗτος δέ ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ζ δ β, ποτὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ζ ε, β ε. ἐν πάσᾳ γὰρ τᾷ τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομᾷ τοῦτο συμβαίνει. ἁ γὰρ διπλασία τᾶς ποτεούσας, τουτέστι τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου, πλαγία ἐστὶ τοῦ εἴδους πλευρά. καὶ ἔστι τῷ μὲν ὑπὸ τᾶν ζ δ, β δ περιεχομένῳ ἴσον τὸ ξ μ χωρίον, τῷ δὲ ὑπὸ τᾶν ζ ε, β ε ἴσον ἐστὶ τὸ ξ ν. ἁ γὰρ ξ ἴσα ἐστὶ τᾷ ζ β, ἁ δὲ ν τᾷ β ε, ἁ δὲ μ τᾷ β δ. ὁ ἄρα κύλινδρος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν α γ, ἄξονα δὲ τὰν δ ε, ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν βάσιν ἔχοντα τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν κ λ, ἄξονα δὲ τὰν δ ε, τὸν αὐτὸν ἔξει λόγον, ὃν τὸ ω χωρίον ποτὶ τὸ ξ μ. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ τῶν ἄλλων κυλίνδρων ἕκαστος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ἄξονα ἔχων τὰν ἴσαν τᾷ δ ε, ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι τὸν ἔχοντα τὸν αὐτὸν ἄξονα τοῦτον ἔχων τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ω χωρίον ποτὶ τὸ ὂν λόγον τὰν περὶ τὰν ν ξ παραπεπτωκὸς ὑπερβάλλον τῷ τετραγώνῳ. ἐστὶ δή τινα μεγέθεα οἱ κύλινδροι, οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ὧν ἕκαστος ἄξονα ἔχει ἴσον τᾷ δ ε, καὶ ἄλλα μεγέθεα τὰ χωρία ἐν οἷς τὸ ω, ἴσα τούτοις τῷ πλήθει, κατὰ δύο μεγέθεα τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον. ἐπεὶ οἵ τε κύλινδροι ἴσοι ἐντὶ ἀλλάλοις, καὶ τὰ ω χωρία ἴσα ἀλλάλοις. λέγονται δὲ τῶν δὲ κυλίνδρων τινὲς ποτὶ ἄλλους κυλίνδρους ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι. ὁ δὲ ἔσχατος οὐδὲ ποθ' ἓν λέγεται. καὶ τῶν χωρίων ἐν οἷς τὰ ω ποτὶ ἄλλα χωρία τὰ παρὰ τὰν ξ παραπεπτωκότα ὑπερβάλλοντα εἴδει τετραγώνῳ, τὰ δὲ ὁμόλογα ἐν τοῖς λόγοις. τὸ δὲ ἔσχατον οὐδὲ ποθ' ἓν λέγεται. δῆλον οὖν, ὅτι καὶ πάντες οἱ κύλινδροι οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ποτὶ πάντας τοὺς κυλίνδρους τοὺς ἐν ἐγγεγραμμένῳ σχήματι τὸν αὐτὸν ἕξοντι λόγον, ὃν πάντα τὰ ω χωρία ποτὶ πάντα τὰ παραβλήματα χωρὶς τοῦ μεγίστου. δεικτέον δέ, ὅτι πάντα τὰ ω χωρία ποτὶ πάντα τὰ παραβλήματα χωρὶς τοῦ μεγίστου μείζω λόγον ἔχοντι, ἢ ὃν ἁ ν ξ ποτὶ τὰν ἴσαν ἀμφοτέραις, τᾷ τε ἡμισέᾳ τᾶς ξ, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τᾶς ν. ὥστε καὶ ὅλος ὁ κύλινδρος ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μείζονα ἔχει λόγον, ἢ ὃν ἁ ζ δ ποτὶ τὰν θ ρ, ὃν ὅλος κύλινδρος ἔχων ἐδείχθη ποτὶ τὸν Ψ κῶνον. μείζονα οὖν ἔχει λόγον ὁ ὅλος κύλινδρος ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, ἢ ποτὶ τὸν Ψ κῶνον. ὥστε μείζων ἐστὶν ὁ Ψ κῶνος τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος, ὅπερ ἀδύνατον. ἐδείχθη γὰρ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μεῖζον τοῦ Ψ κώνου, οὐκ ἄρα μεῖζον τὸ τοῦ κωνοειδέος τμῆμα τοῦ Ψ κώνου. οὐδὲ τοίνυν ἔλασσον. ἔστω γὰρ εἰ δυνατὸν ἔλασσον. πάλιν οὖν ἐγγεγράφθω εἰς τὸ τμῆμα στερεόν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρων ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι, ἢ ᾧ λίκῳ ὑπερέχει ὁ κῶνος τοῦ τμάματος, καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ κατασκευαζέσθω. ἐπεὶ οὖν ἔλασσον ἐστὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τοῦ τμάματος, καὶ ἐλάσσονι ὑπερέχει τὸ περιγεγραμμένον τοῦ ἐγγεγραμμένου, ἢ ὁ Ψ κῶνος τοῦ τμήματος, δῆλον ὅτι καὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἔλασσόν ἐστι τοῦ Ψ κώνου. πάλιν δὴ ὅτι κύλινδρος ὁ πρῶτος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ὁ ἔχων ἄξονα τὰν δ ε, ποτὶ τὸν πρῶτον κύλινδρον τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν δ ε, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ὃν τὸ ω χωρίον ποτὶ τὸ ξ ν. ἴσον γὰρ ἑκάτερον. καὶ τῶν ἄλλων κυλίνδρων ἕκαστος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ἄξονα ἐχόντων ἴσαν τᾷ δ ε, ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι κατ' αὐτὸν ἐόντα, καὶ ἄξονα ἔχοντα τὸν αὐτόν, τοῦτον ἕξει τὸν λόγον ὃν τὸ ω χωρίον ποτὶ τὸ ὁμόλογον τῶν παρὰ τὰν ξ παραβλημάτων σὺν τῷ ὑπερβλήματι, διὰ τὸ ἕκαστον τῶν περιγεγραμμένων χωρὶς τοῦ μεγίστου, ἴσον εἶναι ἑκάστῳ τῶν ἐγγεγραμμένων σὺν τῷ μεγίστῳ. ἕξει οὖν καὶ ὁ ὅλος κύλινδρος ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν πάντα τὰ ω χωρία ποτὶ τὰ παραβλήματα σὺν τοῖς ὑπερβλημάτεσσι. δέδεικται δὲ πάλιν πάντα τὰ ω χωρία ποτὶ πάντα τὰ ἕτερα ἐλάσσω λόγον ἔχοντα τοῦ ὃν ἔχει ἁ ξ ν ποτὶ τὰν ἴσαν συναμφοτέραις, τᾷ τε ἡμισέᾳ τᾶς ξ καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τᾶς ν. ὥστε καὶ ὅλος ὁ κύλινδρος ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἐλάσσονα λόγον ἕξει, ἢ ἁ ζ δ ποτὶ τὰν θ ρ. ἀλλ' ὡς ἁ ζ δ ποτὶ τὰν θ ρ, ὁ ὅλος κύλινδρος ποτὶ τὸν Ψ κῶνον.

κῶνον. ἐλάσσονα οὖν λόγον ἔχει ὁ αὐτὸς κύλινδρος ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, ἢ ποτὶ τὸν Ψ. ὥστε μεῖζόν ἐστι τὸ περιγεγραμμένον τοῦ Ψ κώνου, ὅπερ ἀδύνατον. ἐδείχθη γὰρ ἔλασσον ἐὸν τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ Ψ κώνου. οὐκ ἄρα ἔλασσόν ἐστι τὸ τοῦ κωνοειδέος τμῆμα τοῦ Ψ κώνου. ἐπεὶ δὲ οὔτε μεῖζον οὔτε ἔλασσον ἐστί, δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

Καὶ τοίνυν εἴκα μὴ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα τῷ ἐπιπέδῳ ἀποτμαθῇ τὸ τμῆμα τοῦ ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος, ποτὶ τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τοῦτον ἕξει τὸν λόγον, ὃν ἁ συναμφοτέραις ἴσα, τῷ τε ἄξονι τοῦ τμάματος, καὶ τᾷ τριπλασίᾳ τᾶς ποτεούσας τῷ ἄξονι, ποτὶ τὰν ἴσαν συναμφοτέραις τῷ τε ἄξονι καὶ τᾷ διπλασίᾳ τᾶς ποτεούσας τῷ ἄξονι. ἔστω γὰρ τμῆμα ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος ἀποτετμαμένον ἐπιπέδῳ ὡς εἴρηται, τμαθέντος δὲ ἐπιπέδῳ τοῦ σχήματος ἄλλῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ἀποτετμηκὸς τὸ τμῆμα, τοῦ μὲν σχήματος τομὰ ἔστω ἁ β γ ἀμβλυγωνίου κώνου τομά, τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἀποτετμηκότος τὸ τμᾶμα, ἁ γ α εὐθεῖα. κορυφὰ δὲ ἔστω τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδές, τὸ θ σαμεῖον. καὶ ἄχθω διὰ τοῦ β παρὰ τὰν α γ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς, ἁ φ υ. ἐπιψαυέτω δὲ κατὰ τὸ β. καὶ ἁ ἀπὸ τοῦ θ ἐπὶ τὸ β ἐπιζευχθεῖσα ἐκβεβλήσθω, τέμνει διὰ τὰ αὐτὰ δίχα τὰν α γ. καὶ ἐσσεῖται κορυφὰ μὲν τοῦ τμάματος τὸ β σαμεῖον, ἄξων δὲ ἁ β δ. ἁ δὲ ποτεοῦσα τῷ ἄξονι ἁ β θ. τᾷ δὲ β θ ἴσα ἔστω ἁ θ ζ, ἐπὶ ἁ ζ η. ἀπὸ δὲ τᾶς φ υ, ἐπίπεδον ἀνεστακέτω τι παράλληλον τῷ κατὰ τὰν α γ. ἐπιψαύσει δὲ τοῦ κωνοειδέος κατὰ τὸ β. καὶ ἐπεὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ κατὰ τὰν α γ οὐκ ἐὸν ὀρθὸν ποτὶ τὸν ἄξονα τέτμηκε τὸ κωνοειδές, ἁ τομὰ ἐσσεῖται ὀξυγωνίου κώνου τομά. διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἁ μείζων ἁ γ α. ἐούσας δὴ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς περὶ διάμετρον τὰν α γ, ἀπὸ τᾶς β δ γραμμᾶς ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀνεστακούσας ἐν ἐπιπέδῳ ὃ ἐστιν ἀπὸ τᾶς διαμέτρου, ὀρθὸν ποτὶ τὸ ἐπίπεδον ἐν ᾧ ἐστιν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά. δυνατόν ἐστι κύλινδρον εὑρεῖν, τὸν ἄξονα ἔχοντα ἐπ' εὐθείας τᾷ β δ, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά, περὶ διάμετρον τὰν α γ. εὑρεθέντος οὖν ἐσσεῖται τις κυλίνδρου τόμος, τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχων τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. ἁ δὲ ἑτέρα βάσις αὐτοῦ ἐσσεῖται τὸ ἐπίπεδον τὸ κατὰ τὰν φ υ. πάλιν δὲ καὶ κῶνον εὑρεῖν δυνατόν ἐστι, κορυφὰν ἔχοντα τὸ β σαμεῖον, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά, περὶ διάμετρον τὰν α γ.



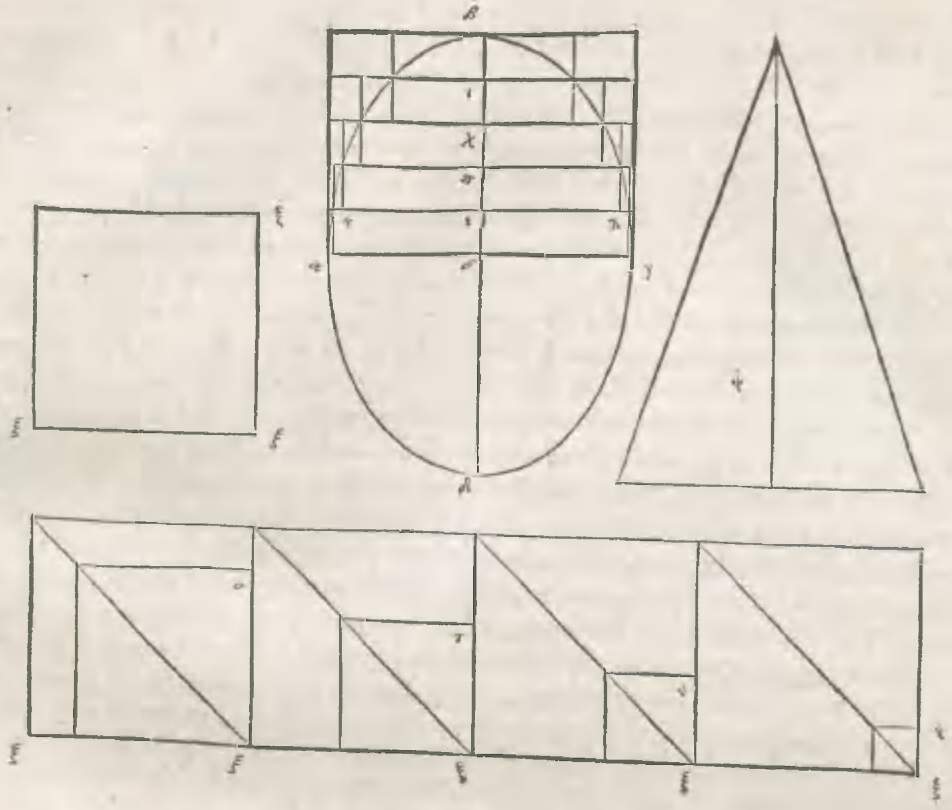
εὑρεθέντος οὖν, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, δεικτέον ὅτι τὸ τοῦ κωνοειδέος τμῆμα ποτὶ τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου τὸ εἰρημένον, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ κ δ ποτὶ τὰν δ ζ. ὃν γοῦν ἔχει λόγον ποτὶ τὰν δ ζ, τοῦτον ἔχει ὁ Ψ κῶνος ποτὶ τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου. εἰ οὖν μὴ ἐστὶν ἴσον τὸ τοῦ κωνοειδέος τμῆμα τῷ κώνῳ τῷ Ψ, εἰ γὰρ μὴ δυνατόν, ἐστὶ μεῖζον. ἐγγεγράφθω δὴ εἰς τὸ τοῦ κωνοειδέος τμῆμα σχῆμα στερεόν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρων τομῶν ἴσον ὕψος ἐχόντων συγκείμενον. ὥστε τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι, ἢ ᾧ λίκῳ ὑπερέχει τὸ τοῦ κωνοειδέος τμῆμα τοῦ Ψ κώνου. ἐπεὶ οὖν τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα μεῖζον ἐὸν τοῦ τμάματος, ἐλάσσονι ὑπερέχει τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος, ἢ τὸ τμῆμα τοῦ Ψ κώνου, δῆλον ὅτι μεῖζόν ἐστι τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τοῦ Ψ τοῦ ψ κώνου. διήχθω δὴ τὰ ἐπίπεδα τῶν τόμων τῶν ἐγγεγραμμένων ἐν τῷ σχήματι πάντων ἐσσεῖται ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ τόμου, τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. καὶ ἅ τε β ε τρίτον μέρος ἔστω τᾶς β δ, καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον κατασκευάσθω. πάλιν δὴ ὁ πρῶτος τόμος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ τόμῳ, ὁ ἔχων ἄξονα τὰν δ ε, ποτὶ τὸν πρῶτον τόμον τὸν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι, τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν δ ε, τὸν αὐτὸν ἔχει τὸν λόγον ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς α δ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς κ ε. οἱ γὰρ τόμοι οἱ ἴσον ὕψος ἔχοντες, τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ποτ' ἀλλήλους, ὅνπερ αἱ βάσεις αὐτῶν. ἐπεὶ ὅμοιαι ἐντὶ ὀξυγωνίων κώνων τομαί. τὸν αὐτὸν οὖν λόγον ἔχοντι ποτ' ἀλλάλους, ὃν αἱ ὁμόλογοι διάμετροι αὐτᾶν δυνάμει. ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς α δ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς κ ε, τοῦτον ἔχει τὸ ὑπὸ τᾶν ζ δ β περιεχόμενον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ζ ε β. ἐπεί ἐστιν ἁ μὲν ζ δ ἀγμένα διὰ τοῦ θ, καθ' ἃς ἔγγιστα συμπίπτοντι. αἱ δὲ α δ, κ ε παρὰ τὰν κατὰ τὸ β ἐπιψαύουσαν. ἐστὶ δὲ τὸ μὲν ὑπὸ τᾶν ζ δ β περιεχόμενον ἴσον τῷ ω χωρίῳ. τὸ δὲ ὑπὸ τᾶν ζ ε β τῷ ξ μ. ἔχει οὖν ὁ πρῶτος τόμος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ τόμῳ, ὁ ἔχων ἄξονα τὰν δ ε ποτὶ τὸν πρῶτον τόμον τὸν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι, τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν δ ε τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ω χωρίον ποτὶ τὸ ξ μ. καὶ τῶν ἄλλων δὲ τόμων ἕκαστος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ τόμῳ ἄξονα ἐχόντων ἴσαν τᾷ δ ε ποτὶ τὸν τόμον τὸν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι κατ' αὐτὸν ἐόντα, καὶ ἄξονα ἔχοντα ἴσαν τᾷ δ ε, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ὃν τὸ ω χωρίον ποτὶ τὸ ὁμόλογον τῶν παρὰ τὰν ξ παραπεπτωκότων ὑπερβαλλόντων εἴδει τετραγώνῳ. πάλιν οὖν ἐντί τινα μεγέθεα οἱ ἐν τῷ ὅλῳ τόμῳ, καὶ ἄλλα μεγέθεα τὰ χωρία ἐν οἷς τὸ ω ἴσα τῷ πλήθει τοῖς τόμοις, καὶ κατὰ δύο τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντι αὐτοῖς. λέγονται δὲ οἱ τόμοι, ποτ' ἄλλους τόμους τοὺς ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι. ὁ δὲ ἔσχατος τόμος οὐδὲ ποθὲν λέγεται. τὰ δὲ ω χωρία ποτ' ἄλλα χωρία παρὰ τὰν ξ παραπεπτωκότα τὰ ὑπερβάλλοντα εἴδεσι τετραγώνοις, τὰ ὁμόλογα ἐν τοῖς λόγοις. τὸ δὲ ἔσχατον οὐδὲ ποθὲν λέγεται. δῆλον οὖν, ὅτι καὶ πάντες οἱ τόμοι ποτὶ πάντας τοὺς αὐτοὺς ἑξοῦντι λόγον, ὃν πάντα τὰ ω χωρία ποτὶ πάντα τὰ παραβλήματα, χωρὶς τοῦ μεγίστου. πάντα δὲ τὰ ω χωρία ποτὶ πάντα τὰ παραβλήματα, χωρὶς τοῦ μεγίστου μείζονα λόγον ἔχοντι, ἢ ὃν ἁ γ ξ ν ποτὶ τὰν ἴσαν ἀμφοτέραις, τᾷ τε ἡμισείᾳ τᾶς ξ, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τᾶς ν. μείζονα οὖν λόγον ἔχει ὅλος ὁ τόμος ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, τοῦ ὃν ἔχει ἁ ξ ν ποτὶ τὰν ἴσαν ἀμφοτέραις, τᾷ τε ἡμισείᾳ τᾶς ξ, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τᾶς ν. ὥστε καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἁ ζ δ ποτὶ τὰν θ ε. μείζονα οὖν ἔχει λόγον ὁ ὅλος τόμος ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, ἢ ποτὶ τὸν ψ κῶνον, ὅπερ ἀδύνατον. ἐδείχθη γὰρ μεῖζον ἐὸν τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ψ κώνου. οὐκ ἔστιν οὖν μεῖζον τὸ τοῦ κωνοειδέος τμῆμα τοῦ ψ κώνου. εἰ δὲ ἔλασσον ἐστὶ τὸ τοῦ κωνοειδέος τμῆμα τοῦ ψ κώνου, ἐγγραφέντος εἰς τὸ τμῆμα σχήματος στερεοῦ, καὶ ἄλλου περιγραφέντος ἐκ κυλίνδρων τόμων ἴσον ὕψος ἐχόντων συγκειμένου, ὥστε τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι, ἢ ἁλίκῳ ὑπερέχει ὁ ψ κῶνος τοῦ τμάματος. πάλιν ὁμοίως δειχθήσεται τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἔλασσον ἐὸν τοῦ ψ κώνου. καὶ ὁ τοῦ κυλίνδρου τόμος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἐλάσσονα λόγον ἔχοντι ποτὶ τὸν ψ κῶνον. ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἔστιν οὖν οὐδὲ ἔλασσον τὸ τοῦ κωνοειδέος τμῆμα τοῦ ψ κώνου. δῆλον οὖν τὸ προτεθέν.

κατασκευάσθω.

κθ Παντὸς σχήματος σφαιροειδέος, ἐπιπέδῳ τμηθέντος διὰ τοῦ κέντρου ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, τὸ ἥμισυ τοῦ σφαιροειδέος διπλάσιον ἐστὶ τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. ἔστω σφαιροειδὲς σχῆμα ἐπιπέδῳ τετμημένον διὰ τοῦ κέντρου ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα. τμηθέντος δὲ αὐτοῦ ἄλλῳ ἐπιπέδῳ, τοῦ μὲν διὰ τοῦ ἄξονος, τοῦ μὲν σχήματος τομὰ ἔστω ἁ α β γ δ ὀξυγωνίου κώνου τομά, διάμετρος δὲ αὐτᾶς, καὶ ἄξων τοῦ σφαιροειδέος ἁ β δ, κέντρον δὲ τὸ θ. διοίσει δέ, οὐδὲν εἴτε ἁ μείζων ἐστὶ διάμετρος ἁ β δ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, εἴτε ἐλάσσων. τοῦ δὲ τετμηκότος ἐπιπέδου τὸ σχῆμα τομὰ ἔστω ἁ γ α εὐθεῖα. ἐσσεῖται δὴ αὐτὰ διὰ τοῦ θ. καὶ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας ποτὶ τὰν β δ. ἐπεὶ τὸ ἐπίπεδον ὑπόκειται διὰ τοῦ κέντρου τετάχθαι, καὶ ὀρθὸν εἶμεν ποτὶ τὸν ἄξονα, δεικτέον ὅτι τὸ ἥμισυ τοῦ σφαιροειδέος τμῆμα, τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν α γ, κορυφὰν δὲ τὸ β σαμεῖον, διπλάσιον ἐστὶ τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. ἔστω γὰρ κῶνός τις ἐν ᾧ τὸ ψ διπλασίων τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν τὰν τῷ τμήματι. καὶ ἄξονα τὸν αὐτὰν τὰν θ β. φαμὶ δὲ τὸ ἥμισυ τοῦ σφαιροειδέος ἴσον εἶμεν τῷ ψ κώνῳ. εἰ οὖν μὴ ἐστὶν ἴσον τὸ ἥμισυ τοῦ σφαιροειδέος τῷ ψ κώνῳ, ἔστω πρῶτον εἰ δυνατὸν μεῖζον. ἐγγεγράφθω δὴ εἰς τὸ τμῆμα τὸ ἥμισυ τοῦ σφαιροειδέος σχῆμα στερεόν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω, ἐκ κυλίνδρων ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον. ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι ἢ ἁλίκῳ

ὑπερ-

ὑπερέχει τὸ ἥμισυ τοῦ σφαιροειδέος τοῦ ψ κώνου. ἐπεὶ οὖν μεῖζον ἐὸν τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἡμίσεως τοῦ σφαιροειδέος, ἔλασσον ὑπερέχει τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ σφαιροειδέος τοῦ ψ κώνου. δῆλον οὖν ὅτι καὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, ἐν τῷ τμάματι τοῦ ἡμίσεως τοῦ σφαιροειδέος μεῖζον ἐστὶ τοῦ ψ κώνου. ἔστω δὴ κύλινδρος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν α γ, ἄξονα δὲ



τὰν β θ. ἐπεὶ οὖν οὗτος ὁ κύλινδρος τριπλάσιός ἐστι τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, ὁ δὲ ψ κῶνος διπλάσιος ἐστὶ τοῦ αὐτοῦ κώνου, δῆλον ὡς ὁ κύλινδρος ἡμιόλιος ἐστὶ τοῦ ψ κώνου. ἐκβεβλήσθω δὴ τὰ ἐπίπεδα τῶν κυλίνδρων πάντων, ἐξ ὧν σύγκειται τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα. ἐσσεῖται ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου, τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. ἐσσεῖται δὴ ὁ ὅλος κύλινδρος διαιρεόμενος εἰς κυλίνδρους, τῷ μὲν πλήθει ἴσους τοῖς κυλίνδροις τοῖς ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι, τῷ δὲ μεγέθει ἴσους τῷ μεγίστῳ αὐτῶν. ἔστω δὴ οὖν γραμμαὶ κείμεναι, ἐφ' αἷς τὰ ξ, τῷ πλήθει ἴσαι τοῖς τμήμασι τᾶς β θ εὐθείας, τῷ δὲ μεγέθει ἴσα ἑκάστα τᾷ β θ, καὶ ἀπὸ ἑκάστας τετράγωνον ἀναγεγράφθω. ἀφαιρήσθω δὴ ἀπὸ μὲν τοῦ ἐσχάτου τετραγώνου γνώμων, πλάτος ἔχων ἴσαν τᾷ β ι. ἐσσεῖται δὲ οὗτος ἴσος τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν β ι, ι δ. ἀπὸ δὲ τοῦ παρ' αὐτῷ τετραγώνου γνώμων ἀφαιρήσθω, πλάτος ἔχων διπλάσιον τᾶς β ι. ἐσσεῖται δὴ οὗτος ἴσος τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν β χ, χ δ. καὶ ἀεὶ ἀπὸ τοῦ ἐχομένου τετραγώνου γνώμων ἀφαιρήσθω πλάτος μὲν ἴσον τμήματι, μεῖζον τοῦ πλάτεος τοῦ πρώτου αὐτοῦ ἀφαιρημένου γνώμονος. ἐσσεῖται δὴ ἕκαστος αὐτῶν ἴσος τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν τᾶς β δ τμημάτων, ὧν τὸ ἕτερον τμῆμα ἴσον ἐστὶ τῷ πλάτει τοῦ γνώμονος. ἐσσεῖται δὴ καὶ ἀπὸ τοῦ τετραγώνου τοῦ δευτέρου τὸ λοιπὸν τετράγωνον, τὰν πλευρὰν ἔχον ἴσαν τᾷ θ ε. ὁ δὲ κύλινδρος ὁ πρῶτος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ὁ ἔχων ἄξονα τὰν θ ε, ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν πρῶτον τῶν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι, τὸν αὐτὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν θ ε, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς α θ, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς κ ε. ὥστε καὶ ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν β θ, θ δ περιεχόμενον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν β ε, ε δ περιεχόμενον. ἔχει οὖν ὁ κύλινδρος ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ πρῶτον τετράγωνον ποτὶ τὸν γνώμονα τὸν ἀπὸ τοῦ δευτέρου τετραγώνου ἀφαιρημένον. ὁμοίως δὲ καὶ τῶν ἄλλων κυλίνδρων ἕκαστος, ἄξονα ἐχόντων ἴσαν τᾷ θ ε, ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν ἐν

ἀφῃρήσθω. alii ...

ἀφαιρεῖν

γνώμονα

τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι, καὶ ἔχοντα ἄξονα τὸν αὐτὸν, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ὃν τὸ τετράγωνον, ὁμοίως τεταγμένον αὐτῷ ποτὶ τὸν γνώμονα τὸν ἀπὸ τοῦ ἑπομένου αὐτῷ τετραγώνου ἀφαιρημένον. ἐντὶ δή τινα μεγέθεα οἱ κύλινδροι οἱ ἐν τῷ κυλίνδρῳ, καὶ ἄλλα τετράγωνα τὰ ἀπὸ τᾶν ξ ξ ἴσα τῷ πλήθει τοῖς κυλίνδροις, καὶ κατὰ δύο τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντα. λέγονται δὲ οἱ κύλινδροι ποτ' ἄλλα μεγέθεα τοὺς κυλίνδρους τοὺς ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι. ὁ δὲ ἔσχατος οὐδὲ ποθ' ἓν λέγεται. καὶ τὰ τετράγωνα ποτ' ἄλλα μεγέθεα τοὺς ἀπὸ τῶν τετραγώνων ἀφαιρημένους ὁμόλογα ἐν τοῖς αὐτοῖς λόγοις. τὸ δὲ ἔσχατον τετράγωνον οὐδὲ ποθ' ἓν λέγεται. πάντες οὖν οἱ κύλινδροι οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ποτὶ πάντας τοὺς ἑτέρους κυλίνδρους, τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον, ὃν πάντα τὰ τετράγωνα ποτὶ πάντας τοὺς γνώμονας τοὺς ἀφαιρημένους ἀπ' αὐτῶν. ὁ ἄρα κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν πάντα τὰ τετράγωνα ποτὶ πάντας τοὺς γνώμονας τοὺς ἀφαιρημένους ἀπ' αὐτῶν. τὰ δὲ τετράγωνα πάντων τῶν γνωμόνων τῶν ἀφαιρημένων ἀπ' αὐτῶν μείζονα ἐντὶ ἢ ἡμιόλια. ἐντὶ γάρ τινες γραμμαὶ κείμεναι αἱ ξ ρ, ξ σ, ξ τ, ξ υ, ξ φ, τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι, καὶ ἁ ἐλαχίστα ἴσα τᾷ ὑπερεχομένᾳ. ἐντὶ δὲ καὶ ἄλλαι γραμμαὶ, ἐφ' ἃν τὰ δύο ξ ξ, τῷ μὲν πλήθει ἴσαι ταύταις, τῷ δὲ μεγέθει ἑκάστα ἴσα τᾷ μεγίστᾳ. τὰ νῦν τετράγωνα τὰ ἀπὸ πασᾶν ἃ ἐστὶν ἑκάστα ἴσα τᾷ μεγίστᾳ, πάντων μὲν τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, ἐλάσσονά ἐντι ἢ τριπλάσια. τῶν δὲ λοιπῶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας, μείζονα ἢ τριπλάσια. τοῦτο γὰρ ἐν τοῖς περὶ τᾶν ἑλίκων ἐκδεδομένοις δέδεικται. ἐπεὶ δὲ πάντα τὰ τετράγωνα ἐλάσσονά ἐντι, ἢ τριπλάσια τῶν ἑτέρων τετραγώνων, ἃ ἐντὶ ἀφαιρημένα ἀπ' αὐτῶν, δῆλον ὅτι τῶν λοιπῶν μείζονά ἐντι ἢ ἡμιόλια. τῶν οὖν γνωμόνων μείζονα ἢ ἡμιόλια, ὥστε καὶ ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, μείζων ἐστὶν ἢ ἡμιόλιος τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος, ὅπερ ἀδύνατον. τοῦ γὰρ ψ κώνου ἡμιόλιός ἐστι. τὸ δὲ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μεῖζον ἐδείχθη τοῦ ψ κώνου. οὐκ ἄρα ἐστὶ μεῖζον τὸ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος τοῦ ψ κώνου. οὐδὲ τοίνυν ἔλασσον. ἔστω γὰρ εἰ δυνατὸν ἔλασσον. πάλιν δὴ ἐγγεγράφθω εἰς τὸ ἁμίσεον τοῦ σφαιροειδέος σχῆμα στερεὸν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρων ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγεγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι, ἢ ὑπερέχει ὁ ψ κῶνος τοῦ ἡμίσεος τοῦ σφαιροειδέος, καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον κατασκευάσθω. ἐπεὶ οὖν ἔλασσόν ἐστι τὸ ἐγγραφὲν σχῆμα τοῦ τμήματος, δῆλον ὅτι καὶ τὸ περιγραφὲν σχῆμα ἔλασσόν ἐστι τοῦ ψ κώνου. πάλιν δὴ ὁ πρῶτος κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ὁ ἔχων ἄξονα τὰν θ ε, ποτὶ τὸν πρῶτον κύλινδρον τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν θ ε, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ὃν τὸ πρῶτον τετράγωνον ποτ' αὐτό. ὁ δὲ δεύτερος κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ὁ ἔχων ἄξονα τὰν ε π, ποτὶ τὸν δεύτερον κύλινδρον τὸν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι, τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν ε π, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ β τετράγωνον ποτὶ τὸν γνώμονα τὸν ἀπ' αὐτοῦ ἀφαιρημένον, καὶ τῶν ἄλλων δὲ κυλίνδρων ἕκαστος, τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ἄξονα ἐχόντων ἴσαν τᾷ θ ε, ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι κατ' αὐτὸν ἐόντα, τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔχει λόγον, ὁμοίως τεταγμένῳ αὐτῷ τετραγώνῳ ποτὶ τὸν γνώμονα τὸν ἀπ' αὐτοῦ ἀφαιρημένον. καὶ πάντες οὖν οἱ κύλινδροι οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ποτὶ πάντας τοὺς κυλίνδρους τοὺς ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον, ὃν πάντα τὰ τετράγωνα ποτὶ τὸ ἴσον τῷ πρώτῳ τετραγώνῳ, καὶ τοῖς γνώμονεσσι τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τετραγώνων ἀφαιρημένοις. καὶ τὰ τετράγωνα πάντα ἐλάσσονά ἐντι, ἢ ἡμιόλια τοῦ ἴσου τῷ τε πρώτῳ τετραγώνῳ, καὶ τοῖς γνώμονεσσι τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν ἀφαιρημένοις, διότι τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας τετραγώνου μείζονά ἐντι ἢ τριπλάσια. ὁ ἄρα κύλινδρος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, ἐλάσσων ἢ ἡμιόλιός ἐστι τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος, ὅπερ ἀδύνατον. τοῦ γὰρ ψ κώνου ἡμιόλιός ἐστι. τὸ δὲ περιγεγραμμένον σχῆμα ἔλασσον ἐδείχθη τοῦ ψ κώνου. οὐκ ἄρα ἐστὶν ἔλασσον τὸ ἡμίσεος τοῦ σφαιροειδέος τοῦ ψ κώνου. ἐπεὶ οὔτε μεῖζόν ἐστιν, οὔτε ἔλασσον, ἴσον ἄρα ἐστί.

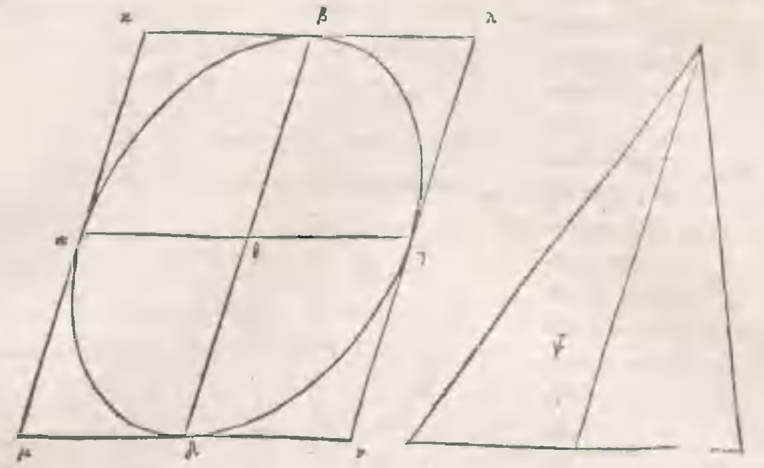
ἐγγραφέντος κατασκευάσθω

λ

Καὶ τοίνυν εἴκα τὸ σφαιροειδὲς μὴ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα τῷ ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ κέντρου τμηθῇ, ὁμοίως τὸ ἁμίσεον τοῦ σφαιροειδέος, διπλάσιον ἐσεῖται τοῦ ἀποτμήματος τοῦ κώνου βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. τετμάσθω γὰρ σχῆμα σφαιροειδές. τμηθέντος δὲ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ ἄλλῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον, τοῦ μὲν σχήματος τομὰ ἔστω ἁ α β γ δ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ, κέντρον δὲ αὐτᾶς τὸ θ, τοῦ δὲ τετμηκότος ἐπιπέδου τὸ σχῆμα ἔστω ἁ α γ εὐθεῖα. ἐσεῖται δὴ αὐτὰ διὰ τοῦ θ ἀγομένα, ἐπεὶ τὸ ἐπίπεδον ὑπέκειτο διὰ τοῦ κέντρου ἄχθαι. ἐσεῖται οὖν τις ὀξυγωνίου κώνου τομὰ περὶ διάμετρον τὰν α γ, ἐπεὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ

Σχῆμ.

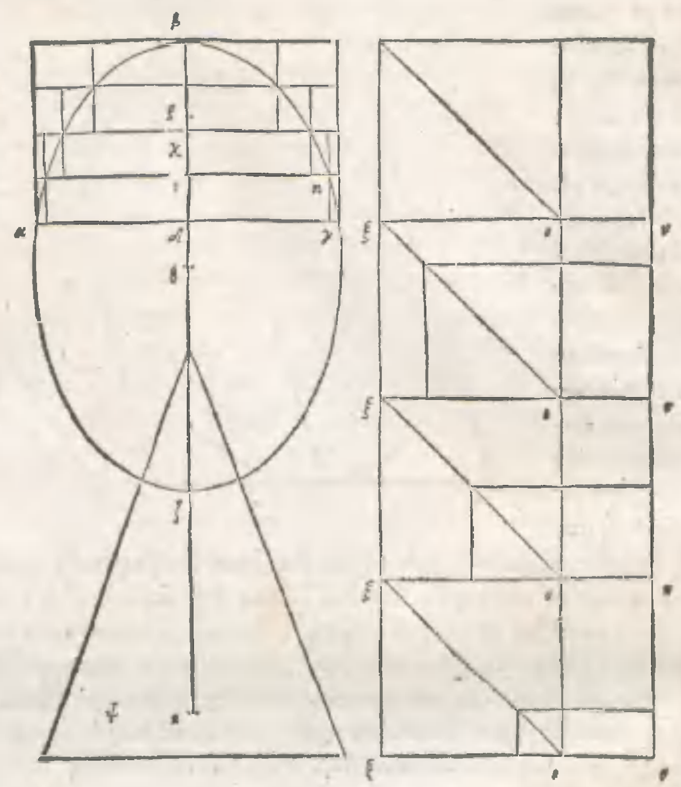
ἀποτέμνον ὑπέκειτο οὐ ποτ' ὀρθὰς εἶμεν τῷ ἄξονι ἀγμένον. ἄχθω δή τινες αἱ κ λ, μ ν παρὰ τὰν α γ ἐπιψαύουσαι τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς κατὰ τὰ β, δ, ἀπὸ δὲ τᾶν κ λ, μ ν ἐπίπεδα ἀνεστακέτω παράλληλα τῷ κατὰ τὰν α γ. ἐπιψαύοντι δὲ ταῦτα τοῦ σφαιροειδέος, καὶ τὰ β, δ ἐπιζευχθεῖσαι,



πεσεῖται δὲ διὰ τοῦ θ, καὶ ἐσοῦνται τῶν τμημάτων κορυφαὶ μὲν τὰ β, δ σαμεῖα, ἄξονες δὲ αἱ β θ, θ δ. δυνατὸν δέ ἐστιν εὑρεῖν κύλινδρον, ἄξονα ἔχοντα τὰν β θ, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ, ἁ περὶ διάμετρον τὰν α γ. εὑρεθέντος δὲ ἐσεῖταί τις κυλίνδρου τόμος, τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχων τοῦ ἡμίσεος τοῦ σφαιροειδέος, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. πάλιν δὴ καὶ κῶνον εὑρεῖν δυνατόν ἐστι, κορυφὰν ἔχοντα τὸ β σαμεῖον, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ, ἁ περὶ διάμετρον τὰν α γ. εὑρεθέντος δὲ ἐσεῖται τὸ ἀπότμαμα τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. λέγω δὴ ὅτι τὸ τοῦ σφαιροειδέος ἡμίσεον διπλάσιόν ἐστι τοῦ κώνου τούτου. ἔστω δὴ ὁ ψ κῶνος διπλάσιος τοῦ ἀποτμήματος τοῦ κώνου. εἰ οὖν μή ἐστιν ἴσον τὸ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος τῷ ψ κώνῳ, ἔστω πρῶτον εἰ δυνατὸν μεῖζον. ἐγγεγράφθω δή τι εἰς τὸ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος σχῆμα στερεόν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρου τομῶν, ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον. ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι ἢ ἁλίκῳ ὑπερέχει τὸ ἁμίσεον τοῦ σφαιροειδέος τοῦ ψ κώνου. ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον δειχθήσεται τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐν τῷ ἡμίσεῳ τοῦ σφαιροειδέος, μεῖζον ἐὸν τοῦ ψ κώνου. καὶ ὁ τόμος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τοῦ μὲν ψ κώνου καὶ ὁ τόμος ἐών, τοῦ δὲ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐν ἡμισέως τοῦ σφαιροειδέος μείζων ἢ ἡμιόλιος, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἔσται οὖν τὸ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος τοῦ ψ κώνου. ἐγγεγράφθω κυλίνδρων τομῶν ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγραφὲν τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι, ἢ ἁλίκῳ ὑπερέχει ὁ ψ κῶνος τοῦ ἡμίσεος τοῦ σφαιροειδέος. πάλιν οὖν ὁμοίως τοῖς πρότερον δειχθήσεται τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἔλασσον ἐὸν τοῦ ψ κώνου, καὶ ὁ τόμος τοῦ κυλίνδρου, ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τοῦ μὲν ψ κώνου ἡμιόλιος ἐών, τοῦ δὲ περιγεγραμμένου σχήματος ἐλάσσων ἢ ἁμιόλιος, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἐσεῖται οὖν οὐδὲ ἔλασσον τὸ ἥμισυ τοῦ σφαιροειδέος τοῦ ψ κώνου. ἐπεὶ δὲ οὔτε μεῖζόν ἐστιν, οὐδὲ ἔλασσον, ἴσον ἐστί. φανερὸν οὖν ἐστιν ὃ ἔδει δεῖξαι.

λα

Παντὸς σχήματος σφαιροειδέος ἐπιπέδῳ τμηθέντος μὴ διὰ τοῦ κέντρου, ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, τὸ ἔλασσον τμῆμα ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν συναμφότερα τὰ ἡμίσεα τοῦ ἄξονος τοῦ σφαιροειδέος, καὶ ὁ ἄξων τοῦ μείζονος τμάματος, ποτὶ τὸν ἄξονα τοῦ μείζονος τμάματος. ἔστω γάρ τι τμῆμα σφαιροειδέος σχήματος, ἀποτετμημένον ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, μὴ διὰ τοῦ κέντρου. τμηθέντος δὲ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ ἄλλῳ διὰ τοῦ ἄξονος, τοῦ μὲν σχήματος τομὰ ἔστω ἁ α β γ ὀξυγωνίου κώνου τομά. διάμετρος δὲ τᾶς τομᾶς, καὶ ἄξων σφαιροειδέος ἔστω ἁ β ζ. κέντρον δὲ τὸ θ. τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἀποτέμνοντος τὸ τμῆμα, τομὰ ἔστω ἁ α γ εὐθεῖα. ποιήσει δὴ αὐτὰ ὀρθὰς γωνίας ποτὶ τὰν β ζ, ἐπεὶ τὸ ἐπίπεδον ὀρθὸν εἶεν ποτὶ τὸν ἄξονα ὑπέκειτο. ἔστω δὲ τὸ τμῆμα τὸ ἀποτετμημένον, οὗ κορυφὰ τὸ β σαμεῖον, ἔλασσον ἢ ἁμίσεος τοῦ σφαιροειδέος σχήματος, καὶ τᾷ β θ ἴσα ἔστω ἁ ζ η. δεικτέον ὅτι τὸ τμῆμα οὗ κορυφὰ τὸ β σαμεῖον, ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ δ η ποτὶ τὰν δ ζ. ἔστω δὲ κύλινδρος τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχων τῷ ἐλάσσονι τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. ἔστω δὲ καὶ κῶνος, ἐν ᾧ τὸ ψ, ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτάν, τοῦτον ἔχων τὸν λόγον ὃν ἔχει ἁ δη ποτὶ τὰν δζ. φαμὶ δὴ τὸν ψ κῶνον ἴσον εἶμεν τῷ τμάματι τῷ κορυφὰν ἔχοντι τὸ β σαμεῖον. εἰ γὰρ μή ἐστιν ἴσος, ἔσω πρῶτον εἰ δυνατὸν ἐλάσσων. ἐνεγράφθω δὴ εἰς τὸ τμῆμα σχῆμα στερεὸν, καὶ ἄλλο περιεγράφθω ἐκ κυλίνδρων ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι, ἢ ἁλίκῳ μεῖζόν ἐστι τὸ τοῦ σφαιροειδέος τμῆμα τοῦ ψ κώνου. ἐπεὶ ὦν μεῖζόν ἐστι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ τμήματος, ἔλασσον ὑπερέχει τοῦ ἐγγεγραμμένου, ἢ τὸ τμῆμα τοῦ κώνου. δῆλον ὅτι μεῖζόν ἐστι τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ψ κώνου. ἔσω δὴ τρίτον μέρος τᾶς βδ ἁ βρ. ἐπεὶ ὦν ἁ μὲν βη διπλασία ἐστὶ τᾶς βθ, καὶ ἁ βδ τᾶς βρ, τριπλασία ἐσσεῖται ἁ δη τᾶς θρ. ἔχει δὴ ὁ μὲν κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν βδ, πρὸς τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν,



καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, ὅνπερ ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἁ δη ποτὶ τὰν θρ. ὁ δὲ κῶνος ὁ εἰρημένος ποτὶ τὸν ψ κῶνον, τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει, ὃν ἁ δζ ποτὶ τὰν δη. ἐξ ἴσου ἀνομοίως τῶν λόγων τεταγμένων ὁ κύλινδρος, ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, ποτὶ τὸν ψ κῶνον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ δζ ποτὶ τὰν θρ. ἔσω δὴ γραμμαὶ κείμεναι ἐφ᾽ αὐτᾶ ξν, τῷ μὲν πλήθει ἴσαι τοῖς τμάμασι τοῖς ἐν τᾷ βδ, τῷ δὲ μεγέθει ἑκάστα ἴσα τᾷ ζδ. ἔσω δὲ καὶ τᾶν ξο ἑκάστα ἴσα τᾷ βδ. τὰν ἂν ἁ ἑκάστα διπλασία ἐσσεῖται τᾶς θδ. παραπεπτωκέτω δὴ παρ᾽ ἑκάσταν αὐτᾶν χωρίον τι, πλάτος ἔχον ἴσον τᾷ βδ. ὥστε εἶμεν ἕκαστον τῶν ἐχόντων τὰς διαμέτρους τετράγωνον, ἀφαιρείσθω δὴ ἀπὸ μὲν τοῦ πρώτου γνώμων πλάτος ἔχων ἴσον τᾷ βε. ἀπὸ δὲ τοῦ δευτέρου, πλάτος ἔχων ἴσον τᾷ βχ. καὶ ἀφ᾽ ἑκάστου τὸν αὐτὸν τρόπον εἰς ἀπὸ τοῦ ἑπομένου χωρίου γνώμων ἀφαιρείσθω, πλάτος ἔχων ἐν τμάματι ἔλασσον τοῦ πλάτεος τοῦ πρὸ αὐτοῦ ἀφαιρημένου. ἐσσεῖται δὴ ὁ μὲν ἀπὸ τοῦ πρώτου χωρίου γνώμων ἀφαιρημένος, ἴσος τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν βε, εζ. καὶ τὸ λοιπὸν χωρίον παραπεπτωκὸς παρὰ τὰν νο, ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ, τὰν τοῦ ὑπερβλήματος πλευρὰν ἔχον ἴσαν τᾷ δε. ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ δευτέρου χωρίου γνώμων ἀφαιρημένος, ἴσος τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν ζχ, χβ. καὶ τὸ λοιπὸν χωρίον παρὰ τὰν νο παραπεπτωκὸς, ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ. καὶ τὰ λοιπὰ ὁμοίως τούτοις. ἐξοῦντι δὲ καὶ τὰ ἐπίπεδα πάντων τῶν κυλίνδρων, ἐξ ὧν σύγκειται τό, τε ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐν τῷ τμήματι ποτὶ τὰν ... κυλίνδρου, τὰν βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, ἐσσεῖται δὴ ὁ ὅλος κύλινδρος διῃρημένος εἰς κυλίνδρους τῷ μὲν πλήθει ἴσους, τοῖς ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι, τῷ μεγέθει ἴσους τῷ μεγίστῳ αὐτῶν, ὁ δὴ πρῶτος ὁ κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ὁ ἔχων ἄξονα τὰν δε, ποτὶ τὸν πρῶτον κύλινδρον τὸν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν δε, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς δγ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς κε. οὗτος δέ ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ τᾶν βδ, δζ περιεχόμενον, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν βε, εζ. ἕξει ἂν ὁ κύλινδρος ποτὶ τὸν κύλινδρον, τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ πρῶτον χωρίον ποτὶ τὸν γνώμονα τὸν ἀπ᾽ αὐτοῦ ἀφαιρημένον. ὁμοίως δὲ καὶ τῶν ἄλλων κυλίνδρων τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ἕκαστος ἄξονα ἔχων τὰν ἴσαν τᾷ δε, ποτὶ τὸν κατ᾽ αὐτὸν κύλινδρον

δελ.

ἀφων

κύλινδρον τὸν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι, ἄξονα ἔχοντα τὸν αὐτὸν, ὅνπερ ἕξει τὸν λόγον, ὃν τὸ ὁμοίως τεταγμένον αὐτῷ χωρίον ποτὶ τὸν γνώμονα τὸν ἀπ᾽ αὐτοῦ ἀφαιρημένον. ἐντὶ δὴ μεγέθεα τινὰ οἱ κύλινδροι οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, καὶ ἄλλα μεγέθεα χωρία παρὰ τὰν ξν παραπεπτωκότα, πλάτος ἔχοντα τὰν ἴσαν τᾷ βδ, τῷ δὲ πλήθει ἴσα τοῖς κυλίνδροις, καὶ ἀνὰ δύο τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον. λέγονται δὲ οἵ τε κύλινδροι ποτ᾽ ἄλλως κυλίνδρως τοὺς ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι. ὁ δὲ ἔσχατος οὐδὲ ποθ᾽ ἓν λέγεται. καὶ τὰ χωρία ποτ᾽ ἄλλα χωρία τοὺς ἀπ᾽ αὐτῶν ἀφαιρημένως, τὰ ὁμόλογα ἐν τοῖς αὐτοῖς λόγοις. τὸ δὲ ἔσχατον χωρίον οὐδὲ ποθ᾽ ἓν λέγεται. δῆλον ὦν ὅτι καὶ πάντες οἱ κύλινδροι ποτὶ πάντας τοὺς ἑτέρους τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον, ὃν πάντα τὰ χωρία ποτὶ πάντας τοὺς γνώμονας. ὁ ἄρα κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν ποτὶ τὸ σχῆμα τὸ ἐγγεγραμμένον ἐν τῷ τμήματι, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, ὃν πάντα τὰ χωρία ποτὶ πάντας τοὺς γνώμονας. καὶ ἐπεὶ ἐντί τινες γραμμαὶ ἴσαι κείμεναι ἐφ᾽ αὐτᾶ νο, καὶ παρὰ ἑκάσταν παραπέπτωκέ τι χωρίον ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ, αἱ δὲ πλευραὶ τῶν ὑπερβλημάτων ἴσῳ ἀλλάλων ὑπερέχοντι, καὶ ἁ ὑπεροχὰ ἴσα ἐστὶ τᾷ ἐλαχίστᾳ, καὶ ἄλλα ἐντὶ χωρία παρὰ τὰν ξν παραπεπτωκότα, πλάτος ἔχοντα ἴσας τᾷ βδ, τῷ μὲν πλήθει ἴσα τούτοις, τῷ δὲ μεγέθει ἕκαστον ἴσον τῷ μεγίστῳ, δῆλον ὡς σύμπαντα τὰ χωρία ὧν ἐστὶν ἕκαστον ἴσον τῷ μεγίστῳ, ποτὶ πάντα τὰ ἕτερα χωρία ἐλάσσω λόγον ἔχοντι, τοῦ ὃν ἔχει ἁ ξν ποτὶ τὰν ἴσαν συναμφοτέρα τᾶ τε ἡμίσεα τᾶς νο, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τᾶς ξο. φανερὸν οὖν ὅτι τὰ αὐτὰ χωρία ποτὶ πάντας τοὺς γνώμονας μείζονα λόγον ἑξοῦντι τοῦ ὃν ἔχει ἁ ξν ποτὶ τὰν ἴσαν, συναμφοτέροις τᾶ τε ἡμίσεα τᾶς νο, καὶ δυοῖς τριταμορίοις τᾶς ξο. ὁ ἄρα κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, ποτὶ τὸ σχῆμα τὸ ἐγγεγραμμένον ἐν τῷ τμήματι, μείζονα λόγον ἔχει ἢ ἁ ξν ποτὶ τὰν ἴσαν συναμφοτέραις, τᾶ τε ἡμίσεα τᾶς νο, καὶ δυοῖς τριταμορίοις τᾶς ξο. ἐστὶ δὲ τᾶ μὲν ξν ἴσα ἁ δζ. τᾶ δὲ ἡμίσεα τᾶς νο, ἁ δε. τᾶ δὲ τρίτα δύο μόρια τᾶς ξο, ἁ δρ. ὅλος ἄρα ὁ κύλινδρος ποτὶ τὸ σχῆμα τὸ ἐγγεγραμμένον ἐν τῷ τμήματι, μείζονα λόγον ἔχει ἢ ὃν ἔχει ἁ δζ ποτὶ τὰν θρ. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ δζ ποτὶ τὰν θρ, τοῦτον ἐδείχθη ἔχων ὁ αὐτὸς κύλινδρος ποτὶ τὸν ψ κῶνον. μείζονα ὦν ἕξει λόγον ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, ἢ ποτὶ τὸν ψ κῶνον, ὅπερ ἀδύνατον. ἐδείχθη γὰρ μεῖζον ἐὸν τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ψ κώνου. οὐκ ἄρα ἐστὶ μεῖζον τὸ τοῦ σφαιροειδέος τμῆμα τοῦ ψ κώνου. ἀλλ᾽ ἔσω εἰ δυνατὸν ἔλασσον. πάλιν δὴ ἐγγεγράφθω τι εἰς τὸ τμῆμα σχῆμα στερεὸν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρων ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον. ὥστε τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι, ἢ ἁλίκῳ μεῖζόν ἐστιν ὁ ψ κῶνος τοῦ τμήματος. καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον κατασκευάσθω. ἐπεὶ οὖν ἔλασσον ἐστὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τοῦ τμήματος, καὶ ἐλάσσονι ὑπερέχει τὸ περιγραφὲν, ἢ ὁ ψ κῶνος τοῦ τμήματος, δῆλον ὅτι καὶ τὸ περιγραφὲν σχῆμα ἔλασσον ἐστὶ τοῦ ψ κώνου. πάλιν δὴ ὁ πρῶτος κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ὁ ἔχων ἄξονα τὰν δε, ποτὶ τὸν πρῶτον κύλινδρον τὸν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τὸν ἔχοντα ἄξονα τὸν αὐτὸν, ὅνπερ ἔχει λόγον, ὃν τὸ ἔσχατον χωρίον τῶν παρὰ τὰν ξν παραπεπτωκότων, πλάτος ἐχόντων ἴσον τᾷ βε, ποτὶ αὐτό. ἑκάτερα γὰρ ἴσα ἐστίν. ὁ δὲ δεύτερος κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ἄξονα ἔχων ἴσαν τᾷ δε, ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν κατ᾽ αὐτὸν ἐόντα τὸν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ πρῶτον χωρίον τῶν παρὰ τὰν ξν πεπτωκότων, πλάτος ἐχόντων ἴσαν τᾷ βδ, ποτὶ τὸν γνώμονα τὸν ἀφαιρημένον ἀπ᾽ αὐτοῦ. καὶ τῶν ἄλλων δὲ κυλίνδρων ἕκαστος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ἄξονα ἐχόντων ἴσαν τᾷ δε, ποτὶ τὸν κατ᾽ αὐτὸν κύλινδρον τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ὁμόλογον χωρίον αὐτῷ τῶν παρὰ τὰν ξν παραπεπτωκότων, ποτὶ τὸν γνώμονα τὸν ἀπ᾽ αὐτοῦ ἀφαιρημένον πρὸ τοῦ λεγομένου τοῦ ἐσχάτου. καὶ πάντες οὖν οἱ κύλινδροι οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ποτὶ πάντας τοὺς κυλίνδρους τοὺς ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι, τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον, ὃν πάντα τὰ χωρία τὰ παρὰ τὰν ξν παραπεπτωκότα, ποτὶ τὸ ἴσον τῷ τε ἐσχάτῳ κειμένῳ χωρίῳ, καὶ τοῖς γνώμονσι τοῖς ἀφαιρημένοις ἀπὸ τῶν ἄλλων, διὰ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. ἐπεὶ οὖν δέδεικται, ὅτι τὰ χωρία πάντα τὰ παρὰ τὰν νο παραπεπτωκότα ὑπερβάλλοντα εἴδει τετραγώνῳ, χωρὶς τοῦ μεγίστου, μείζονα λόγον ἔχοντι τοῦ ὃν ἔχει ἁ ξν ποτὶ τὰν ἴσαν συναμφοτέραις τᾶ τε ἡμίσεα τᾶς νο, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τᾶς ξο. δῆλον ὅτι τὰ αὐτὰ χωρία ποτὶ τὰ λοιπά, ἅ ἐντι ἴσα τῷ ἐσχάτῳ χωρίῳ κειμένῳ, καὶ τοῖς γνώμονσι τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν ἀφαιρημένοις, ἐλάσσονα λόγον ἔχοντι τοῦ ὃν ἔχει ἁ ξν ποτὶ τὰν ἴσαν ἀμφοτέραις τᾶς τε ἡμισείας τᾶς νο, καὶ δυσὶ τριταμορίοις τᾶς ξο. δῆλον οὖν, ὅτι καὶ ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν ποτὶ τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμ-

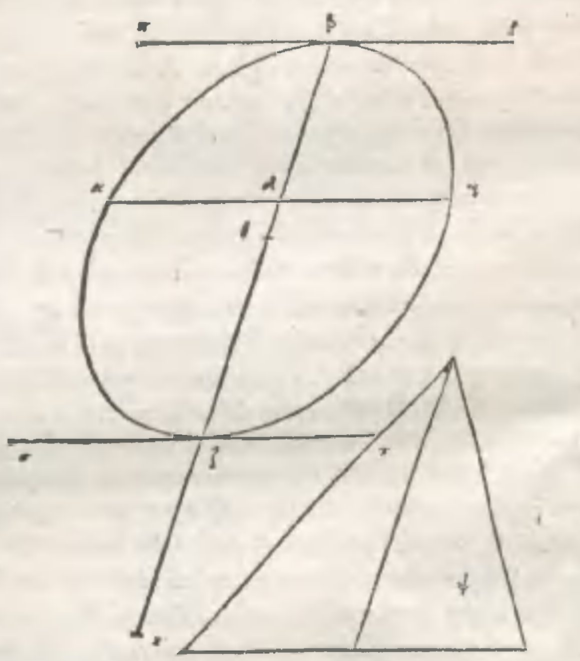
ἀφαιρημένους

κατασκευάσθω

ἀφαιρεμένοις

μένον, ἐλάσσονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει ἁ ζ δ ποτὶ τὰν θ ρ. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ δ ζ ποτὶ τὰν θ ρ, τοῦτον ἔχει ὁ εἰρημένος κύλινδρος ποτὶ τὸν ψ κῶνον. ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ὁ αὐτὸς κύλινδρος ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, ἢ ποτὶ τὸν ψ κῶνον, ὅπερ ἀδύνατον. ἐδείχθη γὰρ ἔλασσον ἐὸν τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ψ κώνου. οὐκ ἄρα ἐστὶν ἔλασσον τοῦ κώνου. ἐπεὶ δὲ οὔτε μεῖζον, οὔτε ἔλασσον, ἴσον ἄρα ἐστίν.

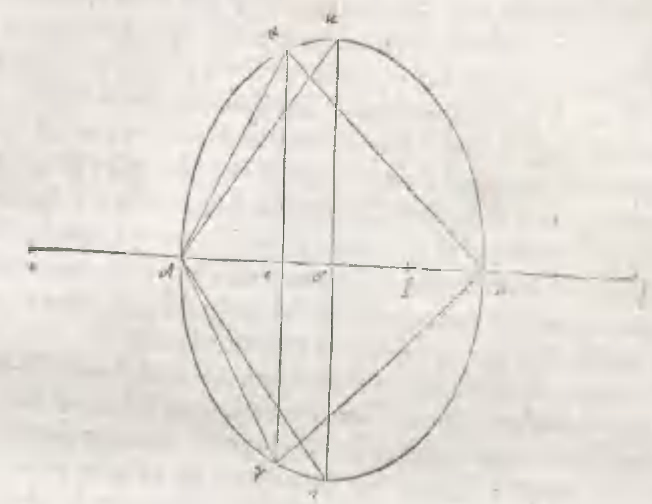
κβ Καὶ τοίνυν εἴκα μὴ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα τμηθῇ τὸ σφαιροειδές, μὴ δὲ διὰ τοῦ κέντρου, τὸ ἔλασσον αὐτοῦ τμῆμα ποτὶ τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τοῦτον ἕξει τὸν λόγον, ὃν αἱ συναμφότεραι, τά τε ἡμίσεια τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰς κορυφὰς τῶν γνωμένων τμαμάτων, καὶ τῷ ἄξονι τοῦ μείζονος τμάματος ποτὶ τὸν ἄξονα τοῦ μείζονος τμάματος. τετμάσθω γάρ τι σχῆμα σφαιροειδές, ὡς εἴρηται. καὶ τμηθέντος αὐτοῦ ἄλλῳ ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον, τοῦ μὲν σχήματος τομὰ ἔστω ἁ α β γ δ ὀξυγωνίου κώνου τομά. τοῦ δὲ τέμνοντος ἐπιπέδου τὸ σχῆμα ἁ γ α εὐθεῖα. καὶ παρὰ τὰν α γ ἄχθωσαν αἱ π ρ, ς τ ἐπιψαύουσαι τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὰ β, ζ. καὶ ἀνεστακέτω ἀπ' αὐτᾶν ἐπίπεδον παράλληλον τῷ κατὰ τὰν α γ. ἐπιψαυσοῦντι δὲ ταῦτα τοῦ σφαιροειδέος κατὰ τὰ β, ζ. καὶ ἐσσοῦνται κορυφαὶ τῶν τμαμάτων ἐπιζευχθεῖσαι. καὶ ἔστω ἁ β ζ. πεσεῖται δὲ αὐτὰ διὰ τοῦ κέντρου. καὶ ἔστω κέντρον τοῦ σφαιροειδέος, καὶ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, τὸ θ. ἐπεὶ οὖν ὑπέκειτο μὴ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα τετμᾶσθαι τῷ ἐπιπέδῳ τὸ σχῆμα, ἁ τομὰ ἐστὶν ὀξυγωνίου κώνου τομά, ὧν διάμετρος αὐτᾶς ἁ γ α. λελάφθω οὖν ὅτι κύλινδρος ἄξονα ἔχων ἐπ' εὐθείας τᾷ β δ.



οὗ γὰρ ἁ ἐπιφάνεια ἐσσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά, ἁ περὶ διάμετρον τὰν α γ. καὶ ὁ κῶνος ὁ κορυφὰν ἔχων τὸ β σαμεῖον, οὗ τᾶς ἐπιφανείας ἐσσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά, ἁ περὶ διάμετρον τὰν α γ, ἐσσεῖται δὴ τμῆμά τι κυλίνδρου τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχων τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, καὶ ἀπότμημα κώνου τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχων τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. δεικτέον ὅτι τὸ τμῆμα τοῦ σφαιροειδέος, οὗ κορυφὰ τὸ β, ποτὶ τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου, τὸ βάσιν ἔχον τὸ τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τοῦτον ἕξει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἁ δ η ποτὶ τὰν δ ζ. ἴσα δὲ ἔστω ἁ ζ η τᾷ θ ζ. λελάφθω δή τις κῶνος, ὁ ψ, ποτὶ τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου τὸ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τοῦτον ἔχων τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἁ δ η ποτὶ τὰν δ ζ. εἰ οὖν μή ἐστιν ἴσον τὸ τμῆμα τοῦ σφαιροειδέος τῷ ψ κώνῳ, ἔστω πρῶτον εἰ δυνατὸν μεῖζον. ἐγγεγράφθω δὴ εἰς τὸ τμῆμα τοῦ σφαιροειδέος σχῆμα στερεόν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρων τομῶν ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενα, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι, ἢ ἁλίκῳ ὑπερέχει τὸ τμῆμα τοῦ σφαιροειδέος τοῦ ψ κώνου. ὁμοίως δὴ τῷ πρότερον δειχθήσεται τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μεῖζον ἐὸν τοῦ ψ κώνου, καὶ ὁ τομὸς τοῦ κυλίνδρου ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μείζονα λόγον ἔχων ἢ ποτὶ τὸν ψ κῶνον, ὅ ἐστιν ἀδύνατον. οὐκ ἐσσεῖται οὖν τὸ τοῦ σφαιροειδέος τμῆμα τοῦ ψ κώνου μεῖζον. ἀλλ' ἔστω εἰ δυνατὸν ἔλασσον. ἐγγεγράφθω δὴ πάλιν εἰς τὸ τμῆμα σχῆμα στερεόν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρου τομῶν ὕψος ἐχόντων συγκείμενα, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι, ἢ ἁλίκῳ ὑπερέχει ὁ ψ κῶνος τοῦ τμάματος. πάλιν δὲ διὰ τῶν αὐτῶν δειχθήσεται τὸ περιγεγραμμένον ἔλασσον τοῦ ψ κώνου. καὶ ὁ τομὸς τοῦ κυλίνδρου ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, ἐλάσσονα λόγον ἔχων, ἢ ποτὶ

τὸν ψ κῶνον, ὅ ἐστιν ἀδύνατον. οὐκ ἐσσεῖται οὖν οὐδὲ ἔλασσον τὸ τμῆμα τοῦ κώνου. φανερὸν οὖν ὡς δεῖ δεῖξαι.

κδ Παντὸς σχήματος σφαιροειδέος ἐπιπέδῳ τμηθέντος ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, μὴ διὰ τοῦ κέντρου, τὸ μεῖζον τμῆμα ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ ἴσα συναμφοτέραις τᾷ τε ἡμισείᾳ τοῦ ἄξονος τοῦ σφαιροειδέος καὶ τῷ τοῦ ἐλάσσονος τμάματος ἄξονι, ποτὶ τὸν τοῦ ἐλάσσονος τμάματος ἄξονα. τετμάσθω τι σφαιροειδὲς ὡς εἴρηται, τμηθέντος δὲ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ ἄλλῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον, τοῦ μὲν τμάματος τομὰ ἔστω ἁ α β γ ὀξυγωνίου κώνου τομά, διάμετρος δὲ αὐτᾶς καὶ ἄξων τοῦ σχήματος ἁ β δ. τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου ἁ γ α εὐθεῖα. ἐσσεῖται δὴ αὐτὰ ποτ' ὀρθὰς τᾷ β δ. ἔστω δὲ μεῖζον τῶν τμαμάτων οὗ κορυφὰ τὸ β. καὶ κέντρον τοῦ σφαιροειδέος τὸ θ. ποτικείσθω δὴ ἁ δ η τᾷ δ θ ἴσα, καὶ α β ζ τᾷ αὐτᾷ ἴσα. δεικτέον ὅτι τὸ τμῆμα τοῦ σφαιροειδέος, οὗ κορυφὰ τὸ β, ποτὶ τὸν κῶνον, τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ ε η ποτὶ τὰν ε δ. τετμάσθω δὴ τὸ σφαιροειδὲς ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ κέντρου ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, καὶ ἀπὸ γινομένου κύκλου κῶνος ἔστω κορυφὰν ἔχων τὸ δ σαμεῖον. ἐστὶ δὴ τὸ μὲν ὅλον σφαιροειδὲς

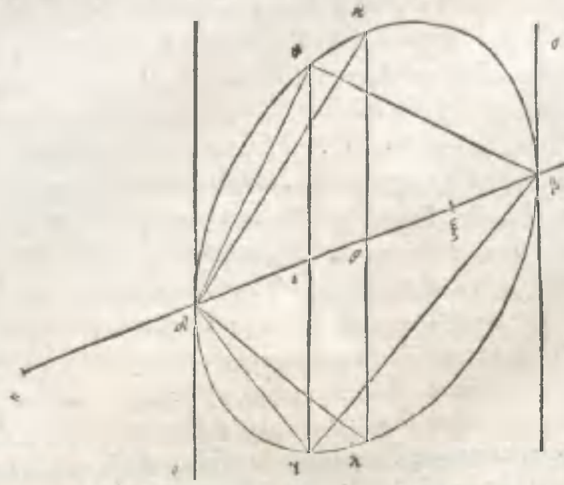


διπλάσιον τοῦ τμάματος τοῦ βάσιν ἔχοντος τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν κ λ, κορυφὰν δὲ τὸ δ σαμεῖον. τὸ δ' εἰρημένον τμῆμα διπλάσιον τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὸν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. δέδεικται γὰρ ταῦτα. τὸ ὅλον οὖν σφαιροειδὲς τετραπλάσιον ἐστὶ τοῦ κώνου τοῦ εἰρημένου. ὁ δὴ κῶνος οὗτος ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν α γ, κορυφὰν δὲ τὸ δ σαμεῖον, τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἁ θ δ ποτὶ τὰν ε δ, καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς κ θ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ε α. ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς κ θ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ε α, ὁ αὐτός ἐστι τῷ ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ β θ, θ δ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν β ε, ε δ. ὃν δὴ λόγον ἔχει ἁ θ δ ποτὶ τὰν ε δ, τοῦτον ἐχέτω ἁ ξ δ ποτὶ τὰν θ δ. ἕξει οὖν καὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ξ δ, β θ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν β θ, θ δ, ὃν ἁ δ θ ποτὶ τὰν δ ε. ὁ δὲ συγκείμενος λόγος ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ ξ δ, θ β, ποτὶ τὸ ὑπὸ β θ δ, καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ τᾶν β θ, θ δ, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν β ε, ε δ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ ὃν ἔχει τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ξ δ, β θ, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν β ε, ε δ. ἔχει οὖν ὁ μὲν κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν κ λ, κορυφὰν δὲ τὸ δ σαμεῖον, ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν α γ, κορυφὰν δὲ τὸ δ σαμεῖον, τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ξ δ, β θ, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν β ε, ε δ. ὁ δὲ κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν α γ, κορυφὰν δὲ τὸ δ σαμεῖον, ποτὶ τὸ τμῆμα τοῦ σφαιροειδέος, τὸ βάσιν ἔχον τὰν αὐτὰν αὐτῷ, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν β ε, ε δ, ποτὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ζ ε, ε δ. τὸ γὰρ ἔλασσον ἢ ἥμισυ τοῦ σφαιροειδέος ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, δέδεικται τοῦτον ἔχον τὸν λόγον, ὃν ἁ συναμφοτέραις ἴσα, τᾷ τε ἡμισείᾳ τοῦ ἄξονος τοῦ σφαιροειδέος, καὶ τῷ ἄξονι τῷ τοῦ μείζονος τμάματος, ποτὶ τὸν ἄξονα τὸν τοῦ μείζονος τμάματος. οὗτος δ' ἐστὶν ὃν ἔχει ἁ ζ ε ποτὶ τὰν β ε. ὁ ἄρα κῶνος ὁ ἐν τῷ ἡμισείῳ τοῦ σφαιροειδέος, ποτὶ τὸ τμῆμα τοῦ σφαιροειδέος τοῦ ἥμισυ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ξ δ, β θ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ζ ε, δ ε. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ὅλον σφαιροειδὲς ποτὶ τὸν κῶνον τὸν ἐν τῷ ἡμισείῳ τοῦ σφαιροειδέος τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ζ κ, ξ δ, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν β θ, ξ δ, τετραπλάσιον γὰρ ἑκάτερον. ὁ δὲ κῶνος ὁ ἐν τῷ ἡμισείῳ τοῦ σφαιροειδέος πο-

τὶ

τὶ τὸ τμῆμα τὸ ἔλασσον, ἢ τὸ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος, ὥσπερ ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ξδ, βθ, ποτὶ τὸ ὑπὸ τῶν ζε, εδ. ἔχοι καὶ τὸ ὅλον σφαιροειδὲς ποτὶ τὸ τμῆμα τὸ ἔλασσον αὐτοῦ, τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ζη, ξδ, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ζε, εδ. ὥστε καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα τοῦ σφαιροειδέος ποτὶ τὸ ἔλασσον τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει, ὃν ἁ ὑπεροχά, ᾇ ὑπερέχει τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ζη, ξδ, τοῦ ὑπὸ τᾶν ζε, εδ πρὸς τὸ ὑπὸ τᾶν ζε, εδ. ὑπερέχει δὲ τὸ ὑπὸ τᾶν ζη, ξδ, τοῦ ὑπὸ τᾶν ζε, εδ, τῷ τε ὑπὸ τᾶν ξδ, εη περιεχομένῳ, καὶ τῷ ὑπὸ τᾶν ζε, ξε. ἔχει ἄρα τὸ μεῖζον τμῆμα τοῦ σφαιροειδέος πρὸς τὸ ἔλαττον, τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ἴσον ἀμφοτέροις τῷ τε περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν ξδ, εη, καὶ τῷ ὑπὸ τᾶν ζε, ξε, ποτὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ζε, εδ. τὸ δὲ ἔλασσον τμῆμα τοῦ σφαιροειδέος ποτὶ τὸν κῶνον, τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν αὐτῷ, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, ὥσπερ ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ ζε ποτὶ τὰν βε. ὁ δὲ κῶνος ὁ ἐν τῷ ἐλάσσονι τμήματι ποτὶ τὸν κῶνον τὸν ἐν τῷ μείζονι τμήματι, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν βε, εδ, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς βε τετράγωνον. τὸν γὰρ τῶν ὑψέων λόγον ἔχοντι οἱ κῶνοι, ἐπεὶ βάσιν ἔχοντι τὰν αὐτάν. ἔχοι αὖ καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα τοῦ σφαιροειδέος ποτὶ τὸν κῶνον τὸν ἐν αὐτῷ ἐγγεγραμμένον ὥσπερ τὸν λόγον, ὃν τὸ ἴσον ἀμφοτέροις τῷ τε περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν ξδ, εη, καὶ τῷ ὑπὸ τᾶν ζε, ξε, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς βε. οὗτος δὲ αὐτός ἐστι τῷ ὃν ἔχει ἁ εη ποτὶ τὰν εδ. τὸ γὰρ ὑπὸ τᾶν ξδ, εη, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ξδ, εδ, ὥσπερ ἔχει λόγον, ὃν ἁ εη ποτὶ τὰν εδ. καὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ζε, ξε περιεχόμενον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ζε, θε, ὥσπερ ἔχει τὸν λόγον (εδ) ὃν ἁ εη ποτὶ τὰν εδ. ἁ γὰρ ξε ποτὶ τὰν θε τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ εη ποτὶ τὰν εδ, διὰ τὸ ἀνάλογον εἶμεν τὰς ξδ, θδ, δε. καὶ τὰν θδ ἴσαν τε εἶμεν τᾷ ηδ. καὶ τὸ ἴσον οὖν ἀμφοτέροις τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν ξδ, εη, καὶ τῷ ὑπὸ τᾶν ζε, ξε, ποτὶ τὸ ἴσον συναμφοτέροις, τῷ τε ὑπὸ τᾶν ξδ, εδ, καὶ τῷ ὑπὸ τᾶν ζε, θε, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ εη ποτὶ τὰν εδ. τὸ δὲ ἀπὸ τᾶς εβ τετράγωνον, ἴσον ἐστὶν ἀμφοτέροις, τῷ τε περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν ξδ, εδ. καὶ τῷ ὑπὸ τᾶν ζε, θε. τὸ μὲν γὰρ ἀπὸ τᾶς βθ τετράγωνον, ἴσον τῷ ὑπὸ τᾶν ξδ, εδ περιεχομένῳ. ἁ δὲ ὑπεροχὰ ᾇ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τᾶς βε τετράγωνον τοῦ ἀπὸ τᾶς βθ, ἴσον ἐστὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν ζε, θε. ἐπεὶ ἴσαι ἁ βθ, βζ. δῆλον οὖν ὅτι τὸ μεῖζον τοῦ σφαιροειδέος τμῆμα, ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, ὥσπερ ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ εη ποτὶ τὰν εδ.

λδʹ Καὶ τοίνυν εἴκα μὴ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα τῷ ἐπιπέδῳ τμαθῇ τὸ σφαιροειδές, μὴ δὲ διὰ τοῦ κέντρου, τὸ μεῖζον τμῆμα αὐτοῦ ποτὶ τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, ὥσπερ ἕξει τὸν λόγον, ὃν αἱ συναμφότεραι, ἴσαι τᾷ ἡμισέᾳ τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰς κορυφὰς τῶν γινομένων τμημάτων, καὶ τῷ ἄξονι τῷ τοῦ ἐλάσσονος τμήματος ποτὶ τὸν ἄξονα τὸν τοῦ ἐλάσσονος τμήματος, τετμάσθω τὸ σφαιροειδὲς ἐπιπέδῳ ὡς εἴρηται. τμαθέντος δὲ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ ἄλλῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον, τοῦ μὲν σχήματος τομὰ ἔστω ἁ αβγδ, ὀξυγωνίου κώνου τομά. τοῦ δὲ τέμνοντος ἐπιπέδου τὸ σχῆμα ἁ γα εὐθεῖα. παρὰ δὲ τὰν αγ ἄχθωσαν αἱ πρ, στ ἐπιψαύουσαι τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς κατὰ τὰ β, δ. καὶ ἀνεστακέτω ἀπ' αὐτᾶν ἐπίπεδα παράλληλα τῷ κατὰ τὰν αγ. ἐπιψαύοντι δὲ ταῦτα τοῦ σφαιροειδέος κατὰ τὰ β, δ, καὶ ἐσοῦνται κορυφαὶ τῶν τμημάτων κατὰ τὰ β, δ. ἄχθω οὖν ἁ τὰς κορυφὰς ἐπιζευγνύουσα τῶν γινομένων τμαμάτων ἁ βδ. πεσεῖται δὲ αὐτὰ διὰ τοῦ κέντρου,



καὶ ἔστω κέντρον τὸ θ. μεῖζον ὂν πρὸς τῶν ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος τμᾶμα, οὗ κορυφὰ τὸ β. ποτικείσθω δὲ ἁ δη ἴσα τᾷ δθ, καὶ ἁ βζ τᾷ αὐτᾷ. δεικτέον ὅτι τὸ τμῆμα τοῦ σφαιροειδέος, τὸ μεῖζον ποτὶ τὸ ἀπότμημα

τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, ὥσπερ ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ εη ποτὶ τὰν εδ. τετμάσθω γὰρ τὸ σφαιροειδὲς ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ κέντρου παραλλήλῳ τῷ κατὰ τὰν αγ ἐπιπέδῳ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος ἀπότμημα κώνου, κορυφὰν ἔχον τὸ δ σαμεῖον. καὶ ὃν ἔχει λόγον ἁ δθ ποτὶ τὰν εδ, ὥσπερ ἐχέτω ἁ ξδ ποτὶ τὰν θδ. ὁμοίως δὴ τῷ πρότερον δειχθήσεται, ὅτι ἀπότμημα τοῦ κώνου τοῦ ἐν τῷ ἡμισέῳ τοῦ σφαιροειδέος ἐγγεγραμμένου, ποτὶ τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου τοῦ ἐν τῷ ἐλάσσονι ἐγγεγραμμένου, τὸν αὐτὸν ἔχον λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ξδ, βθ, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν βε, εδ. καὶ τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου τοῦ ἐν τῷ ἐλάσσονι τμήματι ἐγγεγραμμένου, ποτὶ τὸ τμῆμα τὸ ἐν ᾧ ἐγγέγραπται, τὸν αὐτὸν ἔχον λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν βε, εδ, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ζε, εδ. ἕξει οὖν τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου τοῦ ἐν τῷ ἡμισέῳ τοῦ σφαιροειδέος ἐγγεγραμμένου, ποτὶ τὸ ἔλασσον τμῆμα τοῦ σφαιροειδέος, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ξδ, βθ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ζε, εδ. ἕξει οὖν τὸ μὲν ὅλον σφαιροειδὲς ποτὶ τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου τοῦ ἐν τῷ ἡμισέῳ τοῦ σφαιροειδέος ἐγγεγραμμένου τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ζη, ξδ, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν βθ, ξδ. τετραπλάσιον γὰρ ἑκάτερον ἑκατέρου. τὸ δὲ ἀπότμημα τοῦ κώνου τὸ εἰρημένον ποτὶ τὸ ἔλασσον τμῆμα τοῦ σφαιροειδέος τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ξδ, βθ, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ζε, εδ. ἕξει οὖν τὸ ὅλον σφαιροειδὲς ποτὶ τὸ ἔλασσον τμῆμα αὐτοῦ τοῦ σφαιροειδέος τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ζη, ξδ, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ζε, εδ. αὐτοῦ δὲ τὸ μεῖζον τμῆμα ποτὶ τὸ ἔλασσον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ὑπεροχὰ ᾇ ὑπερέχει τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ζη, ξδ, τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τᾶν ζε, εδ, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ζε, εδ. τὸ δὲ ἔλασσον τμῆμα ποτὶ τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου τοῦ ἐν αὐτῷ ἐγγεγραμμένου τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν ζε, εδ, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν βε, εδ. δέδεικται γὰρ ὥσπερ ἔχον τὸν λόγον, ὃν ἁ ζε ποτὶ τὰν βε. τὸ δὲ ἀπότμημα τοῦ κώνου τοῦ ἐν τῷ ἐλάσσονι τμήματι ἐγγεγραμμένου, ποτὶ τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου τοῦ ἐν τῷ μείζονι τμήματι ἐγγεγραμμένου τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν βε, εδ, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς βε τετράγωνον. τὰ γὰρ ἀποτμήματα τῶν κώνων τὰ εἰρημένα τοῦτον ὑψέων λόγον ἔχοντι (τὰν αὐτὰν) τὰ δὲ ὕψεα αὐτῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντι τὸν τᾶς δε πρὸς τὰν εβ. ἔχει καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα τοῦ σφαιροειδέος ποτὶ τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου τοῦ ἐν αὐτῷ ἐγγεγραμμένου τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ ὑπεροχά, ᾇ ὑπερέχει τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ηζ, ξδ, τοῦ ὑπὸ τᾶν ζε, εδ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς βε τετράγωνον. ὁ δὲ λόγος οὗτος, ὁμοίως τῷ πρότερον δειχθείη, ὁ αὐτὸς ἐὼν τῷ ὃν ἔχει ἁ εη ποτὶ τὰν εδ.

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΠΕΡΙ ΕΛΙΚΩΝ.

ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ ΔΩΣΙΘΕΩ ΧΑΙΡΕΙΝ.

Τῶν ποτὶ Κόνωνα ἀποσταλέντων θεωρημάτων, ὑπὲρ ὧν αἰεὶ τὰς ἀποδείξιας ἐπιστέλλεις μοι γράψαι, τῶν μὲν πλείστων ἐν τοῖς ὑπὸ Ἡρακλείδα κομισθέντων ἔχεις γεγραμμένας, τινὰς δὲ αὐτῶν καὶ ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ γράψας ἐπέστειλά τοι. μὴ θαυμάσῃς δέ, εἰ πλείονα χρόνον ποιήσαντες ἐκδίδομεν τὰς ἀποδείξιας αὐτῶν. συμβαίνει γὰρ τοῦτο γεγενῆσθαι διὰ τὸ βούλεσθαί με πρότερον διδόμεν τοῖς περὶ τὰ μαθήματα πραγματευομένοις, καὶ μαστεύειν αὐτὰ προαιρουμένοις. πόσα γὰρ τῶν ἐν γεωμετρίᾳ θεωρημάτων οὐκ εὐμέθοδα ἐν ἀρχᾷ φανέντα χρόνῳ τὰν ἐξεργασίαν λαμβάνοντι. Κόνων μὲν δὲ ἱκανὸν λαβὼν εἰς τὰν μάθησιν αὐτῶν χρόνον μετήλλαξεν τὸν βίον, καὶ ἄδηλα ἐποίησεν ταῦτα πάντα εὑρών, καὶ ἄλλα πολλὰ ἐξευρών, καὶ ἐπὶ τὸ πλεῖον προαγαγὼν γεωμετρίαν. ἐπιστάμεθα γὰρ ὑπάρξασαν αὐτῷ σύνεσιν οὐ τὰν τυχοῦσαν περὶ τὸ μάθημα, καὶ φιλοπονίαν ὑπερβάλλουσαν, μετὰ δὲ τὰν Κόνωνος τελευτὰν πολλῶν ἐτέων ἐπιγεγενημένων οὐδ' ὑφ' ἑνὸς οὐδὲν τῶν προβλημάτων αἰσθανόμεθα κεκινημένον. βούλομαι δὲ καθ' ἓν ἕκαστον αὐτῶν προενεγκεῖν. καὶ γὰρ συμβαίνει δύο τινὰ τῶν ἐν αὐτῷ μὲν κεχωρισμένων, τέλος δὲ ποτιθεσομένων, ὅπως οἱ φάμενοι μὲν πάντα εὑρίσκειν, ἀπόδειξιν δὲ αὐτῶν οὐδὲ μίαν ἐκφέροντες ἐλέγχωνται, ὡς ὁμολογηκότες εὑρίσκειν τὰ ἀδύνατα. ταῦτα δὴ ποῖα τῶν προβλημάτων ἐντί, καὶ τίνων τὰς ἀποδείξιας ἔχεις ἀπεσταλμένας, καὶ ποίων ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ κομίζοντες δοκιμάζοντες ἐμφανίσαι τοι. πρῶτον δὴ τῶν προβλημάτων ἦν, σφαίρας δοθείσας ἐπίπεδον χωρίον εὑρεῖν ἴσον τᾷ ἐπιφανείᾳ τᾶς σφαίρας, ὃ δὴ καὶ πρῶτον ἐγένετο φανερόν, ἐκδοθέντος τοῦ περὶ τᾶς σφαίραν βιβλίῳ. δειχθέντος γὰρ ὅτι πάσας σφαίρας ἁ ἐπιφάνεια τετραπλασία ἐστὶ τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τᾷ σφαίρᾳ, δῆλον ὡς δυνατόν ἐστι χωρίον ἐπίπεδον εὑρεῖν ἴσον τᾷ ἐπιφανείᾳ τᾶς σφαίρας. δεύτερον δέ, κώνου δοθέντος ἢ κυλίνδρου, σφαίραν εὑρεῖν ἴσαν τῷ κώνῳ ἢ τῷ κυλίνδρῳ. τρίτον δέ, τὰν δοθεῖσαν σφαίραν ἐπιπέδῳ τεμεῖν, ὥστε τὰ τμήματα αὐτᾶς ποτ' ἄλλαλα τὸν ταχθέντα λόγον ἔχειν. τέταρτον δέ, τὰν δοθεῖσαν σφαίραν ἐπιπέδῳ τεμεῖν, ὥς τε τὰ τμήματα τᾶς ἐπιφανείας τὸν ταχθέντα λόγον ἔχειν ποτ' ἄλλαλα. πέμπτον δέ, τὸ δοθὲν τμῆμα σφαίρας, τῷ δοθέντι τμήματι σφαίρας ὁμοιῶσαι. ἕκτον δέ, δύο δοθέντων τμημάτων σφαίρας, εἴτε τᾶς αὐτᾶς, εἴτε ἄλλας εὑρεῖν τι τμῆμα σφαίρας, ὃ ἐσσεῖται αὐτὸ μὲν ὅμοιον τῷ ἑτέρῳ τῶν τμημάτων, τὰν δὲ ἐπιφάνειαν ἴσαν ἕξει τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ ἑτέρου τμήματος. ἕβδομον, ἀπὸ τᾶς δοθείσας σφαίρας τμῆμα ἀποτεμεῖν ἐπιπέδῳ, ὥς τε τὸ τμῆμα ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ὕψος ἴσον, τὸν ταχθέντα λόγον ἔχειν μὴ μείζονα τοῦ ὃν ἔχει τὰ τρία ποτὶ τὰ β. τούτων μὲν τῶν εἰρημένων πάντων τὰς ἀποδείξεις, ἡρακλείδας ἐκόμισεν. τὸ δὲ μετὰ ταῦτα κεχωρισμένον ψεῦδός ἐστιν. ἔστι δέ, εἴκα σφαῖρα ἐπιπέδῳ τμαθῇ εἰς ἄνισα, τὸ μεῖζον τμῆμα ποτὶ τὸ ἔλασσον διπλασίονα λόγον ἕξει, ἢ ἁ μείζων ἐπιφάνεια ποτὶ τὰν ἐλάσσονα. ὅτι δὲ τοῦτο ψεῦδός ἐστι, διὰ τῶν προαπεσταλμένων φανερόν ἐστι. κεχώρισται γὰρ ἐν αὐτοῖς τόδε. εἴκα σφαῖρα ἐπιπέδῳ τμαθῇ εἰς ἄνισα πρὸς ὀρθὰς διαμέτρῳ τινὶ τῶν ἐν τᾷ σφαίρᾳ, τὸ μεῖζον τμῆμα ποτὶ τὸ ἔλασσον τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, ὃν τὸ τμῆμα τὸ μεῖζον τᾶς διαμέτρου ποτὶ τὸ ἔλασσον. τὸ γὰρ μεῖζον τμῆμα τᾶς σφαίρας ποτὶ τὸ ἔλασσον, ἐλάσσονα μὲν ἢ διπλάσιον λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει ἁ μείζων ἐπιφάνεια πρὸς τὴν ἐλάσσονα. μείζονα δέ, ἢ ἡμιόλιον. ἦν δὲ καὶ τὸ ἔσχατον κεχωρισμένον τῶν προβλημάτων ψεῦδος, ὅτι εἴκα σφαίρας τινὸς ἡ διάμετρος τμαθῇ, ὥς τε τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος τετράγωνον τριπλάσιον εἶμεν τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τμήματος, καὶ διὰ τοῦ σημείου τὸ ἐπίπεδον ἀχθὲν ποτ' ὀρθὰς τᾷ διαμέτρῳ τέμνῃ τὴν σφαῖραν, τὸ τοιοῦτον τῷ εἴδει σχῆμα, οἷόν ἐστι τὸ μεῖζον τᾶς σφαίρας τμῆμα, μέγιστόν ἐστι τῶν ἄλλων τμημάτων τῶν ἐχόντων ἴσαν τὰν ἐπιφάνειαν. ὅτι δὲ τοῦτο ψεῦδός ἐστι, δῆλον, διὰ τῶν προαπεσταλμένων θεωρημάτων. δέδεικται γάρ, ὅτι τὸ ἡμισφαίριον μέγιστόν ἐστι τῶν περιεχομένων ὑπὸ ἴσας ἐπιφανείας σφαίρας τμημάτων. μετὰ δὲ ταῦτα περὶ τοῦ κώνου προβεβλημένα ἐστὶ τάδε. εἴκα ὀρθογωνίου κώνου τομὰ μενούσας τᾶς διαμέτρου περιενεχθῇ, ὥς τε εἶμεν ἄξονα τὰν διάμετρον, τὸ περιγραφὲν σχῆμα ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, κωνοειδὲς καλείσθω. καὶ εἴκα τοῦ κωνοειδέος σχήματος ἐπίπεδον ἐπιψαύῃ, παρὰ δὲ τὸ ἐπιψαῦον ἐπίπεδον ἄλλο ἐπίπεδον ἀχθὲν ἀποτέμῃ τι τμῆμα τοῦ κωνοειδέος, τοῦ ἀποτμαθέντος τμήματος βάσις μὲν καλείσθω τὸ ἀποτέμνον ἐπίπεδον, κορυφὴ δὲ

ἰσδέκα

τὸ σημεῖον, καθ' ὃ ἐπιψαύει τὸ ἕτερον ἐπίπεδον τοῦ κωνοειδέος. εἰ δὲ καὶ τὸ εἰρημένον σχῆμα, ἐπιπέδῳ τμαθῇ ποτ' ὀρθὰς τῷ ἄξονι, ὅτι μὲν ἁ τομὰ κύκλος ἐσσεῖται, δῆλον. ὅτι δὲ τὸ ἀποτμαθὲν τμῆμα ἡμιόλιον ἐσσεῖται τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι καὶ ὕψος ἴσον, δεῖξαι δεῖ. καὶ εἴκα τοῦ κωνοειδέος δύο τμήματα ἀποτμηθέωντι ἐπιπέδοις ὁποσοῦν ἀγμένοις. ὅτι μὲν οὖν αἱ τομαὶ ἐσσοῦνται ὀξυγωνίων κώνων τομαί, δῆλον, εἴκα τὰ ἀποτέμνοντα ἐπίπεδα μὴ ὀρθὰ ἔωντι ποτὶ τὸν ἄξονα. ὅτι δὲ τὰ τμήματα ποτ' ἄλλαλα τοῦτον ἑξοῦντι τὸν λόγον, ὃν ἔχωντι δυνάμει ποτ' ἀλλάλας, αἱ ἀπὸ τᾶν κορυφᾶν αὐτῶν ἀγμέναι παρὰ τὸν ἄξονα μέχρι τὰ ἐπίπεδα τέμνοντα, δεῖξαι δεῖ. τούτων δὲ αἱ ἀποδείξεις οὔπω σοι ἀποστέλλονται. μετὰ δὲ ταῦτα περὶ τᾶς ἕλικος ἦν προβεβλημένα ταῦτα. ἔντι δὲ ὥσπερ ἄλλο τι γένος προβλημάτων οὐδὲν ἐπικοινωνοῦντα τοῖς προειρημένοις, ὑπὲρ ὧν ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ τὰς ἀποδείξιας γεγραφήκαμέν σοι. ἐστὶ δὲ τάδε.

ΠΕΡΙ ΕΛΙΚΩΝ.

rescribe singularem.

Εἴκα εὐθεῖαι γραμμαὶ ἐν ἐπιπέδῳ μένοντος τοῦ ἑτέρου πέρατος ἰσοταχέως περιενεχθεῖσα ἀποκατασταθῇ, πάλιν ὅθεν ὥρμασεν, ἅμα δὲ τᾷ γραμμᾷ τᾷ περιφερομένᾳ φέρηταί τι σημεῖον ἰσοταχέως αὐτὸ ἑαυτῷ, κατὰ τᾶς εὐθείας ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ μένοντος πέρατος, τὸ σημεῖον ἕλικα γράψει ἐν τῷ ἐπιπέδῳ. φαμὶ δὴ τὸ περιλαφθὲν χωρίον ὑπὸ τᾶς ἕλικος καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἀποκατασταθείσας ὅθεν ὥρμασεν, τρίτον μέρος εἶμεν τοῦ κύκλου τοῦ γραφέντος, κέντρου μὲν τοῦ μένοντος σημείου, διαστήματι δὲ τᾷ εὐθείᾳ τᾷ διανυσθείσᾳ ὑπὸ τοῦ σαμείου ἐν τᾷ μιᾷ περιφορᾷ τᾶς εὐθείας. καὶ εἴκα τᾶς ἕλικος ἐπιψαύῃ τις εὐθεῖα κατὰ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος τὸ ἔσχατον γενόμενον. ἄλλα δέ τις εὐθεῖα τᾷ περιαχθείσᾳ καὶ ἀποκατασταθείσᾳ γραμμᾷ ποτ' ὀρθὰς ἀχθῇ, ἀπὸ τοῦ μένοντος ποτεὶ τὸ αὐτό, ὥστε ἐμπεσεῖν τᾷ ἐπιψαυούσᾳ, φαμὶ τὰν περιαχθεῖσαν εὐθεῖαν ἴσαν εἶμεν τᾷ τοῦ κύκλου περιφορᾷ. καὶ εἴκα ἁ περιαγομένα γραμμὰ καὶ τὸ σημεῖον, τὸ φερόμενον κατ' αὐτᾶς, πλείονας περιφορὰς περιενεχθέωντι καὶ ἀποκατασταθέωντι πάλιν ὅθεν ὥρμασεν, φαμὶ τὸ χωρίον, τὸ ἐν

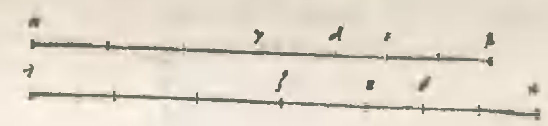
τᾷ

τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ περιλαφθὲν ὑπὸ τᾶς ἕλικος, τὸ μὲν ἐν τᾷ τρίτᾳ περιλαφθὲν διπλάσιον ἐσσεῖται, τὸ δὲ ἐν τᾷ τετάρτᾳ τριπλάσιον, τὸ δὲ ἐν τᾷ πέμπτᾳ τετραπλάσιον, καὶ ἀεὶ τὰ ἐν ταῖς ὕστερον περιφοραῖς περιλαμβανόμενα χωρία κατὰ τοὺς ἑξῆς ἀριθμοὺς πολλαπλάσια ἐσσεῖσθαι, τοῦ ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ περιλαφθέντος. τὸ δὲ ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ περιλαφθὲν χωρίον ἕκτον μέρος εἶμεν, τοῦ ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ περιλαφθέντος χωρίου. καὶ εἴκα ἐπὶ τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν μιᾷ περιφορᾷ γεγραμμένας δύο σημεῖα λαφθέωντι, καὶ ἀπ' αὐτῶν ἐπιζευχθέωντι εὐθεῖαι ἐπὶ τὸ μεμενακὸς πέρας τᾶς περιενεχθείσας γραμμᾶς, καὶ κύκλοι δύο γεγραφέωντι κέντρῳ μὲν τῷ μεμενακότι σημείῳ, διαστημάτεσσι δὲ ταῖς ἐπιζευχθείσαις ἐπὶ τὸ μεμενακὸς πέρας τᾶς εὐθείας, καὶ ἐλάσσων τὰν ἐπιζευχθεισᾶν ἐπεκβληθῇ, φαμὶ τὸ περιλαφθὲν χωρίον ὑπό τε τᾶς τοῦ μείζονος κύκλου περιφερείας τᾶς ἐπὶ τᾷ αὐτᾷ ἕλικι μεταξὺ τᾶν εὐθειᾶν ἐούσας, καὶ τᾶς ἕλικος καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐκβληθείσας ποτὶ τὸ περιλαφθὲν χωρίον, ὑπό τε τᾶς τοῦ ἐλάσσονος κύκλου περιφερείας, καὶ τᾶς αὐτᾶς ἕλικος, καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰ πέρατα αὐτῶν, τοῦτον ἕξειν τὸν λόγον ὃν ἔχει ἁ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ἐλάσσονος κύκλου μετὰ δύο τριταμορίων τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει ἁ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ἐλάσσονος κύκλου μετ' ἑνὸς τριταμορίου τᾶς εἰρημένας ὑπεροχᾶς. τούτων δὴ μὲν καὶ ἄλλων περὶ τᾶς ἕλικος αἱ ἀποδείξεις, ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ γράφονται. πρόκεινται δὲ ὡς καὶ τῶν ἄλλων τῶν γεωμετρουμένων τὰ χρείαν ἔχοντα, εἰς τὴν ἀπόδειξιν αὐτῶν. λαμβάνω δὲ καὶ ἐν τούτοις τῶν ἐν τοῖς πρότερον ἐκδεδομένοις βιβλίοις λήμματα τάδε. τᾶν ἀνίσων γραμμᾶν, καὶ τῶν ἀνίσων χωρίων τὰν ὑπεροχὰν ᾇ ὑπερέχει τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος αὐτὰν ἑαυτᾷ συντιθεμέναν, δυνατὸν εἶμεν παντὸς ὑπερέχειν τοῦ προτεθέντος τῶν ποτ' ἄλλαλα λεγομένων.

θέωντι. ἐγγραφέωντι!

α

Εἴκα κατά τινος γραμμᾶς ἐνεχθῇ τι σημεῖον ἰσοταχέως αὐτὸ ἑαυτῷ φερόμενον, καὶ λαφθέωντι ἐν αὐτᾷ δύο γραμμαί, αἱ ἀπολαφθεῖσαι τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον ποτ' ἀλλάλας, ὃν περ οἱ χρόνοι ἐν οἷς τὸ σημεῖον τὰς γραμμὰς ἐπορεύθη. ἠνέχθω γάρ τι σημεῖον κατὰ τᾶς α β γραμμᾶς ἰσοταχέως, καὶ λελάφθωσαν ἐν αὐτᾷ δύο γραμμαὶ αἱ γ δ, δ ε. ἔστω δὲ ὁ χρόνος ἐν ᾧ τὰν γ δ γραμμὰν τὸ σημεῖον διεπορεύθη ὁ ζ η, ἐν ᾧ δὲ τὰν δ ε ὁ η θ. δεικτέον ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ἁ γ δ γραμμὰ ποτὶ τὰν δ ε γραμμάν, ὃν χρόνος ὁ ζ η ποτὶ τὸν η θ. συγκείσθωσαν γὰρ ἐκ τῶν γ δ, δ ε γραμμᾶν αἱ α δ, δ β γραμμαὶ καθ' ἁντινοῦν σύνθεσιν οὕτως, ὥς τε ὑπερέχειν τὰν α δ τᾶς δ β. καὶ ὁσάκις μὲν σύγκειται ἁ γ δ γραμμὰ ἐν τᾷ α δ, τοσαυτάκις συγκείσθω ὁ χρόνος ὁ ζ η ἐν τῷ χρόνῳ τῷ λ η. ὁσάκις δὲ σύγκειται ἁ δ ε γραμμὰ ἐν τᾷ δ β, τοσαυτάκις συγκείσθω ὁ θ η χρόνος ἐν τῷ κ η χρόνῳ. ἐπεὶ οὖν ὑπόκειται τὸ σημεῖον ἰσοταχέως ἐνηνέχθαι κατὰ τᾶς α β γραμμᾶς, δῆλον ὡς ἐν ὅσῳ χρόνῳ τὰν γ δ ἐνήνεκται, ἐν τοσούτῳ καὶ ἑκάσταν ἐνήνεκται τὰν ἴσαν τᾷ γ δ.



ἐνηνέχθω. .f. mox. lin. 32.33.

φανερὸν οὖν, ὅτι καὶ συγκειμέναν τὰν α δ γραμμάν, ἐν τούτῳ χρόνῳ ἐνήνεκται, ὅσος ἐστὶν ὁ λ η χρόνος. ἐπειδὴ τοσαυτάκις σύγκειται ἅ τε γ δ γραμμὰ ἐν τᾷ α δ γραμμᾷ, καὶ ὁ ζ η χρόνος ἐν τῷ λ η χρόνῳ. διὰ ταῦτα δὴ καὶ τὰν β δ γραμμὰν ἐν τοσούτῳ χρόνῳ τὸ σημεῖον ἐνήνεκται, ὅσος ἐστὶν ὁ κ η χρόνος. ἐπεὶ οὖν μείζων ἐστὶν ἁ α δ γραμμὰ τᾶς β δ, δῆλον ὅτι ἐν πλείονι χρόνῳ τὸ σημεῖον τὰν δ α διαπορεύεται γραμμάν, ἢ τὰν β δ. ὥς τε ὁ χρόνος ὁ λ η μείζων ἐστὶ τοῦ κ η χρόνου. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, καὶ εἴκα ἐκ τῶν χρόνων τῶν ζ η, η θ συντεθέωντι χρόνοι καθ' ἁντινοῦν σύνθεσιν, ὥς τε ὑπερέχειν τὸν ἕτερον τοῦ ἑτέρου, ὅτι καὶ τᾶν ἐκ τᾶν γραμμᾶν τᾶν γ δ, δ ε, κατὰ τὰν αὐτὰν σύνθεσιν συντεθεῖσαν ὑπερέξει ἁ ὁμόλογος τῷ ὑπερέχοντι χρόνῳ. δῆλον οὖν ὅτι τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ἁ γ δ ποτὶ τὰν δ ε, ὃν ὁ χρόνος ὁ ζ η ποτὶ τὸν χρόνον τὸν η θ.

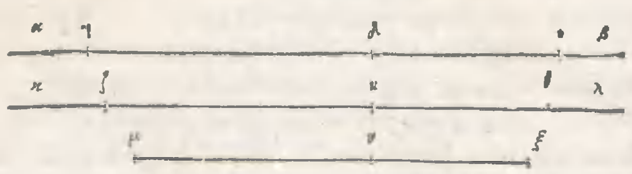
β

Εἴκα δύο σημείων ἑκατέρου κατά τινος γραμμᾶς ἐνεχθέντος, μὴ τᾶς αὐτᾶς ἰσοταχέως αὐτοῦ ἑαυτῷ φερομένου, λαφθέωντι ἐν ἑκατέρᾳ τᾶν γραμμᾶν δύο γραμμαὶ αἵ τε πρᾶται ἐν ἴσοις χρόνοις ὑπὲρ τῶν σαμείων διανυσθεῖσαι, καὶ αἱ δεύτεραι, τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον ποτ' ἀλλάλας αἱ λαφθεῖσαι γραμμαί. ἔστω κατὰ τᾶς α β γραμμᾶς ἐνηνεγμένον τι σαμεῖον ἰσοταχέως αὐτὸ ἑαυτῷ, καὶ ἄλλο κατὰ τᾶς κ λ. λελάφθωσαν δὲ ἐν τᾷ α β δύο αἱ γ δ, δ ε γραμμαί, καὶ ἐν τᾷ κ λ αἱ ζ η, η θ. ἐν ἴσῳ δὲ χρόνῳ τὸ κατὰ τᾶς α β γραμμᾶς ἐνηνεγμένον σαμεῖον τὰν γ δ γραμμὰν διαπορευέσθω, ἐν ὅσῳ τὸ ἕτερον κατὰ τᾶς κ λ ἠνεγμένον τὰν ζ η, ὁμοίως καὶ τὰν δ ε γραμμὰν ἐν ἴσῳ διαπορευέσθω τὸ σαμεῖον, ἐν ὅσῳ τὸ ἕτερον τὰν η θ. δεικτέον ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ γ δ ποτὶ τὰν δ ε, ὃν ἁ ζ η

ἐνηνεγμένον

διαπορεύετο

ποτὶ τὰν η θ. ἔστω δὴ ὁ χρόνος ἐν ᾧ τὰν γ δ γραμμὰν διαπορεύεται τὸ σημεῖον ὁ μ ν. ἐν τούτῳ δὴ τῷ χρόνῳ καὶ τὸ ἕτερον σημεῖον διαπορεύεται τὰν ζ η. πάλιν δὴ καὶ ἐν ᾧ τὰν δ ε γραμμὰν διαπορεύεται τὸ σαμεῖον, ἔστω ὁ ν ξ χρόνος. ἐν τούτῳ δὴ καὶ τὸ ἕτερον σημεῖον διαπορεύεται τὰν η θ. τὸν αὐτὸν δὴ λόγον ἕξουσιν ἅ τε γ δ ποτὶ τὰν δ ε γραμμάν, ὃν ὁ χρόνος ὁ μ ν πρὸς ν ξ. καὶ ἁ ζ η ποτὶ τὰν η θ, ὃν ὁ χρόνος ὁ μ ν ποτὶ τὸν ν ξ. δῆλον οὖν, ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ἁ γ δ ποτὶ τὰν δ ε, ὃν ἁ ζ η ποτὶ τὰν η θ.

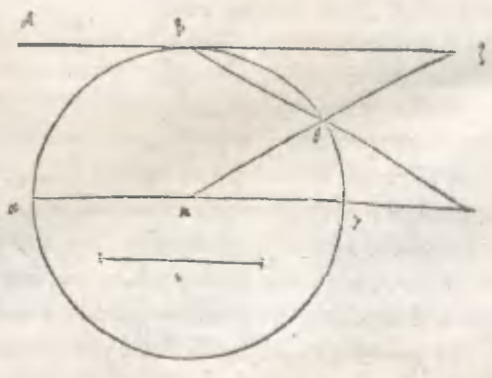


περιγραφέντος

γ Κύκλων δοθέντων ὁποσωνοῦν τῷ πλήθει, δυνατόν ἐστιν εὐθεῖαν λαβεῖν μείζονα ἐοῦσαν τᾶν τῶν κύκλων περιφερειᾶν. περιγραφέντος γὰρ περὶ ἕκαστον τῶν κύκλων πολυγώνου, δῆλον ὡς ἡ ἐκ πασῶν συγκειμένη τῶν περιμέτρων εὐθεῖα μείζων ἔσται πασᾶν τᾶν τῶν κύκλων περιφερειᾶν.

δ Δύο γραμμᾶν δοθεισᾶν ἀνίσων, εὐθείας τε καὶ κύκλου περιφερείας, δυνατόν ἐστι λαβεῖν εὐθεῖαν τᾶς μὲν μείζονος τᾶν δοθεισᾶν γραμμᾶν ἐλάσσονα, τᾶς δὲ ἐλάσσονος μείζονα. ὁσάκις γὰρ ὑπεροχὰ ἃ ὑπερέχει ἁ μείζων γραμμὰ τᾶς ἐλάσσονος αὐτὰ συντιθεμένα ὑπερέξει τᾶς εὐθείας, εἰς τοσαῦτα ἴσα διαιρεθείσας τᾶς εὐθείας, τὸ ἓν τμῆμα ἔλασσον ἔσται τᾶς ὑπεροχᾶς. εἰ μὲν οὖν καὶ ἁ περιφέρεια μείζων τᾶς εὐθείας, ἑνὸς τμήματος ποτιτεθέντος ποτὶ τὰν εὐθεῖαν, τᾶς μὲν ἐλάσσονος τᾶν δοθεισᾶν, δῆλον ὡς μείζων ἐσεῖται. τᾶς δὲ μείζονος ἐλάσσων. καὶ γὰρ ἁ ποτικειμένα ἐλάσσων ἐστὶ τᾶς ὑπεροχᾶς.

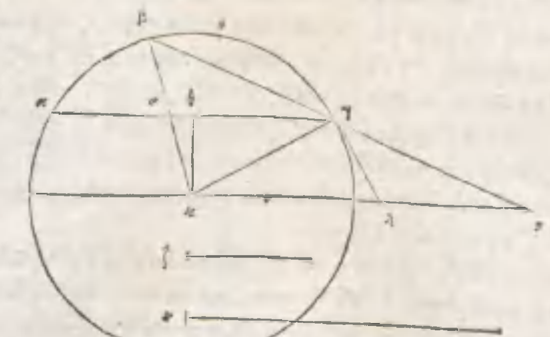
ε Κύκλου δοθέντος, καὶ εὐθείας ἐπιψαυούσης τοῦ κύκλου, δυνατόν ἐστιν ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἀγαγεῖν εὐθεῖαν ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν, ὥς τε τὰν μεταξὺ τᾶς ἐπιψαυούσας, καὶ τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας εὐθεῖαν ποτὶ τὰν ἐκ τοῦ κέντρου ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, ἢ ἁ περιφέρεια τοῦ κύκλου ἁ μεταξὺ τᾶς ἁφᾶς, καὶ τᾶς διαχθείσας ὑπό τι τὰν δοθεῖσαν ὁποιανοῦν κύκλου περιφέρειαν. δεδόσθω κύκλος ὁ α β γ, κέντρον δὲ αὐτοῦ τὸ κ, καὶ ἐπιψαυέτω τοῦ κύκλου ἁ δ ζ κατὰ τὸ β. δεδόσθω δὲ καὶ κύκλου περιφέρεια ὁποιαοῦν. δυνατόν δέ ἐστι τᾶς δοθείσας περιφερείας λαβεῖν τινὰ εὐθεῖαν μείζονα, καὶ ἔστω ἁ ε εὐθεῖα μείζων τᾶς δοθείσας περιφερείας. ἄχθω δὲ ἀπὸ τοῦ κέντρου παρὰ τὰν δ ζ, ἁ α η. καὶ κείσθω ἁ η θ ἴσα τᾷ ε, νεύουσα ἐπὶ τὸ β. ἀπὸ δὴ τοῦ κ κέντρου ἐπὶ τὸ θ ἐπιζευχθεῖσα ἐκβεβλήσθω. τὸν αὐτὸν δὴ λόγον ἔχει ἁ θ ζ ποτὶ τὰν θ κ, ὃν ἁ β θ ποτὶ τὰν θ η. ἡ ἄρα ζ θ ποτὶ τὰν θ κ ἐλάσσονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἁ β θ περιφέρεια ποτὶ τὰν δοθεῖσαν περιφέρειαν. διότι ἁ μὲν β θ εὐθεῖα ἐλάσσων ἐστὶ τᾶς β θ περιφερείας. ἁ δὲ θ η μείζων τᾶς δοθείσας περιφερείας. ἐλάσσονα οὖν λόγον ἔχει καὶ ἁ ζ θ ποτὶ τὰν ἐκ τοῦ κέντρου, ἢ ἁ β θ περιφέρεια ποτὶ τὰν δοθεῖσαν περιφέρειαν.



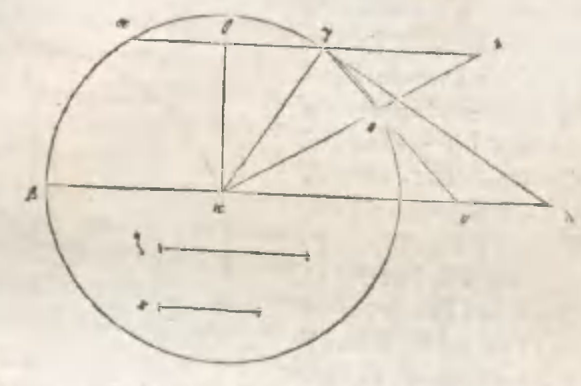
ς Κύκλου δοθέντος, καὶ ἐν τῷ κύκλῳ γραμμᾶς ἐλάσσονος τᾶς διαμέτρου, δυνατόν ἐστιν ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ποτὶ τὰν περιφέρειαν αὐτοῦ ποτιβαλεῖν εὐθεῖαν, τέμνουσαν τὰν ἐν τῷ κύκλῳ δεδομέναν γραμμάν, ὥς τε τὰν ἀπολαφθεῖσαν εὐθεῖαν μεταξὺ τᾶς περιφερείας καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας, ποτὶ τὰν ἐπιζευχθεῖσαν ἀπὸ τοῦ πέρατος τᾶς ποτιπεσούσας ἐπὶ τᾶς περιφερείας, ποτὶ τὸ ἕτερον μέρος τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας εὐθείας, τὸν ταχθέντα λόγον ἔχειν. εἰ καὶ ὁ δοθεὶς λόγος ἐλάσσων ἦν, τοῦ ὃν ἔχει ἁ ἡμίσεια τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ κέντρου κάθετον ἐπ' αὐτὰν ἀγμέναν. δεδόσθω κύκλος ὁ α β γ, κέντρον δὲ αὐτοῦ τὸ κ. ἐν αὐτῷ δεδόσθω εὐθεῖα ἐλάσσων τᾶς διαμέτρου ἁ γ α. καὶ λόγος ὃν ἔχει ἁ ζ πρὸς η, ἐλάσσων τοῦ ὃν ἔχει ἁ γ θ ποτὶ τὰν κ θ, καθέτου οὔσης τᾶς κ θ. ἄχθω δὲ καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου παρὰ τὰν α γ ἁ κ ν. καὶ ἐπὶ κ γ ποτ' ὀρθὰς ἁ γ λ. ὅμοια δή ἐστι τὰ γ θ κ, γ κ λ τρίγωνα. ἔστιν οὖν ὡς ἁ γ θ ποτὶ τὰν θ κ, οὕτως ἁ κ γ ποτὶ τὰν γ λ. ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ἁ ζ ποτὶ τὰν η, ἢ ἁ κ γ ποτὶ τὰν γ λ. ὃν δὴ λόγον ἔχει ἁ ζ ποτὶ

ταν

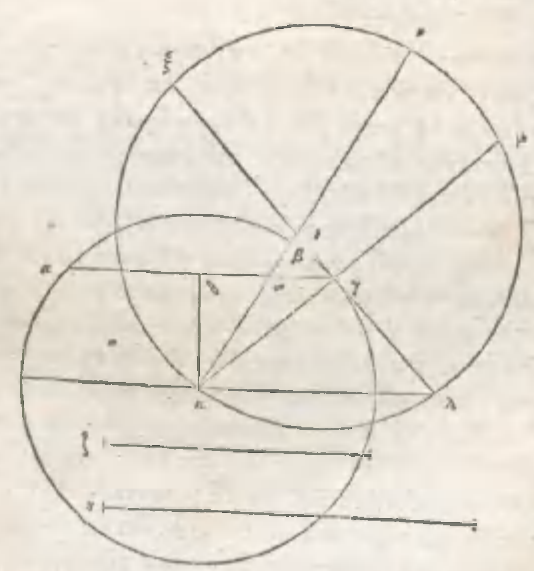
τὰν η, τοῦτον ἐχέτω ἁ κ γ πρὸς μείζονα τᾶς γ λ. ἐχέτω τὰν β ν. κείσθω δὲ ἁ β ν μεταξὺ τᾶς περιφερείας καὶ τᾶς εὐθείας διὰ τοῦ γ. δυνατὸν δέ ἐστιν οὕτως τεμεῖν. καὶ πεσεῖται ἐκτός, ἐπεὶ μείζων ἐστὶ τᾶς γ λ. ἐπεὶ οὖν ἁ β κ πρὸς β ν τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ζ ποτὶ τὰν η, καὶ ἁ ε β ποτὶ β γ τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, ὃν ἁ ζ ποτὶ η.



ζ Τῶν αὐτῶν δεδομένων, καὶ τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ εὐθείας ἐκβεβλημένας, δυνατόν ἐστιν ἀπὸ τοῦ κέντρου ποτιβαλεῖν ποτὶ τὰν ἐκβεβλημέναν, ὥς τε τὰν μεταξὺ τᾶς περιφερείας, καὶ τᾶς ἐκβεβλημένας ποτὶ τὰν ἐπιζευχθεῖσαν ἀπὸ τοῦ πέρατος ἐν ἀπολαφθείσας, ποτὶ τὸ πέρας τῆς ἐκβεβλημένης τὸν ταχθέντα λόγον ἔχειν, εἰ καὶ ὁ δοθεὶς λόγος μείζων ἢ τοῦ ὃν ἔχει ἁ ἡμίσεια τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας, ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ κέντρου κάθετον ἐπ' αὐτὰν ἀγμέναν. δεδόσθω τὰ αὐτά, καὶ ἔστω ἁ ἐν τῷ κύκλῳ γραμμὰ ἐκβεβλημένα. ὁ δὲ δοθεὶς λόγος ἔστω ὃν ἔχει ἁ ζ ποτὶ τὰν η, μείζων τοῦ ὃν ἔχει ἁ γ θ ποτὶ τὰν θ κ. μείζων οὖν ἐσσεῖται καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἁ κ γ πρὸς γ λ. ὃν δὴ λόγον ἔχει ἁ ζ πρὸς η, τοῦτον ἕξει ἁ κ γ πρὸς ἐλάσσονα τᾶς γ λ. ἐχέτω πρὸς ι ν νεύουσαν ἐπὶ τὸ γ, δυνατὸν δέ ἐστιν οὕτως τέμνειν, καὶ πεσεῖται ἐντὸς τῆς γ λ. ἐπειδὴ ἐλάσσων ἐστὶ τῆς γ λ. ἐπεὶ οὖν τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ κ γ πρὸς ι ν, ὃν ἁ ζ πρὸς η, καὶ ἁ ε ι πρὸς ι γ τὸν αὐτὸν ἕξουσι λόγον, ὃν ἁ ζ ποτὶ τὰν η.

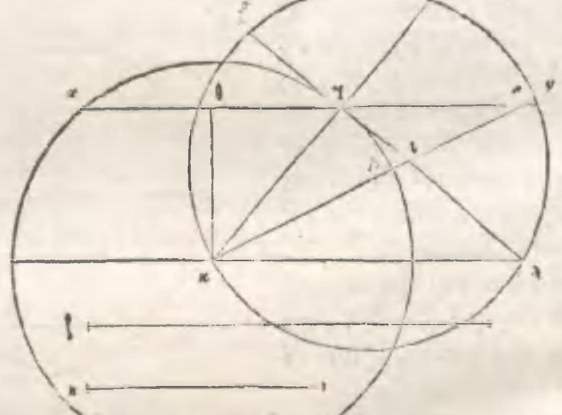


η Κύκλου δοθέντος, καὶ ἐν τῷ κύκλῳ γραμμᾶς ἐλάσσονος τᾶς διαμέτρου, καὶ ἄλλας ἐπιψαυούσας τοῦ κύκλου κατὰ τὸ πέρας τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας, δυνατόν ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ποτιβαλεῖν τινὰ εὐθεῖαν ποτὶ τὰν εὐθεῖαν, ὥς τε τὰν ἀπολαφθεῖσαν ἀπ' αὐτᾶς μεταξὺ τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας, καὶ τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας γραμμᾶς, ποτὶ τὰν ἀπολαφθεῖσαν ἀπὸ τᾶς ἐπιψαυούσας τὸν ταχθέντα λόγον ἔχειν. εἰ καὶ ὁ δοθεὶς λόγος ἐλάσσων ἐστὶ τοῦ ὃν ἔχει ἁ ἡμίσεια τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας, ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου κάθετον ἐπ' αὐτὰν ἀγμέναν. ἔστω κύκλος δεδομένος ὁ α β γ δ, καὶ ἐν τῷ κύκλῳ εὐθεῖα δεδόσθω, ἐλάσσων τᾶς διαμέτρου ἁ γ α. καὶ ἁ ξ λ ἐπιψαυέτω τοῦ κύκλου κατὰ τὸ γ, καὶ λόγος ὃν ἔχει ἁ ζ πρὸς η ἔστω ἐλάσσων τοῦ ὃν ἔχει ἁ γ θ πρὸς θ κ. ἐσσεῖται δὴ ἐλάσσων καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἁ γ κ πρὸς γ λ, εἴ κα παράλληλος ἀχθῇ ἡ κ λ τῇ θ γ. ἐχέ-



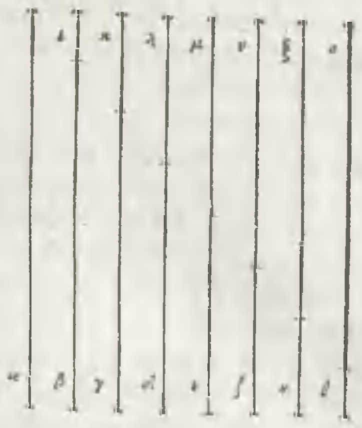
τω δὴ ἁ κ γ πρὸς γ ξ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ ζ πρὸς η. μείζων δὲ ἐστὶν ἁ ξ γ τᾶς γ λ. γεγράφθω κύκλος περὶ τὰ κ λ ξ. ἐπεὶ οὖν ἐστὶ μείζων ἁ ξ γ τᾶς γ λ, καὶ ποτ' ὀρθάς ἐντι ἀλλήλαις αἱ κ ξ λ, δυνατόν ἐστι τᾶ μ γ ἴσαν ἁλλαν θέμεν ταν ι ν, νεύουσαν ἐπὶ τὸ κ. τὸ δὴ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ξ ι λ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν κ ε ι λ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ὃν ἁ ξ ι πρὸς κ ε. καὶ τὸ ὑπὸ τῶν κ ι γ λ. ὥστε καὶ ἁ ι ν πρὸς γ λ ἐστίν, ὡς ἡ ξ ι πρὸς κ ε. ὥστε καὶ ἡ γ μ πρὸς γ λ, καὶ ἡ ξ γ πρὸς κ γ, καὶ πρὸς κ β ἐστίν, ὡς ἡ ξ ι πρὸς κ ε. καὶ λοιπὴ ἡ ι γ πρὸς β ε τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ξ γ ποτὶ τὰν γ κ, καὶ ὃν ἡ η ποτὶ τὸ ζ. πεπτώκει οὖν ἁ κ ν ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν, καὶ ἔχει ἁ μεταξὺ τᾶς περιφερείας καὶ τᾶς εὐθείας ἁ β ε ποτὶ τὰν ἀπολαφθεῖσαν ἀπὸ τᾶς ἐπιψαυούσας τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ζ ποτὶ ταν η λόγον.

Τῶν αὐτῶν δεδομένων, καὶ τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας γραμμᾶς ἐκβεβλημένας, δυνατόν ἐστιν ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ποτιβαλεῖν ποτὶ τὰν ἐκβεβλημέναν εὐθεῖαν, ὥστε ταν μεταξὺ τᾶς περιφερείας καὶ τᾶς ἐκβεβλημένας ποτὶ τὰν ἀπολαφθεῖσαν ἀπὸ τᾶς ἐπιψαυούσας ποτὶ τὰν ἁφὰν τὸν ταχθέντα λόγον ἔχειν. εἶναι ὁ δοθεὶς λόγος μείζων τοῦ ὃν ἔχει ἁ ἡμίσεια τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας, ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ κέντρου κάθετον ἐπ' αὐτὰν ἀγμέναν. δεδόσθω κύκλος ὁ α β γ δ, καὶ ἐν τῷ κύκλῳ εὐθεῖα ἐλάσσων τᾶς διαμέτρου ἁ γ α, ἐπιψαύων τοῦ κύκλου ἁ ξ γ κ ἡ γ. καὶ λόγος ὃν ἔχει ἁ ζ ποτὶ τὰν η, μείζων τοῦ ὃν ἔχει ἁ γ θ ποτὶ τὰν θ κ. ἔσται δὴ μείζων καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἁ κ γ ποτὶ ταν γ λ. ἐχέτω οὖν ἁ κ γ ποτὶ ταν γ ξ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ ζ ποτὶ ταν η. ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν αὐτὴ τᾶς γ λ. πάλιν δὴ γεγράφθω κύκλος διὰ τῶν ξ κ λ σημείων. ἐπεὶ οὖν ἐλάσσων ἐστὶν ἁ ξ γ τᾶς γ λ, καὶ ποτ' ὀρθάς εἰσιν ἀλλήλαις αἱ κ μ, ξ γ, δυνατόν τὴν γ μ ἴσην θεῖναι τὴν ι ν νεύουσαν ἐπὶ τὸ κ. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν ξ ι λ, πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν λ ι κ ε ἐστίν, ὡς ξ ι πρὸς κ ε. ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ξ ι λ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν κ ι ν. τῷ δὲ ὑπὸ τῶν λ ι κ ε ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν κ ι γ λ, διὰ τὸ εἶναι ὡς τὴν κ ε πρὸς ι κ, οὕτως τὴν λ γ πρὸς λ ι. καὶ ὡς ἄρα ἡ ξ ι πρὸς κ ε, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν κ ι ν πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν κ ι γ λ. τουτέστιν ὡς ν ι πρὸς γ λ, τουτέστιν ἡ γ μ πρὸς γ λ. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ γ μ πρὸς γ λ, οὕτως ἡ ξ γ πρὸς κ γ, τουτέστι πρὸς κ β. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ξ ι πρὸς κ ε, ἡ ξ γ πρὸς κ β. καὶ λοιπὴ ἡ ι γ πρὸς λοιπὴν τὴν β ε ἐστίν, ὡς ἡ ξ γ πρὸς γ κ. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἡ ξ γ πρὸς γ κ, τοῦτον ἔχει ἡ η πρὸς ζ. ποτιπέπτωκε δὴ ἁ κ ε ποτὶ τὰν ἐκβεβλημέναν, καὶ ἁ μεταξὺ τᾶς ἐκβεβλημένας καὶ τᾶς περιφερείας ἁ β ε ποτὶ τὰν γ ι, τὰν ἀπὸ τᾶς ἐπιψαυούσας ἀπολαφθεῖσαν τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ζ ποτὶ τὰν η.



Εἴκα γραμμαὶ ἑξῆς τεθέωντι ὁποσαιοῦν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι, ἡ δὲ ἁ ὑπεροχὰ ἴσα τᾶ ἐλαχίστα, καὶ ἄλλαι γραμμαὶ τεθέωντι τῷ μὲν πλήθει ἴσαι ταύταις, τῷ δὲ μεγέθει ἑκάστα ἴσα τᾶ μεγίστα, τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ ταν ἴσαν τᾶ μεγίστα, ποτιλαμβάνοντα τό τε ἀπὸ τᾶς μεγίστας τετράγωνον, καὶ τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς ἐλαχίστας καὶ τᾶς ἴσας πάσαις τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχούσαις, τριπλάσια ἐσσοῦνται τῶν τετραγώνων πάντων, τῶν ἀπὸ ταν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν. ἔστω γραμμαὶ ὁποσαιοῦν ἐφεξῆς κείμεναι τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι, αἱ α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ. ἁ δὲ θ ἴσα ἔστω τᾶ ὑπεροχᾶ. ποτικείσθω δὲ ποτὶ ταν β ἴσα τᾶ θ ἁ ι, ποτὶ δὲ τὰν γ ἁ κ ἴσα τᾶ η. ποτὶ δὲ τὰν δ ἁ λ ἴσα τᾶ ζ. ποτὶ δὲ τὰν ε ἁ μ ἴσα τᾶ ε. ποτὶ δὲ τὰν ζ ἁ ν ἴσα τᾶ δ. ποτὶ δὲ ταν η ἁ ξ ἴσα τᾶ γ. ποτὶ δὲ τὰν θ ἁ ο ἴσα τᾶ β. ἐσσοῦνται δὲ αἱ γινόμεναι ἴσαι ἀλλήλαις, καὶ τᾶ μεγίστα. δεικτέον οὖν, ὅτι τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ πασᾶν τᾶς τε α, καὶ τὰν γενομέναν, ποτιλαβόντα τό τε ἀπὸ τᾶς α τετράγωνον, καὶ τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς θ καὶ τᾶς ἴσας πάσαις ταῖς α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ, τριπλάσια ἐντὶ τῶν τετραγώνων πάντων τῶν ἀπὸ ταν α, β,

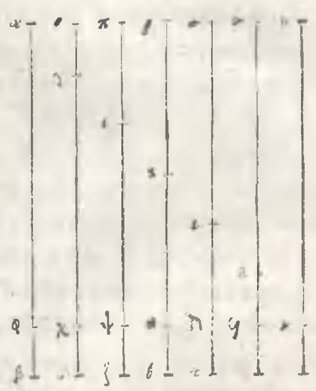
α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ. ἐστὶ δὴ τὸ μὲν ἀπὸ τᾶς β ι τετράγωνον ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ι, β τετραγώνοις, καὶ δύο τοῖς ὑπὸ τῶν β, ι περιεχομένοις. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς κ γ, ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν κ, γ τετραγώνοις, καὶ δύο τοῖς ὑπὸ τῶν κ, γ περιεχομένων. ὁμοίως δὴ καὶ τὰ ἀπὸ ταν ἄλλαν ταν ἴσαν τᾶ α τετράγωνα, ἴσα ἐντὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τμαμάτων τετραγώνοις, καὶ δύο τοῖς ἀπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένων. τὰ μὲν οὖν ἀπὸ ταν α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ, καὶ τὰ ἀπὸ ταν ι, κ, λ, μ, ν, ξ, ο ποτιλαβόντα τὸ ἀπὸ τᾶς α τετράγωνον, διπλάσια ἐντὶ τῶν ἀπὸ τῶν α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ τετραγώνων. λοιπὸν δὲ ἐπιδείξομεν, ὅτι τὰ διπλάσια τῶν περιεχομένων ὑπὸ τῶν τμημάτων ἐν ἑκατέρα γραμμᾶ ταν ἴσαν τᾶ α, ποτιλαβόντα τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς θ, καὶ τᾶς ἴσας πάσαις ταῖς α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ, ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ. καὶ ἐπεὶ δύο μὲν τὰ ὑπὸ β, ι περιεχόμενα, ἴσα δυσὶ τοῖς ὑπὸ τῶν β, θ περιεχομένοις. δύο δὲ τὰ ὑπὸ τῶν κ, γ ἴσα τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς θ, καὶ τᾶς τετραπλασίας τᾶς γ, διὰ τὸ τὰν κ διπλασίονα εἶμεν τᾶς θ. δύο δὲ τὰ ὑπὸ ταν δ, λ ἴσα τῷ ὑπὸ τᾶς θ, καὶ τᾶς ἑξαπλασίας τᾶς δ, διὰ τὸ τὰν λ τριπλασίαν εἶμεν. ὁμοίως δὲ καὶ τὰ ἄλλα τὰ διπλάσια τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν τμημάτων, ἴσα ἐντὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς θ καὶ τᾶς πολλαπλασίας ἀεὶ κατὰ τοὺς ἑξῆς ἀριθμοὺς ἀρτίους τᾶς ἑπομένας γραμμᾶς. τὰ οὖν σύμπαντα ποτιλαβόντα τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς θ καὶ τᾶς ἴσας πάσαις ταῖς α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ, ἐσσοῦνται ἴσα τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς θ, καὶ τᾶς ἴσου πάσαις τᾶ τε α, καὶ τᾶ τριπλασία τᾶς β, καὶ τᾶ πενταπλασία τᾶς γ. καὶ ἀεὶ τᾶ περισσὰ κατὰ τοὺς ἑξῆς ἀριθμοὺς περισσοὺς πολλαπλασίους τᾶς ἑπομένας γραμμᾶς. ἐντὶ δὲ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ τετράγωνα ἴσα τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ ταν αὐταν γραμμαν. ἐστὶ γὰρ τὸ ἀπὸ τᾶς α τετράγωνον, ἴσον τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς θ, καὶ τᾶς ἴσας πάσαις τᾶ τε α καὶ τᾶ ἴσα ταῖς λοιπαῖς, ὧν ἑκάστα ἴσα τᾶ α. ἰσάκις γὰρ μετρεῖ ἅ τε θ ταν α, καὶ ἁ α τᾶς ἴσας αὐτᾶ πάσας ἐν τᾶ α. ὥστε ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ α τετράγωνον τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς θ, καὶ τᾶς ἴσας τᾶ α, καὶ τᾶ διπλασία τῶν β, γ, δ, ε, ζ, η, θ. αἱ γὰρ ἴσαι τᾶ α πᾶσαι χωρὶς τᾶς α, διπλάσιαι ἐντὶ ταν β, γ, δ, ε, ζ, η, θ. ὁμοίως δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τᾶς β τετράγωνον ἴσον ἐντὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς θ, καὶ τᾶς ἴσας, τᾶ τε β καὶ τᾶ διπλασία ταν γ, δ, ε, ζ, η, θ. καὶ πάλιν τὸ ἀπὸ τᾶς γ τετράγωνον ἴσον τῷ ὑπὸ τᾶς θ, καὶ τᾶς ἴσας τᾶ τε γ, καὶ τᾶ διπλασία ταν ε, ζ, η, θ. ὁμοίως δὲ καὶ τὰ ἀπὸ ταν ἄλλαν τετράγωνα ἴσα ἐντὶ τοῖς περιεχομένοις ὑπό τε τᾶς θ, καὶ τᾶς ἴσας αὐτᾶ τε καὶ τᾶ διπλασία ταν λοιπᾶν. δῆλον οὖν ὅτι τὰ ἀπὸ πασᾶν τετράγωνα, ἴσα ἐντὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς θ, καὶ τᾶς ἴσας πάσαις τᾶ τε α, καὶ τᾶ τριπλασία τᾶς β, καὶ τᾶ πενταπλασία τᾶς γ. καὶ τὰ κατὰ τοὺς ἑξῆς ἀριθμοὺς περισσοὺς πολλαπλάσια τᾶς ἑπομένας.



Ἐκ τούτου οὖν φανερόν, ὅτι τὰ τετράγωνα πάντα τὰ ἀπὸ ταν ἴσαν τᾶ μεγίστα, τῶν μὲν τετραγώνων τῶν ἀπὸ ταν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, ἐλάσσονα ἐστὶν ἢ τριπλάσια. ἐπεὶ δὴ ποτιλαβόντα τινὰ τριπλάσια ἐντί. τῶν δὲ λοιπῶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστης τετραγώνου μείζονα ἢ τριπλάσια, ἐπειδὴ τὰ ποτιλαφθέντα ἐλάσσονα ἐστὶν ἢ τριπλάσια τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας τετραγώνου. καὶ τοίνυν εἴκα ὅμοια εἴδεα ἀναγράφωντι, ἀπὸ πασᾶν ἀπό τε ταν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, καὶ ἀπὸ ταν ἴσαν τᾶ μεγίστα, τῶν μὲν ἀπὸ ταν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν εἰδέων, ἐλάσσονα ἐσσοῦνται, ἢ τριπλάσια. τῶν δὲ λοιπῶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας εἴδεος, μείζονα ἢ τριπλάσια. τὸν γὰρ αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον τὰ ὅμοια εἴδεα τοῖς τετραγώνοις. ἀναγράφωντι

Εἴκα γραμμαὶ ἑξῆς τεθέωντι ὁποσαιοῦν, τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι, καὶ ἄλλαι γραμμαὶ τεθέωντι, τῷ μὲν πλήθει μιᾷ ἐλάσσονες ταν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, τῷ μεγέθει ἑκάστα ἴσα τᾶ μεγίστα, τὰ τετράγωνα πάντα τὰ ἀπὸ ταν ἴσαν τᾶ μεγίστα, ποτὶ μὲν τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ ταν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν χωρὶς τᾶς ἐλαχίστας, ἐλάσσονα λόγον ἔχοντι, ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς μεγίστας ποτὶ τὸ ἴσον ἀμφοτέροις, τῷ τε περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς μεγίστας καὶ τᾶς ἐλαχί- ἔχοντι.

λαχίστας καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τᾶς ὑπεροχᾶς τετραγώνου, ᾇ ὑπερέχει ἁ μεγίστα τᾶς ἐλαχίστας. ποτὶ δὲ τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας τετραγώνου, μείζονα τοῦ αὐτοῦ λόγου. ἔστω γὰρ γραμμαὶ ὁποσαιοῦν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι ἑξῆς κείμεναι, ἁ μὲν αβ τᾶς γδ, ἁ δὲ γδ τᾶς εζ, ἁ δὲ εζ τᾶς ηθ, ἁ δὲ ηθ τᾶς ικ, ἁ δὲ ικ τᾶς λμ, ἁ δὲ λμ τᾶς νξ. ποτικείσθω δὴ ποτὶ μὲν τὰν γδ ἴσα μιᾷ ὑπεροχᾷ ἁ γο. ποτὶ δὲ τὰν εζ ἴσα δυσὶν ὑπεροχαῖς, ἁ επ. ποτὶ δὲ τὰν ηθ ἴσα τρισὶν ὑπεροχαῖς ἁ ηρ. καὶ ποτὶ τὰς ἄλλας τὸν αὐτὸν τρόπον. ἐσσοῦνται δὴ αἱ γινόμεναι ἀλλήλαις ἴσαι, καὶ ἑκάστα τᾷ μεγίστᾳ. δεικτέον οὖν ὅτι τὰ ἀπὸ πασᾶν τᾶν γινομέναν τετράγωνα, ποτὶ μὲν πάντα τετράγωνα τὰ ἀπὸ πασᾶν τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς νξ τετραγώνου ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ τὸ ἀπὸ τᾶς αβ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἴσον ἀμφοτέροις, τῷ τε περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν αβ, νξ, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τᾶς νυ τετραγώνου. ποτὶ δὲ τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τᾶν αὐτᾶν, χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς αβ τετραγώνου μείζονα λόγον ἔχει τοῦ αὐτοῦ λόγου. ἀφῃρήσθω ἀφ᾽ ἑκάστης τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν ἴσα τᾷ ὑπεροχᾷ. ὃν δὴ λόγον ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς αβ ποτὶ συναμφότερα, τό, τε ὑπὸ τᾶν αβ, φβ περιεχόμενον, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς αφ τετραγώνου, τοῦτον ἔχει λόγον τό, τε ἀπὸ τᾶς οδ τετράγωνον, ποτί τε τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν οδ, δχ. καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς χο τετραγώνου, τὸ ἀπὸ τᾶς πζ ποτὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν πζ, ψζ. καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ψπ τετραγώνου, ἀπὸ τᾶν ἄλλαν τετράγωνα, ποτὶ τὰ ὁμοίως λαμβανόμενα χωρία. καὶ



τὰ πάντα δὴ τὰ ἀπὸ πασᾶν τᾶν οδ, πζ, ρθ, σκ, τμ, υξ, ποτί τε πάντα περιεχόμενα ὑπό τε τᾶς νξ καὶ τᾶς ἴσας πάσαις ταῖς εἰρημέναις γραμμαῖς. καὶ τὰ τριταμόρια τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν οχ, πψ, ρω, σλ, τϛ, υν, τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς αβ τετράγωνον ποτὶ συναμφότερα, τό, τε ὑπὸ τᾶν αβ, φβ περιεχόμενον, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ φα τετραγώνου. εἰ οὖν κα δειχθῇ τό, τε περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς νξ καὶ τᾶς ἴσας πάσαις ταῖς οδ, πζ, ρθ, σκ, τμ, υξ, καὶ τὰ τρίτα μέρη τετραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν οχ, πψ, ρω, σλ, τϛ, υν, τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν αβ, γδ, εζ, ηθ, ικ, λμ, ἐλάσσονα. τῶν δὲ τετραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν γδ, εζ, ηθ, ικ, λμ, νξ μείζονα, δεδειγμένον ἐσσεῖται τὸ προτεθέν. ἐντὶ δὴ τὸ μὲν περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς νξ, καὶ τᾶς ἴσας πάσαις ταῖς οδ, πζ, ρθ, σκ, τμ, υν. καὶ τὰ τρίτα μέρη τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν οχ, πψ, ρω, σλ, τϛ, υν, ἴσον τοῖς τετραγώνοις τοῖς ἀπὸ χδ, ψζ, ωθ, λκ, ϛμ, νξ, καὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς νξ. καὶ ἴσας πάσαις ταῖς οχ, πψ, ρω, σλ, τϛ, υν. καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν οχ, πψ, ρω, σλ, τϛ, υν. τὰ δὲ ἀπὸ τᾶν αβ, γδ, εζ, ηθ, ικ, λμ τετράγωνα ἴσα τοῖς ἀπὸ τᾶν βφ, χδ, ψζ, ωθ, λκ, ϛμ τετραγώνοις, καὶ τοῖς ἀπὸ τᾶν αφ, γχ, εψ, ηω, ιλ, λϛ. καὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶς βφ, καὶ τᾶς διπλασίας τᾶν αφ, γχ, εψ, ηω, ιλ, λϛ. κοινὰ μὲν ἐντὶ ἑκατέρων τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τᾶν ἴσαν τᾷ νξ. τὸ δὲ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶς νξ, καὶ τᾶς ἴσας ταῖς οχ, πψ, ωρ, λσ, ϛτ, υν, ἔλασσον ἐστὶ τοῦ περιεχομένου ὑπό τε τᾶς βφ, καὶ τᾶς διπλασίας τᾶν αφ, γχ, εψ, ηω, ιλ, λϛ. διὰ τὸ τὰς νῦν εἰρημένας γραμμαῖς ταῖς μὲν γο, επ, ρη, ισ, λτ, υν, ἴσας εἶμεν, τᾶν δὲ λοιπᾶν μείζονας. καὶ τὰ τετράγωνα δὲ τὰ ἀπὸ τᾶν αφ, γχ, εψ, ηω, ιλ, λϛ. δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς ἐπάνω. ἐλάσσονα ἄρα ἐντὶ τὰ ῥηθέντα χωρία τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν αβ, γδ, εζ, ηθ, ικ, λμ. λοιπὸν δὲ δείξομεν, ὅτι μείζονα ἐντὶ τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν γδ, εζ, ηθ, ικ, λμ, νξ. πάλιν δὴ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τᾶν γδ, εζ, ηθ, ικ, λμ, νξ, ἴσα ἐντὶ τοῖς τε ἀπὸ τᾶν γχ, εψ, ηω, ιλ, λϛ καὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς νξ, καὶ τᾶς διπλασίας πασᾶν τᾶν γχ, εψ, ηω, ιλ, λϛ. καὶ ἐστὶ κοινὰ μὲν τὰ ἀπὸ τᾶν χδ, ψζ, ωθ, λκ, μϛ, νξ. μεῖζον δὲ τὸ ὑπό τε τᾶς νζ, καὶ τᾶς ἴσας πάσαις ταῖς οχ, πψ, ρω, σλ, τϛ, υν, τοῦ ὑπὸ τᾶς νξ καὶ τᾶς διπλασίας πασᾶν τᾶν γχ, εψ, ηω, ιλ, λϛ. ἐντὶ δὲ καὶ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τᾶν χο, ψπ, ωρ, λσ, ϛτ, υν, τῶν ἀπὸ τᾶν γχ, εψ, ηω, ιλ, λϛ, μείζονα ἢ τριπλάσια. δέδεικται γὰρ καὶ τοῦτο. μείζονα ἄρα ἐντὶ τὰ ῥηθέντα χωρία τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν γδ, εζ, ηθ, ικ, λμ, νξ.

ει ουν κα

Καὶ

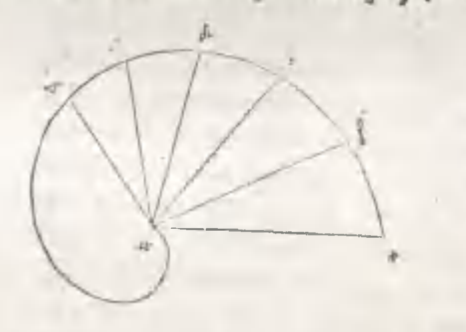
Καὶ τοίνυν εἴκα ὅμοια ἀναγραφῇ ἀπὸ πασᾶν, ἀπό τε τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, καὶ ἀπὸ τᾶν ἴσαν τᾷ μεγίστᾳ, εἴδεα πάντα τὰ ἀπὸ τᾶν ἴσων ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς ἐλαχίστας εἴδεος, ἐλάσσονα λόγον ἑξοῦντι, ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς μεγίστας, ποτὶ τὸ ἴσον ἀμφοτέροις, τῷ τε περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς μεγίστας καὶ τᾶς ἐλαχίστας, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει ἁ μεγίστα τᾶς ἐλαχίστας, ποτὶ δὲ τὰ ἀπὸ τᾶν αὐτᾶν εἴδεα χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας μείζονα τοῦ αὐτοῦ λόγου. τὸν αὐτὸν γὰρ ἕξουσι λόγον τὰ ὅμοια εἴδεα τοῖς τετραγώνοις.

ἀναγραφέντι

Εἴκα εὐθεῖα ἐπιζευχθῇ γραμμὰ ἐν ἐπιπέδῳ μένοντος τοῦ ἑτέρου πέρατος αὐτᾶς, ἰσοταχέως περιενεχθεῖσα. ὁσάκις οὖν ἀποκατασταθῇ πάλιν ὅθεν ὥρμασεν, ἅμα δὲ τᾷ γραμμᾷ περιαγομένᾳ φέρηταί τι σημεῖον ἰσοταχέως αὐτὸ ἑαυτῷ κατὰ τᾶς εὐθείας, ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ μένοντος πέρατος, τὸ σημεῖον ἕλικα γράψει ἐν τῷ ἐπιπέδῳ. καλείσθω οὖν τὸ μὲν πέρας τᾶς εὐθείας τὸ μένον περιαγομένας αὐτᾶς, ἀρχὰ τᾶς ἕλικος. ἁ δὲ θέσις τᾶς γραμμᾶς ἀφ᾽ ἇς ἄρξατο ἁ εὐθεῖα περιφέρεσθαι, ἀρχὰ τᾶς περιφορᾶς. εὐθεῖα δὲ ἂν μὲν ἐν τᾷ πρώτᾳ τᾷ περιφορᾷ διαπορευθῇ τὸ σαμεῖον, τὸ κατὰ τᾶς εὐθείας φερόμενον, πρώτα καλείσθω. ἂν δὲ ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ τὸ αὐτὸ σαμεῖον διανύσει, δευτέρα, καὶ αἱ ἄλλαι ὁμοίως ταύταις ὁμωνύμως ταῖς περιφοραῖς καλείσθωσαν. τὸ δὲ χωρίον τὸ περιλαφθὲν ὑπό τε τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γραφείσας, καὶ τᾶς εὐθείας ἅ ἐστι πρώτα, πρῶτον καλείσθω. τὸ δὲ περιλαφθὲν ὑπό τε τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γραφείσας, καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς δευτέρας, δεύτερον καλείσθω. καὶ τὰ ἄλλα ἑξῆς οὕτω καλείσθω. καὶ εἴκα ἀπὸ τοῦ σημείου ὅ ἐστιν ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, ἀχθῇ τις εὐθεῖα γραμμά, τᾶς εὐθείας ταύτας τὰ ἐπὶ ταὐτὰ ᾇ περιφορὰ γέγονε, προαγούμενα καλείσθω. τὰ δὲ ἐπὶ θάτερα ἑπόμενα, ὅτε γραφεὶς κύκλος κέντρῳ μὲν τῷ σημείῳ, ὅ ἐστιν ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, διαστήματι δὲ τᾷ εὐθείᾳ ἅ ἐστι πρώτα, πρῶτος καλείσθω. ὁ δὲ γραφεὶς κέντρῳ μὲν τῷ αὐτῷ, διαστήματι δὲ διπλασίᾳ εὐθείᾳ, δεύτερος καλείσθω. καὶ οἱ ἄλλοι δὲ ἑξῆς τούτοις τὸν αὐτὸν τρόπον.

ιβ

Εἴκα ποτὶ τὰν ἕλικα τὰν μὲν μιᾷ περιφορᾷ γεγραμμέναν ἀπὸ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος εὐθεῖαι προσπέσωντι ὁποσαιοῦν, ἴσας ποιοῦσαι γωνίας ποτ᾽ ἀλλάλας, τῷ ἴσῳ ὑπερέχοντι ἀλλάλαν. ἔστω ἕλιξ ἐφ᾽ ἇς αἱ αβ, αγ, αδ, αε, αζ, ἴσας γωνίας ποιοῦσαι ποτ᾽ ἀλλάλας. δεικτέον ὅτι τῷ ἴσῳ ὑπερέχει ἁ αγ τᾶς αβ, καὶ ἁ αδ τᾶς αγ, καὶ αἱ ἄλλαι ὁμοίως. ἐν ᾧ γὰρ χρόνῳ ἁ περιαγομένα γραμμὰ ἀπὸ τᾶς αβ ἐπὶ τὰν αγ ἀφικνεῖται, ἐν τούτῳ τῷ χρόνῳ τὸ σημεῖον τὸ κατὰ τᾶς εὐθείας φερόμενον, τὰν ὑπεροχὰν διαπορεύεται, ᾇ ὑπερέχει ἁ γα τᾶν αβ. ἐν ᾧ δὲ χρόνῳ ἀπὸ τᾶς αγ ἐπὶ τὰν αδ, ἐν τούτῳ διαπορεύεται τὰν ὑπεροχάν, ᾇ ὑπερέχει ἁ αδ τᾶς αγ. ἐν ἴσῳ δὲ χρόνῳ ἁ περιαγομένα γραμμὰ ἀπό τε τᾶς αβ ἐπὶ τὰν αγ ἀφικνεῖται, καὶ ἀπὸ τᾶς αγ ἐπὶ τὰν αδ. ἴσαι γάρ ἐντι αἱ γωνίαι. ἐν ἴσῳ ἄρα χρόνῳ τὸ κατὰ τᾶς εὐθείας φερόμενον σημεῖον διαπορεύεται τὰν ὑπεροχάν, ᾇ ὑπερέχει ἁ αγ τᾶς αβ. καὶ τὰν ὑπεροχὰν ᾇ ὑπερέχει ἁ αδ τᾶς αγ. τῷ ἴσῳ ἄρα ὑπερέχει ἁ γα τᾶς αβ, καὶ ἁ αδ τᾶς αγ, καὶ αἱ λοιπαί.

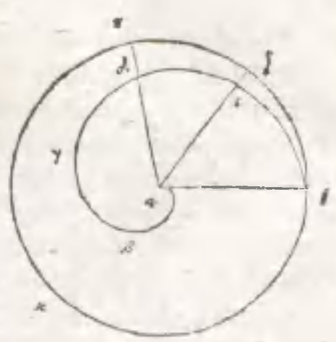


ιγ

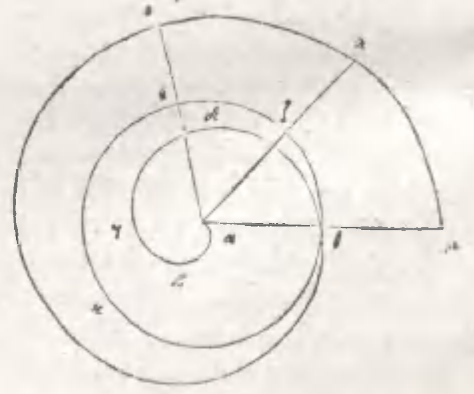
Εἴκα εὐθεῖα γραμμὰ τᾶς ἕλικος ἐπιψαύῃ, καθ᾽ ἓν μόνον ἐπιψαύσει σημεῖον. ἔστω ἕλιξ ἐφ᾽ ἇς τὰ αβγδ. ἔστω δὲ ἀρχὰ μὲν τᾶς ἕλικος τὸ α σημεῖον, ἀρχὰ δὲ τᾶς περιφορᾶς ἁ αδ εὐθεῖα. ἐπιψαυέτω τᾶς ἕλικος εὐθεῖά τις ἁ ζε. φαμὶ δὴ καθ᾽ ἓν μόνον σημεῖον ἐπιψαύειν αὐτάς. ἐπιψαυέτω γὰρ εἰ δυνατὸν κατὰ δύο σημεῖα τὰ γη, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αγ, αη, καὶ ἁ γωνία δίχα τετμάσθω ἁ περιεχομένα ὑπὸ τᾶν αη, αγ. καθ᾽ ὃ δὲ σημεῖον ἁ δίχα τέμνουσα τὰν γωνίαν τᾷ ἕλικι ποτιπιπτέτω τὸ θ, τῷ δὴ ἴσῳ ὑπερέχει ἁ αη τᾶς αθ, καὶ ἁ αθ τᾶς αγ. ἐπειδὴ ἴσας γωνίας περιέχοντι ὑπό τ᾽ ἀλλάλας. ὥστε διπλασίας ἐντὶ αἱ αη, αγ τᾶς αθ. ἀλλὰ τᾶς ἐν τῷ τριγώνῳ τᾶς αθ δίχα τεμνούσας τὰν γωνίαν, μείζονες ἐντὶ ἢ διπλασίας. δῆλον οὖν ὅτι καθ᾽ ὃ συμπίπτει τὸ σημεῖον τᾷ γη εὐθείᾳ ἁ αθ, μεταξὺ τῶν θ, α ἐντὶ σημείων, τέμνει ἄρα ἁ εζ τὰν ἕλικα, ἐπειδή τι τῶν ἐν τᾷ γη σημείων ἐν-

τὸς δὲ τᾶς ἕλικος. ὑπέκειτο δὲ ἐπιψαύουσα, καθ' ἓν ἄρα μόνον ἅπτεται ἁ ΕΚ τᾶς ἕλικος.

Εἴκα ποτὶ τὰν ἕλικα τὰν ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμέναν ποτιπίπτωντι δύο εὐθεῖαι ἀπὸ τοῦ σημείου, ὅ ἐστιν ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, καὶ ἐκβληθέωντι ποτὶ τὰν τοῦ πρώτου κύκλου περιφέρειαν, τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον αἱ ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπίπτουσαι ποτ' ἀλλάλας, ὃν αἱ περιφέρειαι τοῦ κύκλου αἱ μεταξὺ τοῦ πέρατος τᾶς ἕλικος, καὶ τῶν περάτων τᾶν ἐκβληθεισᾶν εὐθειᾶν τῶν ἐπὶ τὰς περιφερείας γινομένων, ἐπὶ τὰ προαγούμενα λαμβανομέναν τᾶν περιφερειᾶν, ἀπὸ τοῦ πέρατος τᾶς ἕλικος. ἔστω ἕλιξ ἁ ΑΒΓΔΕΘ ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα, ἀρχὰ δὲ τᾶς μὲν ἕλικος ἔστω τὸ Α σημεῖον. ἁ δὲ ΘΑ εὐθεῖα ἀρχὰ τᾶς περιφορᾶς. ἔστω καὶ κύκλος ὁ ΘΚΗ, ἔστω ὁ πρῶτος. ποτιπιπτόντων δὲ ἀπὸ τοῦ Α σημείου ποτὶ τὰν ἕλικα, αἱ ΑΕ, ΑΔ. καὶ ἐκπιπτόντων ποτὶ τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν ἐπὶ τὰ Ζ, Η. δεικτέον ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ἁ ΑΕ ποτὶ τὰν ΑΔ, ὃν ἁ ΘΚΖ περιφέρεια ποτὶ τὰν ΘΚΗ περιφέρειαν. περιαγομένας γὰρ τᾶς ΑΘ γραμμᾶς, δῆλον ὡς τὸ μὲν Θ σημεῖον κατὰ τᾶς ΘΚΗ κύκλου περιφερείας ἐνεχθησεῖται ἰσοταχέως. τὸ δὲ Α κατὰ τᾶς εὐθείας φερόμενον τὰν ΑΘ γραμμὰν πεπορεύεται, καὶ τὸ Θ σημεῖον κατὰ τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας φερόμενον, τὰν ΘΚΖ περιφέρειαν. τὸ δὲ Α τὰν ΑΕ εὐθεῖαν, καὶ πάλιν τό τε Α σημεῖον τὰν ΑΔ γραμμάν, καὶ τὸ Θ τὰν ΘΚΗ περιφέρειαν, ἑκάτερον ἰσοταχέως αὐτὸ ἑαυτῷ φερόμενον. δῆλον οὖν, ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ἁ ΑΕ ποτὶ τὰν ΑΔ, ὃν ἁ ΘΚΖ περιφέρεια ποτὶ τὰν ΘΚΗ περιφέρειαν. δέδεικται γὰρ τοῦτο ἔξω ἐν τοῖς πρώτοις. ὁμοίως δὲ δειχθησεῖται καὶ εἴκα ἁ ἑτέρα τᾶν ποτιπιπτουσᾶν ἐπὶ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος ποτιπίπτῃ, τὸ αὐτὸ συμβαίνει.

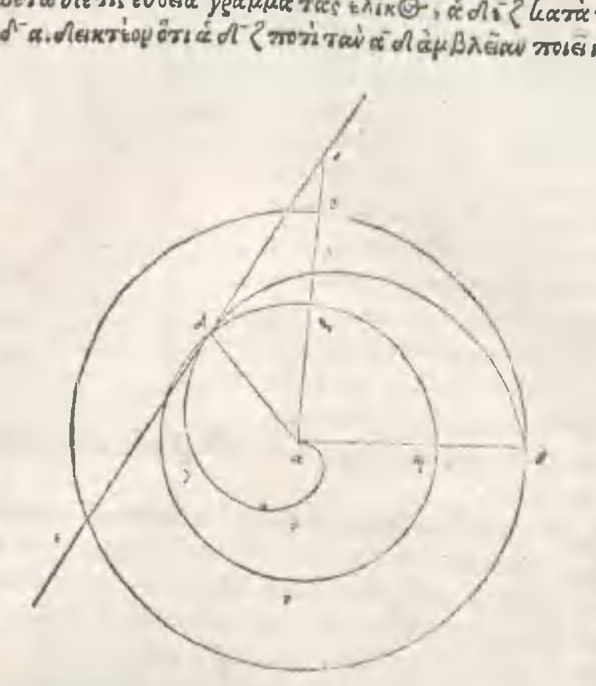


Εἴκα ποτὶ τὰν ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμέναν ἕλικα ποτιπίπτωντι εὐθεῖαι ἀπὸ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος, τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον αἱ εὐθεῖαι ποτ' ἀλλάλας, ὃν αἱ εἰρημέναι περιφέρειαι μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας λαμβανομέναι. ἔστω ἕλιξ ἐφ' ἇς ἁ ΑΒΓΔΘ, ἁ μὲν ΑΒΓΔΘ ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα, ἁ δὲ ΘΛΕΜ ἐν τᾷ δευτέρᾳ. καὶ ποτιπιπτόντων εὐθεῖαι αἱ ΑΕ, ΑΛ. δεικτέον ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ἁ ΑΛ ποτὶ τὰν ΑΕ, ὃν ἁ ΘΚΖ περιφέρεια μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας, πρὸς ΘΚΗ μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας. ἐν ὅσῳ γὰρ χρόνῳ τὸ Α σημεῖον κατὰ τᾶς εὐθείας φερόμενον, τὰν ΑΛ γραμμὰν διαπορεύεται, καὶ τὸ Θ σημεῖον κατὰ τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας φερόμενον, ὅλαν τε τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν, καὶ ἔτι τὰν ΘΚΖ περιφέρειαν διαπορεύεται, καὶ πάλιν τὸ Α σημεῖον τὰν ΑΕ εὐθεῖαν κατὰ τὸ Ε, ὅλαν τε τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν, καὶ ἔτι τὰν ΘΚΗ, ἑκάτερον ἰσοταχέως αὐτὸ αὐτῷ φερόμενον. δῆλον οὖν, ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ἁ ΑΛ γραμμὰ ποτὶ τὰν ΑΕ, ὃν ἁ ΘΚΖ περιφέρεια μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας, ποτὶ τὰν ΘΚΗ περιφέρειαν, μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας. τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον δειχθησεῖται, καὶ εἴκα ποτὶ τὰν ἐν τᾷ τρίτᾳ περιφορᾷ γεγραμμέναν ἕλικα ποτιπίπτωντι εὐθεῖαι, τὸν αὐτὸν λόγον ἑξοῦντι ποτ' ἀλλάλας, ὃν εἰρημέναι μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας δὶς λαμβανομέναι. ὁμοίως δὲ καὶ αἱ ποτὶ τὰς ἄλλας ἕλικας ποτιπίπτουσαι δείκνυνται, ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον, ὃν ἁ εἰρημένα περιφέρεια μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας τοσαυτάκις λαμβανομένας, ὅσος ἐστὶν ὁ ἐλάσσων ἀριθμὸς τᾶν περιφορᾶν, καὶ εἴκα ἁ ἑκατέρα ποτὶ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος πίπτῃ.

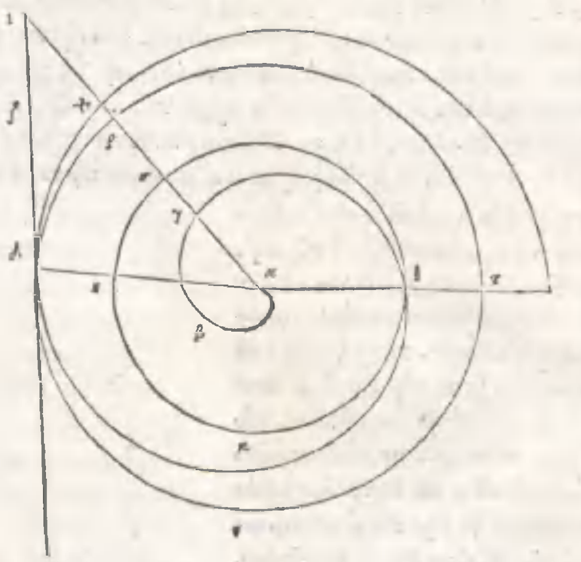


Εἴκα

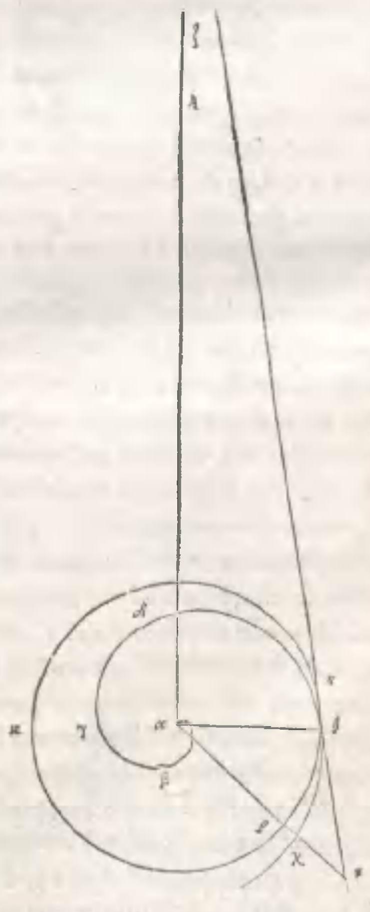
Εἴκα τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας εὐθεῖα γραμμὰ ἐπιψαύῃ, καὶ ἀπὸ τᾶς ἁφᾶς εὐθεῖα γραμμὰ ἐπιζευχθῇ ἐπὶ τὸ σημεῖον, ὅ ἐστιν ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, ἃς ποιεῖ γωνίας ἁ ἐφαπτομένα ποτὶ τὰν ἐπιζευχθεῖσαν ἄνισοι ἐσοῦνται, καὶ ἁ μὲν ἐν τοῖς προαγουμένοις ἀμβλεῖα, ἁ δὲ ἐν τοῖς ἑπομένοις ὀξεῖα. ἔστω ἕλιξ ἐφ' ἇς τὰ ΑΒΓΔΘ ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα. καὶ ἔστω τὸ μὲν Α σημεῖον ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, ἁ δὲ ΑΘ εὐθεῖα ἀρχὰ τᾶς περιφορᾶς, ὅ τε πρῶτος κύκλος, ὁ ΘΚΗ. ἐπιψαυέτω δέ τις εὐθεῖα γραμμὰ τᾶς ἕλικος, ἁ ΔΕΖ κατὰ τὸ Δ. καὶ ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ Α ἐπιζεύχθω ἁ ΔΑ. δεικτέον ὅτι ἁ ΔΖ ποτὶ τὰν ΑΔ ἀμβλεῖαν ποιεῖ γωνίαν. γεγράφθω κύκλος ὁ ΔΤΝ, κέντρῳ μὲν τῷ Α, διαστήματι δὲ τῷ ΑΔ. ἀναγκαῖον δὴ τούτου τοῦ κύκλου τὰν μὲν ἐν τοῖς προαγουμένοις περιφέρειαν ἐντὸς πίπτειν τᾶς ἕλικος, τὰν δὲ ἐν τοῖς ἑπομένοις ἐκτός, διὰ τὸ τὰν ἀπὸ τοῦ Α ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπιπτουσᾶν εὐθειᾶν, τὰς μὲν ἐν τοῖς προαγουμένοις μείζονας εἶμεν τᾶς ΑΔ, τὰς δὲ ἐν τοῖς ἑπομένοις ἐλάσσονας. ὅτι μὲν οὖν ἁ γωνία ἁ περιεχομένα ὑπὸ τᾶν ΑΔ, ΖΔ οὐκ ἐστὶν ὀξεῖα, δῆλον. ἐπειδὴ μείζων ἐστὶ τᾶς τοῦ ἡμικυκλίου. ὅτι δὲ ὀρθὰ οὐκ ἐστί, δεικτέον οὕτως. ἔστω γάρ, εἰ δυνατόν, ὀρθά. ἡ ἄρα ΕΔΖ ἐπιψαύει τοῦ ΔΤΝ κύκλου. δυνατὸν δή ἐστιν ἀπὸ τοῦ Α ποτιβαλεῖν εὐθεῖαν ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν, ὥστε τὰν μεταξὺ τᾶς ἐπιψαυούσας καὶ τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας εὐθεῖαν, ποτὶ τὰν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, τοῦ ὃν ἔχει ἁ μεταξὺ τᾶς ἁφᾶς καὶ τᾶς ποτιπιπτούσας περιφέρεια, ποτὶ τὰν δοθεῖσαν περιφέρειαν. ποτιπιπτέτω δὴ ἁ ΑΙ. τεμεῖ δὴ αὕτα τὰν μὲν ἕλικα κατὰ τὸ Λ. τὰν δὲ τοῦ ΔΝΤ περιφέρειαν κύκλου κατὰ τὸ Ρ. καὶ ἐχέτω ἁ ΡΙ εὐθεῖα ποτὶ τὰν ΑΡ ἐλάσσονα λόγον, τοῦ ὃν ἔχει ἁ ΔΡ περιφέρεια ποτὶ τὰν ΔΝΤ περιφέρειαν. καὶ ὅλα ἄρα ἁ ΙΑ ποτὶ τὰν ΑΡ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ ΡΔΝΤ περιφέρεια ποτὶ τὰν ΔΝΤ περιφέρειαν. τουτέστιν, ὃν ἔχει ἁ ΘΚΖ περιφέρεια ποτὶ τὰν ΚΘ περιφέρειαν. ὃν δὲ ἁ ΘΚΖ περιφέρεια ποτὶ τὰν ΚΘ περιφέρειαν, τοῦτον ἔχει ἁ ΑΛ εὐθεῖα ποτὶ τὰν ΑΔ. δέδεικται γὰρ τοῦτο. ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ἁ ΑΙ ποτὶ τὰν ΑΡ, ἤπερ ἁ ΛΑ ποτὶ τὰν ΑΔ, ὅπερ ἀδύνατον. ἴσα γὰρ ἁ ΡΑ τᾷ ΑΔ. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὀρθὰ ἁ περιεχομένα ὑπὸ τᾶν ΑΔ, ΔΖ. δέδεικται δέ, ὅτι οὐδὲ ὀξεῖα. ἀμβλεῖα ἄρα ἐστίν. ὥστε ἁ λοιπὰ ὀξεῖά ἐστιν. ὁμοίως δὲ δειχθησεῖται, καὶ εἴκα ἁ ἐπιψαύουσα τᾶς ἕλικος ἐπὶ τὸ πέρας ἐπιψαύῃ, τὸ αὐτὸ συμβησεῖται.



Καὶ γίνεται εἴκα τᾶς ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας ἕλικος ἐπιψαύῃ ἁ εὐθεῖα, τὸ αὐτὸ συμβησεῖται. ἐπιψαυέτω γὰρ ἁ ΕΖ εὐθεῖα τᾶς ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας ἕλικος κατὰ τὸ Δ, καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον κατασκευάσθω. ὁμοίως δὴ τᾶς τοῦ ΡΝΔ περιφερείας κύκλου, τὰ μὲν ἐν τοῖς προαγουμένοις τᾶς ἕλικος ἐντὸς πεσοῦνται, τὰ δὲ ἐν τοῖς ἑπομένοις ἐκτός. ἁ οὖν γωνία, ἁ ὑπὸ τᾶν ΑΔ, ΔΖ, οὐκ ἐστὶν ὀρθά, ἀλλὰ ἀμβλεῖα. ἔστω γάρ, εἰ δυνατόν, ὀρθά. ἐπιψαύει οὖν ἁ ΕΖ τοῦ ΡΝΔ κύκλου κατὰ τὸ Δ. ἄχθω δὴ πάλιν ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν ἁ ΑΙ. καὶ τεμνέτω τὰν μὲν ἕλικα κατὰ τὸ Χ, τὰν δὲ τοῦ ΡΝΔ κύκλου περιφέρειαν κατὰ τὸ Ρ. ἐχέτω δὲ ἁ ΡΙ πρὸς ΡΑ ἐλάσσονα λόγον, τοῦ ὃν ἔχει ἁ ΔΡ περιφέρεια ποτὶ ὅλαν τὰν τοῦ ΔΡΝ κύκλου περιφέρειαν, καὶ ποτὶ τὰν ΔΝΤ. δέδεικται γὰρ τοῦτο δυνατὸν ἐόν. καὶ ὅλα ἄρα ἁ ΙΑ ποτὶ τὰν ΑΡ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ ΡΔΝΤ περιφέρεια μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας, ποτὶ τὰν ΔΝΤ περιφέρειαν μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας. ἀλλ' ὃν λόγον ἔχει ἁ ΡΔΝΤ περιφέρεια μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ ΔΝΤΡ κύκλου περιφερείας, ποτὶ τὰν ΔΝΤ περιφέρειαν μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ ΔΝΤΡ κύκλου περιφέρειαν, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ἁ ΘΚΖ περιφέρεια μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ ΘΚΗ κύκλου περιφερείας, ποτὶ τὰν ΚΘ περιφέρειαν μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ θσηκ κύκλου περιφερείας. ὃν δὲ λόγον ἔχουσιν αἱ ὕστερον εἰρημέναι περιφέρειαι, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ἁ χα εὐθεῖα ποτὶ τὰν α δ εὐθεῖαν. δέδεικται γὰρ τοῦτο. ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ἁ ι α ποτὶ τὰν α ρ, ἢ α χ ποτὶ τὰν α δ, ὅπερ ἀδύνατον. ἴση μὲν γὰρ ἡ ρ α τῇ α δ, μείζων δὲ ἡ ι α τῆς α χ. δῆλον οὖν ὅτι ἀμβλεῖά ἐστιν ἡ περιεχομένη ὑπὸ τᾶν α δ ζ. ὥστε ἡ λοιπὴ ὀξεῖα ἐστί. τὰ δ' αὐτὰ συμβήσεται, κἂν εἴκα ἁ ἐπιψαύουσα κατὰ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος ἐπιψαύῃ. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, καὶ εἴκα τᾶς ἐν ὁποιαοῦν γεγραμμένας ἕλικος ἐπιψαύῃ τις εὐθεῖα. καὶ εἴκα κατὰ τὸ πέρας αὐτᾶς, ὅτι ἀνίσους ποιήσει τὰς γωνίας ποτὶ τὰν ἀπὸ τᾶς ἁφᾶς ἐπιζευχθεῖσαν ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος, καὶ τὰν μὲν ἐν τοῖς προαγουμένοις ἀμβλεῖαν, τὰν δὲ ἐν τοῖς ἑπομένοις, ὀξεῖαν.

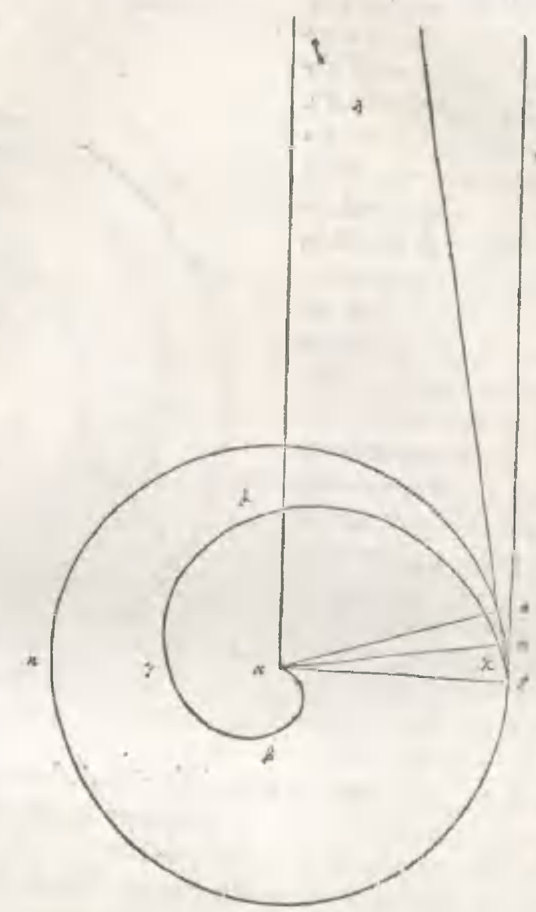


ἐν Εἴκα τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας εὐθεῖα γραμμὰ ἐπιψαύῃ, κατὰ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου, ὅ ἐστιν ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, ποτ' ὀρθὰς ἀχθῇ τις τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς, ἁ ἀχθεῖσα συμπεσεῖται τᾷ ἐπιψαυούσᾳ. καὶ ἁ μεταξὺ εὐθεῖα τᾶς ἐπιψαυούσας, καὶ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος, ἴσα ἐσσεῖται τᾷ τοῦ πρώτου κύκλου περιφερείᾳ. ἔστω ἕλιξ ἁ α β γ δ. ἔστω δὲ τὸ α σημεῖον ἀρχὰ τᾶς ἕλικος. ἁ δὲ θ α γραμμὰ ἀρχὰ τᾶς περιφορᾶς. ὁ δὲ θ η κ κύκλος ὁ πρῶτος. ἐπιψαυέτω δέ τις τᾶς ἕλικος κατὰ τὸ θ, ἁ θ ζ. καὶ ἀπὸ τοῦ α ἄχθω ποτ' ὀρθὰς τᾷ θ α, ἁ α ζ. συμπεσεῖται δὴ αὐτᾷ ποτὶ τὰν θ ζ. ἐπεὶ αἱ ζ θ, θ α ὀξεῖαν γωνίαν περιέχουσιν. συμπιπτέτω κατὰ τὸ ζ. δεικτέον ὅτι ἁ ζ α ἴσα ἐστὶ τᾷ τοῦ θ κ η κύκλου περιφερείᾳ. εἰ γὰρ μή, ἤτοι μείζων ἐστίν, ἢ ἐλάσσων. ἔστω πρότερον εἰ δυνατόν, μείζων. ἔλαβον δή τινα εὐθεῖαν τὰν λ α, τᾶς μὲν ζ α εὐθείας ἐλάσσονα, τᾶς δὲ τοῦ θ η κ κύκλου περιφερείας μείζονα. ἔστι δὴ κύκλος τις ὁ θ η κ. καὶ ἐν τῷ κύκλῳ γραμμὰ ἐλάσσων τᾶς διαμέτρου ἁ θ η. καὶ λόγος ὃν ἔχει ἁ θ α πρὸς α λ, μείζων τοῦ ὃν ἔχει ἁ ἡμίσεια τᾶς η θ, ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ α κάθετον ἐπ' αὐτὰν ἀγμέναν. διότι καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἁ θ α πρὸς α ζ. δυνατὸν οὖν ἐστὶν ἀπὸ τοῦ α ποτιλαβεῖν ποτὶ τὰν τὰν ἐκβεβλημέναν τὰν α ν. ὥστε τὰν μεταξὺ τᾶς περιφερείας καὶ τᾶς ἐκβεβλημένας τὰν ν ρ, πρὸς θ ρ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ θ α ποτὶ τὰν α λ. ἑξεῖ οὖν ἁ ν ρ, ποτὶ τὰν ρ α λόγον, ὃν ἁ θ ρ εὐθεῖα ποτὶ τὰν α λ. ἁ δὲ θ ρ ποτὶ τὰν α λ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ θ ρ περιφέρεια ποτὶ τὰν τοῦ θ η κ κύκλου περιφέρειαν. ἁ μὲν γὰρ θ ρ εὐθεῖα ἐλάσσων ἐστὶ τᾶς θ ρ περιφερείας. ἁ δὲ α λ εὐθεῖα τᾶς τοῦ θ η κ κύκλου περιφερείας μείζων. ἐλάσσονα οὖν λόγον ἕξει καὶ ἁ ν ρ πρὸς ρ α, ἢ ἁ θ ρ περιφέρεια ποτὶ τὰν τοῦ θ η κ κύκλου περιφέρειαν, καὶ ὅλα οὖν ἁ ν α ποτὶ τὰν α ρ, ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἁ θ ρ περιφέρεια μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύ-



τοῦ κύκλου περιφερείας, ποτὶ τὰν τοῦ θ η κ κύκλου περιφέρειαν. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ θ ρ περιφέρεια μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ θ η κ κύκλου περιφερείας, ποτὶ τὰν τοῦ θ η κ κύκλου περιφέρειαν, τοῦτον ἔχει ἁ χ α ποτὶ τὸν α θ. δέδεικται γὰρ τοῦτο. ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ἁ ν α ποτὶ τὰν α ρ, ἤπερ ἁ χ α ποτὶ τὰν α θ, ὅπερ ἀδύνατον. ἁ μὲν γὰρ ν α μείζων ἐστὶ τᾶς α χ. ἁ δὲ α ρ ἴσα ἐστὶ τᾷ θ α. οὐκ ἄρα μείζων ἁ ζ α τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας, τοῦ θ η κ.

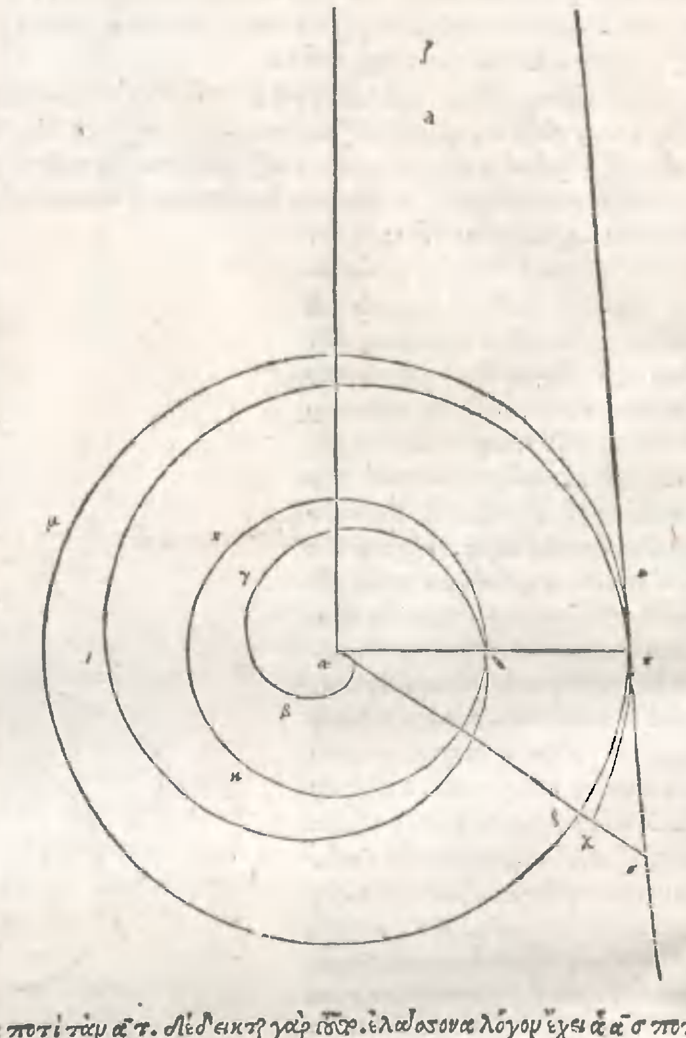
Ἔστω δὴ πάλιν, εἰ δυνατόν, ἐλάσσων ἁ ζ α τᾶς τοῦ θ η κ κύκλου περιφερείας. ἔλαβον δή τινα εὐθεῖαν πάλιν τὰν α λ, τᾶς μὲν α ζ μείζονα, τᾶς δὲ τοῦ θ η κ κύκλου περιφερείας ἐλάσσονα. καὶ ἄγω ἀπὸ τοῦ θ τὰν θ μ παράλληλον τᾷ α ζ. πάλιν οὖν κύκλος ἐστὶν ὁ θ η κ. καὶ ἐν αὐτῷ ἐλάσσων γραμμὰ τᾶς διαμέτρου ἁ θ η. καὶ ἄλλα ἐπιψαύουσα τοῦ κύκλου κατὰ τὸ θ. καὶ λόγος ὃν ἔχει ἁ α θ ποτὶ τὰν α λ, ἐλάσσων τοῦ ὃν ἔχει ἁ ἡμίσεια τᾶς η θ, ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ α κάθετον ἐπ' αὐτὰν ἀγμέναν. ἐπειδὴ καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἁ θ α πρὸς α ζ, ἐλάσσων ἐστί. δυνατὸν οὖν ἐστὶν ἀπὸ τοῦ α ἀγαγεῖν τὰν α π ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν. ὥστε τὰν ρ ν τὰν μεταξὺ τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ εὐθείας, καὶ τᾶς περιφερείας ποτὶ τὰν θ π, ἀπολαφθεῖσαν ἀπὸ τᾶς ἐπιψαυούσας, τοῦτον ἔχειν τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἁ θ α ποτὶ τὰν α λ. τεμεῖ δὴ ἁ α π τὸν μὲν κύκλον κατὰ τὸ ρ, τὰν δὲ ἕλικα κατὰ τὸ χ. καὶ ἕξει καὶ ἐναλλὰξ τὸν αὐτὸν λόγον ἁ ν ρ πρὸς ρ α, ὃν ἁ θ π πρὸς α λ. ἁ δὲ θ π ποτὶ τὰν α λ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ θ ρ περιφέρεια ποτὶ τὰν τοῦ θ η κ κύκλου περιφέρειαν. ἁ μὲν γὰρ θ π εὐθεῖα μείζων ἐστὶ τᾶς θ ρ περιφερείας, ἁ δὲ α λ ἐλάσσων τᾶς τοῦ θ η κ κύκλου περιφερείας. μείζονα ἄρα λόγον ἔχει ἁ ν ρ ποτὶ τὰν α ρ, ἢ ἁ θ ρ περιφέρεια ποτὶ τὰν τοῦ θ η κ κύκλου περιφέρειαν. ὥστε καὶ ἁ ρ α ποτὶ τὰν α ν μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ τοῦ θ η κ κύκλου περιφέρεια ποτὶ τὰν θ κ ρ περιφέρειαν. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ τοῦ θ η κ κύκλου περιφέρεια ποτὶ τὰν θ κ ρ περιφέρειαν, τοῦτον ἔχει ἁ θ α εὐθεῖα ποτὶ τὰν α χ. δέδεικται γὰρ τοῦτο. μείζονα ἄρα λόγον ἔχει ἁ ρ α ποτὶ τὰν α ν, ἢ ἁ α θ ποτὶ τὰν α χ. ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα μείζων ἐστίν, οὐδὲ ἐλάσσων ἁ ζ α τᾶς τοῦ θ η κ κύκλου περιφερείας. ἴση ἄρα.



Εἰ δὲ κατὰ τᾶς ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας ἕλικος κατὰ τὸ πέρας ἐπιψαύῃ εὐθεῖα, καὶ ἀπὸ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος ἀχθῇ τις ποτ' ὀρθὰς τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς, συμπεσεῖται αὐτᾷ ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν, καὶ ἐσσεῖται ἁ εὐθεῖα ἁ μεταξὺ τᾶς ἐπιψαυούσας καὶ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος, διπλασία τᾶς τοῦ δευτέρου κύκλου περιφερείας. ἔστω γὰρ ἁ μὲν α β γ θ ἕλιξ ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα, ἁ δὲ θ ε τ ἐν τᾷ δευτέρᾳ. καὶ ὁ μὲν θ κ η κύκλος ὁ πρῶτος, ὁ δὲ τ μ ν ὁ δεύτερος. ἔστω δέ τις γραμμὰ ἐπιψαύουσα τᾶς ἕλικος κατὰ τὸ τ, ἁ τ ζ. ἁ δὲ ζ α ποτ' ὀρθὰς ἄχθω τᾷ τ α. συμπεσεῖται δὲ τὰ αὐτὰ τᾷ τ ζ, διὰ τὸ δεδεῖχθαι τὰν γωνίαν ὀξεῖαν οὖσαν τὰν ὑπὸ τῶν α τ ζ. δεικτέον ὅτι ἁ ζ α εὐθεῖα διπλασία ἐστὶ τᾶς τοῦ τ μ ν κύκλου περιφερείας. εἰ γὰρ μή ἐστι διπλασία, ἤτοι μείζων ἐστὶν ἢ διπλασία, ἢ ἐλάσσων ἐστὶν ἢ διπλασία. ἔστω πρότερον εἰ δυνατὸν μείζων ἢ διπλασία. καὶ λελάφθω τις εὐθεῖα, ἁ λ α τᾶς μὲν ζ α εὐθείας ἐλάσσων, τᾶς δὲ τοῦ τ μ ν κύκλου περιφερείας μείζων ἢ διπλασία. ἔστι δή τις κύκλος ὁ τ μ ν, καὶ ἐν τῷ κύκλῳ γεγραμμένα

ε θ ℓ. εἰ δέ κα – ἐπιψαύῃ

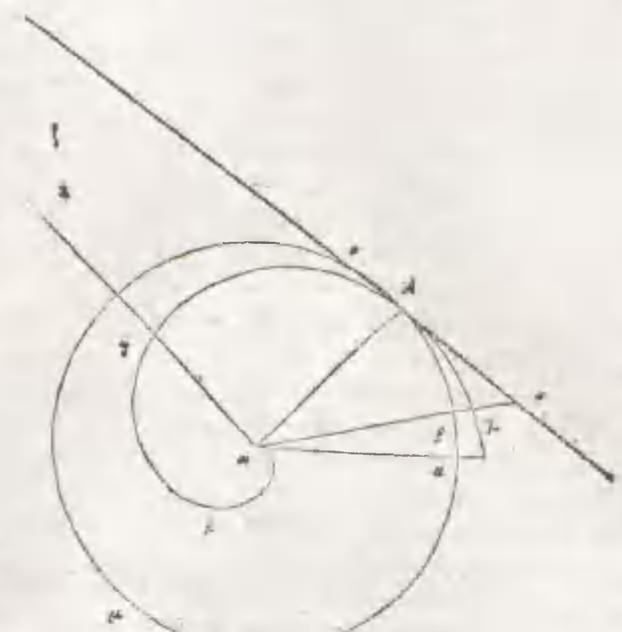
ἐλάσσων τᾶς διαμέτρου ἁ τν. καὶ ὃν ἔχει λόγον ἁ τα ποτὶ τὰν αλ, μείζων τοῦ ὃν ἔχει ἁ ἡμίσεια τᾶς τν ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ α κάθετον ἐπ' αὐτὰν ἀγομέναν. δυνατὸν οὖν ἐστιν ἀπὸ τοῦ α ποτιβαλεῖν τὰν ασ, ποτὶ τὰν τν ἐκβεβλημέναν, ὥστε τὰν μεταξὺ τᾶς περιφερείας καὶ τᾶς ἐκβεβλημένας τὰν ρσ ποτὶ τὰν τρ τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον, ὃν ἁ τα ποτὶ τὰν αλ. τέμνει δὴ ἁ ασ τὸν μὲν κύκλον κατὰ τὸ ρ, τὰν δὲ ἕλικα κατὰ τὸ χ. καὶ ἐναλλὰξ τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ἁ ρσ ποτὶ τὰν τα, ὃν ἁ τρ ποτὶ τὰν αλ. ἁ δὲ τρ ποτὶ τὰν αλ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ τρ περιφέρεια ποτὶ τὰν διπλασίαν τοῦ μ κύκλου περιφέρειαν. ἐστὶ γὰρ ἁ μὲν τρ εὐθεῖα ἐλάσσων τᾶς τρ περιφερείας. ἁ δὲ αλ εὐθεῖα μείζων ἢ διπλασία τᾶς τοῦ τμν κύκλου περιφερείας. ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ἁ ρσ ποτὶ τὰν αρ, ἢ ἁ τρ περιφέρεια ποτὶ τὰν διπλασίαν τᾶς τοῦ τμν κύκλου περιφερείας. ὅλα οὖν ἁ σα ποτὶ τὰν αρ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ τρ περιφέρεια μετὰ τᾶς τμν κύκλου περιφερείας δὶς εἰρημένας, ποτὶ τὰν τοῦ τμν κύκλου περιφέρειαν δὶς εἰρημέναν. ὃν δὲ λόγον ἔχοντι αἱ εἰρημέναι περιφέρειαι, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ἁ χα ποτὶ τὰν ατ. δέδεικται γὰρ τοῦτο. ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἁ ασ ποτὶ τὰν αρ, ἢ ἁ χα ποτὶ τὰν τα, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα μείζων ἐστὶν ἢ διπλασία ἁ ζα εὐθεῖα τᾶς τοῦ τμν κύκλου περιφερείας. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, ὅτι οὐδὲ ἐλάττων ἢ διπλασία. δῆλον οὖν, ὅτι διπλασία ἐστί. διὰ δὲ τοῦ αὐτοῦ τρόπου δεικτέον. καὶ εἴκα τᾶς ἐν ὁποιᾳοῦν περιφορᾷ γεγραμμένας ἕλικος ἐπιψαύῃ τις εὐθεῖα κατὰ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος, καὶ ἀπὸ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος ποτ' ὀρθὰς ἀχθεῖσα τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς συμπίπτῃ ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν, πολλαπλασία ἐστὶ τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας, τοῦ κατὰ τὸν ἀριθμὸν τᾶς περιφορᾶς λεγομένου τῷ αὐτῷ ἀριθμῷ.



κ Εἴκα τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας εὐθεῖα γραμμὰ ἐπιψαύῃ μὴ κατὰ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος, ἀπὸ δὲ τᾶς ἁφᾶς ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος εὐθεῖα ἐπιζευχθῇ, καὶ κέντρῳ μὲν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς ἕλικος, διαστήματι δὲ τᾷ ἐπιζευχθείσᾳ κύκλος γραφῇ, ἀπὸ δὲ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος ἀχθῇ τις ποτ' ὀρθάς, τᾷ ἀπὸ τᾶς ἁφᾶς ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος ἐπιζευχθείσᾳ, συμπεσεῖται αὐτᾷ ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν, καὶ ἐσσεῖται ἁ μεταξὺ εὐθεῖα τᾶς τε συμπτώσιος καὶ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος ἴσα τᾷ περιφερείᾳ τοῦ γραφέντος κύκλου τᾷ μεταξὺ τᾶς ἁφᾶς καὶ τᾶς τομᾶς, καθ' ὃ τέμνει ὁ γραφεὶς κύκλος τὰν ἀρχὰν τᾶς περιφορᾶς ἐπὶ τὰ προαγούμενα λαμβανομένας τᾶς περιφερείας ἀπὸ τοῦ σημείου τοῦ ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς. ἔστω ἕλιξ ἐφ' ἇς ἁ αβγδ ἐν τᾷ πρώτᾳ γεγραμμένα, καὶ ἐπιψαυέτω τις αὐτᾶς εὐθεῖα ἁ δεζ κατὰ τὸ δ. ἀπὸ δὲ τοῦ δ ποτὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος ἐπιζεύχθω ἁ αδ. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ α, διαστήματι δὲ τῷ αδ κύκλος γεγράφθω, ὁ δμν. τεμνέτω δὲ οὗτος τὰν ἀρχὰν τᾶς περιφορᾶς κατὰ τὸ κ. ἄχθω δὲ ἁ ζα ποτὶ τὰν αδ ὀρθά. ὅτι μὲν αὐτᾷ συμπίπτει, δῆλον, ὅτι δὲ καὶ ἴσα ἐστὶν ἁ ζα εὐθεῖα τᾷ κμν δ περιφερείᾳ, δεικτέον. εἰ γὰρ

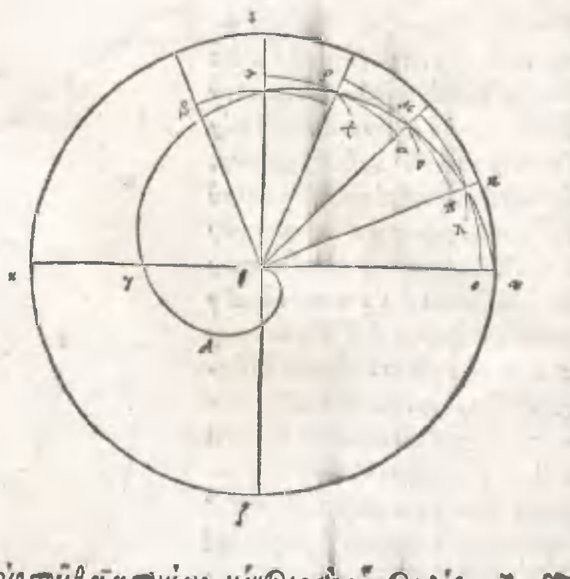
μὴ

μή, ἤτοι μείζων ἐστὶν ἢ ἐλάσσων. ἔστω εἰ δυνατόν, πρότερον μείζων. λελάφθω δέ τις ἁ λα τᾶς μὲν ζα εὐθείας ἐλάσσων, τᾶς δὲ κμν δ περιφερείας μείζων. πάλιν δὴ κύκλος ἐστὶν ὁ κμν. καὶ ἐν τῷ κύκλῳ γραμμὰ ἐλάσσων τᾶς διαμέτρου ἁ δν. καὶ λόγος ὃν ἔχει ἁ δα πρὸς αλ, μείζων τοῦ ὃν ἔχει ἁ ἡμίσεια τᾶς δν, ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ α κάθετον ἐπ' αὐτὰν ἀγμέναν. δυνατὸν οὖν ἐστιν ἀπὸ τοῦ α ποτιλαβεῖν τὰν αε ποτὶ τὰν νδ ἐκβεβλημέναν, ὥστε τὰν ερ ποτὶ τὰν δρ τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον, ὃν ἁ δα ποτὶ τὰν αλ. δέδεικται γὰρ τοῦτο δυνατὸν ἐόν. ἕξει οὖν καὶ ἁ ερ ποτὶ τὰν αρ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ δρ ποτὶ τὰν αλ. ἁ δὲ αρ ποτὶ τὰν αλ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ δρ περιφέρεια ποτὶ τὰν κμδ περιφέρειαν, ἐπεὶ ἁ μὲν δρ ἐλάσσων ἐστὶ τᾶς δρ περιφερείας. ἁ δὲ λα μείζων τᾶς κμδ περιφερείας. ἐλάσσονα οὖν λόγον ἔχει ἁ ερ εὐθεῖα πρὸς ρα, ἢ ἁ δρ περιφέρεια ποτὶ τὰν κμδ περιφέρειαν. ὥστε καὶ ἁ αε πρὸς αρ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ κμρ περιφέρεια πρὸς κμδ περιφέρειαν. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ κμν πρὸς τὰν κμδ περιφέρειαν, τοῦτον ἔχει ἁ χα πρὸς δα. ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ἡ εα πρὸς αρ, ἢ ἁ αχ πρὸς δα. ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα μείζων ἁ ζα τᾶς κμδ περιφερείας. ὁμοίως δὲ τοῖς πρότερον δειχθήσεται, ὅτι οὐδὲ ἐλάσσων ἐστίν. ἴση ἄρα. διὰ δὲ τοῦ αὐτοῦ τρόπου δειχθήσεται, καὶ εἴκα τᾶς ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας ἕλικος ἐπιψαύῃ εὐθεῖα μὴ κατὰ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος, τὰ δὲ ἄλλα τὰ αὐτὰ κατασκευασθέντι, ὅτι ἁ μεταξὺ εὐθεῖα τᾶς ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν συμπτώσιος, καὶ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος, ἴσα ἐστὶν ὅλᾳ τᾷ τοῦ γραφέντος κύκλου περιφερείᾳ, καὶ ἔτι τᾷ μεταξὺ τῶν εἰρημένων σαμείων ὡσαύτως τᾶς περιφερείας λαμβανομένας. καὶ εἴκα τᾶς ἐν ὁποιᾳοῦν γεγραμμένας περιφορᾷ ἕλικος ἐπιψαύῃ τις εὐθεῖα μὴ κατὰ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος, τὰ δὲ ἄλλα τὰ αὐτὰ κατασκευασθέωντι, ὅτι ἁ μεταξὺ εὐθεῖα τῶν εἰρημένων σαμείων πολλαπλασία τίς ἐστι τᾶς τοῦ γραφέντος κύκλου περιφερείας, κατὰ τὸν ἐλάσσονα ἀριθμὸν τοῦ καθ' ὃν αἱ περιφοραὶ λέγονται, καὶ ἔτι ἴσα τᾷ μεταξὺ τῶν εἰρημένων σαμείων ὁμοίως λαμβανομένας.



κα Λαμβάνοντα τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς ἕλικος, τᾶς ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας, καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς πρώτας ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς, δυνατόν ἐστι περὶ αὐτὸ σχῆμα ἐπίπεδον περιγράψαι, καὶ ἄλλο ἐγγράψαι ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγεγραμμένον τοῦ ἐγγεγραμμένου μεῖζον εἶμεν ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου. ἔστω ἕλιξ, ἐφ' ἇς ἁ αβγδ ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα. ἔστω δὲ ἀρχὰ μὲν τᾶς ἕλικος τὸ θ σημεῖον, ἀρχὰ δὲ τᾶς περιφορᾶς ἁ θα. ὁ δὲ πρῶτος κύκλος ὁ ζηια. αἱ δὲ αη, ζι διάμετροι αὐτοῦ πρὸς ὀρθὰς ἀλλάλαις, ἀεὶ δὴ τᾶς ὀρθᾶς γωνίας δίχα τεμνομένας, καὶ τοῦ τομέως τοῦ τὰν ὀρθὰν γωνίαν περιέχοντος, ἐσσεῖται τὸ καταλειπόμενον τοῦ τομέως ἔλασσον τοῦ προτεθέντος. καὶ ἔστω γεγενημένος ὁ τομεὺς ὁ αθκ ἐλάσσων τοῦ προτεθέντος χωρίου. διαιρήσθωσαν δὴ οὖν γωνίαι αἱ τέσσαρες ὀρθαὶ εἰς τὰς ἴσας γωνίας τὰς περιεχομένας ὑπὸ τᾶν αθ, θκ. καὶ αἱ ποιοῦσαι τὰς γωνίας εὐθεῖαι ἐκβεβλήσθωσαν ποτὶ τὰν ἕλικα. καθ' ὃ δὴ τέμνει σημεῖον ἁ θκ τὰν ἕλικα, ἔστω τὸ λ. καὶ κέντρῳ τῷ θ, διαστήματι δὲ τῷ θλ κύκλος γεγράφθω. πεσεῖται δὴ αὐτοῦ, ἁ μὲν εἰς τὰ προαγούμενα περιφέρεια ἐντὸς τᾶς ἕλικος, ἁ δὲ εἰς τὰ ἑπόμενα ἐκτός. γεγράφθω δὴ ἁ περιφέρεια, καὶ συμπεσεῖται τᾷ [illegible] τὸ ο, α, ο μ. καὶ τὰ μετὰ τὰν θκ εὐθεῖαν ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπίπτοσα. πάλιν δὴ καθ' ὃ τέμνει τὰν ἕλικα σημεῖον ἁ θμ, ἔστω τὸ ν. καὶ κέντρῳ τῷ θ, διαστήματι δὲ τῷ θν κύκλος γεγράφθω.

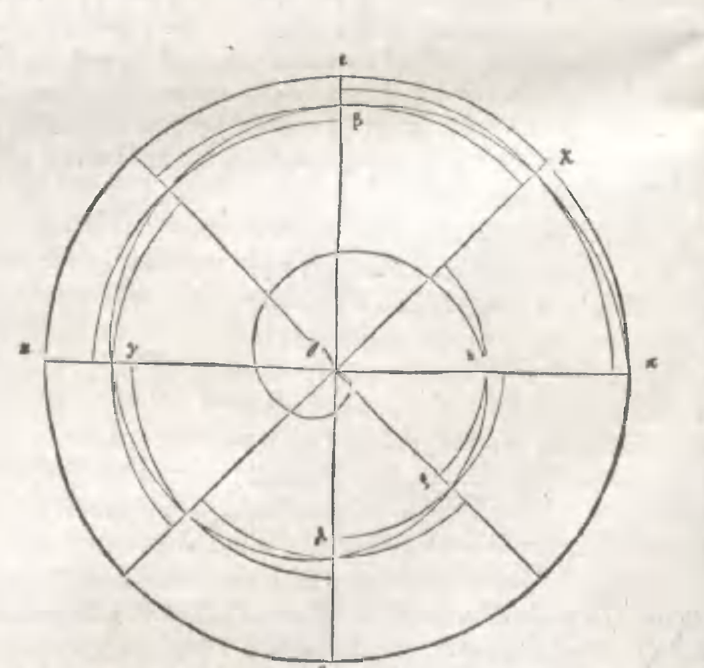
γράφθω. ἐσσεῖται καὶ συμπεσεῖ ἁ περιφέρεια τοῦ κύκλου, καὶ τᾷ μετὰ τὰν θ μ ποτιπιπτούσᾳ ποτὶ τὰν ἕλικα. ὁμοίως δὲ καὶ διὰ τῶν ἄλλων πάντων κατατέμνοντι τὰν ἕλικα, αἱ τὰς ἴσας γωνίας ποιοῦσαι κύκλοι γεγράφθωσαν κέντρῳ τῷ θ, ὅπως τ' ἂν συμπεσεῖ ἑκάστας ἁ περιφέρεια τᾷ τε προαγομένᾳ εὐθείᾳ, καὶ τᾷ ἑπομένᾳ. ἐσσεῖται δὴ περὶ τὸ λαφθὲν χωρίον περιγεγραμμένον ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον, καὶ ἄλλο ἐγγεγραμμένον. ὅτι δὲ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου μεῖζόν ἐστιν, ἐλάσσονι τοῦ προτεθέντος χωρίου δειχθήσεται. ἐστὶ γὰρ ὁ μὲν θ λ ο τομεὺς ἴσος τῷ θ μ λ. ὁ δὲ θ ν π τῷ θ ν ρ. ὁ δὲ θ χ σ τῷ θ χ τ. ἐστὶ δὲ καὶ τῶν ἄλλων τομέων ἕκαστος τῶν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι, ἴσος τῷ κοινὰν ἔχοντι πλευρὰν τομεῖ, τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τομέων. δῆλον οὖν, ὅτι καὶ πάντες οἱ τομεῖς πάντεσσιν ἴσοι ἐσσοῦνται. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐν τῷ χωρίῳ τῷ περιγεγραμμένῳ περὶ τὸ χωρίον σχήματι, χωρὶς τοῦ θ α κ τομέως. μόνος γὰρ οὗτος λέλειπται τῶν



μεῖζον ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι. δῆλον οὖν ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου μεῖζόν ἐστι τῷ α κ θ τομεῖ, ὅς ἐλάσσων ἐστὶ τοῦ προτεθέντος.

Ἐκ τούτου δὲ φανερόν, ὅτι δυνατόν ἐστι περὶ τὸ εἰρημένον χωρίον σχῆμα, οἷον εἴρηται, γράφειν. ὥς τε τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα μεῖζον εἶναι τοῦ χωρίου ἔλασσον εἶμεν παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου. καὶ πάλιν ἐγγράφειν, ὥς τε τὸ χωρίον ὁμοίως μεῖζον εἶμεν τοῦ ἐγγραφέντος σχήματος, ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου.

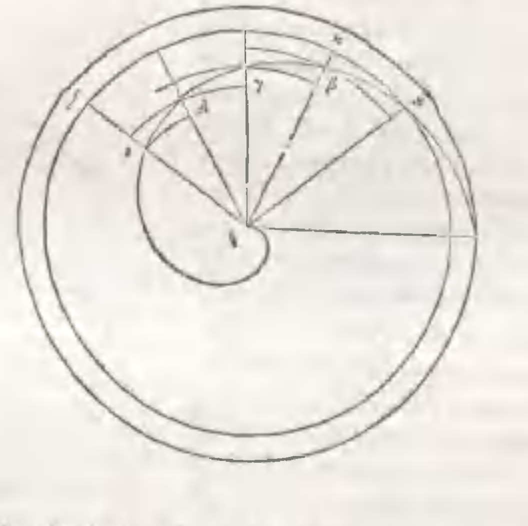
κβ Λαβόντα τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶς ἕλικος, τᾶς ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας, καὶ τᾶς εὐθείας ἅ ἐστι δευτέρα τᾶν ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς, δυνατόν ἐστι περὶ τὸ αὐτὸ σχῆμα ἐπίπεδον περιγράψαι, ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον, καὶ ἄλλο ἐγγράψαι, ὥς τε τὸ περιγραφὲν τοῦ ἐγγραφέντος μεῖζον εἶμεν, ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου. ἔστω ἕλιξ ἐφ' ἇς α β γ δ ε, ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα. καὶ ἔστω τὸ μὲν θ σημεῖον ἀρχὰ τᾶς ἕλικος. ἁ δὲ α θ ἀρχὰ τᾶς περιφορᾶς. ἁ δὲ ε α ἁ δευτέρα εὐθεῖα τᾶν ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς. ὁ δὲ α ζ η κύκλος ἔστω δεύτερος, καὶ αἱ γ η, ζ ι διάμετροι αὐτοῦ πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις. πάλιν οὖν δίχα τεμνομένας τᾶς ὀρθᾶς γωνίας, καὶ τοῦ τομέως τοῦ τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιέχοντος, ἐσσεῖται τὸ καταλειπόμενον ἔλασσον τοῦ προτεθέντος. καὶ ἔστω γεγενημένος ὁ θ κ α τομεύς.



τμεύς, ἐλάσσων τοῦ προτεθέντος χωρίου. διαιρεθείσαν δὴ τᾶν ὀρθᾶν γωνίαν εἰς τὰς ἴσας γωνίας, τὰ ὑπὸ τοῦ κ θ α καὶ τῶν ἄλλων κατασκευασθέντων τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον, ἐσσεῖται τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος μεῖζον ἐλάσσονι, ἢ ὁ τομεὺς ὁ θ κ α. μεῖζον γὰρ ἐσσεῖται ἁ ὑπεροχὰ ὑπεροχᾶς ὁ θ κ α τομεὺς τοῦ θ ε ρ. δῆλον οὖν ὅτι δυνατόν ἐστι καὶ τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ λαφθέντος χωρίου μεῖζον εἶμεν ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου. καὶ πάλιν τὸ λαφθὲν χωρίον μεῖζον εἶμεν τοῦ ἐγγραφέντος τοῦ προτεθέντος χωρίου.

Διὰ δὲ τοῦ αὐτοῦ τρόπου φανερόν, διότι δυνατόν λαβόντα τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν ὁποιᾳοῦν περιφορᾷ γεγραμμένας καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς τᾶς τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν λεγομένας περιγράψαι σχῆμα, οἷον εἴρηται ἐπίπεδον, ὥς τε τὸ περιγραφὲν σχῆμα μεῖζον εἶμεν τοῦ λαφθέντος χωρίου ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου, καὶ πάλιν ἐγγράψαι, ὥς τε τὸ λαφθὲν χωρίον μεῖζον εἶμεν τοῦ ἐγγραφέντος σχήματος ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου.

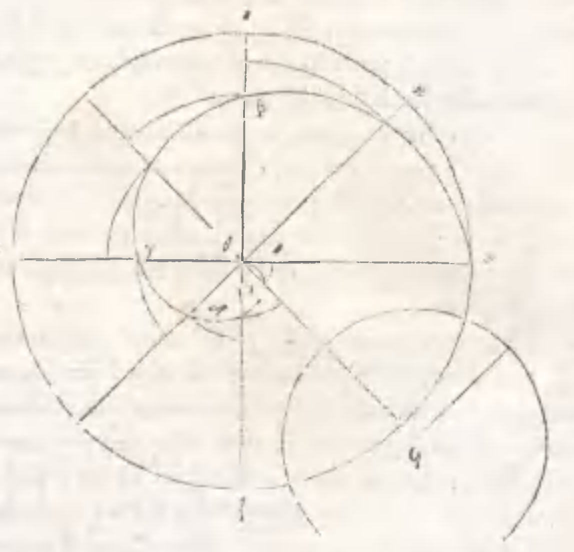
Λαβόντα τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς ἕλικος, ἅ ἐστιν ἐλάσσων τᾶς ἐν μιᾷ περιφορᾷ γεγραμμένας, οὐκ ἐχούσας πέρας τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος, καὶ τᾶν εὐθειᾶν τᾶν ἀπὸ τῶν περάτων τᾶς ἕλικος ἀγομέναν, δυνατόν ἐστι περὶ τὸ χωρίον σχῆμα ἐπίπεδον περιγράψαι ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον, καὶ ἄλλο ἐγγράψαι, ὥς τε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος μεῖζον εἶμεν ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου. ἔστω ἕλιξ ἐφ' ἇς α β γ δ ε, πέρατα δὲ αὐτᾶς τὰ α ε. ἔστω δὲ ἀρχὰ τᾶς ἕλικος τὸ θ. καὶ ἐπιζευχθῶσαν αἱ α θ, θ ε. γεγράφθω δὴ κύκλος, κέντρον μὲν τὸ θ, διάστημα δὲ τὰ θ α. καὶ συμπιπτέτω τᾷ θ ε ἐκβληθείσᾳ κατὰ τὸ ζ. αἱ δὲ τὰς γωνίας τὰς ποτὶ τῷ θ καὶ τοῦ τομέως τοῦ θ α ζ δίχα τεμνομέναι ἐσσεῖται τὸ καταλειπόμενον τοῦ προτεθέντος ἔλασσον. ἔστω ἐλάσσων ὁ τομεὺς ὁ θ α κ τοῦ προτεθέντος. ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον γεγράφθωσαν κύκλοι διὰ τῶν σημείων κατὰ ἃ κατατέμνοντι τὰν ἕλικα αἱ τὰς ἴσας γωνίας ποιοῦσαι ποτὶ τῷ θ. ὥς τε τὰν περιφέρειαν ἑκάστα συμπίπτειν τᾷ τε προαγομένᾳ καὶ τᾷ ἑπομένᾳ. ἐσσεῖται δὴ περὶ τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπό τε τᾶς α β γ δ ε ἕλικος, καὶ τῶν α θ, θ ε εὐθειᾶν σχῆμα ἐπίπεδον, ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον, καὶ ἄλλο ἐγγεγραμμένον. καὶ τὸ περιγεγραμμένον τοῦ ἐγγεγραμμένου μεῖζον ἐλάσσονι ὑπερέχει τοῦ προτεθέντος χωρίου. ἐλάσσων γάρ ἐστιν ὁ θ α κ τομεύς. ἐκ τούτου φανερόν ἐστιν, ὅτι δυνατόν ἐστι περὶ τὸ εἰρημένον χωρίον ἐπίπεδον, οἷον εἴρηται, περιγράψαι, ὥς τε τὸ περιγραφὲν σχῆμα μεῖζον εἶμεν τοῦ χωρίου ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου. κγ ἐπεζεύχθωσαν



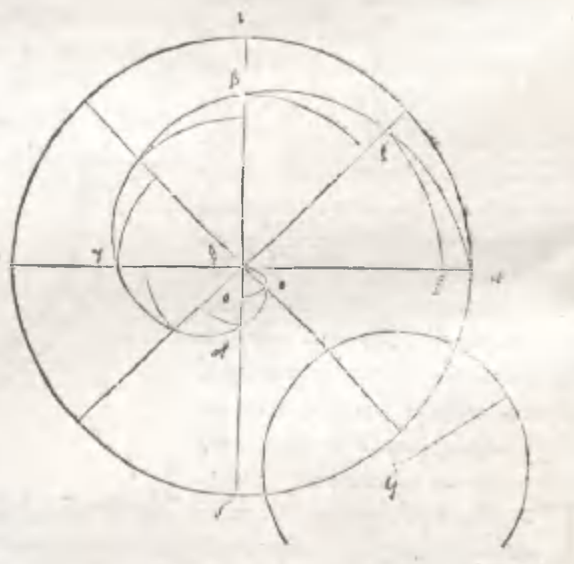
Τὸ περιλαφθὲν χωρίον ὑπό τε τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας, καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς πρώτας τᾶν ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς, τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ κύκλου τοῦ πρώτου. ἔστω ἕλιξ ἐφ' ἇς α β γ δ ε θ, ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα. ἔστω δὲ τὸ μὲν θ σημεῖον ἀρχὰ τᾶς ἕλικος. ἁ δὲ θ α εὐθεῖα πρώτα τᾶν ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς. ὁ δὲ α κ ζ η ι κύκλος πρῶτος, οὗ τρίτον μέρος ἔστω ὁ ν ς κύκλος. δεικτέον ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ εἰρημένον χωρίον τῷ ν ς κύκλῳ. εἰ γὰρ μή, ἤτοι μεῖζόν ἐστιν ἢ ἔλασσον. ἔστω πρότερον, εἰ δυνατόν, ἔλασσον. δυνατὸν δή ἐστι περὶ τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς α β γ δ ε θ ἕλικος, καὶ τᾶς α θ εὐθείας περιγράψαι σχῆμα ἐπίπεδον ἐξ ὁμοίων τομέων, ὥς τε τὸ περιγραφὲν σχῆμα μεῖζον εἶμεν τοῦ χωρίου ἐλάσσονι τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει ὁ ἴσος κύκλος τοῦ εἰρημένου χωρίου. περιγεγράφθω δή, καὶ ἔστω τῶν τομέων ἐξ ὧν σύγκειται τὸ εἰρημένον σχῆμα, μέγιστος μὲν ὁ θ α κ, ἐλάχιστος ὁ θ ο ε. δῆλον οὖν ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἔλασσόν ἐστι τοῦ κύκλου. ἐκβεβλήσθωσαν δὴ εὐθεῖαι ποτὶ τὸ θ, ποιοῦσαι τὰς ἴσας γωνίας, ἕως τ' ἂν ποτὶ τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν πέσωντι. ἐντὶ δή τινες γραμμαὶ ἀπὸ τοῦ θ ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπίπτουσαι τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι, ὧν ἐστὶ μεγίστα μὲν ἁ θ α, ἐλαχίστα δὲ ἁ θ ε. καὶ ἐλαχίστα κδ πέσωντι.

ἴσα

ἴσα τᾶ ὑπεροχᾶ. ἐντὶ δὲ καὶ ἄλλαι τινὲς γραμμαὶ ἀπὸ τοῦ θ ποτὶ τὰν περιφέρειαν τοῦ κύκλου ποτιπίπτουσαι, τῷ μὲν πλήθει ἴσαι ταύταις, τῷ δὲ μεγέθει ἑκάστα ἴσα τᾶ μεγίστα. καὶ ἀναγεγράφαται ἀπὸ πασᾶν ὅμοιοι τομέες, ἀπό τε τᾶν ἴσω ἀλλάλαν ὑπεροχᾶ, καὶ ἀπὸ τᾶν ἴσαν ἀλλάλαις τε καὶ τᾶ μεγίστα. οἱ ἄρα τομέες οἱ ἀπὸ τᾶν ἴσαν τᾶ μεγίστα, ἐλασσόνων ἐντὶ, ἢ τριπλάσιοι τῶν τομέων, τῶν ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσω ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν. δέδεικται γὰρ τοῦτο. ἐντὶ δὲ οἱ τομέες οἱ ἀπὸ τᾶν ἴσαν ἀλλήλαις τε καὶ τᾶ μεγίστα ἴσοι τῷ α ζ η ι κύκλῳ. οἱ δὲ τομέες οἱ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσω ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, ἴσοι τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι. ἐλάσσων ἄρα ὁ α ζ η ι κύκλος τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος, ἢ τριπλασίων, τοῦ δὲ γ κύκλου τριπλασίων. ἐλάσσων ἄρα ὁ γ κύκλος τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος. οὐκ ἔστι δὲ, ἀλλὰ μείζων. οὐκ ἄρα ἐστὶ τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπό τε τᾶς α β γ δ ε θ ἕλικος, καὶ τᾶς α θ, ἔλασσον τοῦ γ χωρίου.



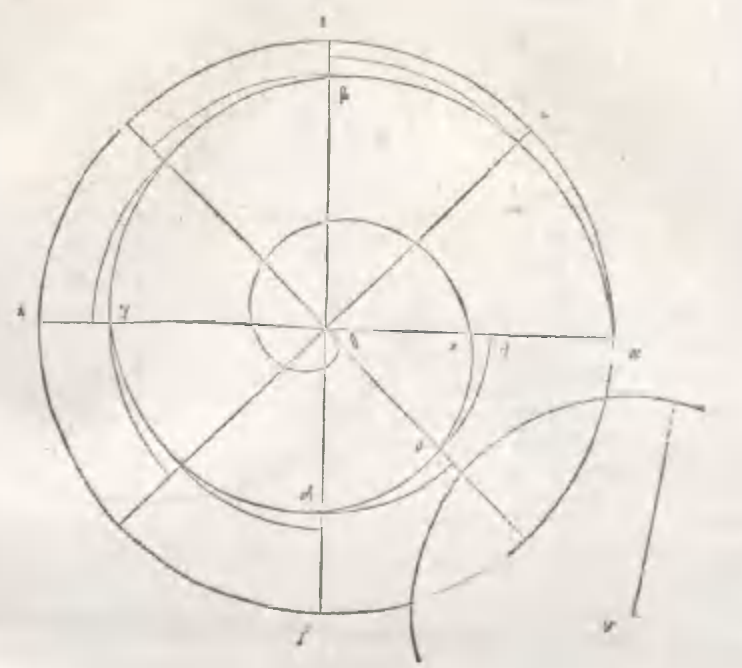
Οὐδὲ τοίνυν μεῖζον. ἔστω γὰρ εἰ δυνατὸν μεῖζον. ἐστὶ δὴ πάλιν δυνατὸν εἰς τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶς α β γ δ θ ἕλικος, καὶ τᾶς α θ εὐθείας ἐγγράψαι σχῆμα. ὥστε τὸ εἰρημένον χωρίον τοῦ ἐγγραφέντος σχήματος μεῖζον εἶμεν ἐλάσσονι, ἢ ᾧ ὑπερέχει τὸ εἰρημένον χωρίον τοῦ γ κύκλου. ἐγγεγράφθω δὴ, καὶ ἔστω τῶν τομέων ἐξ ὧν σύγκειται τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, μέγιστος μὲν ὁ θ ρ ξ, ἐλάσσων δὲ ὁ θ ε. δῆλον οὖν, τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μεῖζον ἐστὶ τοῦ γ κύκλου. ἐκβεβλήσθωσαν δὴ αἱ ποιοῦσαι τὰς ἴσας γωνίας ποτὶ τὸ θ, ἔστ' ἂν ποτὶ τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν πεσῶντι. πάλιν οὖν ἐντί τινες γραμμαὶ τῷ ἴσω ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι, ἀπὸ τοῦ θ ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπίπτουσαι, τῷ μὲν πλήθει ἴσαι ταύταις, τῷ δὲ μεγέθει ἑκάστα ἴσα τᾶ μεγίστα. καὶ ἀναγεγράφονται ἀπὸ πασᾶν ὅμοιοι τομέες, ἀπό τε τᾶν ἴσαν ἀλλάλαις τε καὶ τᾶ μεγίστα. καὶ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσω ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, οἱ ἄρα τομέες οἱ ἀπὸ τᾶν ἴσαν τᾶ μεγίστα, μείζονες ἐντὶ ἢ τριπλάσιοι τῶν τομέων τῶν ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσω ἀλλάλαν ὑπερεχουσῶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας. δέδεικται γὰρ τοῦτο. ἐντὶ δὲ οἱ μὲν τομέες οἱ ἀπὸ τᾶν ἴσαν τᾶ μεγίστα ἴσοι τῷ α ζ η ι κύκλῳ, οἱ δὲ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσω ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν χωρὶς τοῦ ὑπὸ τᾶς μεγίστας, ἴσοι τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι. μείζων ἄρα ὁ α ζ η ι κύκλος, ἢ τριπλασίων τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος, τοῦ δὲ γ κύκλου τριπλασίων. μείζων ἄρα ἐστὶν ὁ γ κύκλος τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος. οὐκ ἐστὶ δὲ, ἀλλὰ ἐλάσσων. οὐκ ἄρα ἐστὶν οὐδὲ μεῖζον τὸ χωρίον, τὸ ὑπό τε τᾶς α β γ δ ε θ, ἕλικος, καὶ τᾶς α θ εὐθείας, τοῦ γ κύκλου. ἴσον ἄρα ἐστὶ τῷ περιλαφθέντι ὑπὸ τᾶς ἕλικος, καὶ τᾶς α θ εὐθείας.



πέσωντι

N3. f. γεγρά-
φαται. f. pag.
99, 41. 1ψ, 30.

Χωρίον ὑπό τε τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾶ δευτέρα περιφορᾶ γεγραμμένας, καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐν δευτέρας τᾶν ἐν τᾶ ἀρχᾶ τᾶς περιφορᾶς ποτὶ τὸν δεύτερον κύκλον, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὰ ἑπτὰ ποτὶ τὰ ι β. ὅς ἐστι ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει τὰ συναμφότερα. τό τε περιεχόμενον ὑπὸ τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ β κύκλου, καὶ τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ α κύκλου. καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει ἁ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ β κύκλου, τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ α κύκλου, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ β κύκλου. ἔστω δὲ τὸ μὲν θ σημεῖον ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, ἁ δὲ θ ε εὐθεῖα ἐν τᾶ ἀρχᾶ τᾶς περιφορᾶς ἁ πρώτα. ἁ δὲ α ε ἐν τᾶ ἀρχᾶ τᾶς περιφορᾶς, ἁ δευτέρα. ὁ δὲ κύκλος ὁ α ξ η ι ὁ δεύτερος ἔστω. καὶ αἱ α η, ι ζ διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις. δεικτέον ὅτι τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπό τε τᾶς α β γ δ ε θ ἕλικος, καὶ τᾶς α ε εὐθείας ποτὶ τὸν α ζ η ι κύκλον, λόγον ἔχει, ὃν τὰ ἑπτὰ πρὸς ι β. ἔστω δή τις κύκλος ὁ ς, ἁ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ς κύκλου δυναμένα ἴσα τῷ τε ὑπὸ τᾶν α θ, θ ε περιεχομένῳ, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τᾶς α ε τετραγώνου. ἕξει δὴ ὁ ς κύκλος πρὸς τὸν α η ζ ι, ὡς ἑπτὰ πρὸς ι β. διότι καὶ ἁ ἐκ τοῦ κέντρου αὐτοῦ πρὸς τὰν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ α ζ η ι κύκλου

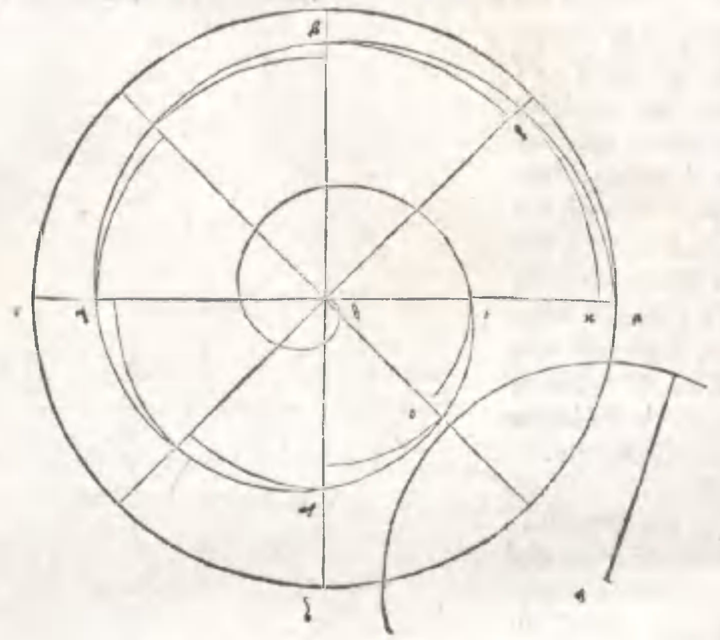


τοῦτον ἔχει δυνάμει τὸν λόγον. δειχθήσεται οὖν ἴσος ὁ ς κύκλος τῷ περιεχομένῳ χωρίῳ ὑπό τε τᾶς α β γ δ ε ἕλικος, καὶ τᾶς α ε εὐθείας. εἰ γὰρ μὴ, ἤτοι μείζων ἐστὶν ἢ ἐλάσσων. ἔστω δὴ πρότερον εἰ δυνατὸν, μείζων. δυνατὸν δή ἐστι περὶ τὸ χωρίον γεγράψαι σχῆμα ἐπίπεδον, ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα μεῖζον εἶμεν τοῦ χωρίου ἐλάσσονι, ἢ ᾧ ὑπερέχει ὁ ς κύκλος τοῦ χωρίου. περιγεγράφθω, καὶ ἔστω ἐξ ὧν σύγκειται τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, μέγιστος μὲν ὁ θ α κ τομεύς, ἐλάχιστος δὲ ὁ θ ο λ. δῆλον οὖν, ὅτι τὸ περιγραφὲν σχῆμα, ἔλασσόν ἐστι τοῦ κύκλου. ἐκβεβλήσθωσαν αἱ εὐθεῖαι αἱ ποιοῦσαι ποτὶ τὸ θ ἴσας γωνίας ἔστ' ἂν ποτὶ τὰν τοῦ δευτέρου κύκλου περιφέρειαν πεσῶντι. ἐντὶ δὴ τινὲς γραμμαὶ τῷ ἴσω ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι, αἱ ἀπὸ τοῦ θ ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπίπτουσιν, ὧν ἐστὶ μεγίστα μὲν ἁ θ α, ἐλαχίστα δὲ ἁ θ ε. ἐντὶ δὲ καὶ ἄλλαι γραμμαὶ αἱ ἀπὸ τοῦ θ, ποτὶ τὰν τοῦ α ζ η ι κύκλου περιφέρειαν ποτιπίπτουσαι τῷ μὲν πλήθει μιᾶ ἐλάσσων ἑαυτᾶν, τῷ δὲ μεγέθει ἀλλάλαις τε ἴσαι καὶ τᾶ μεγίστα. καὶ ἀναγεγράφαται ὅμοιοι τομέες ἀπὸ τᾶν ἴσαν τᾶ μεγίστα. καὶ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσω ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς ἐλαχίστας, ἐλάσσονα λόγον ἔχοντι, ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς μεγίστας τᾶς θ α ποτὶ τὰ συναμφότερα, τό τε ὑπὸ τᾶν α θ, θ ε περιεχόμενον. καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς α ε τετραγώνου. δέδεικται γὰρ τοῦτο. ἐντὶ δὲ τοῖς μὲν τομέσι τοῖς ἀπὸ τᾶν ἴσαν ἀλλάλαις καὶ τᾶ μεγίστα, ἴσος ὁ α ζ η κύκλος, τοῖς δὲ τομέσι τοῖς ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσω ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς ἐλαχίστας ἴσον τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ὁ κύκλος ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς α θ ποτὶ τὰ συναμφότερα. τό τε ὑπὸ τᾶν α θ, θ ε, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς α ε τετραγώνου. ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς θ α, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν θ α, α ε, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς α ε τετραγώνου, τοῦτον ἔχει ὁ α ζ η κύκλος πρὸς τὸν ς κύκλον. ἐλάσσονα οὖν λόγον ἔχει ὁ α ζ η ι κύκλος ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, ἢ ποτὶ τὸν ς κύκλον. ὥστε ἐλάσσων ἐστὶν

γεγράψαι – περιγεγράψαι

ὁ ς κύκλος τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος. οὐκ ἔστι δέ, ἀλλὰ μείζων. οὐκ ἄρα μείζων ἐστὶν ὁ ς κύκλος τοῦ χωρίου τοῦ περιεχομένου ὑπό τε τᾶς α β γ δ ε ἕλικος, καὶ τᾶς α ε εὐθείας.

Οὐδὲ τοίνυν ἐλάσσων. ἔστω γὰρ εἰ δυνατὸν ἐλάσσων. πάλιν οὖν δυνατόν ἐστιν ἐς τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς ἕλικος καὶ τᾶς α ε εὐθείας ἐγγράψαι σχῆμα ἐπίπεδον ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπό τε τᾶς α β γ δ ε ἕλικος, καὶ τᾶς α ε εὐθείας, μεῖζον εἶμεν τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐλάσσονι, ἢ ᾧ ὑπερέχει τὸ αὐτὸ χωρίον τοῦ ς κύκλου. ἐγγεγράφθω οὖν, καὶ ἔστω τῶν τομέων ἐξ ὧν σύγκειται τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, μέγιστος μὲν ὁ θ κ ρ τομεύς, ἐλάχιστος δὲ ὁ θ ε ο. δῆλον οὖν, ὅτι τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μεῖζόν ἐστι τοῦ ς κύκλου. ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ποιοῦσαι ἴσας γωνίας πρὸς τῷ θ, ἔστ' ἂν ποτὶ τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν πεσῶντι. πάλιν οὖν ἐντί τινες γραμμαὶ τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι, αἱ ἀπὸ τοῦ θ ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπίπτουσαι, ὧν μεγίστα μὲν ἁ θ α, ἐλαχίστα δὲ ἁ θ ε. ἐντὶ δὲ καὶ ἄλλαι γραμμαί, αἱ ἀπὸ τοῦ θ ποτὶ τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν ποτιπίπτουσαι, τῷ μὲν πλήθει μιᾷ ἐλάσσους αὐτῶν, τῷ δὲ μεγέθει ἴσαι ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ. καὶ ἀναγεγράφαται ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν ὅμοιοι τομεῖς, καὶ ἀπὸ τᾶν ἴσαν τᾷ μεγίστᾳ. οἱ ἄρα τομεῖς, οἱ ἀπὸ τᾶν ἴσαν τᾷ μεγίστᾳ ποτὶ τοὺς τομέας τοὺς ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας μείζονα λόγον ἔχοντι, ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς θ α ποτὶ τὰ συναμφότερα, τό τε περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν α θ, θ ε, καὶ τὸ τρίτον τοῦ ἀπὸ τᾶς ε α τετραγώνου. ἐστὶ δὲ τὸ μὲν τοῖς τομεῦσι τοῖς ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας ἴσον τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐν τῷ χωρίῳ, τοῖς δὲ ἑτέροις ὁ κύκλος. μείζονα οὖν λόγον ἔχει ὁ α ζ η κύκλος ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς θ α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν θ α, θ ε, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς α ε τετραγώνου, τουτέστιν ὁ α ζ η ι κύκλος πρὸς τὸν ς κύκλον. μείζων ἄρα ἐστὶν ὁ ς κύκλος τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος, ὅπερ ἀδύνατον. ἦν γὰρ ἐλάσσων. οὐκ ἄρα ἐστὶν οὐδὲ ἐλάσσων ὁ ς κύκλος τοῦ περιεχομένου χωρίου ὑπό τε τᾶς α β γ δ ε ἕλικος, καὶ τᾶς εὐθείας, ὥστε ἴσος.

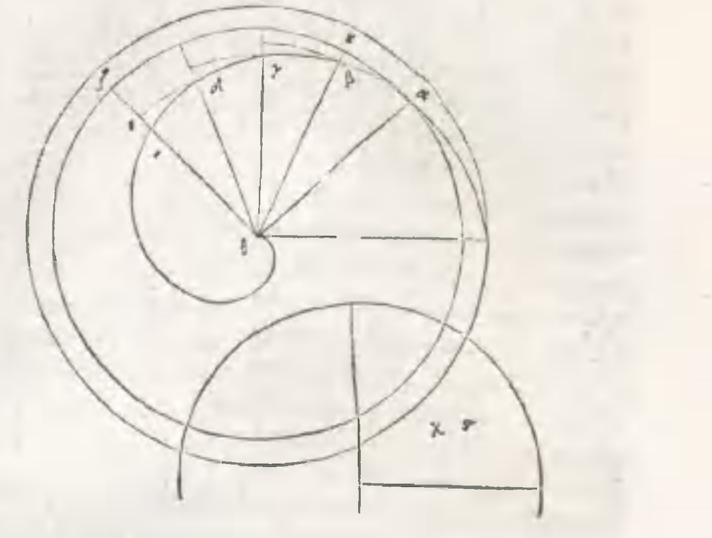


πέσωντι.

Διὰ δὲ τοῦ αὐτοῦ τρόπου δειχθήσεται, καὶ διότι τὸ περιλαφθὲν χωρίον ὑπό τε τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν ὁποιαοῦν περιφορᾷ γεγραμμένας, καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ταῖς περιφοραῖς λεγομένας, ποτὶ τὸν κύκλον τὸν κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν λεγόμενον ταῖς περιφοραῖς λόγον ἔχει, ὃν συναμφότερον, τό τε ὑπὸ τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν κύκλου, καὶ τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κατὰ τὰ μὲν ἐλάσσονα τὰν περιφορὰν λεγομένου, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τᾶς ὑπεροχᾶς ᾇ ὑπερέχει ἁ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μείζονος κύκλου τῶν εἰρημένων ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μείζονος κύκλου τῶν εἰρημένων.

κε Τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπό τε τᾶς ἕλικος, ἅ ἐστιν ἐλάσσων τᾶς ἐν μιᾷ περιφορᾷ γεγραμμένας, οὐκ ἐχούσας πέρας τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος, καὶ τᾶν εὐθειᾶν τᾶν ἀπὸ τῶν περάτων αὐτᾶς ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος ἀγμενᾶν, ποτὶ τὸν τομέα τὸν ἔχοντα τὰν μὲν ἐκ τοῦ κέντρου ἴσαν τᾷ μείζονι τᾶν ἀπὸ τοῦ πέρατος ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος ἀγμενᾶν. τὰν δὲ περιφέρειαν ἃ ἐστὶ μεταξὺ

τᾶν εἰρημέναν εὐθειᾶν ἐπὶ τὰ αὐτὰ τᾷ ἕλικι, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερα, τό τε περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ἀπὸ τῶν περάτων ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος ἀγμενᾶν, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει ἁ μείζων τῶν εἰρημένων εὐθειᾶν τᾶς ἐλάσσονος, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς μείζονος τᾶν ἀπὸ τῶν περάτων ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος ἐπιζευχθεισᾶν. ἔστω ἕλιξ ἐφ' ἇς ἁ α β γ δ ε, ἐλάσσων τᾶς ἐν μιᾷ περιφορᾷ γεγραμμένας, πέρατα δὲ αὐτᾶς ἔστω τὰ α, ε. ἔστω δὲ ἀρχὰ τᾶς ἕλικος τὸ θ σημεῖον. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ θ, διαστήματι δὲ τῷ θ α κύκλος γεγράφθω, καὶ συμπιπτέτω τᾷ περιφερείᾳ αὐτοῦ ἁ θ ε κατὰ τὸ ζ. δεικτέον ὅτι τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπό τε τᾶς α β γ δ ε ἕλικος, καὶ τᾶν εὐθειᾶν τᾶν α θ, θ ε ποτὶ τὸν τομέα τὸν α θ ζ τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν συναμφότερα τό τε ὑπὸ τᾶν α θ, θ ε, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ε ζ, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς θ α. ἔστω δὴ κύκλος, ἐν ᾧ ς χ, τὰν ἐκ τοῦ κέντρου ἔχων ἴσαν δυνάμει τῷ τε ὑπὸ τᾶν α θ, θ ε, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τᾶς ε ζ, ποτὶ δὲ τῷ κέντρῳ αὐτοῦ γωνία ἴσα τᾷ πρὸς τῷ θ. ὁ δὴ τομεὺς ὁ ς χ ποτὶ τὸν τομέα τὸν θ α ζ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ τᾶν α θ, θ ε, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ε ζ τετραγώνου, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς θ α τετράγωνον. αἱ γὰρ ἐκ τῶν κέντρων τοῦτον ἔχοντι τὸν λόγον δυνάμει ποτ' ἀλλάλας. δειχθήσεται δὴ ὁ χ ς τομεὺς ἴσος ὢν τῷ χωρίῳ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς α β γ δ ε ἕλικος καὶ τᾶν α θ, θ ε εὐθειᾶν. εἰ γὰρ μή, ἤτοι μείζων, ἢ ἐλάσσων. ἔστω γὰρ πρότερον, εἰ δυνατόν, μείζων. δυνατὸν οὖν ἐστὶ περὶ τὸ εἰρημένον χωρίον περιγράψαι σχῆμα, ἐπίπεδον ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγραφόμενον σχῆμα μεῖζον εἶμεν τοῦ εἰρημένου χωρίου ἐλάσσονι, ἢ ἁλίκῳ ὑπερέχει ὁ ς χ τομεὺς τοῦ εἰρημένου χωρίου. περιγεγράφθω δή, καὶ ἔστω τῶν τομέων ἐξ ὧν σύγκειται τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, μείζων μὲν ὁ θ α κ, ἐλάσσων δὲ ὁ θ ο δ. δῆλον οὖν ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἔλασσόν ἐστι τοῦ χ ς τομέως. διήχθωσαν δὴ εὐθεῖαι αἱ ποιοῦσαι τὰς ἴσας γωνίας ποτὶ τῷ θ ἔστ' ἂν ποτὶ τὰν περιφέρειαν τοῦ θ α ζ τομέως πεσῶντι. ἐντὶ δή τινες εὐθεῖαι τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι, αἱ ἀπὸ τοῦ θ ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπίπτουσαι. ὧν ἐστι μεγίστα μὲν ἁ θ α, ἐλαχίστα δὲ ἁ θ ε. ἐντὶ δὲ καὶ ἄλλαι εὐθεῖαι τῷ μὲν πλήθει μιᾷ ἐλάσσονες ταυτᾶν, τῷ μεγέθει ἴσαι ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ, αἱ ἀπὸ τοῦ ποτὶ τὰν τοῦ α θ ζ τομέως περιφέρειαν ποτιπίπτουσαι χωρὶς τᾶς θ ζ. καὶ ἀναγεγράφαται ὅμοιοι τομεῖς ἀπὸ πασᾶν. ἀπό τε τᾶν ἴσων ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ, καὶ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, ἀπὸ δὲ τᾶς θ ε οὐκ ἀναγέγραπται. τομεῖς οὖν οἱ ἀπὸ τᾶν ἴσαν ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ, ποτὶ τοὺς τομέας τοὺς ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς ἐλαχίστας τομέως ἐλάσσονα λόγον ἔχοντι, ἢ τὸ ἀπὸ τᾶς θ α ποτὶ τὰ συναμφότερα, τό τε ὑπὸ τᾶν α θ, θ ε, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ε ζ τετραγώνου. ἐστὶ δὲ τοῖς μὲν τομεῦσι τοῖς ἀπὸ τᾶν ἴσαν ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ, ἴσος ὁ θ α ζ τομεύς. τοῖς δὲ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, τὸ περιγεγραμμένον. ἐλάσσονα οὖν λόγον ἔχει ὁ θ α ζ τομεὺς ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς θ α ποτὶ τὰ συναμφότερα τό τε ὑπὸ τᾶν θ α, θ ε, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ζ ε. ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς θ α ποτὶ τὰ εἰρημένα, τοῦτον τὸν λόγον ἔχει ὁ θ α ζ τομεὺς ποτὶ τὸν χ τομέα. ὥστε ἐλάσσων ἐστὶν ὁ χ τομεὺς τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος. οὐκ ἔστιν δέ, ἀλλὰ μείζων. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὁ χ ς τομεὺς μείζων τοῦ περιεχομένου χωρίου, ὑπό τε τᾶς α β γ δ ε ἕλικος, καὶ τᾶν α θ, θ ε εὐθειᾶν.



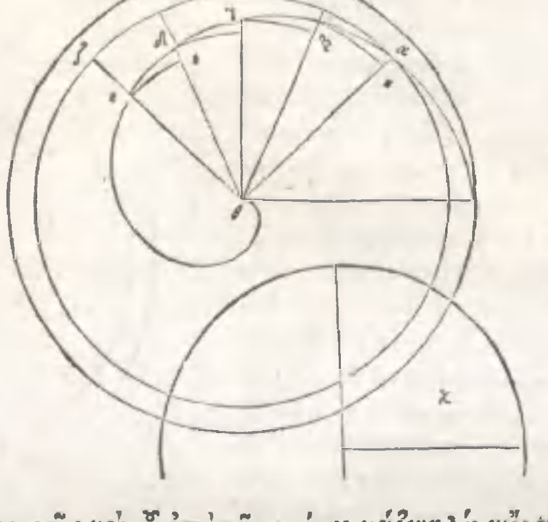
πέσωντι.

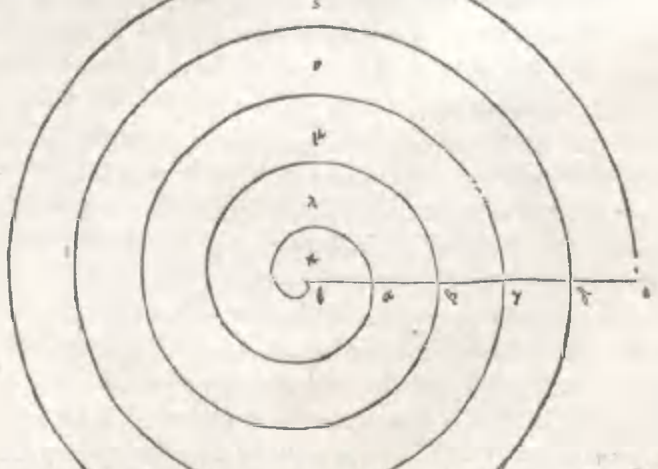
κατεσκευάσθω.

οὐδὲ τοίνυν ἐλάσσων. ἔστω γὰρ ἐλάσσων, καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ κατασκευάσθω. πάλιν δὴ δυνατόν ἐστιν ἐς τὸ χωρίον ἐγγράψαι σχῆμα ἐπίπεδον ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον, ὥστε τὸ εἰρημένον χωρίον μεῖζον εἶμεν τοῦ ἐγγραφέντος σχήματος ἐλάσσονι, ἢ ἁλίκῳ ὑπερέχει τὸ αὐτὸ χωρίον τοῦ χ τομέως. ἐγγεγράφθω οὖν, καὶ ἔστω τῶν τομέων ἐξ ὧν σύγκειται τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, μέγιστος μὲν ὁ θ β, ἐλάσσων δὲ ὁ θ ε. δῆλον οὖν, ὅτι τὸ γεγραμμένον σχῆμα μεῖζόν ἐστι τοῦ χ τομέως. πάλιν δὲ ἐν γὰρ τινες γραμμαὶ τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι ἀπὸ τοῦ θ ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπίπτουσαι, ὧν ἐστι μεγίστα μὲν ἁ θ α, ἐλαχίστα δὲ ἁ θ ε. ἐντὶ δὲ καὶ ἄλλαι γραμμαὶ ἀπὸ τοῦ θ ποτὶ τὰν τοῦ θ α ζ τομέως περιφέρειαν ποτιπίπτουσαι, χωρὶς τᾶς θ α, τῷ μὲν πλήθει μιᾷ ἐλάσσονες τῶν ἴσων ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, τῷ δὲ μεγέθει, ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ ἴσαι. καὶ ἀνα γεγράφαται ἀπὸ τᾶς ἑκάστας ὅμοιοι τομεῖς, ἀπὸ τᾶν μεγίσταν τῶν ἴσων ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, ἀπὸ τᾶς ἐλαχίστας. οἱ τομεῖς οἱ ἀπὸ τᾶν ἴσαν ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ ποτὶ τοὺς τομέας τοὺς ἀπὸ τᾶν ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας, μείζονα λόγον ἔχοντι, ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς θ α ποτὶ τὸ ὑπὸ ταῦ θ α, θ ε, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ε ζ. ὥστε καὶ ὁ θ α ζ τομεὺς ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, μείζονα λόγον ἔχει, ἢ περ πρὸς τὸν χ τομέα. οὐκ ἔστι δὲ, ἀλλ' ἐλάσσων. οὐκ ἔστιν οὖν ἐλάσσων ὁ χ τομεὺς τοῦ περιεχομένου χωρίου, ὑπό τε τᾶς α β γ δ ε ἕλικος, καὶ ταῦ α θ, θ ε εὐθειᾶν. ἴσος ἄρα.

γράφεται

κζ Τῶν χωρίων τῶν περιεχομένων ὑπό τε ταῖν ἕλικων καὶ τᾶν εὐθειᾶν τᾶν ἐν τᾷ περιφορᾷ, τὸ μὲν γ τοῦ β διπλάσιόν ἐστι, τὸ δὲ δ τριπλάσιον, τὸ δὲ ε τετραπλάσιον. καὶ ἀεὶ τὸ ἑπόμενον τοῦ ἐξῆς ἀριθμοῦ πολλαπλάσιον τοῦ δευτέρου χωρίου, τὸ δὲ α χωρίον ἕκτον μέρος ἐστὶ τοῦ δευτέρου. ἔστω ἁ ἕλιξ ἐν τε τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα, καὶ ἐν τᾷ δευτέρᾳ, καὶ ταῖς ἑπομέναις ὁποσαισοῦν. ἔστω ἀρχὰ μὲν τᾶς ἕλικος τὸ θ σαμεῖον, ἁ δὲ θ ε εὐθεῖα ἀρχὰ τᾶς περιφορᾶς. τῶν δὲ χωρίων ἔστω τὸ μὲν κ τὸ α. τὸ δὲ λ τὸ β, τὸ δὲ μ τὸ γ, τὸ δὲ ν τὸ δ, τὸ δὲ ξ τὸ ε. δεικτέον ὅτι τὸ μὲν κ χωρίον ς' μέρος ἐστὶ τοῦ ἑπομένου. τὸ δὲ μ διπλάσιον τοῦ λ, τὸ δὲ ν τριπλάσιον τοῦ λ, καὶ τῶν ἑξῆς ἀεὶ τὸ ἑπόμενον πολλαπλάσιον τοῦ λ, κατὰ τὸν ἑξῆς ἀριθμόν. ὅτι μὲν οὖν τὸ κ ς' μέρος ἐστὶ τοῦ λ, ὧδε δείκνυται. ἐπεὶ γὰρ τὸ κ λ χωρίον ποτὶ τὸν δεύτερον κύκλον δέδεικται ἔχειν τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὰ ἑπτὰ πρὸς τὰ ιβ,





ιβ. ὁ δὲ β κύκλος ποτὶ τὸν α κύκλον, ὡς ιβ ποτὶ τὰ τρία. δῆλον γάρ ἐστιν. ὁ δὲ α κύκλος ποτὶ τὸ κ χωρίον ἔχει ὡς γ πρὸς α. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ κ χωρίον τῷ λ. πάλιν δὲ ὅτι τὸ κ λ μ χωρίον ποτὶ τὸν γ κύκλον, δέδεικται ὅτι τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερον, τό τε ὑπὸ γ θ, β, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς γ β τετραγώνου, ποτὶ τὸ ἀπὸ γ θ τετράγωνον. ὁ δὲ γ κύκλος ἔχει ποτὶ τὸν β κύκλον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς γ θ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς θ β. ὁ δὲ β κύκλος ἔχει ποτὶ τὸ κ λ χωρίον, ὃν τὸ ἀπὸ β θ τετράγωνον ποτὶ τὰ συναμφότερα, τό τε ὑπὸ ταῦ β θ, θ α, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς α β τετραγώνου. ταῦτα δὲ ἔχει λόγον πρὸς ἄλλαλα, ὃν ιθ ποτὶ τὰ ζ. ὥστε καὶ τὸ κ λ μ χωρίον ποτὶ τὸ λ κ χωρίον τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ιθ ποτὶ τὰ ζ. αὐτὸ δὲ τὸ μ ποτὶ τὸ κ λ λόγον ἔχει, ὃν τὰ ιβ ποτὶ τὸ ζ. τὸ δὲ κ λ ποτὶ τὸ λ λόγον ἔχει, ὃν τὰ ζ ποτὶ τὰ ς. δῆλον οὖν ὅτι διπλάσιον ἐστὶ τὸ μ τοῦ λ. ὅτι δὲ τὰ ἑπόμενα τὸν τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν λόγον ἔχει, δειχθήσεται. τὸ γὰρ κ λ μ ν ξ, ποτὶ τὸν κύκλον οὗ ἐστιν ἐκ τοῦ κέντρου ἁ θ ε, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερον, τό τε ὑπὸ τῶν ε θ, θ δ περιεχόμενον, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς δ ε τετραγώνου, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς θ ε τετράγωνον. ὁ δὲ κύκλος οὗ ἐστιν ἐκ τοῦ κέντρου ἁ θ ε, ποτὶ τὸν κύκλον οὗ ἐστιν ἐκ τοῦ κέντρου ἁ θ δ, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς θ ε τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς θ δ τετράγωνον. ὁ δὲ κύκλος οὗ ἐστιν ἀπὸ τοῦ κέντρου ἁ δ θ, ποτὶ τὸ κ λ μ ν χωρίον, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς θ δ τετράγωνον ποτὶ τὰ συναμφότερα, τό τε ὑπὸ ταῦ θ δ, θ γ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς δ γ τετραγώνου. καὶ τὸ κ λ μ ν ξ ἄρα, ποτὶ τὸ κ λ μ ν λόγον ἔχει, ὃν τὸ ὑπὸ τῶν θ ε, θ δ. καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς δ ε, ποτὶ τὸ ὑπὸ τῶν δ θ, θ γ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς δ γ. διελόντι, καὶ τὸ ξ χωρίον ποτὶ τὸ κ λ μ ν λόγον ἔχει, ὃν ἁ ὑπεροχὴ, τοῦ τε ὑπὸ ε θ, θ δ μετὰ τοῦ τρίτου μέρους τοῦ ἀπὸ τᾶς ε δ, πρός τε τὸ ὑπὸ τῶν δ θ, θ γ. καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς δ γ. ὑπερέχει δὲ τὰ συναμφότερα τῶν συναμφοτέρων, ᾧ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ε θ, δ, τοῦ ὑπὸ τῶν δ θ γ. ὑπερέχει δὲ τῷ ὑπὸ τῶν δ θ, γ ε. τὸ ξ ἄρα ποτὶ τὸ κ λ μ ν λόγον ἔχει, ὃν τὸ ὑπὸ τῶν θ δ, γ ε ποτὶ τὸ ὑπὸ τῶν δ θ, θ γ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς γ δ τετραγώνου. διὰ δὲ τῶν αὐτῶν δειχθήσεται καὶ τὸ ν ποτὶ τὸ κ λ μ χωρίον, λόγον ἔχον τοῦτον, ὃν τὸ ὑπὸ ταῦ θ γ, β δ ποτὶ τὰ συναμφότερα, τό τε ὑπὸ γ θ β, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ γ β τετραγώνου. τὸ ν ἄρα ποτὶ τὸ κ λ μ ν χωρίον, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ θ γ, β δ ποτὶ τὸ ὑπὸ θ γ, θ β, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς γ β. καὶ ἀνάπαλιν. ταῦτα δὲ ἴσα ἐντὶ τῷ τε ὑπὸ ταῦ δ θ, θ γ, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τᾶς γ δ τετραγώνου. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ξ χωρίον πρὸς τὸ κ λ μ ν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ ταῦ θ δ, γ ε ποτὶ τὰ συναμφότερα, τῷ τε ὑπὸ ταν δ θ γ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς γ δ τετραγώνου. τὰ δὲ κ λ μ ν ποτὶ τὸ ν ὄντα συναμφότερα, τό τε ὑπὸ ταῦ δ θ γ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς γ δ τετραγώνου ποτὶ τὰ ὑπὸ τᾶ θ γ, δ β. ἔχει ἄρα καὶ τὸ ξ ποτὶ τὸ ν τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ ταν θ δ, γ ε, ποτὶ τὸ ὑπὸ ταν θ γ, δ β. ἔχει τὸ δὲ ὑπὸ ταῦ θ δ, γ ε ποτὶ τὸ ὑπὸ ταῦ θ γ, δ β, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ θ δ ποτὶ ταὺ θ γ. ἐπεὶ ἴσαι ἐντὶ αἱ γ ε, β δ. δῆλον οὖν, ὅτι καὶ τὸ ξ ποτὶ τὸ ν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ θ δ ποτὶ ταὺ θ γ.

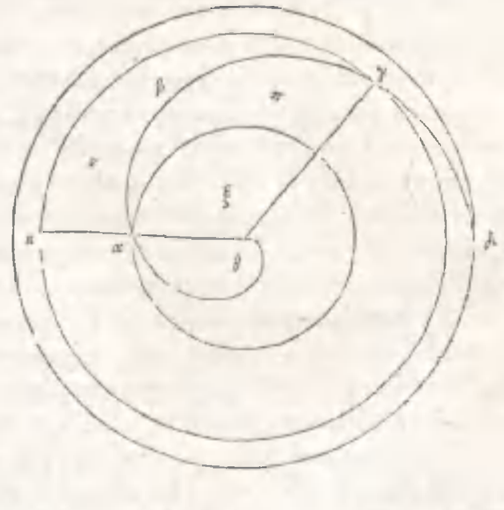
Ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, καὶ τὸ ν ποτὶ τὸ μ τοῦτον ἔχον τὸν λόγον, ὃν ἁ θ γ ποτὶ τὰν θ β. καὶ τὸ μ ποτὶ τὸ λ, ὃν ἁ β θ ποτὶ τὸν α θ. αἱ δὲ ε θ, δ θ, γ θ, β θ, α θ εὐθεῖαι, τὸν τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν λόγον ἔχοντι.

Εἴκα ἐπὶ τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν ὁποιαοῦν περιφορᾷ γεγραμμένας δύο σημεῖα λαφθέωντι, μὴ τὰ πέρατα, ἀπὸ δὲ τῶν λαφθέντων σημείων ἐπιζευχθέωσιν εὐθεῖαι ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος, κέντρῳ μὲν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς ἕλικος, διαστήματι δὲ τοῖς ἀπὸ τῶν σημείων ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος κύκλοι γραφέωντι, τὸ περιλαφθὲν χωρίον ὑπό τε τᾶς μείζονος ταν περιφερειᾶν τᾶς μεταξὺ ταν εὐθειᾶν, καὶ τᾶς ἕλικος τᾶς μεταξὺ ταν αὐταν εὐθειᾶν, καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐκβληθείσας, τοῦτον ἕξει τὸν λόγον ποτὶ τὸ ἀπολαφθὲν χωρίον ὑπό τε τᾶς ἐλάσσονος περιφερείας, καὶ τᾶς αὐτᾶς ἕλικος καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰ πέρατα αὐτᾶν, ὃν ἁ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου μετὰ δύο τριταμοριᾶν τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει ἁ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μείζονος κύκλου τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου ἐλάσσονος κύκλου πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ἐλάσσονος κύκλου μετὰ ἑνὸς τριταμορίου τᾶς αὐτᾶς ὑπεροχᾶς. κη

ἔστω ἕλιξ, ἐφ' ᾇς ἁ α β γ δ μιᾷ περιφορᾷ γεγραμμένα. καὶ λελάφθω ἐπ' αὐτᾶς δύο σημεῖα τὰ α, γ, ὥστε τὸ θ σημεῖον ἀρχὰν εἶμεν τᾶς ἕλικος. καὶ ἀπὸ τῶν α, γ, ἐπιζευχθέωσιν εὐθεῖαι ἐπὶ τὸ θ. καὶ κέντρῳ τῷ θ, διαστήματι δὲ τοῖς θ α, θ γ, κύκλοι γεγράφθωσαν. δεικτέον ὅτι τὸ ξ χωρίον ποτὶ τὸ π τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερος, ἁ θ α, καὶ δύο τριταμόρια τᾶς η α, ποτὶ συναμφότερον τάν τε θ α, καὶ ἓν τριταμόριον τᾶς η α, τὸ γὰρ χωρίον τὸ ν π ποτὶ τὸν κ γ θ τομέα, δέδεικται

ἐπιζευχθῶσιν. cf. p. 108, 26. p 109, 2

δείκνυται ὥστε ἔχειν τὸν λόγον, ὃν ἔχει τό τε ὑπὸ τᾶν κθ, αθ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ακ τετραγώνου, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς κθ τετράγωνον, αὐτὸ ἄρα τὸ ξ ποτὶ τὸ νπ ὥστε ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τό τε ὑπὸ τᾶν θα, κ μετὰ δύο τριταμορίων τοῦ ἀπὸ τᾶς κα τετραγώνου, ποτὶ τὰ συναμφότερα, τό τε ὑπὸ τᾶν αθ, κ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς κα. καὶ ἐπεὶ τὸ νπξ χωρίον ποτὶ τὸν νξ τομέα ὥστε ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερον, τό τε ὑπὸ τῶν θα, θκ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς κα ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς θκ τετράγωνον. ὁ δὲ νπξ τομεὺς ποτὶ τὸν ν τομέα ὥστε ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς θκ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς θα. ἕξει καὶ τὸ νπ χωρίον ποτὶ τὸν ν τομέα, τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερον τό τε ὑπὸ θα, θκ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς κα, ποτὶ τὸ ἀπὸ θα. τὸ ἄρα νπ χωρίον πρὸς τὸ ξ λόγον ἔχει, ὃν συναμφότερα, τό τε ὑπὸ τᾶν κθ, α. καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς κα ποτὶ συναμφότερον, τό τε ὑπὸ τᾶν κα, θα, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς κα τετραγώνου. ἐπεὶ οὖν τὸ ξ χωρίον ποτὶ τὸ νπ ὥστε ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερον, τό τε ὑπὸ θα, κ, καὶ δύο τριταμόρια τοῦ ἀπὸ τᾶς κα τετραγώνου ποτὶ τὰ συναμφότερα, τό τε ὑπὸ τᾶν κθ, α, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς κα. τὸ δὲ νπ χωρίον ποτὶ τὸ π ὥστε ἔχει τὸν λόγον, ὃν συναμφότερα τό τε ὑπὸ τᾶν κθ, α, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς κα τετραγώνου, ποτὶ συναμφότερον, τό τε ὑπὸ τᾶν κα, θ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς κα τετραγώνου. ἕξει καὶ τὸ ξ χωρίον ποτὶ τὸ π, ὥστε τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερα τό τε ὑπὸ τᾶν θα, κα, καὶ δύο τριταμόρια τοῦ ἀπὸ τᾶς κα, ποτὶ συναμφότερον, τό τε ὑπὸ τᾶν θα, κα, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς κα. τὰ δὲ συναμφότερα τό τε ὑπὸ τᾶν θα, κα, καὶ δύο τριταμόρια τοῦ ἀπὸ τᾶς κα, ποτὶ συναμφότερα τό τε ὑπὸ τᾶν θα, κα καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς κα τετραγώνου, ὥστε ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερα, ἅ τε θα καὶ δύο τριταμόρια τᾶς κα, ποτὶ συναμφοτέραν, τάν θα, καὶ τὸ τρίτον μέρος τᾶς κα. δῆλον οὖν ὅτι καὶ τὸ ξ χωρίον ποτὶ τὸ ν χωρίον ὥστε ἔχει τὸν λόγον, ὃν συναμφότερα, ἅ τε θα, καὶ δύο τριταμόρια τᾶς κα, ποτὶ συναμφότερον τάν θα, καὶ τὸ τρίτον μέρος τᾶς κα.



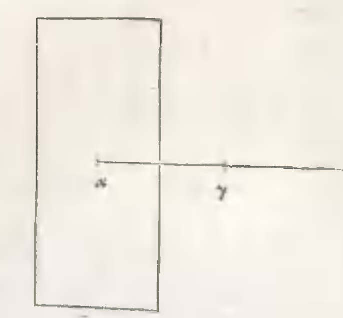
ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΙΣΟΡΡΟΠΙΩΝ, Η ΚΕΝΤΡΑ ΒΑΡΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ.

Αἰτούμεθα τὰ ἴσα βάρεα ἀπὸ τῶν ἴσων μακέων ἰσορροπεῖν. τὰ δὲ ἴσα βάρεα 1.
ἀπὸ τῶν ἀνίσων μακέων μὴ ἰσορροπεῖν, ἀλλὰ ῥέπειν ἐπὶ τὸ βάρος τὸ ἀπὸ
τοῦ μείζονος μάκεος. εἴκα βαρέων ἰσορροπεόντων ἀπό τινων μακέων ποτὶ 3.
τὸ ἕτερον τῶν βαρέων ποτιτεθῇ μὴ ἰσορροπεῖν, ἀλλὰ ῥέπειν ἐπὶ τὸ βά-
ρος ἐκεῖνο ᾧ ποτετέθη. ὁμοίως δὲ καὶ εἴκα ἀπὸ τοῦ ἑτέρου τῶν βαρέων ἀφαιρε- 4
θῇ τι, μὴ ἰσορροπεῖν, ἀλλὰ ῥέπειν ἐπὶ τὸ βάρος ἐφ' οὗ οὐκ ἀφῃρέθη. τῶν ἴσων 5
καὶ ὁμοίων σχημάτων ἐπιπέδων ἐφαρμοζομένων ἐπ' ἄλληλα, καὶ τὰ κέντρα
τῶν βαρέων ἐφαρμόζει ἐπ' ἄλληλα. τῶν δὲ ἀνίσων, ὁμοίων δὲ, τὰ κέντρα τῶν βαρέων ὁμοίως ἐσσεῖται κείμενα. 6
7. ὁμοίως δὲ λέγομεν σαμεῖα κεῖσθαι ποτὶ τὰ ὅμοια σχήματα, ἀφ' ὧν ἐπὶ τὰς ἴσας γωνίας ἀγόμεναι εὐ-
θεῖαι ποιοῦντι γωνίας ἴσας ποτὶ τὰς ὁμολόγους πλευράς. εἴκα μεγέθεα ἀπό τινων μακέων ἰσορρο- 8
πέωντι, καὶ τὰ ἴσα αὐτοῖς ἀπὸ τῶν αὐτῶν μακέων ἰσορροπήσει. παντὸς σχήματος οὗ κα ἡ περίμε- 9
τρος ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλα ᾖ, τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐντὸς εἶναι δεῖ τοῦ σχήματος. τούτων δὲ ὑποκειμένων, τὰ ἀπὸ ἴσων μακέων ἰσορροπέοντα βάρεα ἴσα ἐντί. εἰ γὰρ ἄνισα ἐσσεῖται, ἀφαιρεθείσας ἀπὸ τοῦ μείζονος τᾶς ὑπεροχᾶς, τὰ λοιπὰ οὐκ ἰσορροπησοῦντι, ἐπειδὴ ἰσορροπεόντων ἀπὸ τοῦ ἑτέρου ἀφῄρηται. ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν ἴσων μακέων βάρεα ἰσορροπέοντα, ἴσα ἐντί. τὰ ἀπὸ

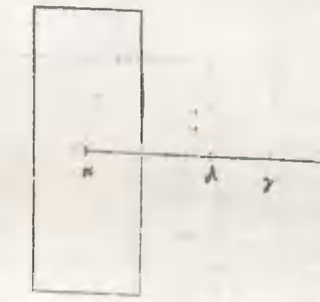
τῶν ἴσων

τῶν ἴσων μακέων ἄνισα βάρεα, οὐκ ἰσορροποῦντι, ἀλλὰ ῥέψει ἐπὶ τὸ μεῖζον, ἀφαιρεθείσας τᾶς ὑπεροχᾶς ἰσορροπησοῦντι, ἐπειδὴ τὰ ἴσα ἀπὸ τῶν ἴσων μακέων ἰσορροπέοντι. ποτιτεθέντος οὖν τοῦ ἀφαιρεθέντος ῥέψει ἐπὶ τὸ μεῖζον, ἐπεὶ ἰσορροπεόντων τῷ ἑτέρῳ ποτιτεθείη.

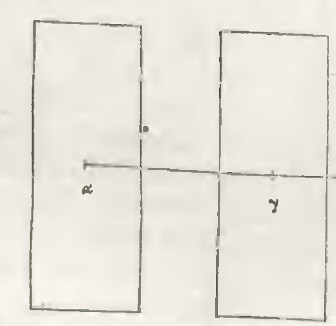
Τὰ ἄνισα βάρεα ἀπὸ τῶν ἀνίσων μακέων ἰσορροπησοῦντι καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος. ἔστω ἄνισα βάρεα τὰ α, β. καὶ ἔστω τὸ α, καὶ ἰσορροπέοντα ἀπὸ τῶν αγ, γβ μακέων. δεικτέον ὅτι ἐλάσσων ἐστὶν ἁ αγ τᾶς γβ. μὴ γίνεται. ἔστω. ἀφαιρεθείσας δὲ τᾶς ὑπεροχᾶς ᾇ ὑπερέχει τὸ α τοῦ β. ἐπειδὴ ἰσορροπεόντων ἀπὸ τοῦ ἑτέρου ἀφῄρηται, ῥέψει ἐπὶ τὸ β. οὐ ῥέψει δέ. εἴτε γὰρ ἴσα ἐστὶν ἁ γα τᾶ γβ, ἰσορροπησοῦντι γὰρ ἴσα ἀπὸ τῶν ἴσων μακέων. εἴτε μείζων ἁ γα τᾶς γβ, ῥέψει ἐπὶ τὸ α. τὰ γὰρ ἴσα ἀπὸ τῶν ἀνίσων μακέων οὐκ ἰσορροπέωντι, ἀλλὰ ῥέπει ἀπὸ τοῦ μείζονος μάκεος. διὰ δὴ ταῦτα, ἐλάσσων ἐστὶν ἁ αγ τᾶς γβ. φανερὸν δὲ, ὅτι καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων μακέων ἰσορροπέοντα, ἄνισά ἐντι, καὶ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος.



Εἴκα δύο ἴσα μεγέθεα, μὴ τὸ αὐτὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἔχοντι, τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μεγεθέων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος τὸ μέσον τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τῶν μεγεθέων τὰ κέντρα τοῦ βάρεος. ἔστω τοῦ μὲν α κέντρον τοῦ βάρεος τὸ α, τοῦ δὲ β τὸ β. καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἁ αβ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ γ. λέγω ὅτι τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μεγεθέων συγκειμένου μεγέθεος, κέντρον ἐστὶ τὸ γ. εἰ γὰρ μή, ἔστω τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν α, β μεγεθέων κέντρον τοῦ βάρεος τὸ δ, εἰ δυνατόν. ὅτι γὰρ ἐστὶν ἐπὶ τᾶς αβ, προδέδεικται. ἐπεὶ οὖν τὸ δ σαμεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τοῦ ἐκ τῶν α, β συγκειμένου μεγέθεος, κατεχομένου τοῦ δ ἰσορροπήσει. τὰ ἄρα α, β μεγέθεα ἰσορροπέοντι ἀπὸ τῶν αδ, δβ μακέων, ὅπερ ἀδύνατον. τὰ γὰρ ἴσα ἀπὸ τῶν ἀνίσων μακέων οὐκ ἰσορροπέωντι. δῆλον οὖν ὅτι γ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος, τοῦ ἐκ τῶν α, β συγκειμένου μεγέθεος.



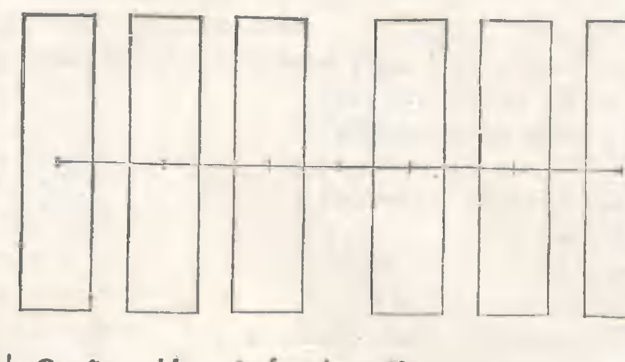
Εἴκα τριῶν μεγεθέων τὰ κέντρα τοῦ βάρεος ἐπ' εὐθείας ἔωντι κείμενα, καὶ τὰ μεγέθεα ἴσον βάρος ἔχοντι, καὶ αἱ μεταξὺ τῶν κέντρων εὐθεῖαι ἴσαι ἔωντι, τοῦ ἐκ πάντων μεγεθέων συγκειμένου μεγέθεος, κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος τὸ σημεῖον, ὃ καὶ τοῦ μέσου αὐτῶν κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος. ἔστω τρία μεγέθεα τὰ α, β, γ. κέντρα δὲ αὐτῶν τοῦ βάρεος, τὰ α, β, γ, σημεῖα ἐπ' εὐθείας κείμενα. ἔστω δὲ τά τε α, β, γ ἴσα. καὶ αἱ αγ, γβ ἴσαι εὐθεῖαι. λέγω ὅτι τοῦ ἐκ πάντων τῶν μεγεθέων συγκειμένου μεγέθεος, κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶ τὸ γ σαμεῖον. ἐπεὶ γὰρ τὰ α, β μεγέθεα ἴσον βάρος ἔχει, κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος τὸ γ σαμεῖον. ἐπειδὴ ἴσαι ἐντὶ αἱ αγ, γβ. ἐστὶ δὲ καὶ τοῦ γ κέντρον τοῦ βάρεος τὸ γ σημεῖον, δῆλον ὅτι καὶ τοῦ ἐκ πάντων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος τὸ σημεῖον, ὃ καὶ τοῦ μέσου κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος.



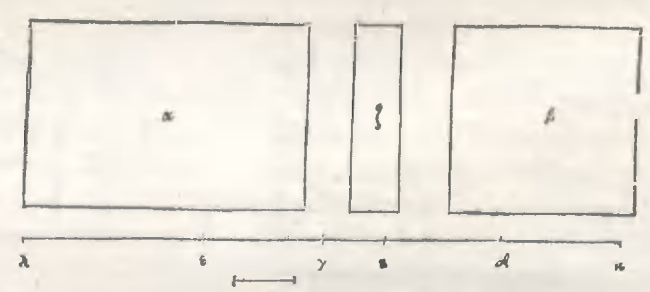
Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ὁποσωνοῦν τῷ πλήθει περισσῶν μεγεθέων τὰ κέντρα τοῦ βάρεος ἐπ' εὐθείας ἔωντι κείμενα, εἴκα τά τε ἴσον ἀπέχοντα ἀπὸ τοῦ μέσου μεγέθεος

ξ ἴσον

ἴσον βάρος ἔχοντι, καὶ αἱ εὐθεῖαι αἱ μεταξὺ τῶν κέντρων αὐτῶν ἴσαι ἐῶντι, τοῦ ἐκ πάντων τῶν μεγεθέων συγκειμένου μεγέθεος, κέντρον ἐσεῖται τοῦ βάρεος τὸ σαμεῖον, ὃ καὶ τοῦ μέσου αὐτῶν κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος. εἴκα καὶ ἄρτια ἐῶντι τῷ πλήθει τὰ μεγέθεα, καὶ τὰ κέντρα τοῦ βάρεος αὐτῶν ἐπ' εὐθείας ἐῶντι κείμενα, καὶ τὰ μέσα αὐτῶν ἴσον βάρος ἔχοντι, καὶ αἱ μεταξὺ τῶν κέντρων εὐθεῖαι ἴσαι ἐῶντι, τοῦ ἐκ πάντων τῶν μεγεθέων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον ἐσεῖται τοῦ βάρεος, τὸ μέσον τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰ κέντρα τοῦ βάρεος τῶν μεγεθέων, ὡς ὑπογέγραπται.



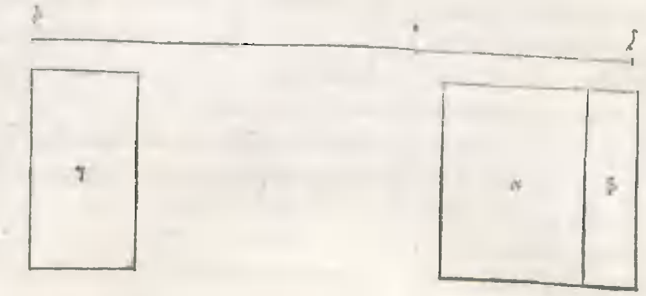
δ' Τὰ σύμμετρα μεγέθεα ἰσορροπέοντι ἀπὸ μακέων ἀντιπεπονθότων τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς βάρεσιν. ἔστω σύμμετρα μεγέθεα τὰ α, β. ὧν κέντρα τὰ α, β. καὶ μᾶκος ἔστω τι τὸ ε δ, καὶ ὡς τὸ α πρὸς τὸ β, οὕτως τὸ δ γ μᾶκος πρὸς τὸ γ ε μᾶκος. δεικτέον ὅτι τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν α, β συγκειμένου μεγέθεος, κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τὸ γ. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ α ποτὶ τὸ β, οὕτω τὸ δ γ ποτὶ τὸ γ ε. τὸ δὲ α τῷ β σύμμετρον, καὶ τὸ γ δ ἄρα τῷ γ ε σύμμετρον. τουτέστιν εὐθεῖα τᾷ εὐθείᾳ, ὥστε τῶν ε γ, γ δ ἐστὶ κοινὸν μέτρον. ἔστω δὴ τὸ ν, καὶ κείσθω τᾷ μὲν ε γ ἴσα ἑκατέρα τῶν δ η, δ κ. τᾷ δὲ δ γ ἴσα ἁ ε λ. καὶ ἐπεὶ ἴσα ἁ δ η τᾷ γ ε, ἴσα καὶ ἁ δ γ τᾷ ε η, ὥστε καὶ ἁ λ ε ἴσα τᾷ ε η. διπλασία ἄρα ἁ μὲν λ η τᾶς δ γ, ἁ δὲ η κ τᾶς γ ε. ὥστε τὸ ν καὶ ἑκατέρου τῶν λ η, η κ μετρεῖ. ἐπειδήπερ καὶ τὰ ἥμισυ αὐτῶν. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ α πρὸς τὸ β, οὕτως ἁ δ γ πρὸς γ ε. ὡς δὲ ἁ δ γ πρὸς γ ε, οὕτως ἁ λ η πρὸς η κ. διπλασία γὰρ ἑκατέρα ἑκατέρας. καὶ ὡς ἄρα τὸ α πρὸς τὸ β, οὕτως ἁ λ η πρὸς η κ. ὁσαπλασίων δὲ ἐστὶν ἁ λ η τᾶς ν, τοσαυταπλασίων ἔστω τὸ



α τοῦ ζ. ἐστὶν ἄρα ὡς ἁ λ η πρὸς ν, οὕτως τὸ α πρὸς ζ. ἐστὶ δὲ καὶ ὡς ἁ κ η πρὸς λ η, οὕτως τὸ β πρὸς α. δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν, ὡς ἁ κ η πρὸς ν, οὕτως τὸ β πρὸς ζ. ἰσάκις ἄρα πολλαπλασίων ἐστὶ ἁ κ η τᾶς ν, καὶ τὸ β τοῦ ζ. ἐδείχθη δὲ τοῦ ζ καὶ τὸ α πολλαπλασίων ὄν, ὥστε τὸ ζ τῶν α, β κοινόν ἐστι μέτρον. διαιρεθείσας οὖν τᾶς μὲν λ η εἰς τὰς τᾷ ν ἴσας, τοῦ δὲ α εἰς τὰ τῷ ζ ἴσα, τὰ ἐν τᾷ λ η τμήματα ἰσομεγέθη τᾷ ν, ἴσα ἐστὶ τῷ πλήθει τοῖς ἐν τῷ α τμήμασιν ἴσοις οὖσι τῷ ζ. ὥστε αἰ ἐφ' ἕκαστον τῶν τμαμάτων τῶν ἐν τᾷ λ η ἐπιτεθῇ μέγεθος ἴσον τῷ ζ, τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἔχον ἐπὶ μέσου τοῦ τμάματος, τά τε πάντα μεγέθεα ἴσα ἐντὶ τῷ α. καὶ τοῦ ἐκ πάντων συγκειμένου κέντρον ἔσται τοῦ βάρεος τὸ ε. ἄρτιά τε γάρ ἐστι τὰ πάντα τῷ πλήθει, διὰ τὸ ἴσαν εἶναι τὰν λ ε τᾷ η ε. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, ὅτι καὶ εἴκα ἐφ' ἕκαστον τῶν ἐν τᾷ κ η τμαμάτων, ἐπιτεθῇ μέγεθος ἴσον τῷ ζ, κέντρον τοῦ βάρεος ἔχον ἐπὶ τοῦ μέσου τοῦ τμάματος, τά τε πάντα μεγέθεα ἴσα ἐσεῖται τῷ β, καὶ τοῦ ἐκ πάντων συγκειμένου κέντρον τοῦ βάρεος ἐσεῖται τὸ δ. ἀλλ' οὖν τὸ μὲν α ἐπικείμενον κατὰ τὸ ε, τὸ δὲ β κατὰ τὸ δ. ἔσται δὴ μεγέθεα ἴσα ἀλλήλοις ἐπ' εὐθείας κείμενα, ὧν τὰ κέντρα τοῦ βάρεος ἴσα ἀπ' ἀλλήλων διεσταμένα συγκείμενα, ἄρτια τῷ πλήθει. δῆλον οὖν ὅτι τοῦ ἐκ πάντων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος ἁ διχοτομία τᾶς εὐθείας τᾶς ἐχούσας τὰ κέντρα τῶν μέσων μεγεθέων. ἐπεὶ δὲ ἴσαι εἰσὶν ἁ μὲν λ ε τᾷ γ δ, ἁ δὲ ε γ τᾷ δ κ, καὶ ὅλα ἄρα ἁ λ γ ἴσα τᾷ γ κ. ὥστε τοῦ ἐκ πάντων μεγέθεος κέντρον τοῦ βάρεος τὸ γ σαμεῖον. τοῦ μὲν ἄρα α κειμένου κατὰ τὸ ε, τοῦ δὲ β κατὰ τὸ δ ἰσορροπησοῦντι κατὰ τὸ γ.

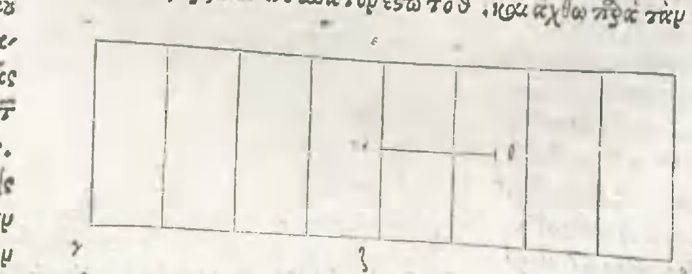
Καὶ

Καὶ τοίνυν εἴκα ἀσύμμετρα ἐῶντι τὰ μεγέθεα ὁμοίως ἰσορροπησοῦντι, ἀπὸ μακέων ἀντιπεπονθότως τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς μεγέθεσιν. ἔστω ἀσύμμετρα μεγέθεα τὰ α β, γ. μάκεα δὲ τὰ δ ε, ε ζ. ἐχέτω δὲ τὸ α β ποτὶ τὸ γ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν καὶ τὸ ε δ ποτὶ τὸ ε ζ μᾶκος. λέγω ὅτι τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν α β, γ κέντρον τοῦ βάρεός ἐστι τὸ ε. εἰ γὰρ μὴ ἰσορροπήσει τὸ α β τεθὲν ἐπὶ τῷ ζ, τῷ γ τεθέντι ἐπὶ τὸ δ, ἤτοι μεῖζόν ἐστι τὸ α β τοῦ γ, ὥστε ἰσορροπεῖν τῷ γ, ἢ οὔ. ἔστω μεῖζον. καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ α β ἔλασσον τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ μεῖζόν ἐστι τὸ α β τοῦ γ, ὥστε ἰσορροπεῖν. ὥστε τὸ λοιπὸν τὸ α σύμμετρον εἶν τῷ γ. ἐπεὶ οὖν σύμμετρά ἐστι τὰ α, γ μεγέθεα, καὶ ἐλάσσονα λόγον ἔχει τὸ α ποτὶ τὸ γ, ἢ ἁ δ ε πρὸς ε ζ, οὐκ ἰσορροπησοῦντι τὰ α, γ ἀπὸ τῶν δ ε, ε ζ μακέων, τεθέντος τοῦ μὲν α ἐπὶ τὸ ζ, τοῦ δὲ γ ἐπὶ τὸ δ. διὰ ταῦτα δὲ οὐδ' εἰ τὸ γ μεῖζόν ἐστιν, ἢ ὥστε ἰσορροπεῖν τὸ α. ε



Εἴκα ἀπό τινος μεγέθεος μέγεθος ἀφαιρεθῇ, μὴ τὸ αὐτὸ κέντρον ἔχον τῷ ὅλῳ, τοῦ λοιποῦ μεγέθεος κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος ἐκβληθείσας τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰ κέντρα τῶν βαρέων, τοῦ τε ὅλου μεγέθεος καὶ τοῦ ἀφῃρημένου ἐπὶ τὰ αὐτά, ἐφ' ὃ τὸ κέντρον τοῦ ὅλου μεγέθεος. καὶ ἀπολαφθείσας τινὸς ἀπὸ τᾶς ἐκβληθείσας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰ εἰρημένα κέντρα, ὥστε τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον πρὸς τὰν μεταξὺ τῶν κέντρων, ὃν ἔχει τὸ βάρος τοῦ ἀφῃρημένου μεγέθεος πρὸς τὸ τοῦ λοιποῦ βάρος, τὸ πέρας τᾶς ἀπολαφθείσας. ἔστω μεγέθεός τινος τοῦ α β κέντρον τοῦ βάρεος τὸ γ. καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ α β τὸ α δ. οὗ τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἔστω τὸ ε. ἐπιζευχθείσας δὲ τᾶς ε γ, καὶ ἐκβληθείσας, ἀπολελάφθω ἁ γ ζ ποτὶ τὰν γ ε, λόγον ἔχουσα τὸν αὐτόν, ὃν ἔχει τὸ α δ μέγεθος ποτὶ τὸ δ η. δεικτέον ὅτι τοῦ δ η μεγέθεος κέντρον τοῦ βάρεός ἐστι τὸ ζ σημεῖον. μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ θ σημεῖον. ἐπεὶ οὖν τοῦ μὲν α δ μεγέθεος κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶ τὸ ε. τοῦ δὲ δ η τὸ θ σημεῖον, τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν α δ, δ η μεγεθέων, κέντρον τοῦ βάρεος ἐσεῖται ἐπὶ τᾶς ε θ τμαθείσας, ὥστε τὰ τμάματα αὐτᾶς ἀντιπεπονθότως τέμνειν ἐπὶ τὸν αὐτὸν λόγον τοῖς μεγέθεσιν, ὥστε οὐκ ἔσται τὸ γ σαμεῖον ἐπὶ τὰν ἀνάλογον τομὰν τᾶς εἰρημένας. θέτων οὐκ ἄρα ἐστὶ τὸ γ κέντρον τοῦ ἐκ τῶν α δ, δ η συγκειμένου μεγέθεος, τουτέστι τοῦ α β. ἐστὶ δέ. ὑπόκειται γάρ. οὐκ ἐστὶ ἄρα τὸ θ κέντρον βάρεος τοῦ δ η μεγέθους.

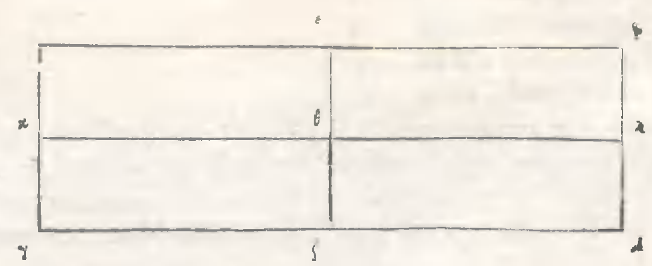
Παντὸς παραλληλογράμμου τὸ κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν ἐπὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰς διχοτομίας τὰς κατ' ἐναντίον τοῦ παραλληλογράμμου πλευράς. ζ ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ α β γ δ. ἐπὶ δὲ τὰν διχοτομίαν τῶν α β, γ δ ἁ ε ζ. φαμὶ δὴ ὅτι τοῦ α β γ δ παραλληλογράμμου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἔσται ἐπὶ τᾶς ε ζ. μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν ἔστω τὸ θ. καὶ ἄχθω παρὰ τὰν α β ἁ θ ι. τᾶς δὲ δὴ ε β διχοτομουμένας αἰεὶ ἐσεῖταί ποκα καταλειπομένα ἐλάσσων τᾶς ι θ. καὶ διῃρήσθω ἑκατέρα τῶν α ε, ε β εἰς τὰς τᾷ ε κ ἴσας. καὶ ἀπὸ τῶν κατὰ τὰς διαιρέσιας σαμείων ἄχθωσαν παρὰ τὰν ε ζ. διαιρεθήσεται δὴ τὸ ὅλον παραλληλόγραμμον εἰς παραλληλόγραμμα τὰ ἴσα καὶ ὅμοια τῷ κ ζ. τῶν οὖν παραλληλογράμμων τῶν



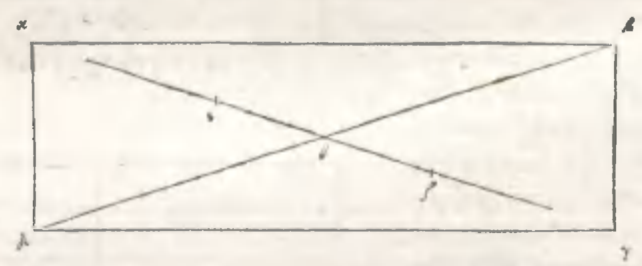
ξ 2 ἴσων

ἴσων καὶ ὁμοίων τῷ κ ζ ἐφαρμοζομένων ἐπάλληλα, καὶ τὰ κέντρα τοῦ βάρεος αὐτῶν ἐπάλληλα πεσοῦνται. ἐσσοῦνται δὴ μεγέθεά τινα παραλληλόγραμμα, ἴσα τῷ κ ζ, ἄρτια τῷ πλήθει. καὶ τὰ κέντρα τοῦ βάρεος αὐτῶν ἐπ' εὐθείας κείμενα, καὶ τὰ μέσα ἴσα. καὶ πάντα τὰ ἐφ' ἑκάτερα τῶν μέσων, αὐτά τε ἴσα ἐντί, καὶ αἱ μεταξὺ τῶν κέντρων εὐθεῖαι ἴσαι. τοῦ ἐκ πάντων αὐτῶν ἄρα συγκειμένου μεγέθεος τὸ κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰ κέντρα τοῦ βάρεος τῶν μέσων χωρίων. ἀλλ' οὐκ ἔστι. τὸ γὰρ θ ἐκτός ἐστι τῶν μέσων παραλληλογράμμων. φανερὸν οὖν, ὅτι ἐπὶ τᾶς ε ζ εὐθείας τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τοῦ α β γ δ παραλληλογράμμου.

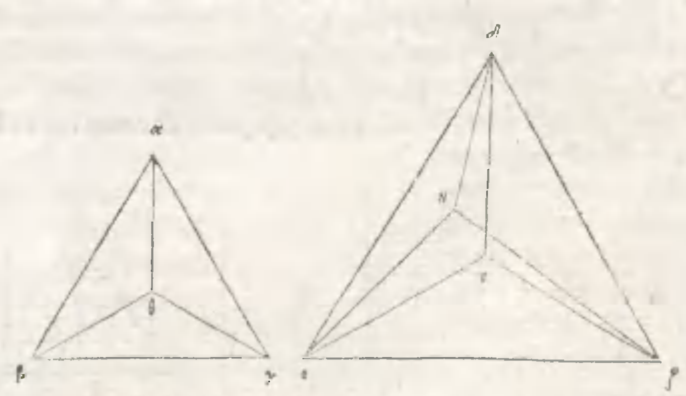
η Παντὸς παραλληλογράμμου τὸ κέντρον τοῦ βάρεός ἐστι τὸ σαμεῖον, καθ' ὃ αἱ διάμετροι συμπίπτοντι. ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ α β γ δ, καὶ ἐν αὐτῷ ἁ ε ζ τέμνουσα τὰς α β, γ δ δίχα, ἁ δὲ κ λ τὰς α γ, β δ. ἐστὶ δὴ τοῦ α β γ δ παραλληλογράμμου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς ε ζ. δέδεικται γάρ τοῦτο. διὰ ταῦτα δὲ καὶ ἐπὶ τᾶς κ λ. τὸ θ ἄρα σαμεῖον κέντρον τοῦ βάρεος. κατὰ δὲ τὸ θ, αἱ διάμετροι τοῦ παραλληλογράμμου συμπίπτοντι. ὥστε δέδεικται τὸ προτεθέν.



Ἔστι δὲ καὶ ἄλλως τὸ αὐτὸ δεῖξαι. ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ α β γ δ. διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἁ δ β. τρίγωνα ἴσα ἐντί, καὶ ὅμοια ἀλλήλοις, ὥστε ἐφαρμοζομένων ἐπάλληλα τῶν τριγώνων, καὶ τὰ κέντρα τοῦ βάρεος αὐτῶν ἐπάλληλα πεσοῦνται. ἔστω δὴ τοῦ α β δ τριγώνου, κέντρον τοῦ βάρεος τὸ ε σαμεῖον. καὶ τετμήσθω δίχα ἁ δ β κατὰ τὸ θ, καὶ ἐπεζεύχθω ἁ ε θ καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ ἀπολελάφθω ἁ ζ θ ἴσα τᾷ θ ε. ἐφαρμοζομένου δὴ τοῦ α β δ τριγώνου ἐπὶ τὸ β δ γ τρίγωνον, καὶ τεθείσας τᾶς α β πλευρᾶς ἐπὶ τὰν δ γ, τᾶς δ' α δ ἐπὶ τὰν β γ, ἐφαρμόζει καὶ ἁ θ ε εὐθεῖα ἐπὶ τὰν ζ θ. καὶ τὸ ε σαμεῖον ἐπὶ τὸ ζ πεσεῖται. ἀλλὰ καὶ ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ α δ γ τριγώνου. ἐπεὶ οὖν τοῦ μὲν α β δ τριγωνίου κέντρον τοῦ βάρεος τὸ ε σαμεῖον, τοῦ δὲ δ β γ τὸ ζ. δῆλον ὡς τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν τριγώνων συγκειμένου μεγέθεος, κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶ τὸ μέσον τᾶς ε ζ εὐθείας, ὅπερ ἐστὶ τὸ θ σαμεῖον.



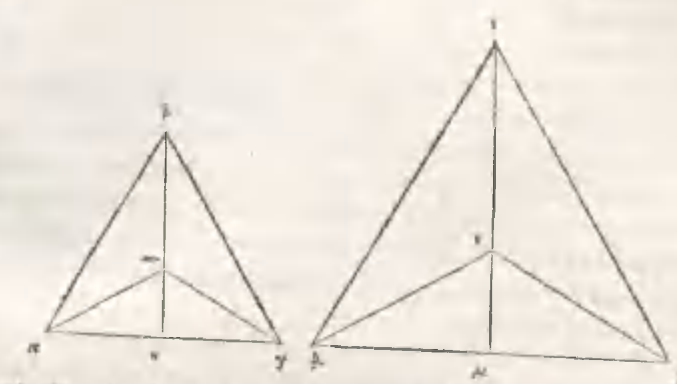
θ Ἂν δύο τρίγωνα ὅμοια ἀλλήλοις ᾖ, καὶ ἐν αὐτοῖς σαμεῖα ὁμοίως κείμενα πρὸς τὰ τρίγωνα, καὶ τὸ ἐν τῷ ἑνὶ σαμεῖον τοῦ ἐν ᾧ ἐστι τριγώνου κέντρον ᾖ τοῦ βάρεος, καὶ τὸ λοιπὸν σαμεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος, τοῦ ἐν ᾧ ἐστι τριγώνου. ὁμοίως δὲ λέγομεν σαμεῖον κεῖσθαι ποτὶ τὰ ὅμοια σχήματα, ἀφ' ὧν αἱ ἐπὶ τὰς ἴσας γωνίας ἀγόμεναι εὐθεῖαι, ἴσας ποιοῦσι γωνίας πρὸς τοὺς ὁμολόγοις πλευραῖς, ἔστω δύο τρίγωνα τὰ α β γ, δ ε ζ. καὶ ἔστω ὡς ἁ α γ πρὸς δ ζ, οὕτως ἅ τε α β πρὸς δ ε. καὶ ἁ β γ πρὸς ε ζ. καὶ ἐν τοῖς εἰρημένοις τριγώνοις σαμεῖα ὁμοίως κείμενα ἔστω τὰ θ, ν πρὸς τὰ α β γ, δ ε ζ τρίγωνα. καὶ ἔστω τὸ θ



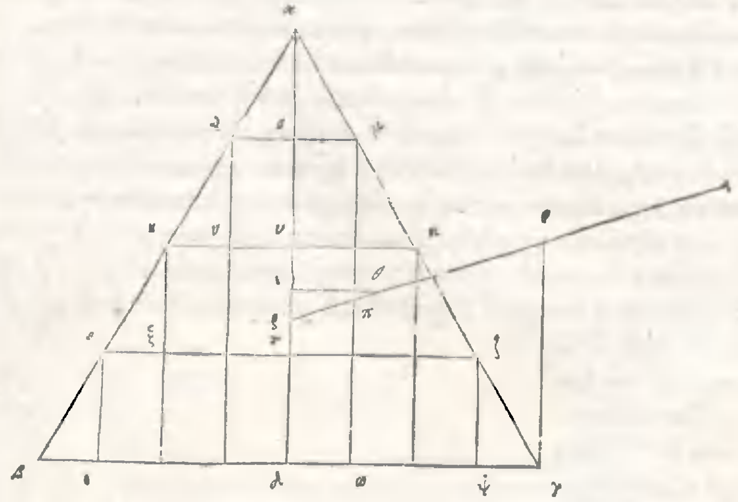
τὸ θ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ α β γ τριγώνου. λέγω ὅτι καὶ τὸ ν κέντρον βάρεος ἐστὶ τοῦ δ ε ζ τριγώνου. μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ κ κέντρον βάρεος τοῦ δ ε ζ τριγώνου. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ θ α, θ β, θ γ, δ ν, ε ν, ζ ν, δ κ, ε κ, ζ κ. ἐπεὶ οὖν ὅμοιον ἐστὶ τὸ α β γ τρίγωνον τῷ δ ε ζ τριγώνῳ, καὶ κέντρα τῶν βαρέων ἐντὶ, τὰ θ, κ σαμεῖα. τῶν δὲ ὁμοίων σχημάτων τὰ κέντρα τῶν βαρέων ὁμοίως ἐντὶ κείμενα, ὥστε ἴσας ποιοῦσιν γωνίας πρὸς ταῖς ὁμολόγοις πλευραῖς, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ. ἴση ἄρα ἁ ὑπὸ κ δ ε γωνία, τᾷ ὑπὸ θ α β. ἀλλὰ ἁ ὑπὸ θ α β γωνία ἴσα ἐντὶ τᾷ ὑπὸ ε δ ν, διὰ τὸ ὁμοίως κεῖσθαι τὰ θ, ν σημεῖα. καὶ ἁ ὑπὸ ε δ κ γωνία ἄρα ἴσα ἐστὶ τᾷ ὑπὸ ε δ ν, ἁ μείζων τᾷ ἐλάσσονι, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα οὐκ ἐστὶ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ δ ε ζ τριγώνου τὸ ν σαμεῖον. ἐστὶν ἄρα τὸ ν σαμεῖον, ὅπερ.

Εἴκα δύο τρίγωνα ὅμοια ἐόντα, τοῦ δὲ ἑνὸς τριγώνου κέντρον ᾖ τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς εὐθείας, ἃ ἐντὶ ἀπό τινος γωνίας ἐπὶ μέσαν βάσιν ἀγομένα, καὶ τοῦ λοιποῦ τριγώνου τὸ κέντρον ἐσσεῖται, τοῦ βάρεος ἐπὶ τὰς ὁμοίας ἀγομένας γραμμάς. ἔστω δύο τρίγωνα, τὰ α β γ, δ ε ζ. καὶ ἔστω ὡς ἁ α γ πρὸς δ ζ, οὕτως ἅ τε α β πρὸς δ ε, καὶ ἁ β γ πρὸς ζ ε. καὶ τμαθείσας τᾶς α γ δίχα κατὰ τὸ η, ἐπιζεύχθω ἁ β η, καὶ ἔστω τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ α β γ τριγώνου, ἐπὶ τᾶς β η, τὸ θ. λέγω ὅτι καὶ τοῦ ε δ ζ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν ἐπὶ τᾶς ὁμοίως ἀγομένας εὐθείας. ι ἐπεζεύχθω

τετμάσθω ἁ δ ζ δίχα κατὰ τὸ μ, καὶ ἐπιζεύχθω ἁ ε μ καὶ γεγονέτω ὡς ἁ β η πρὸς β θ, οὕτως ἁ μ ε πρὸς ε ν. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α θ, θ γ, δ ν, ν ζ. ἐπεὶ ἐστὶ τᾶς μὲν γ α, ἡμίσεια ἁ α η. τᾶς δὲ δ ζ, ἡμίσεια ἁ δ μ. ἐστὶν ἄρα καὶ ὡς ἁ β α πρὸς ε δ, οὕτως ἁ α η πρὸς δ μ. καὶ περὶ ἴσας γωνίας αἱ πλευραὶ ἀνάλογον εἰσί. ἴσα τε ἄρα ἐστὶν ἁ ὑπὸ α η β, τᾷ ὑπὸ δ μ ε. καὶ ἐστὶν ὡς ἁ α η πρὸς δ μ, οὕτως ἁ β η πρὸς ε μ. ἐστὶ δὲ καὶ ὡς ἁ β η πρὸς β θ, οὕτως ἁ μ ε πρὸς ε ν. καὶ δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἁ α β πρὸς δ ε, οὕτως ἁ β θ πρὸς ε ν. καὶ περὶ ἴσας γωνίας αἱ πλευραὶ ἀνάλογον εἰσί. εἰ δὲ τοῦτο, ἴσα ἐστὶ ἁ ὑπὸ β α θ γωνία τᾷ ὑπὸ ε δ ν, ὥστε καὶ λοιπὰ ὑπὸ θ α γ γωνία ἴσα ἐστὶ τᾷ ὑπὸ ν δ ζ γωνίᾳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ ἁ μὲν ὑπὸ β γ θ γωνία ἴσα ἐστὶ τᾷ ὑπὸ ε ζ ν. ἁ δ' ὑπὸ θ γ η, τᾷ ὑπὸ ν ζ μ ἴσα. ἐδείχθη δὲ καὶ ἁ ὑπὸ α β θ τᾷ ὑπὸ δ ε μ ἴσα, ὥστε καὶ λοιπὰ ἁ ὑπὸ θ β γ γωνία ἴσα ἐστὶ τᾷ ὑπὸ ν ε ζ. διὰ ταῦτα δὴ πάντα ὁμοίως κεῖται τὰ θ, ν σαμεῖα ποτὶ ὁμολόγους πλευράς, καὶ ἴσας γωνίας ποιεῖ. ἐπεὶ οὖν ὁμοίως κεῖται τὰ θ ν σαμεῖα. καὶ ἐστὶ τὸ θ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ α β γ τριγώνου, καὶ τὸ ν ἄρα κέντρον βάρεος τοῦ δ ε ζ.

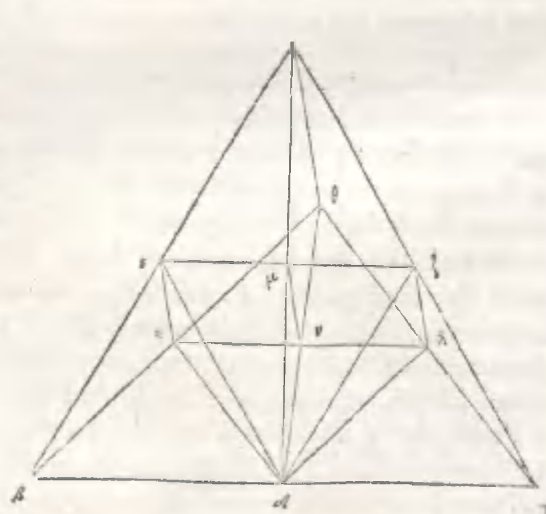


ια Παντὸς τριγώνου τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς εὐθείας, ἃ ἐστὶν ἐκ τᾶς γωνίας ἐπὶ μέσαν ἀναγομένα τὰν βάσιν. ἔστω τρίγωνον τὸ α β γ. καὶ ἐν αὐτῷ ἁ α δ ἐπὶ μέσαν τὰν β γ βάσιν. δεικτέον ὅτι ἐπὶ τᾶς α δ τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τοῦ α β γ. μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν ἔστω τὸ θ, καὶ δι' αὐτοῦ παρὰ τὰν β γ ἄχθω ἁ θ ι, ἁ εἴδη δίχα τεμνομένας τᾶς δ γ ἔσσεται ἀπὸ καὶ καταλειπομένα ἐλάσσων τᾶς θ ι. καὶ διῃρήσθω ἑκατέρα τῶν β δ, δ γ εἰς τὰς ἴσας. καὶ διὰ τῶν τομῶν παρὰ τὰν α δ ἄχθωσαν καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ε ζ, η κ, λ μ. ἐσσοῦνται δὴ αὐταὶ παρὰ τὰν β γ. τοῦ δὴ παραλληλογράμμου τοῦ μὲν μ ν, τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος, ἐπὶ τᾶς υ σ. τοῦ δὴ παραλλη... τοῦ δὲ κ ξ τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς τ υ. τοῦ δὲ ζ ο, ἐπὶ τᾶς τ δ. τοῦ ἄρα ἐκ πάντων συγκειμένου μεγέθεος τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶν ἐπὶ τᾶς σ δ εὐθείας. ἔστω δὴ τὸ ρ. καὶ ἐπιζεύχθω ἁ ρ θ, καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ ἄχθω παρὰ τὰν α δ ἁ γ φ. τὸ δὴ α δ γ τρίγωνον ποτὶ πάντα τὰ τρίγωνα τὰ ἀπὸ τῶν α μ, μ κ, κ ζ, ζ γ ἀναγεγραμμένα ὅμοια τῷ α δ γ, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἁ γ α πρὸς α μ. διὰ τὸ ἴσας εἶναι τὰς α μ, μ κ, κ ζ, ζ γ. ἐπεὶ δὲ καὶ τὸ α δ β τρίγωνον ποτὶ πάντα τὰ ἀπὸ τῶν α λ, λ η, η ε, ε β ἀναγεγραμμένα ὅμοια τρίγωνα τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ β α πρὸς α λ. τὸ ἄρα α β γ τρίγωνον ποτὶ πάντα τὰ εἰρημένα τρίγωνα τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἁ γ α πρὸς α μ. ἀλλὰ ἁ γ α πρὸς α μ, μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἁ φ ρ πρὸς ρ θ. ὁ γὰρ τᾶς γ α πρὸς α μ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ ὅλας τᾶς φ ρ πρὸς ρ π, διὰ τὸ ὅμοια εἶναι τὰ τρίγωνα. καὶ τὸ α β γ ἄρα τρίγωνον πρὸς τὰ εἰρημένα μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἁ φ ρ πρὸς ρ θ. ὥστε καὶ διελόντι τὰ μν, κξ, ζο παραλληλόγραμμα πρὸς τὰ καταλειπόμενα τρίγωνα, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἁ φθ πρὸς θρ. γεγονέτω οὖν ἐν τῷ τῶν παραλληλογράμμων πρὸς τὰ τρίγωνα λόγῳ ἁ χθ πρὸς θρ. ἐπεὶ οὖν ἐστὶ τὸ μέγεθος τὸ αβγ, οὗ τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶ τὸ θ. καὶ ἀφῄρηται ἀπ' αὐτοῦ μέγεθος τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν μν, κξ, ζο παραλληλογράμμων, καὶ ἐστὶ τοῦ ἀφῃρημένου μεγέθεος κέντρον τοῦ βάρεος τὸ ρ σημεῖον, τοῦ ἄρα λοιποῦ μεγέθεος τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν περιλειπομένων τριγώνων κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν ἐπὶ τᾶς ρθ εὐθείας ἐκβληθείσας, καὶ ἀπολαφθείσας ἐπὶ ταῦ θρ, τοιοῦτον ἐχούσας τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἀφαιρεθὲν μέγεθος ποτὶ τὸ λοιπόν. τὸ ἄρα χ σαμεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τοῦ συγκειμένου μεγέθεος ἐκ τῶν περιλειπομένων, ὅπερ ἀδύνατον. τᾶς γὰρ διὰ τοῦ χ εὐθείας παρὰ ταῦ χδ ἀγομένας ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ἐπὶ ταῦτα πάντα ἐντί, τουτέστιν ἐπὶ θάτερον μέρος. δῆλον οὖν τὸ προτεθέν.



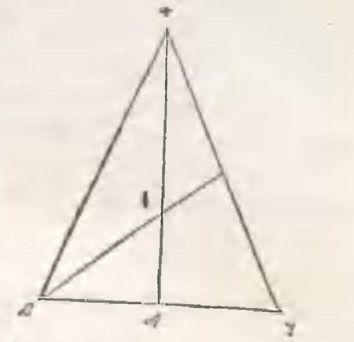
ΑΛΛΩΣ ΤΟ ΑΥΤΟ.

Ἔστω τρίγωνον τὸ αβγ, καὶ ἄχθω ἁ αδ ἐπὶ μέσαν ταῦ βγ, λέγω ὅτι ἐπὶ τᾶς αδ τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τοῦ αβγ τριγώνου. μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατὸν ἔστω τὸ θ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν, αἱ τε αθ, θβ, θγ. καὶ αἱ εδ, ζε ἐπὶ μέσας τὰς βα, αγ. καὶ παρὰ ταῦ αθ ἄχθωσαν αἱ εκ, ζλ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ κλ, λδ, δκ, δθ, μν. ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ αβγ τρίγωνον τῷ δζγ τριγώνῳ, διὰ τὸ παράλληλον εἶν τὸν βα τᾷ ζδ. καὶ ἐστὶ τοῦ αβγ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεος τὸ θ σαμεῖον. καὶ τοῦ ζδγ ἄρα τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶ τὸ λ σημεῖον. ὁμοίως γὰρ ἀντικείμενα τὰ θ, λ σαμεῖα ἐν ἑκατέρῳ τῶν τριγώνων ἐπειδήπερ πρὸς τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἴσας ποιοῦντι γωνίας. φανερὸν γὰρ τοῦτο. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τοῦ εβδ κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶ τὸ κ σαμεῖον. ὥστε τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν εβδ, ζδγ τριγώνων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶν ἐπὶ μέσας τᾶς κλ εὐθείας. ἐπειδήπερ ἴσα ἐντὶ τὰ εβδ, ζδγ τρίγωνα, καὶ ἐστὶ τᾶς κλ μέσον τὸ ν. ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἁ βε πρὸς εα, οὕτως ἁ βκ πρὸς θκ. ὡς δὲ ἁ γζ πρὸς ζα, οὕτως ἁ γλ πρὸς λθ. εἰ δὲ τοῦτο, ἐστὶν ἁ βγ τᾷ κλ παράλληλος. καὶ ἐπέζευκται ἁ δθ. ἐστὶν ἄρα ὡς ἁ βδ πρὸς δγ, οὕτως ἁ κν πρὸς ταῦ νλ. ὥστε τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν εἰρημένων τριγώνων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον ἐστὶ τὸ ν. ἐστὶ δὲ καὶ τοῦ αεδζ παραλληλογράμμου κέντρον τοῦ βάρεος τὸ μ σαμεῖον, ὥστε τοῦ ἐκ πάντων συγκειμένου μεγέθεος τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶν ἐπὶ τᾶς μν εὐθείας. ἐστὶ δὲ καὶ τοῦ αβγ κέντρον τοῦ βάρεος τὸ θ σαμεῖον. ἁ μν ἄρα ἐκβαλλομένα πορεύεται

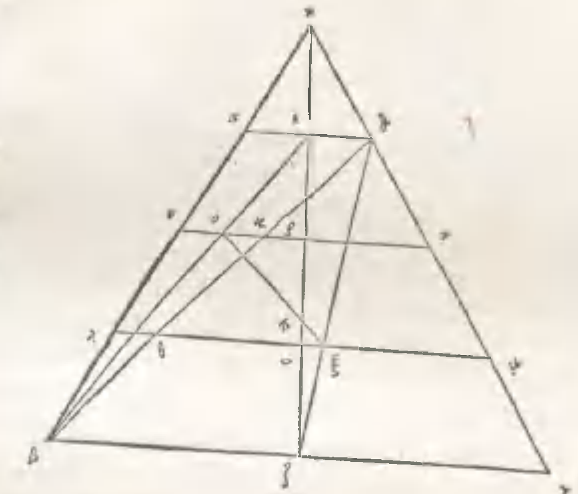


ρεύεται διὰ τοῦ θ σαμείου, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὸ κέντρον τοῦ βάρεος, τοῦ αβγ τριγώνου, οὐκ ἐστὶν ἐπὶ τᾶς αδ εὐθείας. ἐστὶν ἄρα ἐπ' αὐτᾶς.

Παντὸς τριγώνου κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τὸ σαμεῖον, καθ' ὃ συμπίπτοντι τοῦ τριγώνου αἱ ἐκ τῶν γωνιῶν ἐπὶ μέσας τὰς πλευρὰς ἀγόμεναι εὐθεῖαι. ἔστω τρίγωνον τὸ αβγ, καὶ ἄχθω ἁ μὲν αδ ἐπὶ μέσαν ταῦ βγ. ἁ δὲ βε ἐπὶ μέσαν ταῦ αγ. ἐπεὶ δὴ τοῦ αβγ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεος, ἐφ' ἑκατέρας τῶν αδ, βε. δέδεικται γὰρ τοῦτο, ὥστε τὸ θ σαμεῖον, κέντρον τοῦ βάρεος ἐστίν. ιβ



Παντὸς τραπεζίου τὰς δύο πλευρὰς ἔχοντος παραλλήλους ἀλλήλαις, τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰς διχοτομίας τῶν παραλλήλων διαιρεθείσας, ὥστε τὸ τμᾶμα αὐτᾶς τὸ πέρας ἔχον τὴν διχοτομίαν τᾶς ἐλάσσονος τῶν παραλλήλων ποτὶ τὸ λοιπὸν τμᾶμα τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερος, ἁ ἴσα τᾶς διπλασίας τᾶς μείζονος μετὰ τᾶς ἐλάσσονος, πρὸς ταῦ διπλασίαν τᾶς ἐλάσσονος μετὰ τᾶς μείζονος τῶν παραλλήλων. ἔστω τραπέζιον τὸ αβγδ παραλλήλους ἔχον τὰς αδ, βγ. ἁ δὲ εζ ἐπιζευγνυέτω τὰς διχοτομίας ταῦ αδ, βγ. ὅτι οὖν ἐπὶ τᾶς εζ ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ τραπεζίου, φανερόν. ἐὰν γὰρ ἐκβάλῃς τὰς γδ, ζε, βα, δῆλον ὅτι ἐπὶ τὸ αὐτὸ σαμεῖον ἔρχονται. ἔσται τὸ τοῦ ηβγ τριγώνου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς ηζ. καὶ ὁμοίως τοῦ αηδ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεος, ἐπὶ τᾶς εη. καὶ λοιποῦ ἄρα τοῦ αβγδ τραπεζίου κέντρον τοῦ βάρεος ἔσται ἐπὶ τᾶς εζ. ἐπιζευχθεῖσα δὲ ἁ βδ διαιρείσθω εἰς τρία ἴσα κατὰ τὰ κ, θ σαμεῖα, καὶ δι' αὐτῶν παρὰ ταῦ βγ ἄχθωσαν αἱ λθμ, νκτ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ δζ, βε, οξ. ἔσται δὴ τοῦ μὲν δβγ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς θμ. ἐπειδήπερ τρίτον μέρος ἁ θβ τᾶς βδ, καὶ διὰ τοῦ θ σαμείου παράλληλος τᾷ βάσει ὀκτᾶς ἁ μθ. ἐστὶ δὲ τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ δβγ τριγώνου, καὶ ἐπὶ τᾶς δζ. ὥστε τὸ ξ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ εἰρημένου τριγώνου. διὰ ταῦτα δὲ καὶ τὸ ο σαμεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τοῦ αβδ τριγώνου. τοῦ ἄρα ἐξ ἀμφοτέρων τῶν αβδ, βδγ τριγώνων συγκειμένου μεγέθεος, ὅπερ ἐστὶ τραπέζιον κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς οξ εὐθείας, ἐστὶ δὲ τοῦ εἰρημένου τραπεζίου κέντρον τοῦ βάρεος καὶ ἐπὶ τᾶς εζ. ὥστε τοῦ αβγδ τραπεζίου κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τὸ π σαμεῖον. ἔχοι δ' ἂν τὸ βγδ τρίγωνον πρὸς τὸ αβδ λόγον, ὃν ἁ οπ πρὸς πξ. ἀλλ' ὡς τὸ βδγ τρίγωνον πρὸς τὸ αβδ τρίγωνον, οὕτως ἐντὶ αβγ πρὸς αδ. ὡς δὲ ἁ οπ πρὸς πξ, οὕτως ἁ πρ πρὸς πσ. καὶ ὡς ἄρα ἁ βγ πρὸς αδ, οὕτως ἁ ρπ πρὸς πσ. ὥστε καὶ ὡς δύο αἱ βγ μετὰ τᾶς αδ, πρὸς δύο τὰς αδ, μετὰ τᾶς βγ, οὕτως δύο αἱ ρπ μετὰ τᾶς πσ, πρὸς δύο τὰς πσ, μετὰ τᾶς πρ. ἀλλὰ δύο μὲν αἱ ρπ μετὰ τᾶς πσ, συναμφότερος ἐστὶν ἁ σρπ, τουτέστιν ἁ πε. δύο δὲ αἱ πσ μετὰ τᾶς πρ, συναμφότερος ἐστὶν ἁ ρπσ, τουτέστιν ἁ πζ. δέδεικται ἄρα τὰ προτεθέντα. ιγ

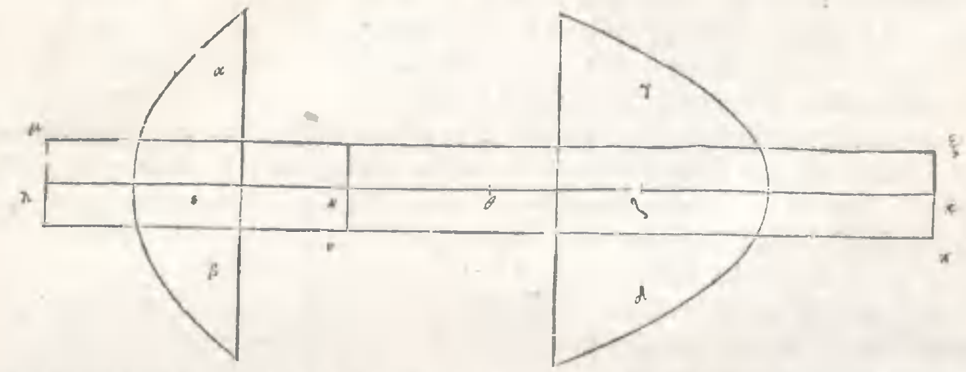


Ἀρχι-

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΚΩΝ Β.

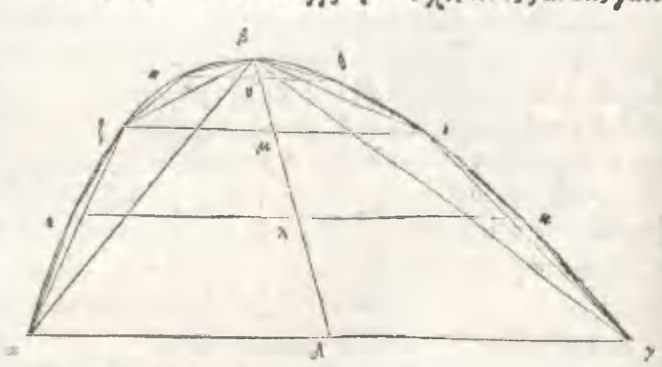
α ἔχωντι

Εἴκα δύο χωρία περιεχόμενα ὑπό τε εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, ἃ δυνάμεθα παρὰ τὰν δοθεῖσαν εὐθεῖαν παραβαλεῖν, μὴ τὸ αὐτὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἔχοντα, τοῦ δὲ ἐξ ἀμφοτέρων αὐτῶν συγκειμένου μεγέθεος, τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐσεῖται ἐπὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰ κέντρα τοῦ βάρεος αὐτῶν, διαιρέων οὕτως τὰν εἰρημέναν εὐθεῖαν, ὥστε τὰ τμάματα αὐτᾶς ἀντιπεπονθότως τὸν αὐτὸν λόγον ἔχειν τοῖς χωρίοις. ἔστω δύο χωρία τὰ αβ, γδ, οἷα εἴρηται. κέντρα δὲ αὐτῶν τοῦ βάρεος τὰ ε, ζ σαμεῖα, καὶ ὃν ἔχει λόγον τὸ αβ ποτὶ τὸ γδ, τοῦτον ἐχέτω ἁ ζθ πρὸς θε. δεικτέον ὅτι τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν αβ, γδ χωρίων συγκειμένου μεγέθεος, κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶ τὸ θ σαμεῖον, ἔστω δὲ τᾷ μὲν εθ ἑκατέρα ἴσα τῶν ζη, ζκ. τᾷ δὲ ζθ, τουτέστι τᾷ ηε ἴσα ἁ ελ. ἔσαι καὶ ἁ λθ τᾷ κθ ἴσα. καὶ



ἔτι ὡς ἁ λη πρὸς ηκ, οὕτως τὸ αβ πρὸς γδ. διπλασία γὰρ ἑκατέρα ἑκατέρας. παραβεβλήσθω δὴ παρὰ τὰν λη τὸ σαμεῖον τοῦ αβ ἐφ' ἑκάτερα τᾶς λη. ὥστε εἶμεν τὸ μν ἴσον τῷ αβ. ἐσεῖ δὴ τοῦ μν κέντρον τοῦ βάρεος τὸ ε σαμεῖον. συμπεπληρώσθω δὴ τὸ νξ. ἕξει δὲ τὸ μν πρὸς τὸ νξ λόγον, ὃν ἁ λη πρὸς ηκ. ἔχει δὲ καὶ τὸ αβ πρὸς τὸ γδ, τὸν τᾶς λη πρὸς ηκ λόγον. καὶ ὡς ἄρα τὸ αβ πρὸς γδ, οὕτως τὸ μν πρὸς τὸ νξ. καὶ ἐναλλάξ. ἴσον δὲ τὸ αβ τῷ μν. ἴσον ἄρα καὶ τὸ γδ τῷ νξ. καὶ κέντρον ἐστὶν αὐτοῦ τοῦ βάρεος τὸ ζ σαμεῖον. καὶ ἐπεὶ ἴσα ἐστὶν ἁ λθ τᾷ θκ, καὶ ὅλα ἁ λκ τὰς ἀπεναντίον πλευρὰς δίχα τέμνει, τοῦ ὅλου τοῦ μπ κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶ τὸ θ σαμεῖον, ἀλλὰ τὸ μπ ἴσον τῷ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μν, νξ. καὶ τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν αβ, γδ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τὸ θ σαμεῖον.

Εἴκα εἰς τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς τρίγωνον ἐγγραφῇ, τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμήματι καὶ ὕψος ἴσον, καὶ πάλιν εἰς τὰ καταλειπόμενα τμάματα τρίγωνα ἐγγραφέωντι τὰς αὐτὰς βάσεις ἔχοντα τοῖς τμημάτεσι, καὶ ὕψος ἴσον, καὶ ἀεὶ εἰς τὰ καταλειπόμενα τμάματα τρίγωνα ἐγγραφέωντι τὸν αὐτὸν τρόπον, τὸ γενόμενον σχῆμα ἐν τῷ τμάματι γνωρίμως ἐγγράφεσθαι λεγέσθω. φανερὸν δὲ ὅτι τοῦ οὕτως ἐγγραφέντος σχήματος, αἱ τὰς γωνίας ἐπιζευγνύουσαι, τάς τε ἔγγιστα ἀπὸ τᾶς κορυφᾶς τοῦ τμάματος καὶ τὰς ἑξῆς, παρὰ τὰν βάσιν ἐσσοῦνται τοῦ τμάματος. καὶ δίχα τμαθήσονται ὑπὸ τᾶς τοῦ τμάματος διαμέτρου, καὶ τὰν διάμετρον τεμοῦντι εἰς τοὺς τῶν ἑξῆς περισσῶν ἀριθμῶν λόγους, ἑνὸς λεγομένου ποτὶ τᾷ κορυφᾷ τοῦ τμάματος, τοῦτο δὲ δέδεικται ἐν ταῖς τάξεσιν.



γί κα

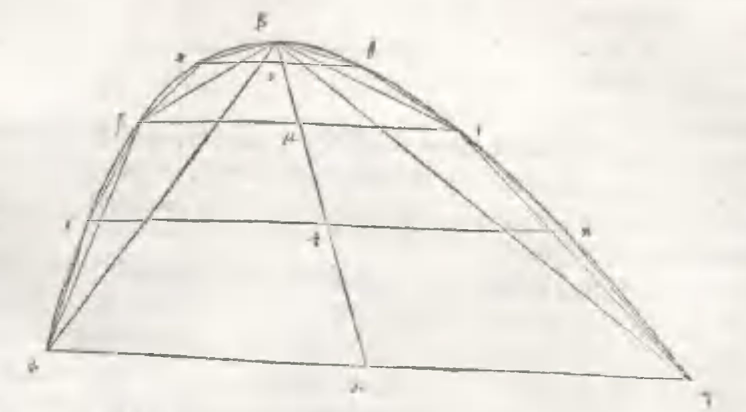
β Εἰ δὲ καὶ εἰς τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας τε καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς εὐθύγραμμον γνωρίμως ἐγγραφῇ, τοῦ ἐγγραφέντος κέντρον τοῦ βάρεος ἐσεῖται ἐπὶ τοῦ τμάματος διαμέτρου. ἔστω τμᾶμα τὸ αβγ, οἷον εἴρηται. καὶ

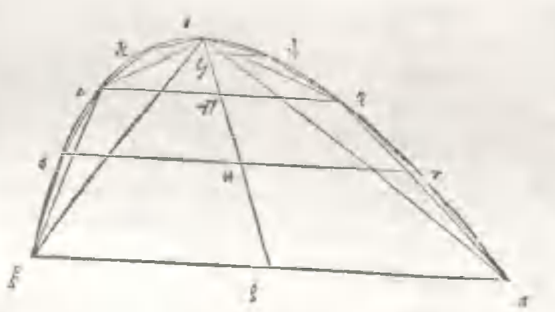
ἐγγε

ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸ εὐθύγραμμον γνωρίμως τὸ αεζηβθικγ. διάμετρος δὲ τοῦ τμάματος ἔστω ἁ βδ. δεικτέον ὅτι τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ εὐθυγράμμου ἐστὶν ἐπὶ τᾶς βδ. ἐπεὶ γὰρ τοῦ μὲν αεκγ τραπεζίου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς λδ ἐστί, τοῦ δὲ εζικ τραπεζίου τὸ κέντρον ἐπὶ τᾶς μλ. τοῦ δὲ ζηθι τραπεζίου τὸ κέντρον ἐπὶ τᾶς μν. ἔτι δὲ καὶ τοῦ ηβθ τριγώνου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς βν. δῆλον ὅτι καὶ τοῦ ὅλου εὐθυγράμμου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς βδ ἐστίν.

Εἴκα δύο τμαμάτων ὁμοίων περιεχομένων ὑπὸ εὐθείας τε καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς εἰς ἑκάτερον εὐθύγραμμον ἐγγραφῇ γνωρίμως, ἔχωντι δὲ τὰ ἐγγραφέντα εὐθύγραμμα τὰς πλευρὰς ἴσας τῷ πλήθει ἀλλάλαις, τῶν εὐθυγράμμων τὰ κέντρα τῶν βαρέων, ὁμοίως τέμνοντι τὰς διαμέτρους τῶν τμαμάτων. ἔστω δύο τμάματα τὰ αβγ, ξοπ. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὰ εὐθύγραμμα γνωρίμως καὶ τὰ πάσαν πλευρὰν τὸν ἀριθμὸν ἐχόντων ἀλλήλοις ἴσων. διάμετροι δὲ ἔστωσαν τῶν τμαμάτων αἱ βδ, ορ. γ

καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ εκ, ζι, ηθ. καὶ στ, υφ, χψ. ἐπεὶ οὖν ἅ τε βδ διαιρεῖται ὑπὸ τῶν παραλλήλων εἰς τοὺς τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν περισσοὺς λόγους, καὶ ἁ ρο, ὁμοίως καὶ τῷ πλήθει τὰ τμάματα αὐτῶν ἴσα ἐντί, δῆλον ὡς τά τε τμάματα τῶν διαμέτρων τοῖς αὐτοῖς λόγοις ἐσεῖται. καὶ αἱ παράλληλοι τοὺς αὐτοὺς λόγους ἑξοῦνται. καὶ τῶν τραπεζίων, τοῦ τε αεκγ. καὶ τοῦ ξστπ τὰ κέντρα τῶν βαρέων ἐσεῖται ἐπὶ τῶν λδ, ωρ εὐθειῶν ὁμοίως κείμενα, ἐπεὶ τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον αἱ αγ, εκ ταῖς ξπ, στ. πάλιν δὴ καὶ τῶν εζικ, συφτ τραπεζίων τὰ κέντρα τῶν βαρέων ἐσσοῦνται, ὁμοίως διαιρέοντα τὰς λμ, ωϙ. καὶ ἐν τοῖς ζηθι, υψ τραπεζίοις τὰ κέντρα τῶν βαρέων ἐσσοῦνται ὁμοίως διαιρέοντα τὰς μν, ϙγ. ἔσαι δὲ καὶ τῶν ηβθ, χοψ τριγώνων τὰ κέντρα τῶν βαρέων ἐπὶ τῶν βν, ογ ὁμοίως κείμενα. ἔχοντι δὲ τὸν αὐτὸν λόγον τὰ τραπέζια καὶ τὰ τρίγωνα, δῆλον οὖν ὅτι τοῦ ὅλου εὐθυγράμμου τοῦ ἐν τῷ αβγ τμάματι γεγραμμένου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ὁμοίως διαιρεῖ τὰν βδ. καὶ τοῦ ἐν τῷ ξοπ τμάματι ἐγγεγραμμένου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τὰν ορ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

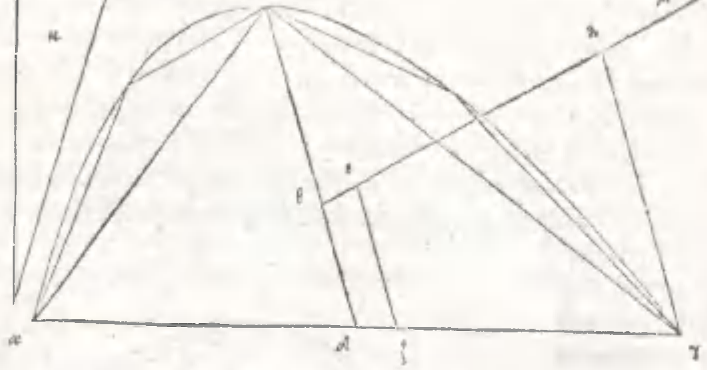




Παντὸς τμάματος περιεχομένου ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς τὸ κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν ἐπὶ τᾶς τοῦ τμάματος διαμέτρου. ἔστω τμᾶμα ὡς εἴρηται τὸ αβγ, ἃ διάμετρος ἔστω ἁ βδ. δεικτέον δὲ ὅτι τοῦ εἰρημένου τμάματος, κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν ἐπὶ τᾶς βδ. εἰ γὰρ μή, ἔστω τὸ ε. καὶ δι' αὐτοῦ ἄχθω παρὰ τὰν βδ ἁ εζ. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τμᾶμα τρίγωνον τὸ αβγ, τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον καὶ ὕψος ἴσον. καὶ ὃν ἔχει λόγον ἁ γζ πρὸς δζ, τοῦτον ἐχέτω τὸ αβγ τρίγωνον πρὸς τὸ κ χωρίον. ἐγγεγράφθω δὲ καὶ εὐθύγραμμον εἰς τὸ τμᾶμα γνωρίμως, ὥστε τὰ περιλειπόμενα τμάματα ἐλάσσονα εἶμεν τοῦ κ. τοῦ δὴ ἐγγραφομένου εὐθυγράμμου τὸ κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν ἐπὶ τᾶς βδ. ἔστω τὸ θ. καὶ ἐπεζεύχθω ἁ θε, καὶ ἐκβεβλήσθω. καὶ παρὰ τὰν βδ ἄχθω ἁ γλ. δῆλον δὲ ὅτι μείζονα λόγον ἔχει τὸ ἐγγεγραμμένον εὐθύγραμμον ἐν τῷ τμάματι ποτὶ τὰ λειπόμενα τμάματα, ἢ τὸ αβγ τρίγωνον ποτὶ τὸ κ. ἀλλ' ἔστιν ὡς τὸ αβγ τρίγωνον ποτὶ τὸ κ, οὕτως ἁ γζ πρὸς ζδ. καὶ τὸ ἐγγεγραμμένον εὐθύγραμμον πρὸς τὰ περιλειπόμενα τμάματα μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ γζ πρὸς ζδ, τουτέστιν ἁ λε πρὸς εθ. ἐχέτω οὖν ἁ με πρὸς εθ τὸν αὐτὸν λόγον τοῦ ἐγγεγραμ- δ

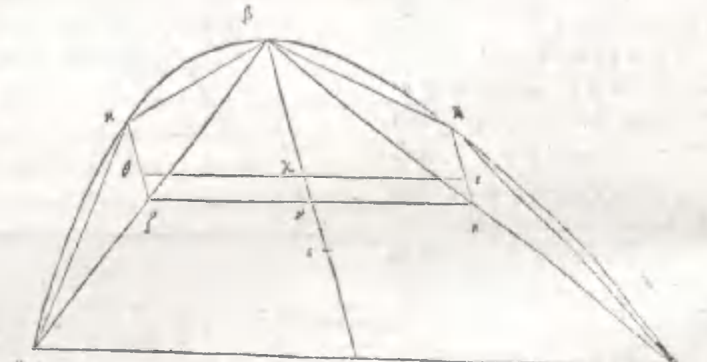
ο μένου

μένου περὶ τὰ τμάματα. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ε κέντρον τοῦ ὅλου τμάματος, τοῦ δὲ ἐγγεγραμμένου ἐν αὐτῷ εὐθυγράμμου τὸ θ, δῆλον ὅτι λοιποῦ τοῦ συγκειμένου μεγέθεος ἐκ τῶν περιλειπομένων τμαμάτων τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶν ἐκβληθείσας τᾶς θ ε, καὶ ἀπολαφθείσας τινὸς εὐθείας, ἃ λόγον ἔχει ποτὶ τὰν θ ε, ὃν τὸ ἐγγεγραμμένον εὐθύγραμμον πρὸς τὰ



περιλειπόμενα τμάματα. ὥστε εἴη κατὰ τοῦ συγκειμένου μεγέθεος ἐκ τῶν περιλειπομένων τμαμάτων, κέντρον τοῦ βάρεος τὸ μ σαμεῖον, ὅπερ ἄτοπον. τὰ γὰρ διὰ τοῦ μ παρὰ τὰν β δ ἀγομένας, ἐπὶ ταῦτα ἐσσοῦνται πάντα τὰ περιλειπόμενα τμάματα. δῆλον οὖν, ὅτι ἐπὶ τᾶς β δ τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος.

Εἴκα εἰς τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας τε καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, εὐθύγραμμον ἐγγραφῇ γνωρίμως, τὸ τοῦ ὅλου τμάματος τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐγγύτερον ἐστὶ τᾶς κορυφᾶς τοῦ τμάματος, ἢ τὸ τοῦ ἐγγραφέντος εὐθυγράμμου κέντρον. ἔστω τὸ α β γ τμᾶμα, οἷον εἴρηται. διάμετρος δὲ αὐτοῦ, ἁ δ β. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸ τρίγωνον πρῶτον γνωρίμως τὸ α β γ, καὶ τετμήσθω ἁ β δ κατὰ τὸ ε. ὥστε εἶμεν διπλασίαν τὰν β ε τᾶς ε δ, ἐστὶν οὖν τοῦ α β γ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεος τὸ ε σαμεῖον. τετμάσθω δὴ δίχα ἑκατέρα τᾶν α β, β γ, κατὰ τὰ ζ, η. καὶ διὰ τῶν ζ, η παρὰ τὰν β δ ἄχθωσαν αἱ ζ κ, λ η. ἔσται ἄρα τοῦ μὲν α κ β τμάματος κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς ζ κ. τοῦ δὲ β γ λ τμάματος τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς η λ. ἔστω δὲ τὰ θ, ι. καὶ

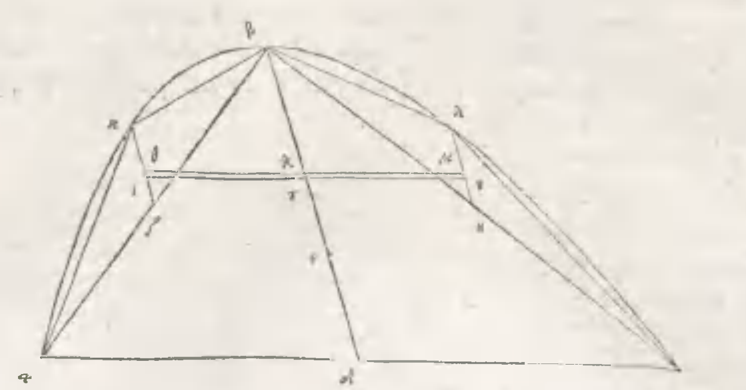


ἐπεζεύχθω ἁ θ ι, ζ η. καὶ ἐπεὶ παραλληλόγραμμον ἐστὶ τὸ θ ζ η ι, καὶ ἴσα ἐστὶ τᾷ ζ ν ἁ ν η, ἐστὶν ἄρα ἁ χ θ ἴσα τᾷ χ ι. ὥστε τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν α κ β, β λ γ τμαμάτων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶν ἐπὶ μέσας τᾶς θ ι. ἐπειδήπερ ἴσα ἐντὶ τμάματα, τουτέστι τὸ χ σαμεῖον. ἐπεὶ δὲ τοῦ μὲν α β γ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶ τὸ ε σαμεῖον, τοῦ δὲ συγκειμένου ἐξ ἀμφοτέρων τῶν α κ β λ γ τὸ χ, δῆλον οὖν ὅτι ὅλου τοῦ τμάματος τοῦ α β γ κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶν ἐπὶ τᾶς χ ε, τουτέστι μεταξὺ τῶν χ, ε σαμείων, ὥστε εἴη κα ἐγγύτερον τᾶς τοῦ τμάματος κορυφᾶς τὸ κέντρον τοῦ ὅλου τμάματος, ἢ τοῦ ἐγγραφομένου τριγώνου γνωρίμως.

Ἐγγεγράφθω πάλιν εἰς τὸ τμᾶμα πεντάγωνον εὐθύγραμμον γνωρίμως τὸ α κ β λ γ. καὶ ἔστω τοῦ μὲν ὅλου τμάματος διάμετρος ἁ β δ. ἑκατέρου δὲ τῶν τμαμάτων, ἑκατέρα τῶν κ ζ, λ η διαμέτρων. καὶ ἐπεὶ ἐν τῷ α κ β τμάματι ἐγγέγραπται εὐθύγραμμον γνωρίμως, τοῦ ὅλου τμάματος κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶν ἐγγύτερον τᾶς κορυφᾶς, ἢ τὸ τοῦ εὐθυγράμμου. ἔστω οὖν τοῦ μὲν α κ β τμάματος τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τὸ θ, τοῦ δὲ τριγώνου τὸ ι. πάλιν δὲ ἔστω τοῦ μὲν β λ γ τμάματος, τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τὸ μ, τοῦ δὲ τριγώνου τὸ ν, καὶ ἐπεζεύχθω τὰ θ μ, ι ν, ἴση ἄρα ἐστὶν ἁ θ χ

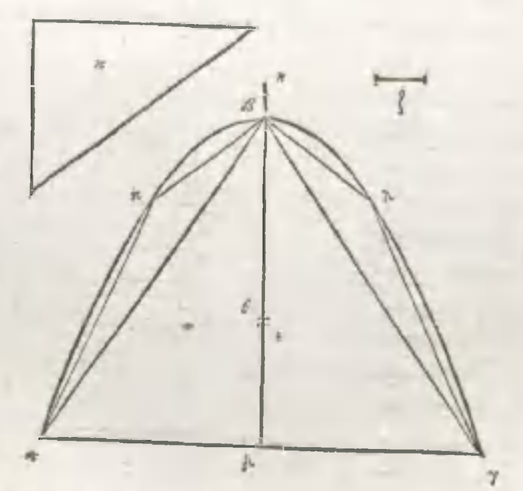
τᾷ χ μ,

τᾷ χ μ, ἁ δὲ ι τ τᾷ τ ν. ἀλλὰ καὶ τριγώνῳ τῷ α κ β ἴσον ἐστὶ τὸ β λ γ. τμᾶμα δὲ τὸ α κ β τμάματι τῷ β λ γ. δέδεικται γὰρ ἐν ἄλλοις, τὰ τμάματα ἐπίτριτα εἶμεν τῶν τριγώνων. ἔσται οὖν τοῦ μὲν ἐξ ἀμφοτέρων τῶν α κ β, β λ γ τμαμάτων συγκειμένου μεγέθεος, κέντρον τοῦ βάρεος τὸ χ. τοῦ δὲ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν α κ β, β λ γ τριγώνων τὸ τ. πάλιν οὖν ἐπεὶ τοῦ α β γ κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶ τὸ ε. τοῦ δὲ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν α κ β, β λ γ τμαμάτων, τὸ χ. δῆλον ὡς τοῦ ὅλου τοῦ α β γ τμάματος



τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς χ ε τμαθείσας οὕτως, ὥστε ὃν ἔχει λόγον τὸ α β γ τρίγωνον ποτὶ τὰ συναμφότερα τὰ α κ β, β λ γ τμάματα, τὸν αὐτὸν λόγον ἔχειν τὸ τμᾶμα αὐτᾶς, τὸ πέρας ἔχον τὸ χ, ποτὶ τὸ ἔλασσον τμᾶμα. τοῦ δὲ α κ β λ γ πενταγώνου κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶν ἐπὶ τᾶς ε τ εὐθείας τμαθείσας οὕτως, ὥστε ὃν ἔχει λόγον τὸ α β γ τρίγωνον ποτὶ τὰ α κ β, β λ γ τρίγωνα, ὥστε ἔχειν τὸν λόγον τὸ τμᾶμα αὐτᾶς τὸ πέρας ἔχον τὸ τ ποτὶ τὸ λοιπόν. ἐπεὶ οὖν μείζονα λόγον ἔχει τὸ α β γ τρίγωνον πρὸς τὰ κ α β, λ β γ τρίγωνα, ἢ ποτὶ τμάματα. δῆλον οὖν ὅτι τοῦ α β γ τμάματος τὸ κέντρον τοῦ βάρεος, ἐγγύτερον ἐστὶ τᾶς β κορυφᾶς, ἢ τὸ τοῦ ἐγγραφομένου εὐθυγράμμου. καὶ ἐπὶ πάντων εὐθυγράμμων, τῶν ἐγγραφομένων ἐν τὰ τμάματα γνωρίμως ὁ αὐτὸς λόγος.

Τμάματος δοθέντος περιεχομένου ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, δυνατόν ἐστι τὸ τμᾶμα εὐθύγραμμον γνωρίμως ἐγγράψαι, ὥστε τὰν μεταξὺ εὐθεῖαν τῶν κέντρων τοῦ βάρεος τοῦ τμάματος καὶ τοῦ ἐγγραφέντος εὐθυγράμμου, ἐλάσσονα εἶμεν τᾶς προτεθείσας εὐθείας. δεδόσθω τμᾶμα τὸ α β γ, οἷον εἴρηται. οὗ κέντρον ἔστω τοῦ βάρεος τὸ θ. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸ τρίγωνον γνωρίμως τὸ α β γ. καὶ ἔστω ἁ προτεθεῖσα εὐθεῖα ἁ ζ. καὶ ὃν λόγον ἔχει ἁ β θ πρὸς ζ, τὸν λόγον ἐχέτω τὸ α β γ τρίγωνον, πρὸς τὸ κ χωρίον. ἐγγεγράφθω δὴ εἰς τὸ α β γ τμᾶμα εὐθύγραμμον γνωρίμως τὸ α κ β λ γ. ὥστε τὰ περιλειπόμενα τμάματα ἐλάσσονα εἶμεν τοῦ κ. καὶ ἔστω τοῦ ἐγγραφέντος εὐθυγράμμου κέντρον τοῦ βάρεος τὸ ε. φαμὶ δὴ τὰν θ ε ἐλάσσονα εἶμεν τᾶς ζ. εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴσα ἐστὶν ἢ μείζων. ἐπεὶ δὲ τὸ α κ β λ γ εὐθύγραμμον πρὸς τὰ περιλειπόμενα τμάματα μείζονα λόγον ἔχει, ἢ τὸ α β γ τρίγωνον πρὸς κ, τουτέστιν ἁ β θ πρὸς ζ. ἔχει δὲ καὶ ἁ β θ πρὸς ζ οὐκ ἐλάσσονα λόγον, ἢ ὃν ἔχει πρὸς θ ε. διὰ τὸ μὴ ἐλάσσονα εἶμεν τὰν θ ε τᾶς ζ. πολλῷ ἄρα τὸ α κ β λ γ εὐθύγραμμον πρὸς τὰ περιλειπόμενα τμάματα μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ β θ πρὸς θ ε. ὥστε εἴ κα ποιῶμεν, ὡς τὸ α κ β λ γ εὐθύγραμμον πρὸς τὰ περιλειπόμενα τμάματα, οὕτως ἄλλαν τινὰ πρὸς θ ε, ἔσται μείζων τᾶς β θ. καὶ

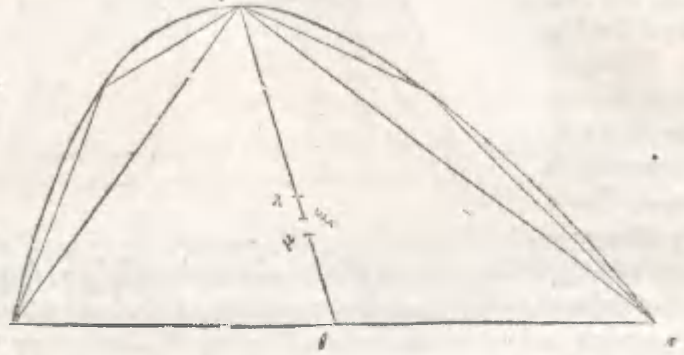


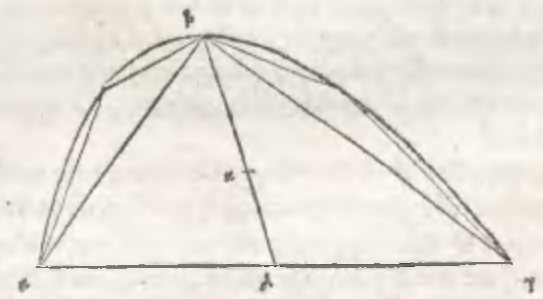
ἔστω ἁ θ η. ἐπεὶ δὲ τοῦ α β γ τμάματος τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶ τὸ θ, εὐθυγράμμου δὲ τοῦ α κ β λ γ τὸ ε, ἐκβληθείσας τᾶς ε θ, καὶ ἀπολαφθείσας τινὸς εὐθείας ἐχούσας λόγον πρὸς τὰν ε θ, ὃν τὸ α κ β λ γ εὐθύγραμμον πρὸς τὰ περιλειπόμενα τμάματα, ἔσται μείζων τᾶς θ ε. ἐχέτω οὖν ἁ η θ πρὸς θ ε

o 2 τόν

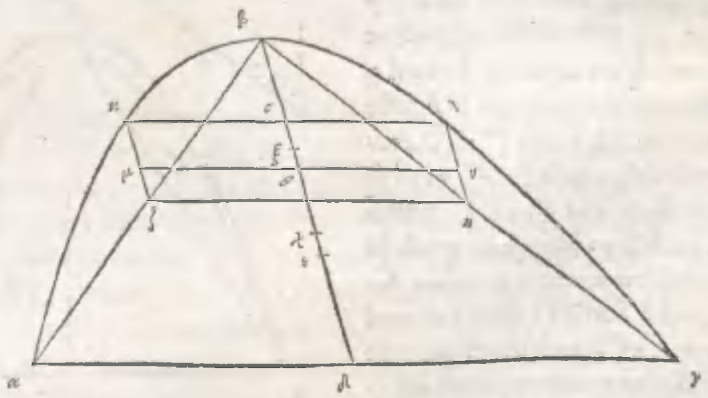
τὸ κ ἄρα κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν περιλειπομένων τμαμάτων, ὅπερ ἀδύνατον. τᾶς γὰρ διὰ τοῦ κ ἀχθείσας παρὰ τὰν αγ ἐπὶ τὰ αὐτά ἐστι τὰν τῶ τμήματι, δηλονότι ἁ θε ἐλάσσων ἐστὶ τᾶς ζε. ἔδει δὲ τοῦτο δεῖξαι.

ζ Δύο τμαμάτων ὁμοίων περιεχομένων ὑπό τε εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, τὰ κέντρα τῶν βαρέων εἰς τὸν αὐτὸν λόγον τέμνοντι τὰς διαμέτρους. ἔστω δύο τμάματα, οἷα εἴρηται, τὰ αβγ, εζη, ὧν διάμετροι αἱ βδ, ζθ. καὶ ἔστω τοῦ μὲν αβγ τμάματος κέντρον τοῦ βάρεος τὸ κ σαμεῖον, τοῦ δὲ εζη τὸ λ. δεικτέον ὅτι ἐς τὸν αὐτὸν λόγον τέμνοντι τὰς διαμέτρους τὰ κ, λ. εἰ γὰρ μή, ἔστω ὡς ἁ κβ πρὸς κδ, οὕτως ἁ ζμ πρὸς θμ. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸ εζη τμᾶμα εὐθύγραμμον γνωρίμως, ὥστε τὰν μεταξὺ τοῦ κέντρου τοῦ τμάματος καὶ τοῦ ἐγγραφομένου εὐθυγράμμου ἐλάσσονα εἶμεν τᾶς λμ. καὶ ἔστω τοῦ ἐγγραφέντος εὐθυγράμμου κέντρον τοῦ βάρεος τὸ ξ σαμεῖον. ἐγγεγράφθω δὲ εἰς τὸ αβγ τμᾶμα τῷ ἐν τῷ εζη ἐγγεγραμμένῳ εὐθυγράμμῳ ὅμοιον εὐθύγραμμον, τουτέστιν ὁμοίως γνωρίμως, οὗ κέντρον τοῦ βάρεος τᾶς κορυφᾶς ἐγγύτερον ἤπερ τὸ τοῦ τμάματος, ὅπερ ἀδύνατον. δῆλον οὖν ὅτι τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει ἁ β πρὸς κδ, ὃν ἁ ζλ πρὸς λθ.





η Παντὸς τμάματος περιεχομένου ὑπὸ εὐθείας τε καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, κέντρον τοῦ βάρεος διαιρεῖ τὰν τοῦ τμάματος διάμετρον, ὥστε εἶμεν ἡμιόλιον τὸ μέρος αὐτᾶς τὸ ποτὶ τᾷ κορυφᾷ τοῦ τμάματος, τοῦ ποτὶ τὰν βάσιν. ἔστω τὸ αβγ τμᾶμα, οἷον ὡς εἴρηται, διάμετρος δ' αὐτοῦ ἔστω ἁ βδ. κέντρον δὲ τοῦ βάρεος τὸ θ σαμεῖον. δεικτέον ὅτι ἡμιόλια ἐστὶν ἁ βθ τᾶς θδ. ἐγγεγράφθω δὴ τὸ αβγ τμᾶμα γνωρίμως τρίγωνον τὸ αβγ, οὗ κέντρον τοῦ βάρεος ἔστω τὸ ε. καὶ τετμάσθω δίχα ἑκατέρα τῶν αβ, βγ κατὰ τὰ ζ, η, καὶ ἄχθωσαν παρὰ τὰν βδ αἱ κζ, ηλ. διάμετροι ἄρα ἐντὶ τῶν ακβ, βλγ τμαμάτων. ἔστω δὴ τοῦ μὲν ακβ τμάματος τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τὸ μ, τοῦ δὲ βλγ τὸ ν. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ζη, μν, κλ. τοῦ ἄρα δὴ ἀμφοτέρων τμαμάτων συγκειμένου μεγέθεος τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶ τὸ χ. ἐπεὶ δὴ ὡς ἁ βθ πρὸς θδ, οὕτως



ἁ κμ

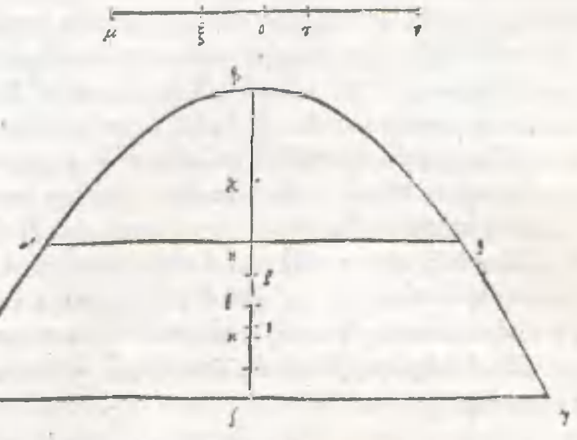
ἁ κμ πρὸς μζ. καὶ συνθέντι καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἁ βδ πρὸς τὰν κζ, οὕτως ἁ θδ πρὸς τὰν μζ. ἁ δὲ βδ τετραπλασίων τᾶς κζ. τοῦτο γὰρ ὧδε τελεῖ δείκνυται, οὗ σαμεῖον ὁ ⊘. τετραπλασίων ἄρα καὶ ἁ δθ τᾶς μζ. ὥστε καὶ λοιπὰ ἁ βθ λοιπᾶς τᾶς κμ, τουτέστι τᾶς σχ τετραπλασίων. καὶ λοιπὸν ἄρα συναμφότερα ἁ βσ, χθ τριπλασίων τᾶς σχ. ἔστω τριπλά ἁ βσ τᾶς σξ. καὶ ἁ χθ ἄρα τᾶς ξχ ἐστὶ τριπλασία. καὶ ἐπεὶ τετραπλασίων ἁ βδ τᾶς βσ, καὶ τῶς τοῦτο δείκνυται. ἁ δὲ βσ τᾶς σξ τριπλασίων. ἁ ξβ ἄρα τᾶς βδ τρίτον μέρος ἐστίν. ἔστι δὲ καὶ ἁ εδ τᾶς δβ τρίτον μέρος. ἐπειδήπερ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ αβγ τριγώνου ἐστὶ τὸ ε, καὶ λοιπὰ ἄρα ἁ ξε τρίτον μέρος τᾶς βδ. καὶ ἐπεὶ τοῦ μὲν ὅλου τμάματος κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶ τὸ θ σαμεῖον, τοῦ δὲ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ακβ, βλγ τμαμάτων συγκειμένου μεγέθεος τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τὸ χ. τοῦ δὲ αβγ τριγώνου τὸ ε. ἔσται ὡς τὸ αβγ τρίγωνον πρὸς τὰ καταλειπόμενα τμάματα, οὕτως ἁ χθ πρὸς θε. τριπλοῦν δὲ τὸ αβγ τρίγωνον τῶν τμαμάτων. ἐπειδήπερ τὸ ὅλον τμᾶμα ἐπίτριτόν ἐστι τοῦ αβγ τριγώνου. τριπλασία ἄρα καὶ ἁ χθ τᾶς θε. ἐδείχθη δὲ ἁ χθ τριπλασία καὶ τᾶς χξ. πενταπλασία ἄρα ἐστὶν ἁ ξε τᾶς εθ. τουτέστιν ἁ δε τᾶς εθ. ἴσα γὰρ ἐστὶν αὐτᾷ. ὥστε ἑξαπλασία ἐστὶν ἁ δθ τᾶς θε. καὶ ἐντὶ τᾶς δε τριπλασία ἁ βδ. ἡμιολία ἄρα ἐντὶ ἁ βθ τᾶς θδ.

Εἴκα τέσσαρες γραμμαὶ ἀνὰ λόγον ἐῶντι ἐν τᾷ συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, καὶ ὃν ἔχει λόγον ἁ ἐλαχίστα ποτὶ τὰν ὑπεροχὰν ᾇ ὑπερέχει ἁ μεγίστα τᾶς ἐλαχίστας, τοῦτον ἔχουσά τις λαφθῇ ποτὶ τὰ τρία πεμπτημόρια τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει ἁ μεγίστα τᾶς ἀνὰ λόγον τᾶς τρίτας. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ ἴσα τᾷ τε διπλασίᾳ τᾶς μεγίστας τᾶς ἀνὰ λόγον, καὶ τᾷ τετραπλασίᾳ τᾶς δευτέρας, καὶ τᾷ ἑξαπλασίᾳ τᾶς γ, καὶ τᾷ γ τᾶς δ, ποτὶ τὰν ἴσαν τᾷ τε ε τᾶς μεγίστας, καὶ τᾷ ι τᾶς β, καὶ τᾷ ι τᾶς γ, καὶ τᾷ πενταπλασίᾳ τᾶς δ, τοῦτον ἔχουσά τις λαφθῇ ποτὶ τὰν ὑπεροχάν, ᾇ ὑπερέχει ἁ μεγίστα τᾶς ἀνὰ λόγον τᾶς τρίτας, συναμφότεραι αἱ λαφθεῖσαι ἐσσοῦνται δύο πεμπτημόρια τᾶς μεγίστας. ἔστωσαν τέσσαρες γραμμαὶ ἀνὰ λόγον αἱ αβ, βγ, βδ, βε. καὶ ὃν μὲν ἔχει λόγον ἁ βε πρὸς εα, τοῦτον ἐχέτω ἁ ζη ποτὶ τὰ τρία πέμπτα τᾶς αδ. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ ἴσα τᾷ β τᾶς αβ, καὶ δ τᾶς βγ, καὶ ς τᾶς βδ, καὶ γ τᾶς βε, ποτὶ τὰν ἴσαν τᾷ ε τᾶς αβ, καὶ ι τᾶς γβ, καὶ ι τᾶς βδ, καὶ ε τᾶς βε, τοῦτον ἐχέτω τὸν λόγον ἁ ηθ ποτὶ τὰν αδ. δεικτέον ὅτι ἁ ζθ δύο θ

πεμπτημόρια ἐντὶ τᾶς αβ. ἐπεὶ γὰρ ἀνὰ λόγον ἐντὶ αἱ αβ, βγ, βδ, βε, καὶ αἱ αγ, γδ, δε, ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἐντί. καὶ συναμφότερος ἁ αβ, βγ πρὸς τὰν βδ ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ αδ ποτὶ τὰν δε. καὶ συναμφότερος ἁ βδ, βγ ποτὶ τὰν εβ. καὶ πάντα πρὸς πάντα. τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει ἁ αδ ποτὶ τὰν δε, ὃν ἁ ἴσα τᾷ τε β τᾶς αβ, καὶ τᾷ γ τᾶς γβ, καὶ ἁ δβ ποτὶ τὰν ἴσαν τᾷ τε β τᾶς βδ καὶ τὰν βε. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ ἴσα τᾷ τε β τᾶς αβ, καὶ τᾷ δ τᾶς βγ, καὶ τᾷ δ τᾶς βδ, καὶ τᾷ β τᾶς βε, ποτὶ τὰν ἴσαν τᾷ τε β τᾶς δβ, καὶ τὰν εβ, τοῦτον ἔχει ἁ δα πρὸς ἐλάσσονα τᾶς δε. ἐχέτω οὖν πρὸς δθ. καὶ ἀμφότεραι δὲ ποτὶ τὰς πρώτας αὐτὸν ἕξουντι λόγον. ἕξει οὖν ἁ οα πρὸς αδ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ ἴσα τᾷ τε β τᾶς αβ, καὶ δ τᾶς γβ, καὶ ς τᾶς βδ, καὶ γ τᾶς βε, πρὸς τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τᾶς β συναμφοτέρας τᾶς αβ, εβ, καὶ δ συναμφοτέρου τᾶς γβ, βδ. ἔχει δὲ καὶ ἁ αδ πρὸς ηθ, τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ ε συναμφοτέρου τᾶς αβ, βε, μετὰ τᾶς ι συναμφοτέρου τᾶς γβ, βδ, πρὸς τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τᾶς β τᾶς αβ, καὶ τᾶς δ τᾶς γβ, καὶ τᾶς γ τᾶς εβ, καὶ ς τᾶς βδ. ἀνομοίως δὲ τῶν λόγων τεταγμένων, τουτέστιν ἐντὶ τεταραγμένων ἀναλογία, δι' ἴσου τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ οα πρὸς ηθ, ὃν ἁ πενταπλασία συναμφοτέρου τᾶς αβ, βε, μετὰ τᾶς ι τᾶς γβ, βδ. πρὸς τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τᾶς διπλασίας συναμφοτέρου τᾶς αβ, βε, καὶ τᾶς τετραπλασίας συναμφοτέρου τᾶς γβ, βδ, ἀλλ' ἁ συγκειμένα ἔκ τε τᾶς ε̄ συναμφοτέρου τᾶς αβ, β̄ε, μετὰ τᾶς ῑ συναμφοτέρου τᾶς γβ, β̄δ. πρὸς τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τᾶς β̄ συναμφοτέρου τᾶς αβ, β̄ε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τᾶς γβ, β̄δ, λόγον ἔχει ὃν πέντε πρὸς δύο. καὶ ἁ α ο ε πρὸς η θ λόγον ἔχει, ὃν πέντε πρὸς δύο. πάλιν ἐπεὶ ἁ ο δ πρὸς δ̄α τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ εβ, μετὰ τᾶς β̄ τᾶς β̄δ, πρὸς τὰν ἴσαν τᾷ συγκειμένᾳ ἔκ τε τᾶς β̄ συναμφοτέρου τᾶς αβ, β̄ε, μετὰ τᾶς δ̄ συναμφοτέρου τᾶς γβ, β̄δ. δεῖ δὲ καὶ ὡς ἁ α δ πρὸς δ̄ε, οὕτως ἁ συγκειμένα ἔκ τε τᾶς β̄ τᾶς αβ, καὶ γ̄ τᾶς γβ, καὶ τᾶς β̄δ ποτὶ τὰν ἴσαν τᾷ τε εβ, καὶ τᾷ β̄ τᾶς β̄δ. ἀνομοίως οὖν τῶν λόγων τεταγμένων, τουτέστιν τεταραγμένας οὔσας τᾶς ἀναλογίας, δι' ἴσου ἐστὶν ὡς ἁ ο δ πρὸς δ̄ε, οὕτως ἁ β̄ τᾶς αβ, μετὰ τᾶς γ̄ τᾶς β̄γ. καὶ ἁ β̄ δ πρὸς τὰν συγκειμέναν ἐκ τᾶς β̄, συναμφοτέρου τᾶς αβ, β̄ε, καὶ τᾶς δ̄ τᾶς γβ, β̄δ. ὥστε καὶ ὡς ἁ ε ο πρὸς ε̄δ ἐστίν, οὕτως ἁ γβ μετὰ τᾶς γ̄ τᾶς β̄δ, καὶ β̄ τᾶς εβ, πρὸς τὰν β̄ συναμφοτέρου τᾶς αβ, β̄ε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τᾶς γβ, β̄δ. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἁ δ̄ε πρὸς εβ, οὕτως ἅ τε αγ πρὸς γβ. ἐπεὶ καὶ κατὰ σύνθεσιν καὶ ἁ γ̄ τᾶς γδ, πρὸς τὰν γ̄ τᾶς δ̄β. καὶ ἁ β̄ τᾶς δ̄ε, πρὸς τὰν β̄ τᾶς εβ. ὥστε καὶ ἁ συγκειμένα ἔκ τε τᾶς αγ, καὶ ἁ γ̄ τᾶς γδ, καὶ β̄ τᾶς δ̄ε, πρὸς τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τᾶς γβ, καὶ γ̄ τᾶς δ̄β, καὶ β̄ τᾶς εβ. ἀνομοίως οὖν πάλιν τῶν λόγων τεταγμένων, τουτέστιν ἐν τεταραγμένᾳ ἀναλογίᾳ, δι' ἴσου τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ἁ ε ο πρὸς ε̄β, ὃν ἁ ᾱγ μετὰ τᾶς γ̄ τᾶς γδ, καὶ β̄ τᾶς δ̄ε. πρὸς διπλασίαν συναμφοτέρου τᾶς αβ, β̄ε, μετὰ τᾶς δ̄. συναμφοτέρου τᾶς γβ, β̄δ. ὅλα οὖν ἁ οβ πρὸς τὰν εβ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἴσα τᾷ τε γ̄ τᾶς αβ μετὰ τᾶς ϛ̄ τᾶς γβ, καὶ τᾷ γ̄ τᾶς β̄δ πρὸς τὰν β, συναμφοτέρου τᾶς αβ, β̄ε, μετὰ τᾶς δ̄ συναμφοτέρου τᾶς γβ, β̄δ. καὶ ἐπεὶ αἵ τε εδ, δ̄γ, γα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἐντί, καὶ συναμφότερος ἑκάστα τῶν εβ, β̄δ, δ̄β, β̄γ, γδ, γα. ἔσται καὶ ὡς ἁ εδ πρὸς δ̄α, οὕτως συναμφότερος ἁ εβ, β̄δ, πρὸς συναμφότερον τὰν δ̄β, β̄γ, μετὰ τᾶς συναμφοτέρου τᾶς γβ, β̄α. καὶ συνθέντι ἄρα ἐστὶν ὡς ἁ ε πρὸς αδ, οὕτως συναμφότερος ἁ εβ, β̄δ, μετὰ συναμφοτέρου τᾶς αβ̄, β̄γ καὶ συναμφοτέρου τᾶς γβ̄δ. ὁ δὲ συναμφότερος ἁ εβα, μετὰ τᾶς β̄ συναμφοτέρου τᾶς δβ̄γ, πρὸς συναμφότερον τὰν β̄δ, β̄α, μετὰ τᾶς β̄ τᾶς βγ. ὥστε καὶ ἁ β̄ πρὸς τὰν β̄ τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, τουτέστιν ὡς ἁ ε̄α πρὸς αδ, οὕτως ἁ β̄ συναμφοτέρου τᾶς εβ̄α, μετὰ τᾶς δ̄ συναμφοτέρου τᾶς γβ̄δ, πρὸς τὰν β̄, συναμφοτέρου τᾶς αβ̄δ, μετὰ τᾶς δ̄ τᾶς γβ. ὥστε ἁ ε̄α πρὸς τὰ τρία πέμπτα τᾶς αδ, οὕτως ἁ συγκειμένα ἔκ τε τᾶς συναμφοτέρου τᾶς αβ̄ε καὶ δ̄ συναμφοτέρου τᾶς γβ̄δ, πρὸς τὰ τρία πέμπτα, τᾶς συγκειμένας ἔκ τε τᾶς β̄ συναμφοτέρου τᾶς αβ̄δ, καὶ δ̄ τᾶς γβ. ἀλλ' ὡς ἁ ε̄α πρὸς τὰ τρία πέμπτα τᾶς αδ, οὕτως ἐστὶν ἁ ε̄β πρὸς ζ̄η. καὶ ὡς ἄρα ἁ ε̄β πρὸς ζ̄η, οὕτως ἁ β̄ συναμφοτέρου τᾶς αβ̄ε, μετὰ τᾶς δ̄ συναμφοτέρου τᾶς δβ̄γ, πρὸς τὰ τρία πέμπτα τᾶς συγκειμένας ἔκ τε τᾶς β̄ συναμφοτέρου τᾶς αβ̄δ, μετὰ τᾶς δ̄ τᾶς γβ. ἐδείχθη δὲ ὡς ὁ β πρὸς εβ, οὕτως ἁ γ̄ συναμφοτέρου τᾶς αβ̄δ, μετὰ τᾶς ϛ̄ τᾶς γβ, πρὸς τὰν β̄ συναμφοτέρου τᾶς αβ̄ε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τᾶς γβ̄δ. καὶ δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἁ οβ, οὕτως ἁ συγκειμένα ἔκ τε τᾶς γ̄ συναμφοτέρου τᾶς αβ̄δ, καὶ ϛ̄ τᾶς γβ, πρὸς τὰ τρία πέμπτα τᾶς συγκειμένας ἔκ τε τᾶς β̄ συναμφοτέρου τᾶς αβ̄δ, καὶ δ̄ τᾶς γβ. ἀλλὰ ἁ συγκειμένα ἔκ τε τᾶς γ̄ συναμφοτέρου τᾶς αβ̄δ, καὶ ϛ̄ τᾶς γβ, πρὸς μὲν τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τᾶς β̄ συναμφοτέρου τᾶς αβ̄δ, τᾶς γβ, λόγον ἔχει ὃν τρία πρὸς δύο. πρὸς δὲ τὰ τρία πέμπτα τᾶς αὐτᾶς λόγον ἔχει, ὃν πέντε πρὸς δύο. ἐδείχθη δὲ καὶ ἁ α ο πρὸς ηθ λόγον ἔχουσα, ὃν πέντε πρὸς δύο. καὶ ὅλα ἄρα ἁ β̄α πρὸς ὅλαν τὰν ζ̄θ, λόγον ἔχει ὃν πέντε πρὸς δύο, εἰ δὲ τοῦτο, δύο πεμπτημορία ἐντὶ ἁ ζθ τᾶς αβ, ὅπερ ἔδει.

ι Παντὸς τόμου ἀπὸ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς ἀφαιρουμένου, τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς εὐθείας ἐστὶν ἃ διάμετρος ἐστὶ τοῦ τόμου. τὸν δὲ τρόπον κείμενον, διαιρεθείσας τᾶς εὐθείας εἰς ἴσα πέντε ἐπὶ μέσου πεμπταμορίου. ὥστε τὸ τμῆμα αὐτοῦ τὸ ἐγγύτερον τᾶς ἐλάσσονος βάσιος τοῦ τόμου ποτὶ τὸ λοιπὸν τμᾶμα τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ ἡμίσεος τᾶς μείζονος τῶν βάσεων τοῦ τόμου, ὕψος δὲ τὰν ἴσαν συναμφοτέρα τᾷ τε διπλασίᾳ τᾶς ἐλάσσονος τῶν βάσεων, καὶ τᾷ μείζονι ποτὶ τὸ στερεόν, τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ ἡμίσεος τᾶς ἐλάσσονος τᾶν βάσεων τοῦ τόμου, ὕψος δὲ τὰν ἴσαν ἀμφοτέραις, τᾷ τε διπλασίᾳ τᾶς μείζονος καὶ τᾷ ἐλάσσονι αὐτᾶν. ἔστωσαν ὀρθογωνίου κώνου τομαὶ δύο εὐθεῖαι αἱ αγ, δ̄ε. διάμετρος δὲ ἔστω τοῦ αβ̄γ τμάματος, ἁ β̄ζ. φανερὸν δ' ὅτι καὶ τοῦ αδ̄εγ διάμετρός ἐστιν ἁ ηζ. καὶ αἱ μὲν ᾱγ, δ̄ε παράλληλοι ἐντὶ τᾷ κατὰ τὸ β̄ ἐφαπτομένᾳ τᾶς τομᾶς. καὶ τᾶς ηζ εὐθείας, διαιρεθείσας εἰς πέντε ἴσα μέσον ἔστω πεμπταμόριον ἁ θ̄κ. ἁ δὲ θ̄ι πρὸς τὰν ικ, τὸν αὐ-
τὸν

τὸν ἐχέτω λόγον, ὃν ἔχει τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ τᾶς αζ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὰν ἴσαν ἀμφοτέραις τᾷ τε β̄ τᾶς δ̄η, καὶ τᾷ ᾱζ, ποτὶ τὸ στερεὸν τὸ βάσιν ἔχον τὸ ἀπὸ τᾶς δ̄η τετράγωνον, ὕψος δὲ τὰν ἴσαν ἀμφοτέραις τᾷ β̄ τᾶς ᾱζ, καὶ τᾷ δ̄η. δεικτέον ὅτι τοῦ αδ̄εγ τόμου κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τὸ ι σαμεῖον. ἔστω δὴ τᾷ μὲν ζ̄β ἴσα ἁ μ̄ν, τᾷ δὲ η̄β ἴσα ἁ ν̄ο. καὶ εἰλήφθω τᾶν μὲν μ̄ν ο μετὰ ἀνάλογον ἁ ν̄ξ. τετάρτη δ' ἀνὰ λόγον ἁ τ̄ν. καὶ ὡς τ̄μ πρὸς τ̄ν, οὕτως ἁ ζ̄θ πρὸς τινα ἀπὸ τοῦ ι, ὅπου ἂν ἔρχηται τὸ ἕτερον σαμεῖον, οὐδὲν γὰρ διαφέρει, εἴτε καὶ μεταξὺ τῶν ζ̄, η̄, εἴτε καὶ μεταξὺ τῶν η̄, β̄, τὰν ιρ.



καὶ ἐπεὶ ἐν ὀρθογωνίου κώνου τομᾷ διάμετρος ἐστὶ τοῦ τμάματος ἁ ζ̄β. ἁ β̄ζ δέ, ἤτοι ἀρχὴ ἐστὶ τῆς τομῆς, ἢ παρὰ τὴν διάμετρον ἦκται. αἱ δὲ αζ, δ̄η εἰς αὐτὴν τεταγμέναι εἰσὶ κατηγμέναι. ἐπειδὴ παράλληλοι εἰσὶ τᾷ ἀπὸ τοῦ β̄ τᾶς τομᾶς ἐφαπτομένᾳ. εἰ δὲ τοῦτο, ἐστὶν ὡς ἡ αζ πρὸς δ̄η δυνάμει, οὕτως ἁ ζ̄β πρὸς β̄η μάκει, τουτέστιν ἁ μ̄ν πρὸς ν̄ο, ὡς δὲ ἁ μ̄ν πρὸς ν̄ο μάκει, οὕτως ἁ μ̄ν πρὸς ν̄ξ δυνάμει. καὶ ὡς ἄρα ἁ αζ πρὸς δ̄η δυνάμει, οὕτως ἁ μ̄ν πρὸς ν̄ξ δυνάμει. ὥστε καὶ μάκει ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ. καὶ ὡς ἄρα ὁ ἀπὸ ᾱζ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ δ̄η κύβον, οὕτως ὁ ἀπὸ μ̄ν κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ ν̄ξ κύβον. ἀλλ' ὡς μὲν ὁ ἀπὸ αζ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ δ̄η κύβον, οὕτω τὸ βαγ τμᾶμα πρὸς τὸ δβ̄ε τμᾶμα. ὡς δὲ ὁ ἀπὸ μ̄ν κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ ν̄ξ κύβον, οὕτως ἁ μ̄ν πρὸς ν̄τ. ὥστε καὶ διελόντι ἐστὶν ὡς ὁ αδ̄γε τόμος πρὸς τὸ δβ̄ε τμᾶμα, οὕτως ἁ μ̄τ πρὸς ν̄τ, τουτέστι τὰ γ̄ ε τᾶς ηζ πρὸς ν̄τ. καὶ ἐπεὶ τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ ᾱζ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὰν συγκειμέναν, ἔκ τε τᾶς β̄ τᾶς δ̄η καὶ τᾶς αζ, πρὸς τὸν ἀπὸ ᾱζ κύβον λόγον ἔχει, ὃν ἁ β̄ τᾶς δ̄η μετὰ τᾶς ᾱζ πρὸς ζ̄α. ὥστε καὶ ἁ β̄ τᾶς ν̄ξ μετὰ τᾶς ν̄μ, πρὸς ν̄μ. ἔστι δὲ καὶ ὡς ὁ ἀπὸ αζ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ δ̄η κύβον, οὕτως ἁ μ̄ν πρὸς ν̄τ. ὡς δὲ ὁ ἀπὸ δ̄η κύβος πρὸς τὸ στερεόν, τὸ βάσιν μὲν ἔχον, τὸ ἀπὸ δ̄η τετράγωνον, ὕψος δὲ τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῆς διπλασίας τῆς ᾱζ, μετὰ τᾶς δ̄η, οὕτως ἁ δ̄η πρὸς τὴν συγκειμένην ἔκ τε τᾶς διπλασίας τᾶς ᾱζ, καὶ τᾶς δ̄η. ὥστε καὶ ἁ τ̄ν πρὸς τὴν συγκειμένην, ἔκ τε τᾶς β̄ τᾶς ο̄ν καὶ τᾶς τ̄ν. γεγόνειν οὖν τέσσαρα μεγέθη, τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ ᾱζ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τᾶς διπλασίας τᾶς δ̄η, καὶ τᾶς αζ. καὶ ὁ ἀπὸ αζ κύβος, καὶ ὁ ἀπὸ δ̄η κύβος, καὶ τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ δ̄η τετράγωνον, ὕψος δὲ τὴν συγκειμένην, ἔκ τε τῆς β̄ τῆς ᾱζ, καὶ τῆς δ̄η, τέτταρσι μεγέθεσιν ἀνάλογον σὺν δύο λαμβανομένοις, τῇ τε συγκειμένῃ ἔκ τε τῆς β̄ τᾶς ν̄ξ, καὶ τῆς ν̄μ, καὶ ἑτέρου μεγέθους τῆς μ̄ν. καὶ ἄλλο ἑξῆς ἡ ν̄τ. καὶ τελευταῖον ἡ συγκειμένη, ἔκ τε τῆς β̄ τῆς ν̄ο, καὶ τῆς ν̄τ. δι' ἴσου ἄρα γίνεται, ὡς τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ αζ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῆς β̄ τῆς δ̄η, καὶ τῆς αζ, πρὸς τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ δ̄η τετράγωνον, ὕψος δὲ τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῆς β̄ τῆς αζ, καὶ τῆς δ̄η, οὕτως ἡ συγκειμένη ἔκ τε τῆς β̄ τῆς ν̄ξ, καὶ τῆς μ̄ν, πρὸς τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῆς β̄ τῆς ν̄ο, καὶ τῆς ν̄τ. ἀλλ' ὡς τὸ εἰρημένον στερεὸν πρὸς τὸ εἰρημένον στερεόν, οὕτως ἡ θ̄ι πρὸς ικ. καὶ ὡς ἄρα ἡ θ̄ι πρὸς ῑκ, οὕτως ἡ συγκειμένη πρὸς τὴν συγκειμένην. ὥστε καὶ συνθέντι, καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ πενταπλάσια. ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ζ̄η πρὸς ῑκ, οὕτως ἡ πενταπλῆ συναμφοτέρου τῆς μν̄τ, καὶ ῑ συναμφοτέρου τῆς ν̄ξ, ν̄ο, πρὸς τὴν β̄ τῆς ο̄ν, καὶ τὴν ν̄τ. καὶ ὡς ἡ ζ̄η πρὸς ζκ οὖσαν αὐτῆς δύο πέμπτα, οὕτως ἡ ε̄ συναμφοτέρου τῆς μν̄τ, καὶ δεκαπλῆ

συναμ-

συναμφοτέρου τῶν ν ξ ο, πρὸς τὴν β συναμφοτέρου τῶν μ ν τ, καὶ δ συναμφοτέρου τῶν ν ξ ο. ἔσται οὖν ὡς ζ η πρὸς ζ ι, οὕτως ἡ ε συναμφοτέρου τῶν μ ν τ, καὶ ι συναμφοτέρου τῶν ξ ν ο πρὸς τὴν συγκειμένην, ἔκ τε τῶν β τῶν μ ν, καὶ δ τῶν ν ξ, καὶ ς τῶν ο ν, καὶ γ τῶν ν τ. ἐπεὶ οὖν τέσσαρες εὐθεῖαι ἑξῆς ἀνὰ λόγον αἱ μ ν ξ, ο ν τ. καὶ ἔστιν ὡς μὲν ἡ ν τ πρὸς τ μ, οὕτως εἰλημμένη τις ἡ ρ ι πρὸς τὰ τρία πέμπτα τῆς ζ η, τουτέστι τῶν μ ο. ὡς δὲ ἡ συγκειμένη ἔκ τε τῶν β τῶν ν μ, καὶ δ τῆς ν ξ, καὶ ς τῶν ν ο, καὶ γ τῶν ν τ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῶν ε συναμφοτέρου τῶν μ ν τ, καὶ ι συναμφοτέρου τῶν ξ ν ο, οὕτως ἑτέρα τις εἰλημμένη ἡ ι ζ πρὸς τὴν ζ η, τουτέστιν πρὸς τὴν μ ο, ἔσται διὰ τὰ πρότερον ἡ ρ ζ δύο πέμπτα τῆς μ ν. τουτέστι τῆς ζ β. ὥστε κέντρον βάρεος ἐστὶ τοῦ α β γ τμήματος τὸ ρ σαμεῖον. ἔστω δὴ καὶ τοῦ δ β ε τμάματος κέντρον βάρεος τὸ χ σαμεῖον. τοῦ δὲ α δ ε γ τόμου ἔσται τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τῶν εὐθείας τῶν χ ρ, τὸν αὐτὸν πρὸς αὐτὴν λόγον ἐχούσης, ὃν ἔχει ὁ τομεὺς πρὸς τὸ λοιπὸν τμᾶμα. ἔστι δὲ τὸ ι σαμεῖον. ἐπεὶ γὰρ τῶν μὲν ζ β τρία πέμπτα ἐστὶν ἡ β ρ, τῶν δὲ η β τρία πέμπτα ἐστὶν ἡ β χ. καὶ λοιπῆς ἄρα τῶν η ζ, τρία πέμπτα ἐστὶν ἡ χ ρ. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν, ὡς μὲν ὁ α δ ε γ τομεὺς πρὸς τὸ δ β ε τμῆμα, οὕτως ἡ μ τ πρὸς ν τ. ὡς δὲ ἡ μ τ πρὸς τὴν ν τ, οὕτως τὰ τρία πέμπτα τῶν η ζ, ἥτις ἐστὶν ἡ χ ρ πρὸς ρ ι. ἔσται ἄρα καὶ ὡς ὁ α δ ε γ τομεὺς πρὸς τὸ δ β ε τμᾶμα, οὕτως ἡ χ ρ πρὸς ρ ι. καὶ ἔστι μὲν τοῦ ὅλου τμάματος κέντρον τοῦ βάρεος τὸ ρ σαμεῖον, τοῦ δὲ δ β ε κέντρον βάρεος τὸ χ. φανερὸν οὖν, ὅτι καὶ τοῦ δ ε γ τομέως τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τὸ ι σημεῖον.

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΨΑΜΜΙΤΗΣ.

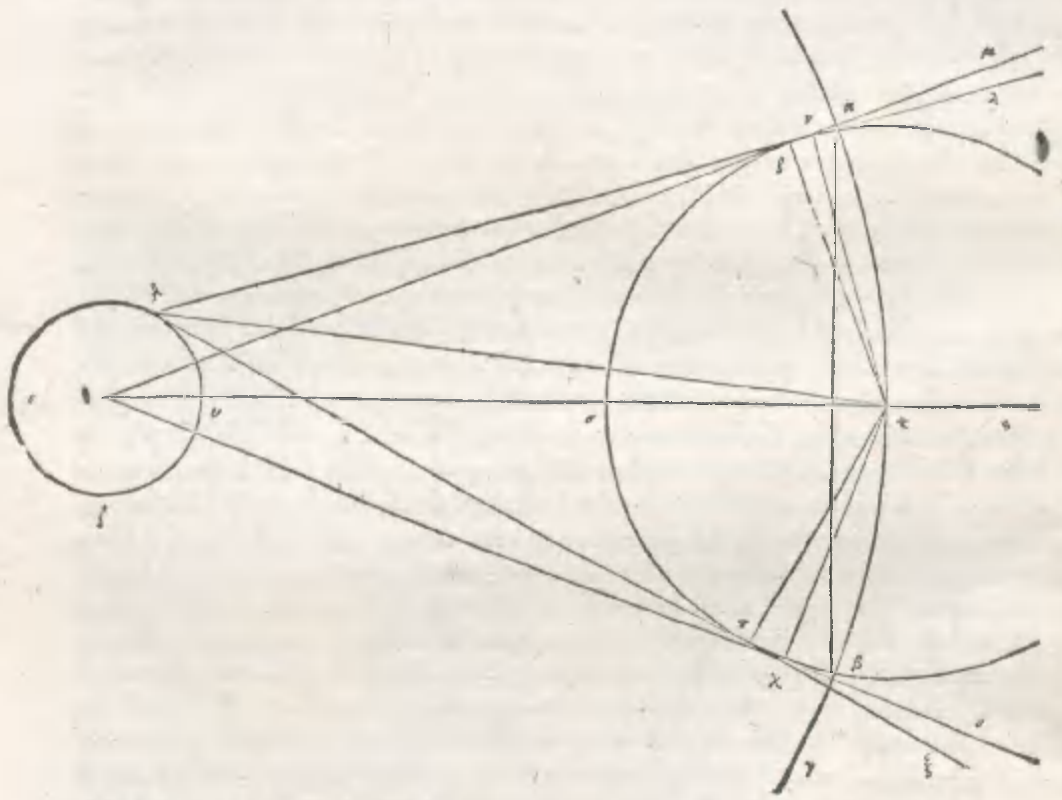
Οἴονταί τινες βασιλεῦ Γέλων τοῦ ψάμμου τὸν ἄπειρον εἶμεν τῷ πλήθει. λέγω δὲ οὐ μόνον τοῦ περὶ Συρακούσας τε καὶ τὰν ἄλλαν Σικελίαν ὑπάρχοντος, ἀλλὰ καὶ τοῦ κατὰ πᾶσαν χώραν ταντε οἰκημέναν καὶ τὰν ἀοίκητον. ✻ ἐντί τινες δὲ αὐτὸν ἄπειρον μὲν εἶμεν οὐχ ὑπολαμβάνοντι, μηδένα μέντοι ταλικοῦτον κατωνομασμένον ὑπάρχειν, ὅς τις ὑπερβάλλει τὸ πλῆθος αὐτοῦ. οἱ δὲ οὕτω† δοξάζοντες, δῆλον ὡς εἰ νοήσαιεν ἐκ τοῦ ψάμμου ταλικοῦτον ὄγκον συγκείμενον τὰ μὲν ἄλλα ἁλίκαν ὁ πᾶς τᾶς γᾶς ὄγκος ἀναπεπληρωμένων ἐν αὐτῷ τῶν τε πελαγέων πάντων, καὶ τῶν κοιλωμάτων τᾶς γᾶς ἴσον ὕψος τοῖς ὑψηλοτάτοις τῶν ὀρέων πολλαπλασίως μὴ γνωσεῖν τε μηδένα ἐν ἀκαρεῖ ἐμμεναι ὑπερβάλλοντα τὸ πλῆθος αὐτοῦ. ἐγὼ δὲ πειρασοῦμαι τοι τὸ δεικνύειν διὰ ἀποδείξιων γεωμετρικῶν, αἷς παρακολουθήσεις, ὅτι τῶν ὑφ' ἁμῶν κατονομασμένων ἀριθμῶν, καὶ ἐνδεδομένων ἐν τοῖς ποτὶ Ζεύξιππον γεγραμμένοις, ὑπερβάλλοντί τινες οὐ μόνον τὸν τοῦ ψάμμου τοῦ μεγέθεος, ἔχοντος ἴσον τᾷ γᾷ πεπληρωμένᾳ, καθάπερ εἴπαμεν, ἀλλὰ καὶ τὸν τοῦ μεγέθεος ἴσον ἔχοντος τῷ κόσμῳ. κατέχεις δὲ διότι καλεῖται κόσμος ὑπὸ μὲν τῶν πλειόνων ἀστρολόγων ἁ σφαῖρα, ἇς ἐστὶ κέντρον μὲν τὸ τᾶς γᾶς κέντρον. ἡ δὲ τοῦ κέντρου εὐθεῖα. τᾷ μεταξὺ τοῦ κέντρου τοῦ ἁλίου, καὶ τοῦ κέντρου τᾶς γᾶς. ταῦτα γὰρ ἐν ταῖς γραφομέναις παρὰ τῶν ἀστρολόγων διακρούσας Ἀρίσταρχος ὁ Σάμιος ὑποθεσίων ἐξέδωκεν γράψας, ἐν αἷς ἐκ τῶν ὑποκειμένων συμβαίνει τὸν κόσμον πολλαπλάσιον εἶμεν τοῦ νῦν εἰρημένου. ὑποτίθεται γὰρ τὰ μὲν ἀπλανῆ τῶν ἄστρων, καὶ τὸν ἅλιον μένειν ἀκίνητον, τὰν δὲ γᾶν περιφέρεσθαι περὶ τὸν ἅλιον κατὰ κύκλου περιφέρειαν, ὅς ἐστιν ἐν μέσῳ τῷ δρόμῳ κείμενος, τὰν δὲ τῶν ἀπλανῶν ἄστρων σφαῖραν περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον τῷ ἁλίῳ κειμέναν τῷ μεγέθει ταλικαύταν εἶμεν. ἔστι ὥστε τὸν κύκλον καθ' ὃν τὰν γᾶν ὑποτίθεται περιφέρεσθαι, τοιαύταν ἔχειν ἀναλογίαν ποτὶ τὰν τῶν ἀπλανῶν ἀποστασίαν, οἵαν ἔχει τὸ κέντρον τῆς σφαίρας ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν. τοῦτο δὲ εὔδηλον, ὡς ἀδύνατόν ἐστιν. ἐπεὶ γὰρ τὸ τῆς σφαίρας κέντρον οὐδὲν ἔχει μέγεθος, οὐδὲ λόγον ἔχειν οὐδένα ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τᾶς σφαίρας ὑπολαπτέον αὐτό. ἐκδεκτέον δὲ τὸν Ἀρίσταρχον διανοεῖσθαι τόδε. ἐπειδὴ τὰν γᾶν ὑπολαμβάνομεν, ὡς περὶ μὲν τὸ κέντρον τοῦ κόσμου, ὃν ἔχει λόγον ἁ γᾶ ποτὶ τὸν ὑφ' ἁμῶν εἰρημένον κόσμον, τοῦτον ἔχειν τὸν λόγον τὰν σφαῖραν, ἐν ᾗ ἐστιν ὁ κύκλος καθ' ὃν τὰν γᾶν ὑποτίθενται περιφέρεσθαι ποτὶ τὰν τῶν ἀπλανῶν ἄστρων σφαῖραν τὰς ἀποδείξιας τῶν φαινομένων οὕτως ὑποκείμενον ἐναρμόζει. καὶ μάλιστα φαίνεται τὸ μέγεθος τᾶς σφαίρας, ἐν ᾇ ποιεῖται τὰν γᾶν κινουμέναν ἴσον ὑποτίθεται τῷ ὑφ' ἁμῶν εἰρημένῳ κόσμῳ. φαμὲν δὴ καὶ εἰ γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα ταλικαύτα τὸ μέγεθος, ἁλίκαν Ἀρίσταρχος ὑποτίθεται τὰν τῶν ἀπλανέων ἄστρων σφαῖραν εἶμεν. καὶ οὕτως,

† οὕτως

οὕτινας, δειχθεῖσι τῶν ἐν ἀρχαῖς τῶν κατονομαξίων ἐχόντων, ὑπερβάλλοντας τῷ πλήθει τὸν καὶ τοῦ ψάμμου, τοῦ μεγέθους ἔχον τὸ ἴσον τῇ εἰρημένῃ σφαίρᾳ. ὑποκειμένων τῶνδε, πρῶτον μὲν περίμετρον τᾶς γᾶς εἶμεν, ὡς τῶν μυριάδων σταδίων καὶ μείζων, καὶ περὶ τῶν πειραμένων ἀποδεικνύειν, καθὼς καίτοι παρακολουθεῖς ἐοῦσαν αὐτάν, ὡς λ μυριάδων σταδίων. ἐγὼ δὲ ὑπερβαλλόμενος καθεὶς τὸ μέγεθος τᾶς γᾶς ὡς δεκαπλάσιον τοῦ ὑπὸ τῶν προτέρων δεδοξασμέναν, τὰν περίμετρον αὐτᾶς ὑποτίθεμαι εἶμεν, ὡς τῶν λ̄λ σταδίων, καὶ μείζων. μετὰ δὲ τοῦτο τὰν διάμετρον τᾶς γᾶς μείζονα ἐκ εἶμεν τᾶς διαμέτρου τᾶς σελάνας. καὶ τὰν διάμετρον τοῦ ἁλίου μείζονα εἶμεν τᾶς διαμέτρου τᾶς γᾶς, ὁμοίως τὰ αὐτὰ λαμβάνων τοῖς πλείστοις τῶν προτέρων ἀστρολόγων. μετὰ δὲ ταῦτα τὰν διάμετρον τοῦ ἁλίου τᾶς διαμέτρου τᾶς σελάνας, ὡς τριακονταπλασίαν εἶμεν, καὶ μὴ μείζονα. καὶ περὶ τῶν προτέρων ἀστρολόγων εὐδοξοῦμεν, ὡς ἐννεαπλάσιον ἀποφαινομένου. Φειδίας δὲ τοῦ Ἀκούπατρος, ὡς δὴ δωδεκαπλασίαν. Ἀρίσταρχος δὲ πεπειραμένου δεικνύειν, ὅτι ἐστὶν ἁ διάμετρος ἁλίου τᾶς διαμέτρου τᾶς σελάνας, μείζων μὲν ἢ ὀκτωκαιδεκαπλασίων, ἐλάττων δὲ ἢ εἰκοσαπλασίων. ἐγὼ δὲ ὑπερβαλλόμενος καὶ τοῦτον, ὅπως τὸ ὑποκείμενον ἀμφίλογον ἢ δεδειγμένον, ὑποτίθεμαι τὰν διάμετρον τᾶς σελάνας, ὡς τριακονταπλασίας εἶμεν, καὶ μὴ μειζόνων. ποτὶ δὲ τούτοις τὰν διάμετρον τοῦ ἁλίου μείζονα εἶμεν τᾶς τοῦ χιλιαγώνου πλευρᾶς, τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου τῶν ἐν τῷ κόσμῳ. τοῦτο δὲ ὑποτίθεμαι. Ἀρίσταρχου μὲν εἰρηκότος τοῦ κύκλου τῶν ζωδίων τοῦ ἁλίου φαινόμενον, ὡς τὸ εἰκοστὸν καὶ ἑπτακοσιοστόν. αὐτὸς δὲ ἐπισκεψάμενος τὸν δὲ τρόπον ἐπειράθην ὀργανικῶς λαβεῖν τὰν γωνίαν ὡς ἂν ὁ ἅλιος ἐναρμόζει τὰν κορυφὰν ἔχουσα ποτὶ τᾷ ὄψει, τὸ μὲν ὅμοιον ἀκριβεῖ λαβεῖν οὐκ εὐχερές ἐστι διὰ τὸ μήτε τὰν ὄψιν, μήτε τὰς χεῖρας μήτε τὰ ὄργανα, δι' ὧν λαβεῖν ἀξιόπιστας εἶμεν τὸ ἀκριβὲς ἀποφαίνεσθαι. περὶ δὲ τούτων ἐπὶ τοῦ παρόντος οὐκ εὔκαιρον μακύνειν, ἄλλως τε καὶ πλεονάκις τοιούτων ἐμπεφανισμένων. ἀπόχρη δέ μοι εἰς τὰν ἀπόδειξιν τοῦ προκειμένου γωνίαν λαβεῖν, ἅ τις ἐστὶ μείζων τᾶς γωνίας αἷς ἂν ὁ ἅλιος ἐναρμόζῃ τὰν κορυφὰν ἔχουσαν ποτὶ ὄψει, καὶ πάλιν ἄλλαν γωνίαν λαβεῖν, ἅ τις ἐστὶν οὐκ ἐλάττων τᾶς γωνίας ἇς ἂν ὁ ἅλιος ἐναρμόζῃ τὰν κορυφὰν, ἔχουσαν ποτὶ τῇ ὄψει. τεθέντος οὖν μακροῦ κανόνος ἐπιπέδου ὀρθὸν ἐν τόπῳ κειμένου, ὅθεν ἡμελλεν ἀνατέλλειν ὁ ἅλιος ὁρᾶσθαι, καὶ κυλίνδρου μικροῦ τορνευθέντος, καὶ τεθὲν ἐπὶ τὸν κανόνα ὀρθοῦ εὐθέως μετὰ τὰν ἀνατολὰν τοῦ ἁλίου. ἔπειτ' ἰόντος αὐτοῦ ποτὶ τῷ ὁρίζοντι, καὶ δυναμένου τοῦ ἀντιβλέπεσθαι ἐπεστράφη ὁ κανὼν ἐς τὸν ἅλιον, καὶ ἁ ὄψις κατεστάθη ἐπὶ τὸ ἄκρον τοῦ κανόνος. ὁ δὲ κύλινδρος ἐν μέσῳ κείμενος, τοῦ τ' ἁλίου καὶ τᾶς ὄψιος, ἐπεσκότει τῷ ἁλίῳ, ἀποχωριζόμενος τοῦ κυλίνδρου ἀπὸ τᾶς ὄψιος ἐν ᾇ ἄρξατο παραφαίνεσθαι τοῦ ἁλίου μικροῦ ἐφ' ἑκάτερα τοῦ κυλίνδρου κατεστάθη ὁ κύλινδρος, εἰ μὲν ὁμοίως συνέβαινεν τὰν ὄψιν ἀφ' ἑνὸς σαμείου βλέπειν εὐθεῖαν ἀχθεῖσαν ἀπὸ ἄκρου τοῦ κανόνος ἐν ᾧ τόπῳ ἁ ὄψις κατεστάθη ἐπιψαύουσα τοῦ κυλίνδρου. ἁ περιεχομένα γωνία ὑπὸ τὰν ἀχθεῖσαν ἐλάσσων κα εἷς τὰς γωνίας, αἷς ἂν ὁ ἅλιος ἐναρμόζοι τὰν κορυφὰν ἔχουσαν ποτὶ τᾷ ὄψει. διὰ τὸ παραβλέπεσθαί τι τοῦ ἁλίου ἐφ' ἑκάτερα τοῦ κυλίνδρου. ἐπεὶ δ' αἱ ὄψιες οὐκ ἀφανῆ σημεῖον βλέποντι, ἀλλὰ ἀπό τινος μεγέθεος ἐλάφθη τι μέγεθος στρογγύλον, οὐκ ἔλαττον ὄψις. καὶ τεθέντος τοῦ μεγέθεος ἐπὶ τὸ ἄκρον τοῦ κανόνος, ἐν ᾧ τόπῳ ἁ ὄψις κατεστάθη ἀχθεῖσα εὐθεῖα ἐπιψαύουσα τοῦ μεγέθεος καὶ τοῦ κυλίνδρου. ἁ οὖν περιεχομένα γωνία ὑπὸ τὰν ἀχθεῖσαν ἐλάττων ἧς τὰς γωνίας, αἷς ἂν ὁ ἅλιος ἐναρμόζῃ τὰν κορυφὰν ἔχουσας ποτὶ τᾷ ὄψει. τὸ δὲ μέγεθος τὸ οὐκ ἔλαττον ὄψιος, τὸν δὲ τρόπον εὑρίσκεται. δύο κυλίνδρια ἀναλαμβάνεται λεπτὰ ἰσοπαχέα ἀλλήλαν, τὸ μὲν λευκόν, ✻ τὸ δὲ οὔ. καὶ προστίθενται πρὸς τὰς ὄψιας, τὸ μὲν λευκὸν ἀφεστακὸς ἀπ' αὐτᾶς, τὸ δὲ οὐ λευκὸν ὅς ἐστι ἐγγυτάτω τᾶς ὄψιος, ὥς τε καὶ θιγγάνειν τοῦ προσώπου. εἰ μὲν οὖν τὰ λαφθέντα κυλίνδρια λεπτότατα ἐόντι τᾶς ὄψιας, περιλαμβάνεται ὑπὸ τᾶς ὄψιος τὸ ἐγγὺς κυλίνδριον, καὶ ὁρῆται ὑπὸ αὐτᾶς τὸ λευκὸν εἰκόνα παραπολὺ λεπτοτέραν ἐόντα παν, εἰ δέκα μὴ παραπολὺ μερέα τινὰ τοῦ λευκοῦ ὁρῶνται ἀφ' ἑκάτερα τᾶς ἐγγὺς τᾶς ὄψιος. λαφθέντων δὲ τῶνδε τῶν κυλίνδρων, ἔπειτα δι' ὧν πῶς τῷ πάχει ἐπισκοτεῖ τὸ ἕτερον αὐτῶν τῷ ἑτέρῳ, καὶ οὐ πλείονι τόπῳ τὸ δὴ ταλικοῦτον μέγεθος ἁλίκον ἐστὶ τὸ πάχος τῶν κυλίνδρων τῶν τούτων ποιούντων μάλιστα πῶς ἐστιν οὐκ ἔλαττον τᾶς ὄψιος, οὐδὲ γωνία, οὐκ ἐλάττων τᾶς γωνίας αἷς ἂν ὁ ἅλιος ἐναρμόζει τὰν κορυφὰν ἔχουσαν ποτὶ τᾷ ὄψει. οὕτως ἐλάφθη ἀποσταθέντος ἀπὸ τοῦ κανονίου τοῦ κυλίνδρου ἀπὸ τᾶς ὄψιος οὕτως ὡς ἐπισκοτεῖν τὸν κύλινδρον ὅλῳ ἁλίῳ, καὶ ἀχθεῖσαν εὐθεῖαν ἀπ' ἄκρου τοῦ κανόνος, ἐν ᾧ τόπῳ ἁ ὄψις κατεστάθη. ἐπιψαυουσῶν τοῦ κυλίνδρου ἁ περιεχομένα γωνία ὑπὸ τὰν ἀχθεῖσαν εὐθεῖαν οὐκ ἐλάττων γίνεται τᾶς γωνίας, αἷς ἂν ὁ ἅλιος ἐναρμόζῃ τὰν κορυφὰν ἔχουσαν ποτὶ τᾷ ὄψει.

ἐμελλεν

ταῖς δὴ γωνίαις ταῖς οὕτως λαφθείσαις καταμετρηθείσας ὀρθᾶς γωνίας ἐγὼ ἁ γὰρ εἴγω διαιρεθείσας τᾶς ὀρθᾶς εἰς ρξδ ἐλάσσων ἢ ἓν μέρος τούτων. ἁ δὲ ἐλάσσων διαιρεθείσας τᾶς ὀρθᾶς εἰς σ, μείζων ἢ ἓν μέρος τούτων. δῆλον οὖν, ὅτι ἁ γωνία ἁ ἴσαν ὁ ἅλιος ἐναρμόζῃ τὰν κορυφὰν ἔχουσαν ποτὶ τᾷ ὄψει, ἐλάσσων μέν ἐστιν, ἢ διαιρεθείσας τᾶς ὀρθᾶς εἰς ρξδ τούτων ἓν μέρος, μείζων δὲ, ἢ διαιρεθείσας τᾶς ὀρθᾶς εἰς σ, τούτων ἓν μέρος. τούτων δὲ ἐόντων, δείκνυται ὅτι καὶ ἁ διάμετρος τοῦ ἁλίου μείζων ἐοῦσα τᾶς τοῦ χιλιαγωνίου πλευρᾶς, τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου τᾶς ἐν τῷ κόσμῳ. νοείσθω γὰρ ἐπίπεδον ἐκβεβλημένον διά τε τοῦ κέντρου τᾶς γᾶς, καὶ διὰ τᾶς ὄψιος, μικρὸν ὑπὲρ τὸν ὁρίζοντα ἐόντος τοῦ ἁλίου. τεμνέτω δὲ τὸ ἐκβεβλημένον ἐπίπεδον, τὸν μὲν κόσμον κατὰ τὸν αβγ κύκλον, τὰν δὲ γᾶν κατὰ τὸν δεζ, τὸν δὲ ἅλιον κατὰ τὸν ση κύκλον. κέντρον δὲ ἔστω τᾶς μὲν γᾶς τὸ θ, τοῦ δὲ ἁλίου τὸ κ, ὄψις δὲ ἔστω τὸ δ. καὶ ἄχθωσαν εὐθεῖαι ἐπιψαύουσαι τοῦ ση κύκλου, ἀπὸ μὲν τοῦ δ αἱ δλ, δξ, ἐπιψαυόντων δὲ κατὰ τὸ ν καὶ τὸ τ. ἀπὸ δὲ τοῦ θ, αἱ θμ, θο. ἐπιψαυόντων δὲ κατὰ τὸ χ καὶ τὸ ρ. τὸν δὲ αβγ κύκλον τεμνόντων αἱ θμ, θο κατὰ τὸ α καὶ τὸ β. ἔστι δὴ μείζων ἁ θκ τᾶς δκ, ἐπεὶ ὑπόκειται ὁ ἅλιος ὑπὲρ τὸν ὁρίζοντα εἶμεν. ὥστε ἁ γωνία ἁ περιεχομένα ὑπὸ τῶν δλ, δξ μείζων ἐστὶ τᾶς γωνίας τᾶς περιεχομένας ὑπὸ τῶν θμ, θο. ἁ δὲ περιεχομένα



γωνία ὑπὸ τῶν δλ, δξ, μείζων μέν ἐστιν ἢ διακοσιοστὸν μέρος ὀρθᾶς. ἐλάσσων δὲ, ἢ τᾶς ὀρθᾶς διαιρεθείσας εἰς ρξδ τούτων ἓν μέρος, ἴσον γὰρ ἐστὶ τᾷ γωνίᾳ, αἷς ἂν ὁ ἅλιος ἐναρμόζῃ τὰν κορυφὰν ἔχουσαν ποτὶ τᾷ ὄψει. ὥστε ἁ γωνία ἁ περιεχομένα ὑπὸ τᾶν θμ, θο ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τᾶς ὀρθᾶς διαιρεθείσας εἰς ρξδ, τούτων ἓν μέρος. ἁ δὲ αβ εὐθεῖα ἐλάσσων ἐστὶ τᾶς ὑποτεινούσας ἓν τμᾶμα διαιρεθείσας τᾶς τοῦ αβγ κύκλου περιφερείας εἰς χνς. ἁ δὲ τοῦ εἰρημένου πολυγωνίου περίμετρος ποτὶ τὰν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ αβγ κύκλου, ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ τὰ μδ ποτὶ τὰ ζ. διὰ τὸ παντὸς πολυγωνίου ἐγγεγραμμένου ἐν κύκλῳ τὰν περίμετρον ποτὶ τὰν ἐκ τοῦ κέντρου ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, ἢ τὰ μδ ποτὶ τὰ ζ. ἐπίσασαι γὰρ δεδειγμένον ὑφ' ἁμῶν, ὅτι παντὸς κύκλου ἁ περιφέρεια μείζων ἐστὶν ἢ τριπλασίων τᾶς διαμέτρου, ἐλάσσονι ἢ ἑβδόμῳ μέρει, τᾶς δὲ ἐλάσσω λόγον ἔχει, ἢ ἁ βα ποτὶ τὰν θκ. ἢ τὰ ια ποτὶ τὰ αρμη. ὥστε ἐλάσσων ἐστὶν ἁ βα τᾶς θκ, ἢ ἑκατοστὸν μέρος. τᾷ δὲ βα ἴσα ἐστὶν ἁ διάμετρος τοῦ ση κύκλου. διότι καὶ ἁ ἡμίσεια αὐτᾶς ἁ φα, ἴσα ἐστὶ τᾷ κρ. ἴσαν γὰρ ἐοῦσαν τὰν θκ τᾷ θα, ἀπὸ τῶν περάτων κάθετοι ἐπιζεύγνυνται ἐπὶ τὰν

αὐτὴ ἡ γωνία ἴση τᾷ γωνίᾳ

τὰν

ταν αὐτὰν γωνίαν. δῆλον οὖν, ὅτι ἁ διάμετρος τοῦ αβγ κύκλου ἐλάσσων ἐστὶν ἢ ἑκατοστὸν μέρος τᾶς θκ. καὶ ἁ εθυ γωνία ἐλάσσων ἐστὶ τᾶς διαμέτρου τοῦ αβ κύκλου, ἐπεὶ ἐλάσσων ἐστὶν ὁ δεζ κύκλος τοῦ ση κύκλου. ἐλάσσονες ἄρα ἐντὶ ἀμφότεραι αἱ θυ, κσ, ἢ ἑκατοστὸν μέρος τοῦ θκ. ὥστε ἁ θκ ποτὶ τὰν ... ς ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ τὰ ρ ποτὶ τὰ ϙθ. καὶ ἐπεὶ ἁ μὲν θκ ἐλάσσων ἐστὶ τᾶς θρ, ἁ δὲ σν ἐλάσσων τᾶς δτ, ἐλάσσω ἄρα καὶ λόγον ἔχει ἁ θρ ποτὶ τὰν δτ, ἢ τὰ ρ ποτὶ τὰ ϙθ, ἐπὶ τῶν θκρ, δκτ τριγώνων ὀρθογωνίων ἐόντων, αἱ μὲν κρ, κτ πλευραὶ ἴσαι ἐντί. αἱ δὲ θρ, δτ ἄνισοι. καὶ μείζων ἁ θρ. ἁ γωνία περιεχομένα ὑπὸ τῶν δτ, δκ, ποτὶ τὰν γωνίαν τὰν περιεχομέναν ὑπὸ τῶν θρ, θκ, μείζονα μὲν ἔχει λόγον ἢ ἁ θκ ποτὶ τὰν δκ. ἐλάσσω δὲ, ἢ ἁ θρ ποτὶ τὰν δτ. εἰ γὰρ κα δύων τριγώνων ὀρθογωνίων αἱ μὲν ἅτεραι πλευραὶ αἱ περὶ τὰν ὀρθὰν γωνίαν ἴσαι ἐῶντι, αἱ δὲ ἅτεραι ἄνισοι, ἁ μείζων γωνία τᾶν ποτὶ ταῖς ἀνίσοις πλευραῖς ποτὶ τὰν ἐλάσσονα, μείζονα μὲν ἔχει λόγον ἢ ἁ μείζων γραμμὰ, τᾶν ὑπὸ τὰν ὀρθὰν γωνίαν ὑποτεινουσᾶν, ποτὶ τὰν ἐλάσσονα. ἐλάσσονα δὲ, ἢ ἁ μείζων γραμμὰ τᾶν περὶ τὰν ὀρθὰν γωνίαν ποτὶ τὰν ἐλάσσονα. ὥστε ἁ γωνία ἁ περιεχομένα ὑπὸ τῶν δλ, δξ ποτὶ τὰν γωνίαν τὰν περιεχομέναν ὑπὸ τῶν θν, θμ, ἐλάσσω λόγον ἔχει, ἢ ἁ θρ ποτὶ τὰν δτ. ἅ τις ἐλάσσω λόγον ἔχει, ἢ τὰ ρ ποτὶ τὰ ϙθ. ὥστε ἁ γωνία ἁ περιεχομένα ὑπὸ τῶν δλ, δξ, ποτὶ τὰν γωνίαν τὰν περιεχομέναν ὑπὸ τῶν θμ, θο, ἐλάσσω λόγον ἔχει ἢ τὰ ρ ποτὶ τὰ ϙθ. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ἁ γωνία ἁ περιεχομένα ὑπὸ τῶν δλ, δξ μείζων ἢ διακοσιοστὸν μέρος ὀρθᾶς, ἢ εἴκα ἁ γωνία ἁ περιεχομένα ὑπὸ τῶν θμ, θο μείζων, ἢ τᾶς ὀρθᾶς διαιρεθείσας εἰς δισμύρια τούτων ϙθ μέρος, ὥστε μείζων ἐστὶν ἢ διαιρεθείσας τᾶς ὀρθᾶς εἰς σγ, τούτων ἓν μέρος. ἄρα ἁ βα μείζων ἐστὶ τᾶς ὑποτεινούσας ἓν τμᾶμα διῃρημένας τᾶς τοῦ αβγ κύκλου περιφερείας, αἷς ωιβ, τὰν δὲ αβ ἴσα ἐντὶ ἁ τοῦ ἁλίου διάμετρος. δῆλον οὖν, ὅτι μείζων ἐστὶν ἁ τοῦ ἁλίου διάμετρος τᾶς τοῦ χιλιαγώνου πλευρᾶς.

εἰ γὰρ κα

δ' ιε

Τούτων δὲ ὑποκειμένων, δείκνυται καὶ τάδε, οἷον ἁ διάμετρος τοῦ κόσμου τᾶς διαμέτρου τᾶς γᾶς, ἐλάσσων ἐστὶν ἢ μυριοπλασίων, καὶ ἔτι ἁ διάμετρος τοῦ κόσμου ἐλάσσων ἐστὶν ἢ σταδίων μυριάκις μυριάδες ρ. ἐπεὶ γὰρ ὑπόκειται τὰν διάμετρον τοῦ ἁλίου μὴ μείζων εἶμεν ἢ τριακονταπλασίων τᾶς διαμέτρου τᾶς σελήνας, τὰν δὲ διάμετρον τᾶς γᾶς μείζων εἶμεν τᾶς διαμέτρου τᾶς σελήνας, δῆλον ὡς ἁ διάμετρος τοῦ ἁλίου ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τριακονταπλασίων τᾶς διαμέτρου τᾶς γᾶς. πάλιν δὲ ἐπεὶ ἐδείχθη ἁ διάμετρος τοῦ ἁλίου μείζων ἐοῦσα τᾶς τοῦ χιλιαγώνου πλευρᾶς τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου τῶν ἐν τῷ κόσμῳ, φανερὸν ὅτι ἁ τοῦ χιλιαγώνου περίμετρος τοῦ εἰρημένου ἐλάσσων ἐστὶν ἢ χιλιοπλασίων τᾶς διαμέτρου τοῦ ἁλίου. ἁ δὲ διάμετρος τοῦ ἁλίου ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τριακονταπλασίων τᾶς διαμέτρου τᾶς γᾶς. ὥστε ἁ περίμετρος τοῦ χιλιαγώνου ἐλάσσων ἐστὶν, ἢ τρισμυριοπλασίων τᾶς διαμέτρου τᾶς γᾶς. ἐπεὶ οὖν ἁ περίμετρος τοῦ χιλιαγώνου, τᾶς μὲν διαμέτρου τᾶς γᾶς ἐλάσσων ἐστὶν, ἢ τρισμυριοπλασίων, τᾶς δὲ διαμέτρου τοῦ κόσμου μείζων ἢ τριπλασίων. δέδεικται γάρ τοι, διότι παντὸς κύκλου ἁ διάμετρος ἐλάσσων ἐστὶν, ἢ τρίτον μέρος παντὸς πολυγωνίου περιμέτρου, ὃ καὶ ἰσόπλευρον, καὶ πολυγώνου ὅτι τοῦ ἑξαγώνου ἐγγεγραμμένου μὲν τοῦ κύκλου εἴη, καὶ ἁ διάμετρος τοῦ κόσμου ἐλάττων ἢ μυριοπλασίων τᾶς διαμέτρου τᾶς γᾶς. ἁ μὲν οὖν διάμετρος τοῦ κόσμου ἐλάσσων ἐοῦσα, ἢ μυριοπλασίων τᾶς διαμέτρου τοῦ κόσμου, ἢ σταδίων μυριάκις μυριάδες ρ, ἐκ τούτου δῆλον. ἐπεὶ γὰρ ὑπόκειται, τὸν περίμετρον τᾶς γᾶς μὴ μείζονα εἶμεν, ἢ τριακοσίας μυριάδας σταδίων ἐστίν. ἁ δὲ περίμετρος τᾶς γᾶς, μείζων ἐστὶ τριπλασία τᾶς διαμέτρου, διὰ τὸ παντὸς κύκλου τὰν περιφέρειαν μείζονα εἶμεν ἢ τριπλασίων τᾶς διαμέτρου, δῆλον ἁ διάμετρος τᾶς γᾶς ἐλάσσων ἐστὶν ἢ σταδίων ρ μυριάδων. ἐπεὶ οὖν ἁ τοῦ κόσμου διάμετρος ἐλάσσων ἐστὶν ἢ μυριοπλασίων τᾶς διαμέτρου τᾶς γᾶς, δῆλον ὡς ἁ τοῦ κόσμου διάμετρος ἐλάσσων ἐστὶν, ἢ σταδίων μυριάκις μυριάδων ρ. περὶ μεγεθέων καὶ τῶν ἀποστημάτων ταῦτα ὑποτίθεμαι. περὶ δὲ τοῦ ψάμμου τάδε. εἴκα ἤ τι συγκείμενον μέγεθος ἐκ τοῦ ψάμμου, μὴ μείζων μάκωνος, τὸν ἀριθμὸν αὐτοῦ μὴ μείζονα εἶμεν μυρίων, καὶ τὰν διάμετρον τᾶς μάκωνος μὴ ἐλάσσονα εἶμεν ἢ τετρωκοντομόριον δακτύλου. ὑποτίθεμαι δὲ τοῦτο, ἐπισκεψάμενος τόνδε τὸν τρόπον. ἐτέθην ἐπὶ κανόνα λεῖον μάκωνες ἐπ' εὐθείας ἐπὶ μίαν κείμεναι, ἁπτόμεναι ἀλλάλων. καὶ ἀνέλαβον αἱ κε μάκωνες πλέονα τόπον δακτυλιαίου μάκεος. ἐλάσσονα τιθεὶς τὰν διάμετρον τᾶς μάκωνος, ὑποτίθεμαι ὡς τετρωκοστομόριον εἶμεν δακτύλου, καὶ μὴ ἐλάσσονα βουλόμενος καὶ διὰ τούτων ἀναμφιλογώτατον δείκνυσθαι τὸ προκείμενον. ἃ μὲν οὖν ὑποτίθεμαι, ταῦτα. χρήσιμον δὲ εἶμεν ὑπολαμβάνω τὰν κατονόμαξιν τῶν ἀριθμῶν ῥηθῆμεν, ὅπως καὶ τῶν ἄλλων ἐν τῷ βιβλίῳ μὴ περιτυχόντες τῷ ποτὶ Ζεύξιππον γεγραμμένῳ μὴ πλανῶνται, διὰ τὸ μηδὲν εἶμεν

τετρωκοστομόριον.

π 2 ὑπερ

ὑπὲρ αὐτῶν ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ προειρημένων. συμβαίνει δὴ τὰ ὀνόματα τῶν ἀριθμῶν ἐς τὸ μὲν τῶν μυρίων ὑπάρχειν ἁμῖν παραδεδομένα, καὶ ὑπὲρ τὸ τῶν μυρίων μὲν ἀποχρεόντως ἐγιγνώσκομεν, μυριάδων ἀριθμὸν λέγοντες ἐς τὰς ποτὶ τὰς μυριάδας. ἔστων οὖν ἁμῖν, οἱ μὲν νῦν εἰρημένοι ἀριθμοὶ ἐς τὰν μυρίαν μυριάδων πρῶτοι καλούμενοι. τῶν δὲ πρώτων ἀριθμῶν αἱ μύριαι μυριάδες μονὰς καλείσθω δευτέρων ἀριθμῶν, καὶ ἀριθμείσθω τῶν δευτέρων μονάδες, καὶ ἐκ τᾶν μονάδων δεκάδες, καὶ ἑκατοντάδες, καὶ χιλιάδες, καὶ μυριάδες ἐς τὰς μυρίας μυριάδας. πάλιν δὲ καὶ αἱ μύριαι μυριάδες τῶν δευτέρων ἀριθμῶν, μονὰς καλείσθω τρίτων ἀριθμῶν, καὶ ἀριθμείσθω τῶν τριῶν ἀριθμῶν μονάδες καὶ ἀπὸ τᾶν μονάδων δεκάδες, καὶ ἑκατοντάδες, καὶ χιλιάδες, καὶ μυριάδες, ἐς τὰς μυρίας μυριάδας. τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον καὶ τῶν τρίτων ἀριθμῶν μύριαι μυριάδες μονὰς καλείσθω τετάρτων ἀριθμῶν, καὶ αἱ τῶν τετάρτων ἀριθμῶν μύριαι μυριάδες μονὰς καλείσθω πέμπτων ἀριθμῶν, καὶ ἀεὶ οὕτως προάγοντες οἱ ἀριθμοὶ τὰ ὀνόματα ἐχόντες ἐς τὰς μυριακισμυριοστῶν ἀριθμῶν μυρίας μυριάδας. ἀποχρέοντι μὲν οὖν καὶ ἐπὶ τοσοῦτον οἱ ἀριθμοὶ γιγνωσκόμενοι. ἔξεστι δὲ καὶ ἐπὶ πλέον προάγειν. ἔστων γὰρ οἱ μὲν νῦν εἰρημένοι ἀριθμοὶ πρώτης περιόδου καλούμενοι, ὁ δὲ ἔσχατος ἀριθμὸς τᾶς πρώτας περιόδου μονὰς καλείσθω δευτέρας περιόδου πρώτων ἀριθμῶν. πάλιν δὲ καὶ αἱ μύριαι μυριάδες τᾶς δευτέρας περιόδου δευτέρων ἀριθμῶν. ὁμοίως δὲ καὶ τούτων ὁ ἔσχατος μονὰς καλείσθω δευτέρας περιόδου τρίτων ἀριθμῶν. καὶ ἀεὶ οὕτως οἱ ἀριθμοὶ προάγοντες, τὰ ὀνόματα ἐχόντων τᾶς δευτέρας περιόδου, ἔστε μυριάκις μυριοστῶν ἀριθμῶν μυρίαι μυριάδες. πάλιν δὲ καὶ ὁ ἔσχατος ἀριθμὸς τᾶς δευτέρας περιόδου μονὰς καλείσθω τρίτας περιόδου πρώτων ἀριθμῶν, καὶ ἀεὶ οὕτως προαγόντων ἔστε μυριάκις μυριοστᾶς περιόδου μυριάκις μυριοστῶν ἀριθμῶν μυρίαι μυριάδες. τούτων δὲ οὕτως κατωνομασμένων, εἴκα ἐωντὶ ἀριθμοὶ ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον ἑξῆς κείμενοι, ὁ δὲ παρὰ τὰν μονάδα δεκὰς ᾖ, ὀκτὼ αὐτῶν οἱ πρῶτοι σὺν τᾷ μονάδι τῶν πρώτων ἀριθμῶν καλουμένων ἐσσοῦνται. οἱ δὲ μετ' αὐτοὺς ἄλλοι ὀκτὼ τῶν δευτέρων καλουμένων, καὶ οἱ ἄλλοι τὸν αὐτὸν τρόπον τούτοις τῶν συνωνύμων καλουμένων ἐσσοῦνται ἀπὸ τᾶς ὀκτάδος τῶν ἀριθμῶν ἀπὸ τᾶς πρώτας ὀκτάδος τῶν ἀριθμῶν. ἁ μὲν οὖν πρώτας ὀκτάδος τῶν ἀριθμῶν ὁ ὄγδοος ἐστὶν ἀριθμὸς χίλιαι μυριάδες. τᾶς δὲ δευτέρας ὀκτάδος ὁ πρῶτος, ἐπεὶ δεκαπλάσιόν ἐστι τοῦ πρὸ αὐτοῦ, μύριαι μυριάδες ἐσσεῖται. οὗτος δέ ἐστι μονὰς τῶν δευτέρων ἀριθμῶν. ὁ δὲ ὄγδοος τᾶς δευτέρας ὀκτάδος ἐστὶ χίλιαι μυριάδες τῶν δευτέρων ἀριθμῶν. πάλιν δὲ καὶ τᾶς τρίτας ὀκτάδος ὁ πρῶτος, ἐπεὶ δεκαπλάσιός ἐστι τοῦ πρὸ αὐτοῦ, μύριαι μυριάδες ἐσσεῖται τῶν δευτέρων ἀριθμῶν. οὗτος δέ ἐστι μονὰς τῶν τρίτων ἀριθμῶν. φανερὸν δὲ, ὅτι πολλαὶ ὀκτάδες ἐξοῦντι ὡς εἴρηται. χρήσιμον δέ ἐστι καὶ τόδε γιγνωσκόμενον. εἴκα ἀριθμῶν ἀπὸ τᾶς μονάδος ἀνάλογον ἐόντων πολλαπλασιάζοντές τινες ἀλλάλους τῶν ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας, ὅταν ὁμοίως ἐσσεῖται ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας ἀπέχων. ἀπὸ μὲν οὖν τῶν πολλαπλασιαξάντων ἀλλάλους, ὅσος ὁ ἐλάσσων τῶν πολλαπλασιαξάντων ἀπὸ μονάδος ἀφέξει ἐνὶ ἐλάσσονας, ἢ ὅσος ἐστὶν ἀριθμὸς συναμφοτέρων, ὡς ἀπέχοντι ἀπὸ μονάδος οἱ πολλαπλασιάξαντες ἀλλάλους. ἔστων γὰρ ἀριθμοί τινες ἀνάλογον ἀπὸ μονάδος, οἱ α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ, ι, κ, λ. μονὰς δὲ ἔστω ὁ α, καὶ πεπολλαπλασιάσθω ὁ δ τῷ θ. ὁ δὲ γενόμενος ἔστω ὁ χ. εἰλήφθω δὴ ὁ λ ἐκ τᾶς ἀναλογίας ὁ λ, ἀπέχων ἀπὸ τοῦ θ τοσούτους, ὅσους ὁ δ ἀπὸ μονάδος ἀπέχει. δεικτέον ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ χ τῷ λ. ἐπεὶ ὦν ἀνάλογον ἐόντων ἴσους ἀπέχει ὅ τε δ ἀπὸ τοῦ α, καὶ ὁ λ ἀπὸ τοῦ θ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ὁ δ ποτὶ τὸν α, ὃν ὁ λ ποτὶ τὸν θ. πολλαπλάσιος δέ ἐστιν ὁ δ τοῦ α. πολλαπλάσιος ἄρα ἐστὶν ὁ λ τοῦ θ τῷ δ. ὥστε ἴσος ἐστὶν ὁ λ τῷ χ. δῆλον οὖν ὅτι ὁ γενόμενος ἐκ τᾶς ἀναλογίας τέ ἐστι, καὶ ἀπὸ τοῦ μείζονος πολλαπλασιαξάντων ἀλλάλους ἴσον ἀπέχων, ὅσος ὁ ἐλάσσων ἀπὸ τᾶς μονάδος ἀπέχει. φανερὸν δὲ ὅτι καὶ ἀπὸ μονάδος ἀπέχει ἐνὶ ἐλάσσονας ἢ ὅσος ἐστὶν ὁ ἀριθμὸς συναμφοτέρων οὓς ἀπέχοντι ἀπὸ τᾶς μονάδος. οἱ δὲ μὲν γὰρ οἱ α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ, ὅσσοι ἐντὶ ὅσος ὁ θ ἀπὸ μονάδος ἀπέχει. οἱ δὲ ι, κ, λ ἑνὶ ἐλάσσονες, ἢ ὅσος ὁ δ ἀπὸ μονάδος ἀπέχει. σὺν γὰρ τῷ θ, πόσσοι ἐντί.

Τούτων δὲ τῶν μὲν ὑποκειμένων, τῶν δὲ ἀποδεδειγμένων τὸ προκείμενον δειχθήσεται. ἐπεὶ γὰρ ὑπόκειται τὰν διάμετρον τᾶς μάκωνος μὴ ἐλάσσονα εἶμεν ἢ τετρακοσιομόριον δακτύλου, δῆλον ὡς ἁ σφαῖρα δακτυλιαίαν ἔχουσα τὰν διάμετρον, οὐ μείζων ἐστὶν ἢ ὥστε χωρεῖν μάκωνας ἑξακισμυρίας καὶ τετρακισχιλίας. τᾶς γὰρ σφαίρας τᾶς ἐχούσας τὰν διάμετρον τετρακοσιομόριον δακτύλου πολλαπλασία ἐστὶ τῷ εἰρημένῳ ἀριθμῷ. δέδεικται γὰρ ὅτι αἱ σφαῖραι τριπλάσιον λόγον ἔχοντι ποτὶ ἀλλάλας τῶν διαμέτρων. ἐπεὶ δὲ ὑπόκειται καὶ τὸ ψάμμου τὸν ἀριθμὸν, εἰς τὸ τᾶς μάκωνος μέγεθος, μὴ μείζονα εἶμεν μυρίων, δῆλον ὡς εἰ πληρωθείη ψάμμου ἁ σφαῖρα ἁ δακτυλιαίαν

ἔχουσα

ἔχουσα τὰν διάμετρον, οὐ μείζων κα εἴη ὁ ἀριθμὸς τοῦ ψάμμου ἢ μυριάκις τὰ ἑξακισμύρια καὶ τετρακισχίλια. οὗτος δέ ἐστιν ὁ ἀριθμός, μονάδες τε ἀριθμὸς τῶν δευτέρων ἀριθμῶν, καὶ τῶν πρώτων μυριάδες τετρακισχίλιαι. ἐλάσσων οὖν ἐστιν ἢ ι μυριάδες τῶν δευτέρων ἀριθμῶν. ἁ δὲ τῶν ρ δακτύλων ἔχουσα τὰν διάμετρον σφαῖρα πολλαπλασία ἐστὶ τᾶς δακτυλιαίας ἐχούσας τὸν διάμετρον ἐφ' ταῖς ρ μυριάδεσι, διὰ τὸ τριπλάσιον ἔχειν ποτ' ἀλλάλαν τὰν διάμετρον τᾶς σφαίρας. εἰ οὖν γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα τηλικαύτη τὸ μέγεθος, ἁλίκα ἐστὶν ἁ σφαῖρα ἁ ἔχουσα τὰν διάμετρον δακτύλων ρ, δῆλον ὡς ἐλάττων ἐσσεῖται ὁ τοῦ ψάμμου ἀριθμὸς τοῦ γενομένου ἀριθμοῦ πολλαπλαθῆσαν τᾶν δεκαμονάδων τῶν δευτέρων ἀριθμῶν ταῖς ρ μυριάδεσιν. ἐπεὶ δὲ τῶν δευτέρων ἀριθμῶν δέκα μονάδες, δέκατός ἐστιν ἀριθμὸς ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον ἐόντι τῶν δέκα πλευρῶν ὀρθῶν ἀνάλογον. αἱ δὲ ἑκατὸν μυριάδες ἕβδομος ἀπὸ μονάδος ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας, δῆλον ὡς ὁ γενόμενος ἐκτὸς ἐσσεῖται τῶν ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας ἑκκαιδέκατος ἀπὸ μονάδος. δέδεικται γὰρ ὅτι ἐνὶ ἐλάσσονας ἀπὸ τᾶς μονάδος ἀπέχει ἐστὶν ἐλάττων συναμφοτέρων ὅσους ἀπέχοντι ἀπὸ μονάδος οἱ πολλαπλασιάξαντες ἀλλάλους. τῶν δὲ ἑκκαίδεκα τούτων ὀκτὼ μὲν οἱ πρῶτοι σὺν τῇ μονάδι τῶν πρώτων καλουμένων ἐντί, οἱ δὲ μετὰ τούτους ὀκτὼ τῶν δευτέρων, καὶ ὁ ἔσχατος ἐστὶν αὐτῶν χίλιαι μυριάδες ἀριθμῶν. φανερὸν οὖν ὅτι τοῦ ψάμμου τὸ πλῆθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τᾷ σφαίρᾳ τᾷ τε τὰν διάμετρον ρ δακτύλων ἐχούσῃ, ἐλάττων ἐστὶν ἢ χίλιαι μυριάδες τῶν δευτέρων ἀριθμῶν. πάλιν δὲ καὶ ἁ σφαῖρα, ἁ τῶν μυρίων δακτύλων ἔχουσα τὰν διάμετρον πολλαπλασία τᾶς ἐχούσας τὰν διάμετρον ρ δακτύλων ταῖς ρ μυριάδεσι. εἰ οὖν γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα ταλικαύτα τὸ μέγεθος, ἁλίκα ἐστὶν ἁ ἔχουσα σφαῖρα τὰν διάμετρον μυριάδων δακτύλων, δῆλον ὡς ἐλάσσων ἐσσεῖται ὁ τοῦ ψάμμου ἀριθμὸς τοῦ γενομένου πολλαπλασιαθεισᾶν τᾶν χιλίων μυριάδων τῶν δευτέρων ἀριθμῶν ταῖς ρ μυριάδεσιν. ἐπεὶ δὲ αἱ μὲν τῶν δευτέρων ἀριθμῶν χίλιαι μυριάδες ἑκκαιδέκατός ἐστιν ἀριθμὸς ἀπὸ μονάδος, ἀναλογίας δὲ ρ μυριάδες ἕβδομος, ἀπὸ μονάδος ἐν τᾷ αὐτᾷ ἀναλογίᾳ, δῆλον ὡς ὁ γενόμενος ἐσσεῖται δύο καὶ εἰκοστὸς τῶν ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας ἀπὸ μονάδος. τῶν δὲ δύο καὶ εἴκοσι τούτων, ὀκτὼ μὲν οἱ πρῶτοι σὺν τᾷ μονάδι τῶν πρώτων καλουμένων ἐστίν. ὀκτὼ δὲ οἱ μετὰ τοὺς δευτέρων καλουμένων. οἱ δὲ λοιποὶ ἐκ τῶν τριῶν καλουμένων, καὶ ὁ ἔσχατος αὐτῶν ἐστὶ δέκα μυριάδες τῶν τρίτων ἀριθμῶν. φανερὸν οὖν ὅτι τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τᾷ σφαίρᾳ τὰν διάμετρον ἐχούσᾳ μυρίων δακτύλων, ἔλασσόν ἐστιν ἢ ι μυριάδες τρίτων ἀριθμῶν. καὶ ἐπεὶ ἐλάσσων ἐστὶν ἁ σταδιαίαν ἔχουσα τὰν διάμετρον σφαῖρα, τᾶς σφαίρας τᾶς ἐχούσης τὰν διάμετρον μυρίων δακτύλων, δῆλον ὅτι καὶ τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τᾷ σφαίρᾳ τᾷ τὰν διάμετρον ἐχούσᾳ σταδιαίαν, ἔλασσόν ἐστιν ἢ ι μυριάδες τῶν τρίτων ἀριθμῶν. πάλιν δὴ ἁ σφαῖρα ἁ ἔχουσα τὰν διάμετρον ρ σταδίων, πολλαπλασίων ἐστὶ τᾶς σφαίρας τᾶς ἐχούσας τὰν διάμετρον σταδιαίαν ταῖς ρ μυριάδεσιν. εἰ οὖν γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα ταλικαύτα τὸ μέγεθος, ἁλίκα ἐστὶν ἔχουσα τὰν διάμετρον ρ σταδίων, δῆλον ὅτι ἐλάσσων ἐσσεῖται ὁ τοῦ ψάμμου ἀριθμὸς τοῦ γενομένου ἀριθμοῦ, πολλαπλασιαθεισᾶν τᾶν δέκα μυριάδων τρίτων ἀριθμῶν ταῖς ρ μυριάδεσι. καὶ ἐπεὶ αἱ μὲν τῶν τρίτων ἀριθμῶν δέκα μυριάδες δύο καὶ εἰκοστός ἐστιν ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον, αἱ δὲ ρ μυριάδες ἕβδομος ἀπὸ μονάδος ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας, δῆλον ὡς ὁ γενόμενος ἐσσεῖται ὀκτὼ καὶ εἰκοστὸς ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας ἀπὸ μονάδος, τῶν δὲ ὀκτὼ καὶ εἴκοσι τούτων, ὀκτὼ μὲν οἱ πρῶτοι σὺν τᾷ μονάδι τῶν πρώτων καλουμένων ἐντί, οἱ δὲ μετὰ τούτους ἄλλοι ὀκτὼ τῶν δευτέρων, καὶ οἱ μετὰ τούτους ὀκτὼ τῶν τρίτων, οἱ δὲ λοιποὶ τέσσαρες τῶν τετάρτων καλουμένων, καὶ ὁ ἔσχατος αὐτῶν ἐστὶ χίλιαι μυριάδες τῶν τετάρτων ἀριθμῶν. φανερὸν οὖν, ὅτι τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τᾷ σφαίρᾳ τᾷ τὰν διάμετρον ἐχούσᾳ σταδίων ρ, ἔλασσόν ἐστιν ἢ χίλιαι μονάδες (τῶν δὲ τετάρτων ἀριθμῶν) πάλιν δὴ ἁ σφαῖρα ἁ ἔχουσα τὰν διάμετρον μυρίων σταδίων, πολλαπλασία ἐστὶ τᾶς σφαίρας τᾶς ἐχούσας τὰν διάμετρον σταδίων ρ, ταῖς ρ μυριάδεσιν. εἰ οὖν γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα ταλικαύτα τὸ μέγεθος, ἁλίκα ἐστὶν ἁ σφαῖρα ἁ ἔχουσα τὰν διάμετρον σταδίων μυρίων, δῆλον ὅτι ἐλάσσων ἐσσεῖται τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος τοῦ γενομένου ἀριθμοῦ πολλαπλασιαθεισᾶν τᾶν χιλίων μονάδων τῶν τετάρτων ἀριθμῶν ταῖς ρ μυριάδεσιν. ἐπεὶ δὲ αἱ μὲν τῶν τετάρτων ἀριθμῶν χίλιαι μονάδες ὀκτὼ καὶ εἰκοστός ἐστιν, ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον, αἱ δὲ ἑκατὸν μυριάδες ἕβδομος ἀπὸ μονάδος, ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας, δῆλον ὅτι ὁ γενόμενος ἐσσεῖται ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας, τέταρτος καὶ τριακοστὸς ἀπὸ μονάδος. τῶν δὲ τεσσάρων καὶ τριάκοντα τούτων ὀκτὼ μὲν οἱ πρῶτοι σὺν τᾷ μονάδι τῶν πρώτων καλουμένων ἐντί, οἱ δὲ μετὰ τούτους ὀκτὼ τῶν δευτέρων, καὶ οἱ μετὰ τούτους ἄλλοι ὀκτὼ τῶν τρίτων, καὶ οἱ μετὰ τούτους ὀκτὼ τῶν

πλασιασθεῖσαν

π 3 τετάρτων

τετάρτων. οἱ δὲ λοιποὶ δύο τῶν πέμπτων καλουμένων ἐσσοῦνται. καὶ ὁ ἔσχατος αὐτῶν ἐστὶ δέκα μονάδων τῶν πέμπτων ἀριθμῶν. δῆλον οὖν ὅτι τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τᾷ σφαίρᾳ τᾷ τὰν διάμετρον ἐχούσᾳ σταδίων μυρίων, ἔλασσον ἐσσεῖται ἢ ι μονάδες τῶν πέμπτων ἀριθμῶν. πάλιν δὴ ἁ σφαῖρα ἁ ἔχουσα τὰν διάμετρον σταδίων ρ μυριάδων πολλαπλασία ἐστὶ τᾶς σφαίρας τᾶς τὰν διάμετρον ἐχούσας σταδίων μυρίων, ταῖς ρ μυριάδεσσιν. εἰ οὖν γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα ταλικαύτα, ἁλίκα ἐστὶν ἁ σφαῖρα ἁ ἔχουσα τὰν διάμετρον σταδίων ρ μυριάδων, δῆλον ὡς ἐλάσσων ἐσσεῖται ὁ τοῦ ψάμμου ἀριθμὸς τοῦ γενομένου ἀριθμοῦ πολλαπλασιας θεισαν. ταν δὲ μονάδων τῶν πέμπτων ἀριθμῶν ταῖς ρ μυριάσι. καὶ ἐπεὶ αἱ μὲν τῶν πέμπτων ἀριθμῶν δέκα μονάδες, τέταρτος ἐστὶ καὶ τριακοστὸς ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον, αἱ δὲ ρ μυριάδες ἕβδομος ἀπὸ μονάδος ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας, δῆλον ὅτι ὁ γενόμενος ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας ἐσσεῖται τετρωκοστὸς ἀπὸ μονάδος, τῶν δὲ τεσσαράκοντα τούτων ὀκτὼ μὲν οἱ πρῶτοι σὺν τῇ μονάδι τῶν πρώτων καλουμένων ἐντί. οἱ δὲ μετὰ ταῦτα ἄλλοι ὀκτὼ τῶν δευτέρων. καὶ οἱ μετὰ τούτους ἄλλοι ὀκτὼ τῶν τρίτων. οἱ δὲ μετὰ τοὺς τρίτους ὀκτὼ τῶν τετάρτων. οἱ δὲ μετὰ τούτους ὀκτὼ τῶν πέμπτων καλουμένων. καὶ ὁ ἔσχατος αὐτῶν ἐστὶ χίλιαι μυριάδες τῶν πέμπτων ἀριθμῶν. φανερὸν οὖν ὅτι τοῦ ψάμμου τὸ πλῆθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τᾷ σφαίρᾳ τᾷ τὰν διάμετρον ἐχούσᾳ σταδίων ρ μυριάδες, ἔλασσόν ἐστιν ἢ χίλιαι μυριάδες τῶν πέμπτων ἀριθμῶν. ἁ δὲ τὰν διάμετρον ἔχουσα σφαῖρα σταδίων μυριὰς μυριάδων πολλαπλασίων ἐστὶ τᾶς σφαίρας τᾶς ἐχούσας τὰν διάμετρον σταδίων ρ μυριάδων ταῖς ρ μυριάδεσσιν. εἰ δὲ γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα ταλικαύτα τὸ μέγεθος, ἁλίκα ἐστὶν ἁ σφαῖρα ἁ ἔχουσα τὰν διάμετρον σταδίων μυριὰς μυριάδων, φανερὸν ὅτι ἔλασσον ἐσσεῖται τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος τοῦ γενομένου ἀριθμοῦ πολλαπλασίου χιλίαν μυριάδων τῶν πέμπτων ἀριθμῶν ταῖς ρ μυριάδεσσιν. ἐπεὶ δ' αἱ μὲν τῶν πέμπτων ἀριθμῶν χίλιαι μυριάδες τετρακοστὸς ἐστὶν ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον, αἱ δὲ ρ μυριάδες ἕβδομος ἀπὸ μονάδος ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας, δῆλον ὡς ὁ γενόμενος ἐσσεῖται ἕκτος καὶ τετρακοστὸς ἀπὸ μονάδος. τῶν δὲ τεσσαράκοντα καὶ ἓξ τούτων εἰμέν, οἱ πρῶτοι σὺν τᾷ μονάδι τῶν πρώτων καλουμένων ἐντί, ὀκτὼ δὲ οἱ μετὰ τοὺς τῶν δευτέρων, καὶ οἱ μετὰ τούτους ἄλλοι ὀκτὼ τῶν τρίτων. οἱ δὲ μετὰ τοὺς τρίτους ἄλλοι ὀκτὼ τῶν τετάρτων, καὶ οἱ μετὰ τοὺς τετάρτους ὀκτὼ τῶν πέμπτων, οἱ δὲ λοιποὶ τῶν ἐκ τῶν καλουμένων ἐντί, καὶ ὁ ἔσχατος αὐτός ἐστι ι μυριάδων τῶν ἐκ τῶν ἀριθμῶν. φανερὸν οὖν, ὅτι τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τᾷ σφαίρᾳ τᾷ τὰν διάμετρον ἐχούσᾳ σταδίων μυριάκις μυριάδων μυρίων ἔλασσόν ἐστιν ἢ ι μυριάδες τῶν ἐκ τῶν ἀριθμῶν. ἁ δὲ τὰν διάμετρον ἔχουσα σφαῖρα σταδίων μυριάκις μυριάδων ρ, πολλαπλασία ἐστὶ τᾶς σφαίρας τᾶς ἐχούσας τὰν διάμετρον σταδίων μυριάδας μυρίας, ταῖς ρ μυριάδεσσιν. εἰ οὖν γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα ταλικαύτα τὸ μέγεθος, ἁλίκα ἐστὶν ἁ σφαῖρα ἁ ἔχουσα τὰν διάμετρον σταδίων μυριάκις μυριάδων, φανερὸν ὅτι τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος ἔλασσον ἐσσεῖται τοῦ γενομένου ἀριθμοῦ πολλαπλασίων τᾶν ι μυριάδων, τῶν ἑκτῶν ἀριθμῶν ταῖν ρ μυριάδες. ἐπεὶ δ' αἱ μὲν τῶν ἑκτῶν ἀριθμῶν δέκα μυριάδες ἕκτος καὶ τεσσαρακοστός ἐστιν ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον, αἱ δὲ ρ μυριάδες ἕβδομος ἀπὸ μονάδος, ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας, δῆλον ὅτι ὁ γενόμενος ἐσσεῖται δύο καὶ πεντηκοστὸς ἀπὸ μονάδος ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας. τῶν δὲ δύο καὶ πεντήκοντα τούτων, οἱ μὲν ὀκτὼ καὶ τεσσαράκοντα σὺν τᾷ μονάδι, οἵ τε πρῶτοι καλούμενοι ἐντὶ καὶ οἱ δεύτεροι καὶ τρίτοι καὶ τέταρτοι καὶ πέμπτοι καὶ ἕκτοι. οἱ δὲ λοιποὶ τέσσαρες τῶν ἑβδόμων καλουμένων ἐντί, καὶ ὁ ἔσχατος αὐτῶν ἐστὶ χίλιαι μονάδες τῶν ἑβδόμων ἀριθμῶν. φανερὸν οὖν ὅτι τοῦ ψάμμου τὸ πλῆθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσα τᾷ σφαίρᾳ τᾷ τὰν διάμετρον ἐχούσᾳ σταδίων μυριάκις μυριάδων ρ, ἔλασσόν ἐστιν ἢ α μονάδες τῶν ἑβδόμων ἀριθμῶν. ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη ἁ τοῦ κόσμου διάμετρος ἐλάσσων οὖσα σταδίων μυριάκις μυριάδων ρ, δῆλον ὅτι καὶ τοῦ ψάμμου τὸ πλῆθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τῷ κόσμῳ, ἔλασσόν ἐστιν ἢ α μονάδες τῶν ἑβδόμων ἀριθμῶν. ὅτι μὲν ὁμοίως τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν πλείστων ἀστρολόγων καλουμένῳ κόσμῳ, ἔλασσόν ἐστιν ἢ α μονάδες τῶν ἑβδόμων ἀριθμῶν, δέδεικται. ὅτι δὲ καὶ τὸ πλῆθος τοῦ ψάμμου τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τᾷ σφαίρᾳ ταλικαύτᾳ, ἁλίκαν ἀρίσταρχος ὑποτίθεται τὰν τῶν ἀπλανέων ἄστρων σφαῖραν, εἶμεν ἔλασσόν ἐστιν ἢ α μυριάδες τῶν ὀγδόων ἀριθμῶν, δειχθήσεται. ἐπεὶ γὰρ ὑπόκειται τὰν γᾶν τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον ποτὶ τὸν ὑφ' ἁμῶν εἰρημένον κόσμον, ὃν ἔχει λόγον ὁ εἰρημένος κόσμος ποτὶ τὰν τῶν ἀπλανέων ἄστρων σφαῖραν, ἂν ἀρίσταρχος ὑποτίθεται. καὶ αἱ διάμετροι τᾶν σφαιρᾶν τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ποτὶ ἀλλάλας. ἁ δὲ τοῦ κόσμου διάμετρος τᾶς διαμέτρου τᾶς γᾶς δέδεικται ἐλάσσων οὖσα ἢ μυριοπλασίαν. δῆλον οὖν, ὅτι καὶ ἁ διάμετρος τᾶς τῶν ἀπλανέων ἄστρων σφαίρας

διαδύεσθαι

τετρωκοστὸς

τετρωκοστὸς

ἑκτων

ἑκτων

ἑκτων

σφαίρας ἐλάσσων ἐστὶν ἢ μυριοπλασίων τᾶς διαμέτρου τοῦ κόσμου. ἐπειδὴ αἱ σφαῖραι τριπλάσιον λόγον ἔχοντι ποτ' ἀλλάλας τᾶν διαμέτρων φανερόν, ὅτι ἁ τῶν ἀπλανέων ἄστρων σφαῖρα ἂν ἀρίσταρχος ὑποτίθεται, ἐλάττων ἐστὶν ἢ μυριάκις μυριάδεσσι πολλαπλασίων τοῦ κόσμου. δέδεικται γὰρ τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τῷ κόσμῳ, ἔλασσον ἐστὶν ἢ α μονάδες τῶν ἑβδόμων ἀριθμῶν. δῆλον οὖν ὅτι εἰ γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα ταλικαύτα τὸ μέγεθος, ἁλίκαν ὁ ἀρίσταρχος ὑποτίθεται τὰν τῶν ἀπλανέων ἄστρων σφαῖραν εἶμεν, ἐλάσσων ἐσσεῖται ὁ τοῦ ψάμμου ἀριθμὸς τοῦ γενομένου ἀριθμοῦ πολλαπλασίαν τᾶν χιλίων μονάδων, ταῖς μυριάκις μυρίαις μυριάδεσσι. καὶ ἐπεὶ αἱ μὲν τῶν ἑβδόμων α μονάδες δύο καὶ πεντηκοστός ἐστιν ἀπὸ μονάδος. ἀνάλογον δὲ μυριάκις μύριαι μυριάδες τρισκαιδέκατος ἀπὸ μονάδος, ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας δῆλον, ὅτι ὁ γενόμενος ἐσσεῖται τέταρτος καὶ ἑξηκοστὸς ἀπὸ μονάδος, ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας. οὗτος δὲ ἐστὶ τῶν ὀγδόων ὄγδοος καὶ πενταχίλιαι μυριάδες τῶν ὀγδόων ἀριθμῶν. φανερὸν τοίνυν, ὅτι τοῦ ψάμμου τὸ πλῆθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τᾷ τῶν ἀπλανέων ἄστρων σφαίρᾳ ἂν ἀρίσταρχος ὑποτίθεται, ἔλασσόν ἐστιν ἢ α μυριάδες τῶν ὀγδόων ἀριθμῶν. ταῦτα δὲ βασιλεῦ γέλων, τοῖς μὲν πολλοῖς καὶ μὴ κεκοινωνηκότεσσι τῶν μαθημάτων οὐκ εὔπιστα φανήσειν ὑπολαμβάνω, τοῖς δὲ μεταλελαβηκότεσσι καὶ περὶ τῶν ἀποστημάτων καὶ τῶν μεγέθεων τᾶς τε γᾶς καὶ τοῦ ἁλίου, καὶ τᾶς σελήνας καὶ τοῦ ὅλου κόσμου πεφροντικότεσσι πιστά, διὰ τὰν ἀπόδειξιν ἐσσεῖσθαι. διόπερ ᾠήθην καὶ τινας οὐκ ἀνάρμοσον εἴη ἔτι ἐπιθεωρῆσαι ταῦτα.

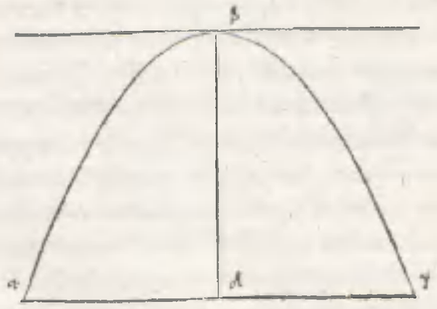
ΑΡΧΙΜΗΔΟΥ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ.

ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ ΔΟΣΙΘΕΩ ΕΥΠΡΑΤΤΕΙΝ.

Ἀκούσας κόνωνα μὲν τετελευτηκέναι, ὃς ἦν οὐδὲν ἐλλείπων ἁμὶν ἐν φιλίᾳ, τὶν δὲ κόνωνος γνώριμον γεγενῆσθαι καὶ γεωμετρίας οἰκεῖον εἶμεν, τοῦ μὲν τετελευτηκότος εἵνεκεν ἐλυπήθημεν, ὡς καὶ φίλου τοῦ ἀνδρὸς γενομένου, καὶ ἐν τοῖς μαθήμασι θαυμαστοῦ τινός. ἐπεχειρήσαμεθα δὲ ἀποστεῖλαι, γράψαντες ὡς κόνωνι γράφειν ἐγνωκότες εἶμεν γεωμετρικῶν θεωρημάτων, ὃ πρότερον μὲν οὐκ ἦν τεθεωρημένον. νῦν δὲ ὑφ' ὑμῶν τεθεώρηται, πρότερον μὲν διὰ μηχανικῶν εὑρεθέν, ἔπειτα δὲ καὶ διὰ τῶν γεωμετρικῶν ἐπιδειχθέν. τῶν μὲν πρότερον περὶ γεωμετρίαν πραγματευθέντων ἐπεχείρησαν τινὲς γράφειν, ὡς δυνατὸν ἐὸν κύκλῳ τῷ δοθέντι, καὶ κύκλου τμήματι τῷ δοθέντι χωρίον εὑρεῖν εὐθύγραμμον ἴσον. καὶ μετὰ ταῦτα τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπό τε τᾶς ὅλου τοῦ κώνου τομᾶς καὶ εὐθείας τετραγωνίζειν ἐπειρῶντο, λαμβάνοντες οὐκ εὐπαραχώρητα λήμματα, διόπερ αὐτοῖς ὑπὸ τῶν πλείστων οὐκ εὑρισκόμενα ταῦτα κατεγνώσθην. τὸ καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς τμῆμα περιεχόμενον, οὐδένα τῶν πρώτων ἐγχειρήσαντα τετραγωνίζειν ἐπιστάμεθα, ὃ δὴ νῦν ὑφ' ὑμῶν εὕρηται. δείκνυται γὰρ ὅτι πᾶν τμῆμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, ἐπίτριτόν ἐστι τοῦ τριγώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτάν, καὶ ὕψος ἴσον τῷ τμήματι, λαμβανομένου τοῦδε τοῦ λήμματος εἰς τὰν ἀπόδειξιν αὐτοῦ τῶν ἀνίσων χωρίων τὰν ὑπεροχάν, ᾇ ὑπερέχει τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος, δυνατὸν εἶμεν αὐτὰν συντιθεμέναν παντὸς ὑπερέχειν τοῦ προτεθέντος πεπερασμένου χωρίου. κέχρηνται δὲ καὶ οἱ πρότερον γεωμέτραι τῷδε τῷ λήμματι. τούς τε γὰρ κύκλους διπλασίονα λόγον ἔχειν πρὸς ἀλλήλους τῶν διαμέτρων ἀποδεδείχασιν αὐτῷ τῷ λήμματι χρώμενοι, καὶ τὰς σφαίρας ὅτι τριπλασίονα λόγον ἔχοντι πρὸς ἀλλήλας τᾶν διαμέτρων. ἔτι δὲ καὶ πᾶσα πυραμὶς τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ πρίσματος τοῦ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντος τᾷ πυραμίδι, καὶ ὕψος ἴσον. καὶ διότι πᾶς κῶνος τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ κυλίνδρου τοῦ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντος τῷ κώνῳ, καὶ ὕψος ἴσον. ὁμοίως τῷ προκειμένῳ λήμματι λαμβανόντων ἔγγραφον συμβαίνει τῶν προειρημένων θεωρημάτων ἕκαστον μηδενὸς ἧσσον τοῦ τούτου λήμματος, ἀποδεδειγμένων πεπιστευκέναι. ἄρτι δὲ τὰν ὁμοίαν πίστιν τούτου ἀναγμένον τῶν ὑφ' ἡμῶν ἐκδιδομένων. ἀναγράψαντες οὖν αὐτοῦ τὰς ἀποδείξεις, ἀποστέλλομεν πρῶτον μέν, ὡς διὰ τῶν μηχανικῶν ἐθεωρήθη. μετὰ ταῦτα δὲ καὶ ὡς διὰ τῶν γεωμετρουμένων ἀποδείκνυται. προγράφεται δὲ καὶ στοιχεῖα κωνικὰ χρείαν ἔχοντα εἰς τὰν ἀπόδειξιν. ἔρρωσο.

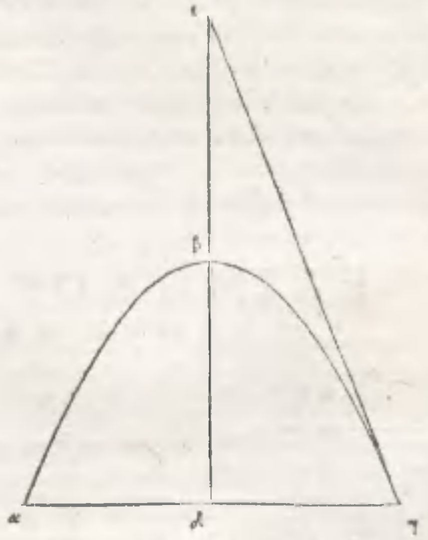
Εἰκα

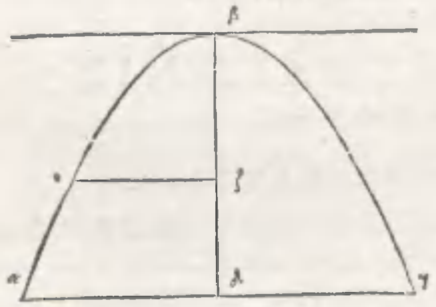
α Εἴκα ἡ ὀρθογωνίου κώνου τομὰ ἁ β γ, ἡ δὲ ἁ μὲν β δ παρὰ τὰν διάμετρον ἢ αὐτὰ διάμετρος. ἁ δὲ α δ γ παρὰ τὰν κατὰ τὸ β, ἐπιψαύουσαν τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ β, ἐσσοῦνται αἱ α δ, δ γ ἴσαι.



β Εἴκα ἡ ὀρθογωνίου κώνου τομὰ ἁ α β, ἡ δὲ ἁ β δ παρὰ τὰν διάμετρον, ἢ αὐτὰ διάμετρος, ἁ δὲ α δ γ παρὰ τὰν κατὰ τὸ β ἐπιψαύουσαν τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς, καὶ ἁ γ ε τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς ἐπιψαύουσα κατὰ τὸ γ, ἐσσοῦνται αἱ δ β, β ε ἴσαι.

γ Εἴκα ἡ ὀρθογωνίου κώνου τομὰ ἁ α β, ἡ δὲ β δ παρὰ τὰν διάμετρον ἢ αὐτὰ ἁ διάμετρος, καὶ ἀχθῶσί τινες αἱ α δ, ε ζ παρὰ τὰν κατὰ τὸ β ἐπιψαύουσαν τᾶς τοῦ

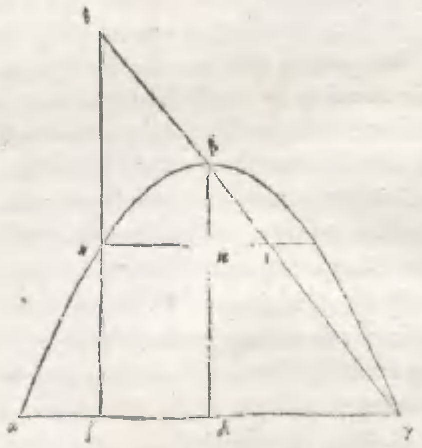




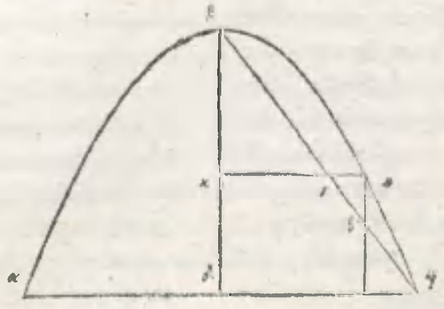
κώνου τομᾶς, ἐσσεῖται ὡς ἁ β δ μάκει ποτὶ τὰν β ζ, οὕτως δυνάμει ἁ α δ ποτὶ τὰν ε ζ. ἀποδέδεικται δὴ ταῦτα ἐν τοῖς κωνικοῖς στοιχείοις.

δ Ἔστω τμῆμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας, καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, τὸ α β γ. ἁ δὲ β δ ἀπὸ μέσας τᾶς α γ παρὰ τὰν διάμετρον ἄχθω, ἢ αὐτὴ διάμετρος ἔστω, καὶ ἁ β γ εὐθεῖα ἐπιζευχθεῖσα ἐκβεβλήσθω. εἰ δὴ καταχθείη τις ἄλλη ἁ ζ θ παρὰ τὰν β δ τέμνουσαν, τὰν δὴ τῶν α γ εὐθειᾶν, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ἁ ζ θ ποτὶ τὰν θ η, ὃν ἁ δ α ποτὶ τὰν δ ζ. ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ κ παρὰ τὰν α γ ἁ κ η. ἔστιν ἄρα ὡς ἁ β δ ποτὶ τὰν β κ μάκει, οὕτως ἁ δ γ ποτὶ τὰν κ η δυνάμει. ἀποδέδεικται γὰρ τοῦτο. ἐσσεῖται ἄρα ὡς ἁ β γ ποτὶ τὰν β ι μάκει, οὕτως ἁ β γ ποτὶ τὰν β θ δυνάμει. ὥστε τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ β γ ποτὶ τὰν β θ, ὃν ἁ γ θ ποτὶ τὰν θ ι. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ γ δ ποτὶ τὰν δ ζ, οὕτως ἁ θ ζ ποτὶ τὰν θ κ. τᾷ δὲ δ γ ἴσα ἐστὶν ἁ δ α. δῆλον οὖν, ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ δ α ποτὶ τὰν δ ζ, ὃν ἁ ζ θ ποτὶ τὰν θ η.

τέμνουσα ἑκατέραν τὰν α γ β εὐθεῖαν

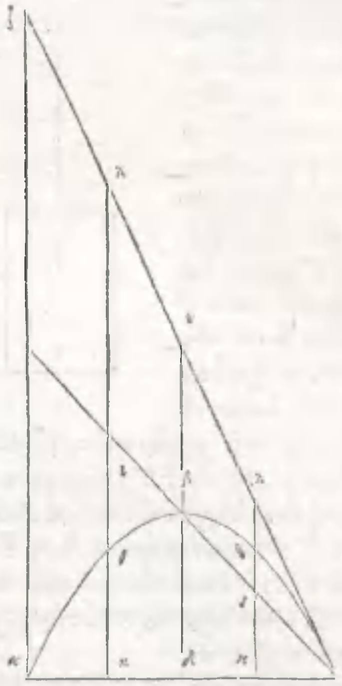


ε Ἔστω τμῆμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς τὸ α β γ, καὶ ἄχθω ἀπὸ τοῦ α παρὰ τὰν διάμετρον ἁ ζ α, ἀπὸ δὲ τοῦ γ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς

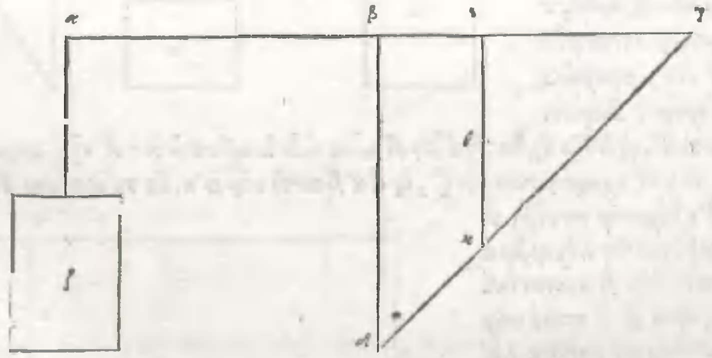


κατὰ

κατὰ τὸ γ, ἁ γ ζ. εἰ δή τις ἀχθείη ἐν τῷ ζ α γ τριγώνῳ παρὰ τὰν α ζ, τὸν αὐτὸν λόγον ἁ ἀχθεῖσα τετμήσεται ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, καὶ ἁ α γ ὑπὸ τᾶς ἀχθείσας (ἀνάλογον) ὁμόλογον δὲ ἐσσεῖται τὸ τμᾶμα τᾶς α γ ποτὶ τὸ α, τῷ τμάματι τᾶς ἀχθείσας τῷ ποτὶ τᾷ α. ἄχθω γάρ τις ἁ δ ε παρὰ τὰν α ζ. καὶ τεμνέτω πρῶτον ἁ δ ε τὰν α γ δίχα. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὀρθογωνίου κώνου τομὰ ἁ α β γ, καὶ ἀγμένη ἁ β δ παρὰ τὰν διάμετρον. αἱ δὲ α δ, δ γ ἴσαι, ἐσσεῖται τᾷ α γ παράλληλος ἁ κατὰ τὸ β ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς. πάλιν ἐπεὶ παρὰ τὰν διάμετρόν ἐστιν ἁ δ ε, καὶ ἀπὸ τοῦ γ ἁ γ ε, ἄκτι ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς κατὰ τὸ γ. ἁ δὲ δ γ παράλληλος τᾷ κατὰ τὸ β ἐπιψαυούσα, ἴσα ἐστὶν ἁ ε β τᾷ β δ. ὥστε τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ α δ ποτὶ τὰν δ γ, ὃν ἁ δ β ποτὶ τὰν β ε. εἰ μὲν οὖν δίχα τέμνει ἁ ἀχθεῖσα τὰν α γ, δέδεικται. εἰ δὲ μή, ἄχθω τις ἄλλα ἁ κ λ παρὰ τὰν α ζ. δεικτέον οὖν, ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ α κ ποτὶ τὸν κ γ, ὃν ἁ κ θ ποτὶ τὰν θ λ. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἁ β ε τᾷ β δ, ἴση ἐστὶ καὶ ἁ ι λ τᾷ κ ι, τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει ποτὶ τὰν κ ι, ὃν ἁ α γ ποτὶ τὰν δ α. ἔχει δὲ καὶ ἁ κ ι ποτὶ τὰν θ κ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ δ α ποτὶ τὰν α κ. δέδεικται γὰρ ἐν τῷ πρότερον, ὡς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει ἁ κ θ ποτὶ τὰν θ λ, ὃν ἁ α κ ποτὶ τὰν κ γ. δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.



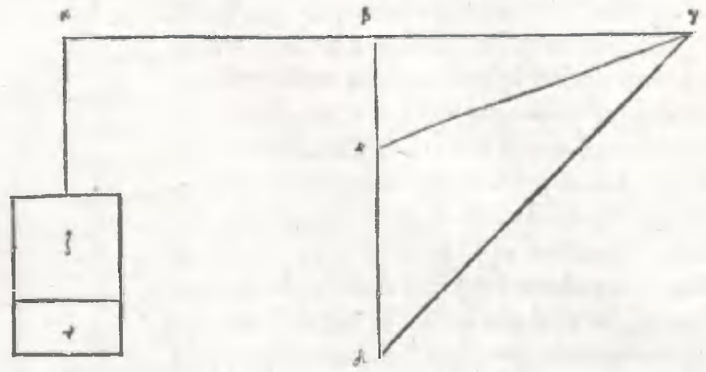
Νοείσθω δὲ τό, ὅτι ἐστὶ τὸ ἐν τῇ θεωρίᾳ προκείμενον ὁρώμενον ἐπὶ ὀρθοῦ ποτὶ τὸν ὁρίζοντα καὶ τᾶς α β γραμμᾶς. ἔπειτα τὰ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ δ κάτω νοείσθω, τὰ δὲ ἐπὶ θάτερα ἄνω. τὸ δὲ β δ γ τρίγωνον ἔστω ὀρθογώνιον, ὀρθὰν ἔχον τὰν ποτὶ τᾷ β γωνίαν, καὶ τὰν β γ πλευρὰν ἴσαν τᾷ ἡμισείᾳ τοῦ ζυγοῦ, δῆλον ὅτι ἴσης οὔσης τᾶς α β τᾷ β γ. κρεμάσθω δὲ τὸ τρίγωνον ἐκ τῶν β γ σαμείων. κρεμάσθω δὲ καὶ ἄλλο χωρίον τὸ ζ ἐκ τοῦ ἑτέρου μέρους τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ α. καὶ ἰσορροπείτω τὸ ζ χωρίον κατὰ τὸ α, κρεμάμενον τῷ β δ γ τριγώνῳ, οὕτως ἐόντι ὡς νῦν κεῖται. φαμὶ δὴ τὸ ζ χωρίον τοῦ β δ γ τριγώνου μέρος τρίτον εἶν. ἐπεὶ γὰρ ὑπόκειται ἰσορροποῦν ὁ ζυγὸς ἐκ, καὶ ἁ α γ γραμμὰ αὐτόν. ὁρίζονται δὲ ποτ' ὀρθὰς ἀγόμεναι τᾷ α γ ἐν τῷ ὀρθῷ ἐπιπέδῳ ποτὶ τὸν ὁρίζοντα, καθέτοι ἐσσοῦνται ἐπὶ τὸν ὁρίζοντα. τετμήσθω δὴ ἁ β γ γραμμὰ κατὰ τὸ ε οὕτως, ὥστε διπλασίονα εἶμεν τὰν γ ε τᾶς ε β. καὶ ἄχθω παρὰ τὰν δ β ἁ κ ε. καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ θ. τοῦ δὴ β δ γ τριγώνου κέντρον βάρεος ἐστὶ τὸ θ σημεῖον. δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς μηχανικοῖς. εἴκα οὖν τοῦ β δ γ τριγώνου, ὁ μὲν κατὰ τὰ β γ κρέμασις λυθείη, κατὰ δὲ τὸ ε κρεμασθῇ, μένει τὸ τρίγωνον, ὡς νῦν ἔχει. ἕκαστον γὰρ τῶν κρεμαμένων ἀπὸ τοῦ σαμείου κατασταθὲν μένει, ὥστε κατὰ κάθετον εἶμεν τότε σαμεῖον τοῦ κρεμαστοῦ, καὶ τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ κρεμαμένου. δέδεικται οὖν καὶ τοῦτο. ἐπεὶ οὖν τὰν αὐτὰν ἕξει κατάστασιν τὸ β γ δ τρίγωνον ποτὶ τὸν ζυγόν, ἰσορροπήσει ὁμοίως τὸ ζ χωρίον. ἐπεὶ δὲ ἰσορροπέοντι τὸ μὲν ζ κρεμάμενον κατὰ τὸ α, τὸ δὲ β δ γ κατὰ τὸ ε, δῆλον ὡς ἀντιπέπονθε τοῖς μακεσι,



κεσι,

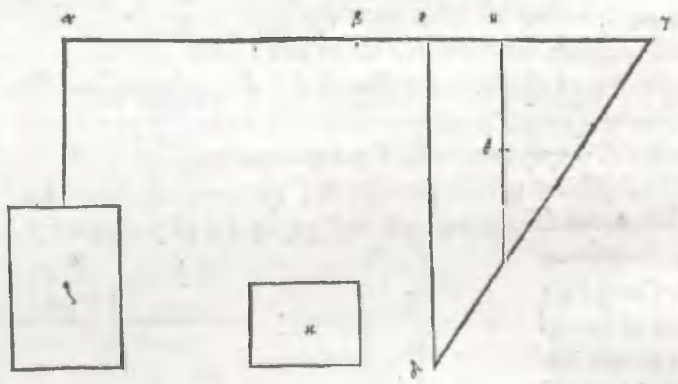
κεσι. καὶ ἐστιν ὡς ἁ α β ποτὶ τὰν β ε, οὕτως τὸ β δ γ τρίγωνον ποτὶ τὸ ζ χωρίον. τριπλασία δὲ ἁ α β τᾶς β ε. καὶ τὸ β δ γ ἄρα τρίγωνον τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ζ χωρίου. φανερὸν δὲ ὅτι καὶ ἐὰν ᾖ τριπλάσιον τὸ β δ γ τρίγωνον τοῦ ζ χωρίου, ὅτι ἰσορροπήσει.

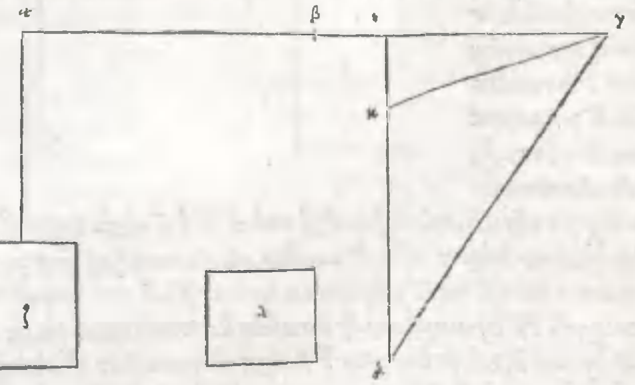
ζ Ἔστω πάλιν ζυγὸς ὁ α γ γραμμά, μέσον δὲ αὐτοῦ ἔστω τὸ β. καὶ κρεμάσθω ἐπὶ τὸ β τὸ γ δ η τρίγωνον. τὸ δὲ γ δ η ἔστω τρίγωνον ἀμβλυγώνιον, βάσιν ἔχον τὰν δ η, ὕψος δὲ τὰν ἴσαν τῷ ἡμίσεϊ τοῦ ζυγοῦ. καὶ κρεμάσθω τὸ δ γ η τρίγωνον ἐκ τῶν β γ σαμείων, τὸ δὲ ζ χωρίον κρεμάμενον ἐπὶ τὸ α ἰσορροπεῖ ἔστω τῷ γ δ η τριγώνῳ, οὕτως ἔχοντι ὡς νῦν κεῖται. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται τὸ ζ χωρίον τρίτον μέρος τοῦ γ δ η τριγώνου. κρεμάσθω γὰρ καὶ ἄλλο χωρίον ἐκ τοῦ α, τρίτον μέρος ἐὸν τοῦ β γ η τριγώνου. ἰσορροπήσει δὴ τὸ β δ γ τρίγωνον τῷ ζ λ. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν β γ η τρίγωνον ἰσορροπεῖ τῷ α, τὸ δὲ β γ δ τῷ ζ λ, καὶ τρίτον ἐστὶ τοῦ β γ δ τὸ ζ λ, φανερὸν ὅτι καὶ τὸ γ δ η τρίγωνον τριπλάσιον τοῦ ζ.



η Ἔστω ζυγὸς ὁ α β, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ β. καὶ κρεμάσθω ἐπὶ τὸ β τὸ γ δ ε τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὀρθὰν ἔχον τὰν ποτὶ τὰν ε γωνίαν. καὶ κρεμάσθω ἐκ τοῦ ζυγοῦ ἐπὶ τὰ γ ε. τὸ δὲ ζ χωρίον κρεμάσθω ἐπὶ τὸ α. καὶ ἰσορροπείτω τῷ γ δ ε οὕτως ἔχοντι ὡς νῦν κεῖται. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ α β ποτὶ τὰν β ε, τοῦτον ἐχέτω τὸ γ δ ε τρίγωνον ποτὶ τὸ κ χωρίον. φαμὶ δὴ τὸ ζ χωρίον τοῦ μὲν γ δ ε τριγώνου ἔλασσον εἶμεν, τοῦ δὲ κ μεῖζον. λελάφθω γὰρ τοῦ δ ε γ τριγώνου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος, καὶ ἔστω τὸ θ. καὶ ἁ θ η ἄχθω παρὰ τὰν δ ε. ἐπεὶ οὖν ἰσορροπεῖ τὸ γ δ ε τρίγωνον τῷ ζ χωρίῳ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον τὸ γ δ ε χωρίον ποτὶ τὸ ζ, ὃν ἁ α β ποτὶ τὰν β η. ὥστε ἔλασσόν ἐστι τὸ ζ τοῦ γ δ ε. καὶ ἐπεὶ τὸ γ δ ε τρίγωνον ποτὶ μὲν τὸ ζ τοῦτον ἔχον τὸν λόγον, ὃν ἁ β α ποτὶ τὰν β η, ποτὶ δὲ τὸ κ, ὃν ἁ β α ποτὶ τὰν β ε. δῆλον ὡς μείζονα λόγον ἔχει τὸ γ δ ε τρίγωνον ποτὶ τὸ κ, ἢ ποτὶ τὸ ζ. ὥστε μεῖζόν ἐστι τὸ ζ τοῦ κ.

κεκρεμάσθω. sic saepius emendandum. cf. 177,6.

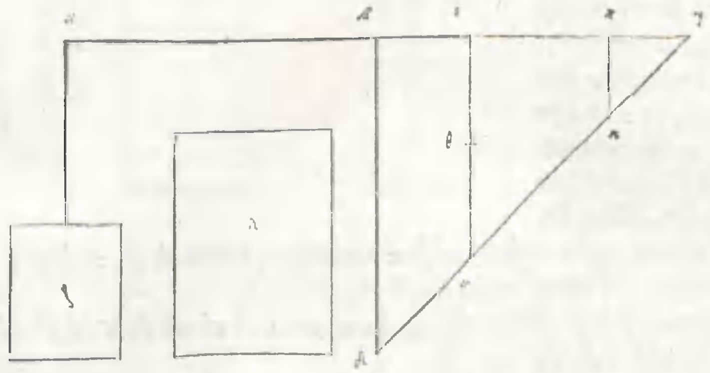




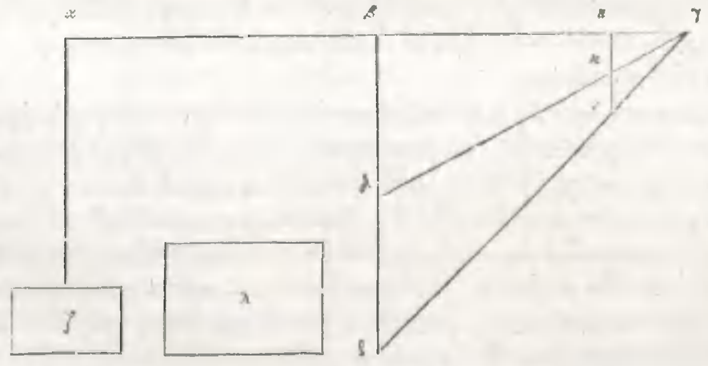
θ Ἔστω πάλιν τὸ μὲν α γ ζύγιον, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ β. τὸ δὲ γ δ κ τρίγωνον ἀμβλυγώνιον βάσιν μὲν ἔχον τὰν δ κ, ὕψος δὲ τὰν ε γ. καὶ κρεμάσθω ἐκ τοῦ ζυγοῦ ἐπὶ τὰ γ, ε, τὸ δὲ ζ χωρίον κρεμάσθω ἐπὶ

ἐπὶ τὸ α, καὶ ἰσορροπείτω τῷ δ ε κ τριγώνῳ, οὕτως ἔχοντι ὡς νῦν κεῖται. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ α β ποτὶ τὰν β ε, τοῦτον ἐχέτω τὸ γ δ κ τρίγωνον ποτὶ τὸ λ. φαμὶ δὴ τὸ ζ τοῦ μὲν λ μεῖζον εἶμεν, τοῦ δὲ δ γ κ ἔλασσον. δειχθήσεται ὁμοίως τῷ πρότερον.

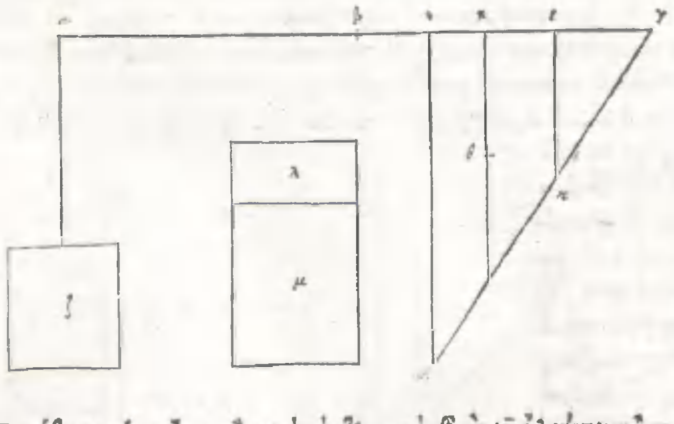
ι Ἔστω πάλιν τὸ μὲν α β γ ζύγιον, καὶ μέσον αὐτοῦ τὸ β. τὸ δὲ β δ η κ τραπέζιον, τὰς μὲν ποτὶ τοῖς β η σαμείοις γωνίας ὀρθὰς ἔχον, τὰν δὲ κ δ πλευρὰν ἐπὶ τὸ γ νεύουσαν. καὶ ὃν ἔχει λόγον ἁ β α ποτὶ τὰν β η, τοῦτον ἐχέτω τὸ β δ η κ τραπέζιον ποτὶ τὸ λ. κεκρεμάσθω δὲ τὸ β δ η κ τραπέζιον ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τῶν β η σημείων. κεκρεμάσθω δὲ καὶ τὸ ζ χωρίον κατὰ τὸ α. καὶ ἰσορροπείτω τῷ β δ κ η τραπεζίῳ, οὕτως ἔχοντι ὡς νῦν ὑπόκειται. φαμὶ τὸ ζ χωρίον ἔλασσον εἶμεν τοῦ λ. τετμάσθω γὰρ ἁ α γ κατὰ τὸ ε οὕτως, ὥστε μὲν ἔχειν λόγον ἃν διπλασία τᾶς δ β, καὶ ἁ κ η ποτὶ τὰν διπλασίαν τᾶς κ η, καὶ τᾶς β δ, τοῦτον ἔχειν τὰν ε η ποτὶ τὰν β ε. καὶ διὰ τοῦ ε παρὰ τὰν β δ ἀχθεῖσα ἁ ε ν τετμάσθω δίχα ἐπὶ τὸ θ, τοῦ δὴ β δ η κ τραπεζίου κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τὸ θ. δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς μηχανικοῖς. ἢν οὖν τὸ β δ η κ τραπέζιον ἐπὶ μὲν τὸ ε κρεμασθῇ, ἀπὸ δὲ τῶν β η σημείων λυθείη, μένει τὰν αὐτὰν ἔχον κατάστασιν, διὰ ταῦτα τοῖς πρότερον, καὶ ἰσορροπήσει τῷ ζ χωρίῳ. λυθῇ, η ἐπεὶ οὖν ἰσορροπεῖ τὸ β δ η κ τραπέζιον κατὰ τὸ ε κρεμάμενον, τῷ ζ χωρίῳ ἐπὶ τὸ α κρεμαμένῳ, ἐσσεῖται ὡς ἁ β α ποτὶ τὰν β ε, τὸ β δ η κ τραπέζιον ποτὶ τὸ ζ χωρίον, μείζονα ἄρα λόγον ἔχει τὸ β δ η κ τραπέζιον ποτὶ τὸ ζ, ἤπερ ποτὶ τὸ λ. ἐπεὶ καὶ ἁ α β ποτὶ τὰν β ε μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ποτὶ τὰν β η. ὥστε ἔλασσον ἐσσεῖται τὸ ζ τοῦ λ.



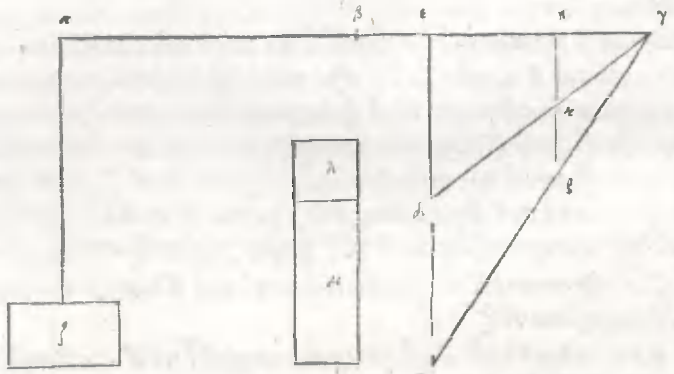
ια Ἔστω πάλιν τὸ μὲν α γ ζύγιον, καὶ μέσον αὐτοῦ τὸ β. τὸ δὲ κ δ τ ρ τραπέζιον ἔστω τὰς μὲν κ δ, τ ρ πλευρὰς ἔχον ἐπὶ τὸ γ νευούσας, τὰς δὲ δ ρ κ τ καθέτους ἐπὶ τὰν β γ. καὶ ἁ δ ρ ἐπὶ τὸ β πιπτέτω. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ α β ποτὶ τὰν β η, τοῦτον ἐχέτω τὸ δ κ τ ρ τραπέζιον ποτὶ τὸ λ. τὸ δὲ δ κ τ ρ τραπέζιον κεκρεμάσθω ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ β, η, καὶ τὸ ζ κατὰ τὸ α, καὶ ἰσορροπείτω τὸ ζ τῷ δ κ ρ τ τραπεζίῳ, οὕτως ἔχοντι ὡς νῦν κεῖται. ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον δειχθήσεται ἔλασσον τὸ ζ χωρίον τοῦ λ.



ιβ Ἔστω πάλιν τὸ μὲν α γ ζύγιον, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ β. τὸ δὲ δ ε κ η τραπέζιον ἔστω τὰς μὲν ποτὶ τοῖς ε, η σημείοις γωνίας ὀρθὰς ἔχον, τὰς δὲ κ δ, ε η γραμμὰς ποτὶ τὸ γ νευούσας. καὶ ὃν μὲν λόγον ἔχει ἁ α β ποτὶ τὰν β η, τοῦτον ἐχέτω τὸ δ κ ε η τραπέζιον ποτὶ τὸ μ. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ α β ποτὶ τὰν β ε, τοῦτον τὸν λόγον ἐχέτω τὸ δ κ ε η τραπέζιον, ποτὶ τὸ λ. κεκρεμάσθω δὲ τὸ δ κ ε η τραπέζιον ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ ε, η. τὸ δὲ ζ χωρίον ἐκκρεμάσθω κατὰ τὸ α, καὶ ἰσορροπείτω τῷ τραπεζίῳ οὕτως ἔχοντι ὡς νῦν ὑπόκειται. φαμὶ δὴ τὸ ζ τοῦ λ μεῖζον εἶμεν, τοῦ δὲ μ ἔλασσον. ἐλάβομεν γὰρ τοῦ δ κ ε η τραπεζίου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος. ἔστω δὲ τὸ θ. λαφθήσεται δὲ ὁμοίως τῷ πρότερον. καὶ ἄγω τὰν θι παρὰ τὰν δε. αὖ οὖν τὸ τραπέζιον ἐκ τοῦ ζυγοῦ κρεμασθήσεται κατὰ τὸ ι, ἀπὸ δὲ τῶν ε, η λυθῇ. μένῃ τὰν αὐτὰν ἔχον κατάστασιν, καὶ ἰσορροπήσει τῷ ζ, διὰ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. ἐπεὶ δὲ ἰσορροπεῖ τὸ τραπέζιον κρεμάμενον κατὰ τὸ ι, τῷ ζ κρεμαμένῳ κατὰ τὸ α, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον τὸ τραπέζιον ποτὶ τὸ ζ, ὃν ἁ αβ ποτὶ τὰν βι. δῆλον οὖν, ὅτι τὸ δκεη ποτὶ μὲν τὸ λ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ποτὶ τὸ ζ. ποτὶ δὲ τὸ μ ἐλάσσονα ἢ ποτὶ τὸ ζ. ὥστε τὸ ζ, τοῦ μὲν λ μεῖζον ἐστὶ, τοῦ δὲ μ ἔλασσον.

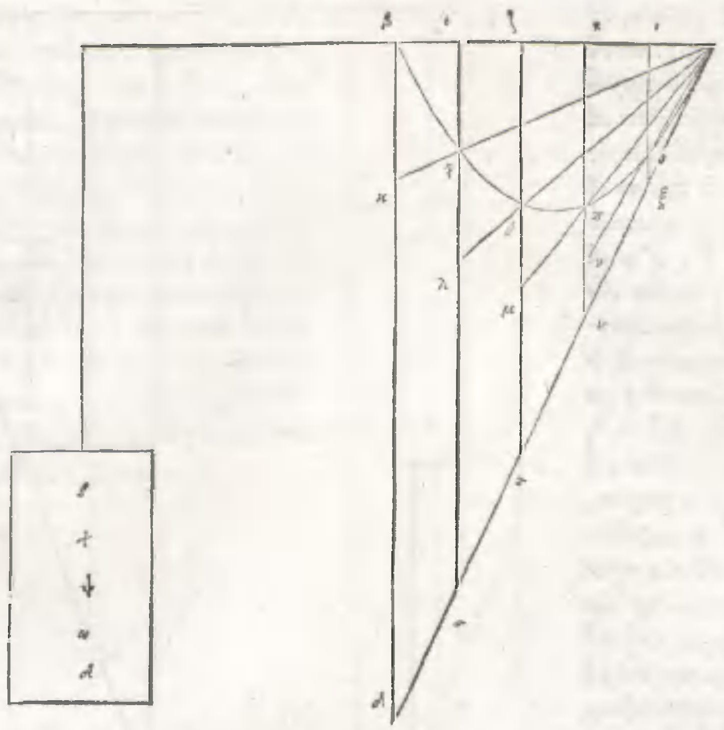


ιγ Ἔστω πάλιν τὸ μὲν αγ ζύγιον, κατὰ μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ β. τὸ δὲ κδ, τρ τραπέζιον. ὥστε τὰς μὲν κδ, τρ πλευρὰς νευούσας εἶμεν ἐπὶ τὸ γ. τὰς δὲ δτ, κρ καθέτους ἐπὶ τὰν βγ. κεκρεμάσθω δὲ ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ ε, η. τὸ δὲ ζ χωρίον κεκρεμάσθω κατὰ τὸ α. καὶ ἰσορροπήτω τῷ δκτρ τραπεζίῳ οὕτως ἔχοντι, ὡς νῦν κεῖται. καὶ ὃν μὲν ἔχει λόγον ἁ αβ ποτὶ τὰν βε, τοῦτον ἐχέτω τὸ δκ, τρ τραπέζιον ποτὶ τὸ λ χωρίον. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ αβ ποτὶ τὰν βη, τοῦτον ἐχέτω τὸ αὐτὸ τραπέζιον ποτὶ τὸ μ. ὁμοίως δὴ τῷ πρότερον δειχθήσεται τὸ ζ τοῦ μὲν λ μεῖζον, τοῦ δὲ μ ἔλασσον.

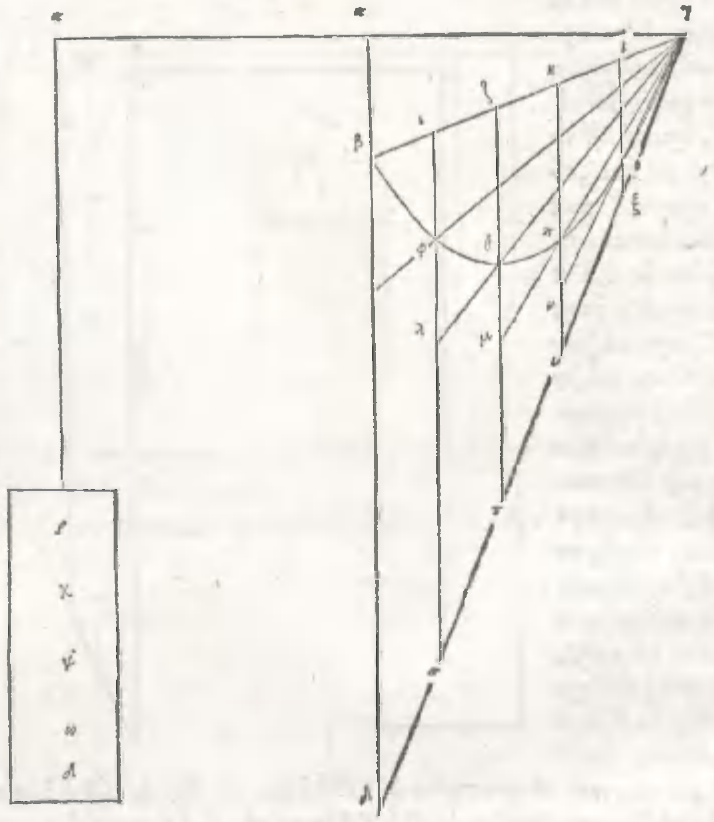


ιδ Ἔστω τμῆμα τὸ βθγ, περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς. ἔστω δὴ πρῶτον ἁ βγ πρὸς ὀρθὰς τᾷ διαμέτρῳ. καὶ ἄχθω ἀπὸ μὲν τοῦ β σαμείου ἁ βδ παρὰ τὰν διάμετρον. ἀπὸ δὲ τοῦ γ ἁ γδ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ γ. ἐσσεῖται δὴ τὸ βγδ τρίγωνον ὀρθογώνιον. διῃρήσθω δὴ ἁ βγ εἰς τμήματα. ὁπόσα οὖν τὰ βε, εζ, ζη, ηι, καὶ ἀπὸ τᾶς τομᾶς ἄχθωσαν παρὰ τὰν διάμετρον αἱ εσ, ζτ, ηυ, ιξ. ἀπὸ δὲ τῶν σαμείων καθ᾽ ἃ τέμνουσιν αὐτὰν τῶν τοῦ κώνου τομὰν, ἐπιζεύχθωσαν κατὰ τὸ γ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν. φαμὶ δὴ τὸ τρίγωνον τὸ βδγ, τῶν μὲν τραπεζίων τῶν κε, λζ, μη, νι, καὶ τοῦ ξιγ τριγώνου ἔλασσον εἶμεν ἢ τριπλάσιον. τῶν δὲ τραπεζίων τῶν ζφ, ηθ, ιπ, καὶ τοῦ ιογ τριγώνου μεῖζον εἶμεν ἢ τριπλάσιον. διήχθω γὰρ εὐθεῖα, ἡ αβ. καὶ ἀπολελάφθω ἁ αβ ἴσα τᾷ βγ. καὶ νοείσθω ζύγιον τὸ αγ. μέσον δὲ αὐτοῦ ἐσσεῖται τὸ β, καὶ κεκρεμάσθω ἐκ τοῦ β. κεκρεμάσθω δὲ καὶ τὸ βδγ ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ βγ. ἐκ δὲ τοῦ θατέρου μέρεος ζυγοῦ κεκρεμάσθω τὰ ρχψωδ χωρία κατὰ τὸ α. καὶ ἰσορροπείτω τὸ μὲν ρ χωρίον τῷ δε τραπεζίῳ, οὕτως ἔχοντι. τὸ δὲ χ τῷ ζσ τραπεζίῳ. τὸ δὲ ψ τῷ θη. τὸ δὲ ω τῷ υι. τὸ δὲ δ τῷ ξιγ τριγώνῳ. ἰσορροπήσει δὴ καὶ τὸ ὅλον τῷ ὅλῳ. ὥστε τριπλάσιον ἂν εἴη τὸ βδγ τρίγωνον τοῦ ρχψωδ χωρίου. καὶ ἐπεὶ ἐστὶ τμῆμα τὸ βγθ, ὃ περιέχεται ὑπό τε εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς. καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ β παρὰ τὰν διάμετρον ἦκται ἁ βδ. ἀπὸ δὲ τοῦ γ ἁ γδ, ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ γ. ἄκται δέ τις καὶ ἄλλα παρὰ τὰν διάμετρον ἁ σε. τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ βγ ποτὶ τὰν βε, ὃν ἁ σε ποτὶ τὰν εφ. ὥστε καὶ ἁ βα ποτὶ τὰν βε τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ δε τραπέζιον ποτὶ τὸ κε. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται ἁ αβ ποτὶ τὰν βζ τὸν αὐτὸν ἔχειν

χειν λόγον, ὃν τὸ σζ τραπέζιον ποτὶ τὸ λζ. ποτὶ δὲ τὰν βη, ὃν τὸ τη ποτὶ τὸ μη. ποτὶ δὲ τὰν βι, ὃν τὸ υι ποτὶ τὸ νι. ἐπεὶ οὖν ἐστὶ τραπέζιον τὸ δε, τὰς μὲν ποτὶ τοῖς βε σημείοις γωνίας ὀρθὰς ἔχον, τὰς δὲ πλευρὰς ἐπὶ τὸ γ νευούσας. ἰσορροπεῖ δέ τι χωρίον αὐτῷ τὸ ρ, κρεμάμενον ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ α, οὕτως ἔχοντος τοῦ τραπεζίου, ὡς νῦν κεῖται. καί ἐστιν ὡς ἁ βα ποτὶ τὰν βε, οὕτως τὸ δε τραπέζιον ποτὶ τὸ κε, μεῖζον ἄρα ἐστὶ τὸ κε χωρίον τοῦ ρ χωρίου. δέδεικται γὰρ τοῦτο. πάλιν δὲ ἐπεὶ τὸ ζσ τραπέζιον, τὰς μὲν ποτὶ τοῖς ζε γωνίας ὀρθὰς ἔχων, τὰν δὲ στ νεύουσαν ἐπὶ τὸ γ. ἰσορροπεῖ δὲ αὐτῷ χωρίον τὸ χ ἐκ τοῦ ζυγοῦ κρεμάμενον κατὰ τὸ α, οὕτως ἔχοντι τῷ τραπεζίῳ ὡς νῦν κεῖται. καὶ ἐστὶν, ὡς μὲν ἁ βα ποτὶ τὰν βε, οὕτως τὸ ζσ τραπέζιον ποτὶ τὸ ζφ. ὡς δὲ ἁ αβ ποτὶ τὰν βζ, οὕτως τὸ ζσ τραπέζιον ποτὶ τὸ λζ. εἴη ἂν καὶ τὸ χ χωρίον τοῦ μὲν λζ τραπεζίου ἔλασσον, τοῦ δὲ ζφ μεῖζον. δέδεικται γὰρ καὶ τοῦτο. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ψ χωρίον τοῦ μὲν μη τραπεζίου ἔλασσον, τοῦ δὲ θη μεῖζον. καὶ τὸ ω χωρίον τοῦ μὲν νοιη τραπεζίου ἔλασσον, τοῦ δὲ πι μεῖζον. ὁμοίως δὴ καὶ τὸ δ χωρίον τοῦ μὲν ξιγ τριγώνου ἔλασσον, τοῦ δὲ γιο μεῖζον. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν κε τραπέζιον μεῖζον ἐστὶ τοῦ ρ χωρίου, τὸ δὲ λζ τοῦ χ, τὸ δὲ μη τοῦ ψ, τὸ δὲ νι τοῦ ω, τὸ δὲ ξιγ τρίγωνον τοῦ δ, φανερὸν ὅτι καὶ πάντα τὰ εἰρημένα χωρία μεῖζονά ἐστι τοῦ ρχψωδ χωρίου. ἔστι δὲ τὸ ρχψωδ τρίτον μέρος τοῦ αγδ τριγώνου. δῆλον ἄρα, ὅτι τὸ βγδ τρίγωνον ἔλασσόν ἐστιν, ἢ τριπλάσιον τῶν κε, λζ, μη, νι τραπεζίων. καὶ τοῦ ξιγ τριγώνου. πάλιν ἐπεὶ τὸ μὲν ζφ τραπέζιον ἔλασσόν ἐστι τοῦ χ χωρίου, τὸ δὲ θη τοῦ ψ, τὸ δὲ ιπ τοῦ ω, τὸ δὲ ιογ τρίγωνον τοῦ δ, φανερὸν ὅτι καὶ πάντα τὰ εἰρημένα ἐλάσσονα ἐστὶ τοῦ δωψχ χωρίου. φανερὸν οὖν ὅτι καὶ τὸ βδγ τρίγωνον μεῖζόν ἐστιν, ἢ τριπλάσιον τῶν φζ, θη, ιπ τραπεζίων, καὶ τοῦ ιγο τριγώνου. ἔλασσον δὲ ἢ τριπλάσιον τῶν προγεγραμμένων.

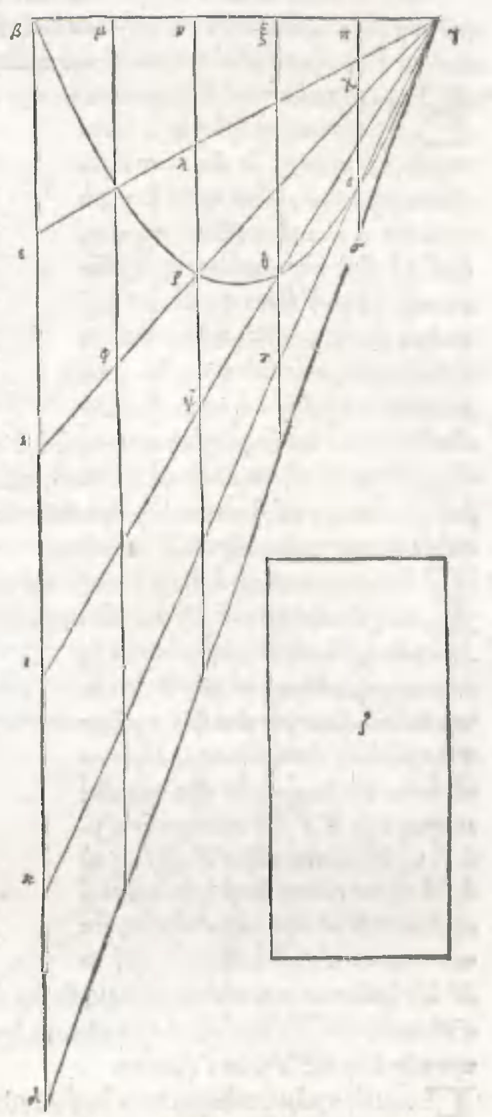


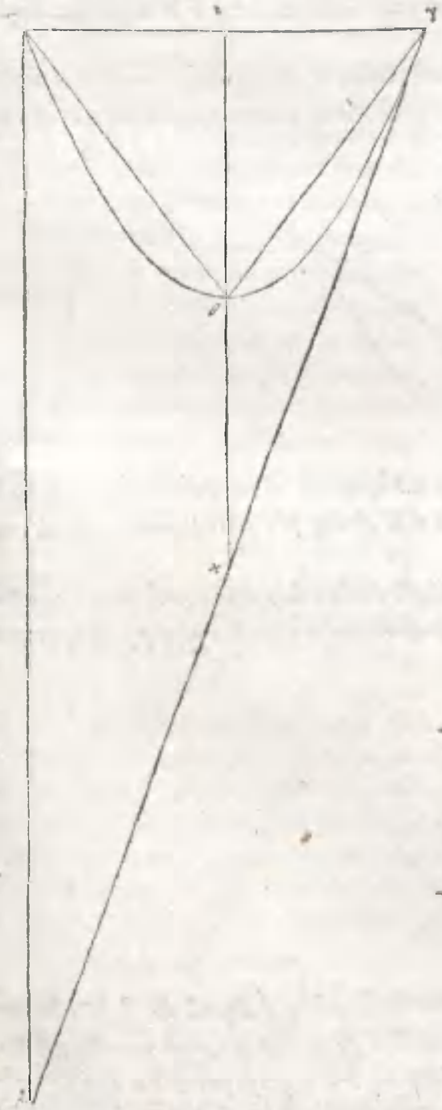
Ἔστω πάλιν τὸ βθγ τμῆμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, ἁ δὲ βγ μὴ ἔστω ποτ᾽ ὀρθὰς τᾷ διαμέτρῳ, ἀναγκαῖον δὴ ἤτοι τὰν ἀπὸ τοῦ β σαμείου παρὰ τὰν διάμετρον ἀγμέναν ἐπὶ τὰ τοῦ τμήματι, ἢ τὰν ἀπὸ τοῦ γ ἀμβλεῖαν ποιεῖν γωνίαν ποτὶ τὰν βγ. ἔστω ἁ τὰν ἀμβλεῖαν ποιοῦσα ἁ πρὸς τῷ β, καὶ ἄχθω παρὰ τὰν διάμετρον ἀπὸ τοῦ β ἁ βδ. καὶ ἀπὸ τοῦ γ ἁ γδ, ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ γ. καὶ διῃρήσθω ἁ βγ εἰς τμήματα ἴσα ὁπόσα οὖν τὰ βε, εζ, ζη, ηι, ιγ. ἀπὸ δὲ τῶν ε, ζ, η, ι παρὰ τὰν διάμετρον ἄχθωσαν αἱ ες, ζτ, ηυ, ιξ. καὶ ἀπὸ τῶν σαμείων καθ᾽ ὃ τέμνοντι αὐται τὰν τοῦ κώνου τομὰν ἐπιζεύχθωσαν ἐπὶ τὸ γ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν. φημὶ δὴ καὶ νῦν, τὸ βδγ τρίγωνον, τῶν μὲν τραπεζίων τῶν βφ, λζ, θη, πι, καὶ τοῦ γιξ τριγώνου ἔλασσον εἶμεν ἢ τριπλάσιον. τῶν δὲ ζφ, ηθ, ιπ, καὶ τοῦ γοι τριγώνου μεῖζον ἢ τριπλάσιον. ἐκβεβλήσθω ἡ δβ ἐπὶ θάτερα ἀγαγὼν κάθετον τὰν γκ, τᾷ γκ ἴσαν ἀπέλαβον τὰν ακ. νοείσθω δὲ πάλιν ζύγιον τὸ αγ. μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ κ, καὶ κρεμάσθω ἐκ τοῦ κ. κεκρεμάσθω δὲ καὶ τὸ γκδ τρίγωνον ἐκ τοῦ ἡμίσεος τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ γκ, ἔχον ὡς νῦν κεῖται, ἐκ τοῦ θατέρου μέρους τοῦ ζυγοῦ κρεμάσθωσαν ιε κατὰ τὸ α τὰ ρχψω δ χωρία, καὶ τὸ μὲν ρ τῷ δ ε τραπεζίῳ ἰσορροπείτω, οὕτως ἔχοντι ὡς νῦν κεῖται. τὸ δὲ χ τῷ ζ σ τραπεζίῳ. τὸ δὲ ψ τῷ τ η. τὸ δὲ ω τῷ υ ι. τὸ δὲ δ τῷ γ ι ξ τριγώνῳ. ἰσορροπήσει δὲ καὶ τὸ ὅλον τῷ ὅλῳ. ὥστε εἴη ἂν καὶ τὸ δ β γ τρίγωνον τριπλάσιον τοῦ ρ χ ψ ω δ χωρίου. ὁμοίως δὴ τῷ πρότερον δειχθήσεται, ὅτι τὸ β φ τραπέζιον τοῦ ρ χωρίου μεῖζον, καὶ τὸ μ θ ε τραπέζιον μεῖζον ἐὸν τοῦ χ χωρίου, τὸ δὲ ζ φ ἔλασσον. καὶ τὸ μὲν μ η τραπέζιον μεῖζον ἐὸν τοῦ ψ χωρίου. τὸ δὲ κ θ ἔλασσον. καὶ ἔτι τὸ μὲν ν ι τραπέζιον μεῖζον ἐὸν τοῦ ω χωρίου, τὸ δὲ π ι ἔλασσον. καὶ τὸ μὲν ξ ι γ τρίγωνον μεῖζον τοῦ δ χωρίου. τὸ δὲ γ ι ο ἔλασσον. δῆλον οὖν ἐστίν.



ις Ἔστω πάλιν τμῆμα τὸ β θ γ, περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας, καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς. καὶ ἄχθω διὰ μὲν τοῦ β ἁ β δ παρὰ τὰν διάμετρον. ἀπὸ δὲ τοῦ γ ἁ γ δ, ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ γ. ἔστω δὲ τοῦ β δ γ τριγώνου τρίτον μέρος τὸ ζ χωρίον. φαμὶ δὴ τὸ β θ γ τμῆμα ἴσον εἶμεν τῷ ζ χωρίῳ. εἰ γὰρ μή ἐστιν ἴσον, ἤτοι μεῖζόν ἐστιν ἢ ἔλασσον. ἔστω δὴ πρότερον, εἰ δυνατόν, μεῖζον. ἁ ὑπεροχὰ ἃ ὑπερέχει τὸ β θ γ τμῆμα τοῦ ζ χωρίου, συντιθεμένα αὐτὰ ἑαυτᾷ ἐσσεῖται μείζων τοῦ β γ δ τριγώνου. δυνατὸν δέ ἐστι λαβεῖν τι χωρίον ἔλασσον τᾶς ὑπεροχᾶς, ὃ ἐσσεῖται μέρος τοῦ β δ γ τριγώνου. ἔστω δὲ τὸ β γ ε τρίγωνον ἔλασσόν τε τᾶς εἰρημένας ὑπεροχᾶς, καὶ μέρος τοῦ β δ γ τριγώνου. ἐσσεῖται δὲ τὸ αὐτὸ ἁ β ε μέρος τᾶς β δ. διῃρήσθω οὖν ἁ β δ εἰς τὰ μέρη. καὶ ἔστω τὰ τῶν διαιρέσεων σημεῖα τὰ η, ι, κ. καὶ ἀπὸ τῶν η, ι, κ σαμείων ἐπὶ τὰ γ εὐθεῖαι ἐπεζεύχθωσαν. τέμνοντι δὴ αὗται τὰν τοῦ κώνου τομάν, ἐπεὶ ἁ γ δ ἐπιψαύουσά ἐντι αὐτᾶς κατὰ τὸ γ. καὶ διὰ τῶν σαμείων τέμνοντι τὰν τομάν, αἱ εὐθεῖαι ἄχθωσαν παρὰ τὰν διάμετρον, αἱ μ φ, ν ρ, ξ θ. ἐσσοῦνται δὲ αὗται καὶ παρὰ τὰν β δ. ἐπεὶ οὖν ἔλασσόν ἐστι τὸ β γ ε τρίγωνον τᾶς ὑπεροχᾶς, ἃ ὑπερέχει τὸ β θ γ τμῆμα τοῦ ζ χωρίου, δῆλον ὡς τὰ συναμφότερα τό τε ζ χωρίον, καὶ τὸ β γ ε τρίγωνον, ἐλάσσονά ἐντι τοῦ τμήματος. καὶ τῷ β γ ε τριγώνῳ ἴσα τὰ τραπέζιά ἐντι. δι' ὧν ἁ τοῦ κώνου τομὰ πορεύεται, τὰ μ ε, φ λ, θ ρ, θ ο, καὶ τὸ γ ο σ τρίγωνον. τὸ μὲν γὰρ μ ε τραπέζιον κοινόν, τὸ δὲ μ λ ἴσον τῷ φ λ, καὶ τὸ λ ξ ἴσον τῷ θ ρ. καὶ τὸ χ ξ ἴσον τῷ ο θ. καὶ τὸ γ χ π τρίγωνον τῷ γ ο σ τριγώνῳ. τὸ δὴ ζ χωρίον ἔλασσόν ἐστι τῶν τραπεζίων τῶν μ λ, ξ ρ, π θ, καὶ τοῦ π ο γ τριγώνου. καὶ ἔστι τὸ β δ γ τρίγωνον τριπλάσιον τοῦ ζ χωρίου. τὸ δὴ β δ γ ἔλασσόν ἐστιν ἢ τριπλάσιον τῶν μ λ, ρ ξ, θ π τραπεζίων, καὶ τοῦ π ο γ τριγώνου, ὅπερ ἀδύνατον. ἐδείχθη γὰρ μεῖζον ἢ τριπλάσιον. οὐκοῦν οὐ μεῖζόν ἐστι τὸ β θ γ τμῆμα τοῦ ζ χωρίου. λέγω δή, ὅτι οὐδὲ ἔλασσον. ἔστω γάρ, εἰ δυνατόν, ἔλασσον. πάλιν ἁ ὑπεροχὰ ἃ ὑπερέχει τὸ ζ χωρίον τοῦ β θ γ τμήματος, αὐτὰ ἑαυτᾷ συντιθεμένα ὑπερέχει καὶ τοῦ β δ γ τριγώνου. δυνατὸν δέ ἐστι λαβεῖν χωρίον ἔλασσον τᾶς ὑπεροχᾶς, ὃ ἐσσεῖται μέρος τοῦ β δ γ τριγώνου.

ἔστω οὖν τὸ β γ ε τρίγωνον ἔλασσον τᾶς ὑπεροχᾶς καὶ μέρος τοῦ β δ γ τριγώνου. καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ κατασκευάσθω. ἐπεὶ οὖν ἐστι τὸ β γ ε τρίγωνον ἔλασσον τᾶς ὑπεροχᾶς ἃ ὑπερέχει τὸ ζ κατεσκευάσθω χωρίον τοῦ β θ γ τμήματος, τὸ β ε γ τρίγωνον, καὶ τὸ β θ γ τμῆμα ἀμφότερα ἐλάσσονά ἐντι τοῦ ζ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ζ χωρίον ἔλασσον τῶν τετραπλεύρων τῶν ε μ, φ ν, ψ ξ, π τ, καὶ τοῦ γ π σ τριγώνου. ἔστι γὰρ τὸ β δ γ τοῦ μὲν ζ τριπλάσιον, τῶν δὲ εἰρημένων χωρίων ἔλασσον ἢ τριπλάσιον, ὡς ἐν τῷ πρὸ τούτου ἐδείχθη. ἔλασσον ἄρα τὸ β γ ε τρίγωνον, καὶ τὸ β θ γ τμῆμα τῶν τετραπλεύρων τῶν ε μ, φ ν, ξ ψ, π τ, καὶ τοῦ γ π σ τριγώνου. ὥστε κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ τμήματος, ἔλασσον εἴη καὶ τὸ γ β ε τρίγωνον, τῶν περιλειπομένων χωρίων, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. ἐδείχθη γὰρ ἴσον ἐὸν τὸ β ε γ τρίγωνον τοῖς τραπεζίοις τοῖς ε μ, φ λ, θ ρ, θ ο. καὶ τῷ γ ο σ τριγώνῳ, ἅ ἐστιν μείζονα τῶν περιλειπομένων χωρίων. οὐκ ἄρα ἔλασσόν ἐστι τὸ β θ γ τμῆμα τοῦ ζ χωρίου. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ μεῖζον, ἴσον ἄρα τὸ τμῆμα τῷ ζ χωρίῳ.

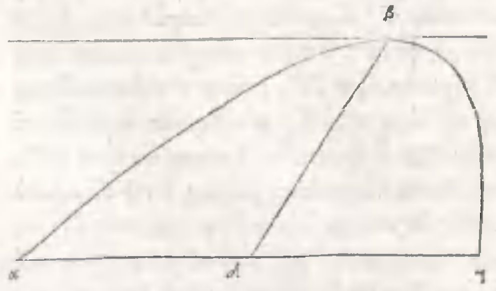




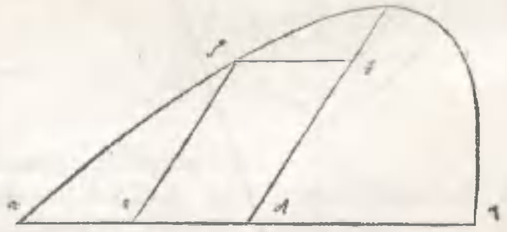
ιζ Τούτου δεδειγμένου φανερόν, ὅτι πᾶν τμῆμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας τε καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, ἐπίτριτόν ἐστι τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος βάσιν τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ὕψος ἴσον. ἔστω γὰρ τμῆμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας τε καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, κορυφὰ δὲ αὐτοῦ ἔστω τὸ θ σαμεῖον. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸ τρίγωνον τὸ β θ γ, τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμάματι, καὶ ὕψος ἴσον. ἐπεὶ οὖν τὸ θ σαμεῖον κορυφά ἐστι τοῦ τμάματος, ἁ ἀπὸ τοῦ θ εὐθεῖα παρὰ τὰν διάμετρον ἀχθεῖσα δίχα τέμνει τὰν β γ. καὶ ἁ β γ ἐστὶ παρὰ τὰν ἐπιψαύουσαν τᾶς τομᾶς κατὰ τὸ θ. ἄχθω δὲ ἁ ε θ παρὰ τὰν διάμετρον. ἄχθω δὲ καὶ ἀπὸ τοῦ β παρὰ τὰν διάμετρον ἁ β δ. ἀπὸ δὲ τοῦ γ ἁ γ δ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ γ. ἐπεὶ οὖν ἁ μὲν κ θ παρὰ τὰν διάμετρον ἐστίν, ἁ δὲ γ δ ἐπιψαύουσα τᾶς τομᾶς κατὰ τὸ γ. ἁ δὲ ε γ παράλληλός ἐστι τᾷ ἐπιψαυούσᾳ τᾶς μᾶς κατὰ τὸ θ. τὸ βδγ τρίγωνον τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ βθγ τριγώνου. ἐπεὶ δὲ τὸ βδγ τρίγωνον, τοῦ μὲν βθγ τμήματος διπλάσιον, δῆλον ὡς ἐπίτριτόν ἐστι τὸ βθγ τμῆμα τοῦ βθγ τριγώνου.

Τῶν τμημάτων τῶν περιεχομένων ὑπό τε εὐθείας καὶ καμπύλας γραμμᾶς, βάσιν μὲν καλῶ τὰν εὐθεῖαν, ὕψος δὲ τὰν μεγίσταν κάθετον ἀπὸ τᾶς καμπύλας γραμμᾶς, ἀγομέναν ἐπὶ τὰν βάσιν τοῦ τμάματος. κορυφὰν δὲ τὸ σαμεῖον, ἀφ᾽ οὗ ἁ μεγίστα κάθετος ἄγεται.

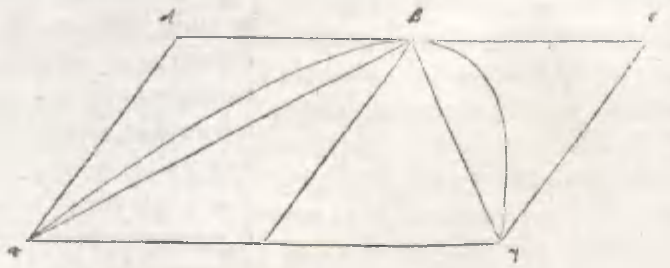
ιη Εἴκα ἐν τμάματι ὃ περιέχεται ὑπὸ εὐθείας, καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, ἀπὸ μέσας τᾶς βάσεως ἀχθῇ εὐθεῖα παρὰ τὰν διάμετρον, κορυφὰ ἐσσεῖται τοῦ τμάματος τὸ σαμεῖον, καθ᾽ ὃ ἁ παρὰ τὰν διάμετρον ἀχθεῖσα τέμνει τὰν τοῦ κώνου τομάν. ἔστω γὰρ τμᾶμα τὸ αβγ, περιεχόμενον ὑπό τε εὐθείας ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, καὶ ἀπὸ μέσας τᾶς αγ ἄχθω ἁ δβ παρὰ τὰν διάμετρον. ἐπεὶ οὖν ἐν ὀρθογωνίου κώνου τομᾷ ἁ βδ ἄκται παρὰ τὰν διάμετρον, καὶ ἴσαι ἐντὶ αἱ αδ, δγ, δῆλον ὡς παράλληλός ἐντι ἅ τε αγ, καὶ ἁ κατὰ τὸ β ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς. φανερὸν οὖν ὅτι ἀπὸ τᾶς τομᾶς ἐπὶ τὰν αγ ἀγομενᾶν καθέτων μεγίστα ἐσσεῖται, ἁ ἀπὸ τοῦ β ἀγομένα. κορυφὰ οὖν ἐστι τοῦ τμάματος τὸ β σαμεῖον.



ιθ Εἴκα τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς ἀχθῶσι δύο εὐθεῖαι παρὰ τὰν διάμετρον, ἁ μὲν ἀπὸ μέσας τᾶς βάσεως, ἁ δὲ ἀπὸ μέσας τᾶς ἡμισείας, ἁ ἀπὸ μέσας τᾶς βάσεως ἀχθεῖσα, τᾶς ἀπὸ μέσας τᾶς ἡμισείας ἀγομένας ἐπίτριτος ἐσσεῖται μάκει. ἔστω γὰρ τὸ αβγ τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς. καὶ ἄχθω παρὰ τὰν διάμετρον ἁ μὲν βδ, ἀπὸ μέσας τᾶς αγ, ἁ δὲ εζ ἀπὸ μέσας τᾶς αδ. ἄχθω δὲ καὶ ἁ ζθ παρὰ τὰν αγ. ἐπεὶ οὖν ἐν ὀρθογωνίου κώνου τομᾷ ἁ βδ παρὰ τὰν διάμετρον ἄκται, καὶ αἱ αδ, ζθ παρὰ τὰν κατὰ τὸ β ἐπιψαύουσαν. ἐσσεῖ μέν τοι δῆλον, ὡς τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ἁ βδ ποτὶ τὰν βθ μάκει, ὃν ἁ αδ ποτὶ τὰν ζθ δυνάμει. τετραπλασία ἄρα ἐστὶ καὶ ἁ βδ τᾶς βθ μάκει. φανερὸν οὖν ὅτι ἐπίτριτός ἐστιν ἁ βδ τᾶς εζ μάκει.

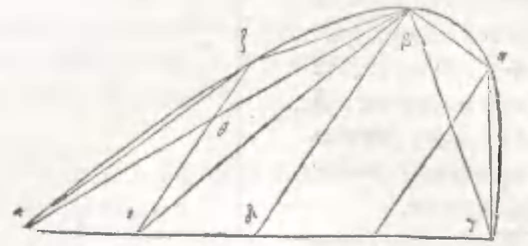


κ Εἴκα εἰς τμᾶμα περιεχόμενον ὑπό τε εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, τρίγωνον ἐγγραφῇ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμάματι, καὶ ὕψος τὸ αὐτό, μεῖζον ἐσσεῖται τὸ ἐγγραφὲν τρίγωνον, ἢ ἥμισυ τοῦ τμήματος. ἔστω γὰρ τὸ αβγ τμᾶμα, οἷον εἴρηται. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸ τρίγωνον τὸ αβγ, τὰν αὐτὰν ἔχον βάσιν τῷ ὅλῳ, καὶ ὕψος ἴσον. ἐπεὶ οὖν τὸ τρίγωνον τῷ τμάματι τὰν αὐτὰν ἔχει βάσιν, καὶ ὕψος τὸ αὐτό, ἀναγκαῖον τὸ β σαμεῖον κορυφὰν εἶναι τοῦ τμάματος. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἁ αγ τᾷ κατὰ τὸ β ἐπιψαυούσᾳ τᾶς τομᾶς. ἄχθω ἁ δε διὰ τοῦ β παρὰ τὰν αγ. καὶ ἀπὸ τῶν α, γ αἱ αδ, γε, παρὰ τὰν διάμετρον. πεσοῦνται δὴ αὗται ἐκτὸς τοῦ τμάματος. ἐπεὶ οὖν ἥμισύ ἐστι τὸ αβγ τρίγωνον τοῦ αδεγ παραλληλογράμμου, φανερὸν ὅτι μεῖζόν ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ τμάματος δεδειγμένου. δῆλον ὅτι ὡς εἰς τὸ τμᾶμα δυνατόν ἐστι πολύγωνον ἐγγράψαι. ὥστε εἶμεν τὰ περιλειπόμενα τμήματα παντὸς ἐλάσσονα, τοῦ

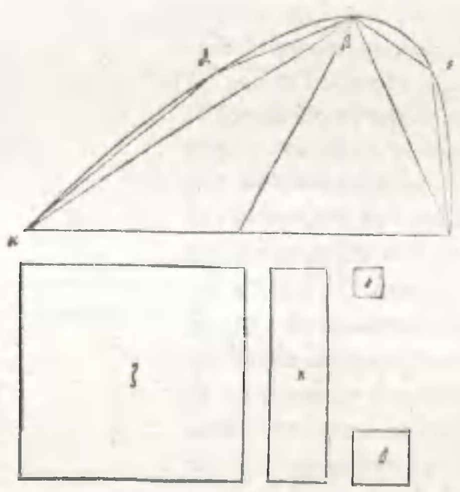


τοῦ προτεθέντος χωρίου. ἀφαιρουμένου γὰρ ἀεὶ μείζονος τοῦ ἡμίσεος, διὰ τοῦτο φανερὸν ὅτι ἐλασσοῦντες ἀεὶ τὰ λειπόμενα τμήματα, ποιησοῦμεν ταῦτα ἐλάσσονα παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου.

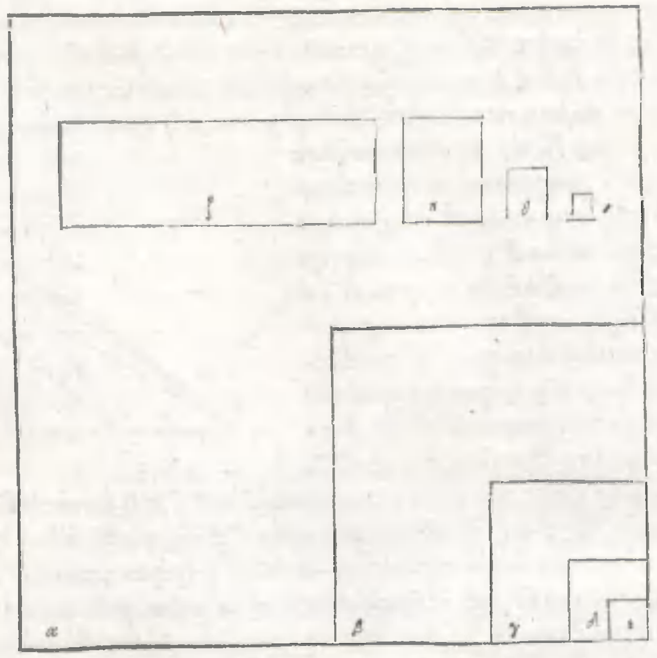
Εἴκα εἰς τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς τρίγωνον ἐγγραφῇ, τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμάματι, καὶ ὕψος τὸ αὐτό, ἐγγραφέωντι δὲ καὶ ἄλλα τρίγωνα εἰς τὰ κα λειπόμενα τμήματα τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντα τοῖς τμαμάτεσσι, καὶ ὕψος τὸ αὐτό, ἑκατέρου τῶν τριγώνων τῶν εἰς τὰ περιλειπόμενα τμήματα ἐγγραφέντων, ὀκταπλάσιον ἐσσεῖται τὸ τρίγωνον τὸ εἰς τὸ ὅλον τμᾶμα ἐγγραφέν. ἔστω τὸ αβγ τμᾶμα, οἷον εἴρηται. καὶ τετμήσθω ἁ αγ δίχα τῷ δ. ἁ δὲ βδ ἄχθω παρὰ τὰν διάμετρον, τὸ β ἄρα σαμεῖον κορυφά ἐστι τοῦ τμάματος. τὸ ἄρα αβγ τρίγωνον τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχει τῷ τμάματι, καὶ ὕψος τὸ αὐτό. πάλιν τετμήσθω δίχα ἁ αδ τῷ ε. καὶ ἄχθω ἁ εζ παρὰ τὰν διάμετρον. τετμήσθω δὲ ἁ αβ κατὰ τὸ θ. τὸ ἄρα ζ σαμεῖον κορυφή ἐστι τμάματος τοῦ αζβ. τρίγωνον ἄρα τὸ αζβ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχει τῷ αζβ τμάματι, καὶ ὕψος τὸ αὐτό. δεικτέον ὅτι ὀκταπλάσιόν ἐστι τὸ αβγ τρίγωνον τοῦ αβζ τριγώνου. ἔστιν οὖν ἁ βδ τᾶς μὲν εζ ἐπίτριτος, τᾶς δὲ εθ διπλασία. διπλασία ἄρα ἐστὶν ἁ εθ τᾶς θζ. ὥστε καὶ τὸ αεβ τρίγωνον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ζβα. τὸ μὲν γὰρ αεθ διπλάσιόν ἐστι τοῦ αθζ. τὸ δὲ θβε τοῦ ζθβ. ὥστε τὸ αβγ τοῦ αζβ ὀκταπλάσιον. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ τοῦ εἰς τὸ βηγ τμᾶμα ἐγγραφέντος.



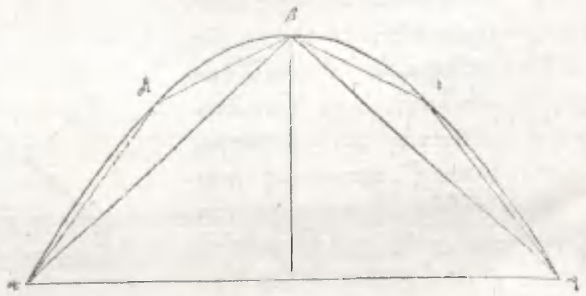
Εἴκα ᾖ τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, καὶ χωρία τεθέωντι ἑξῆς κβ ὁποσαοῦν ἐν τῷ τετραπλασίονι λόγῳ. ᾖ δὲ τὸ μέγιστον τῶν χωρίων ἴσον τῷ τριγώνῳ τῷ βάσιν ἔχοντι τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ὕψος τὸ αὐτό, σύμπαντα τὰ χωρία ἐλάσσονα ἐσσεῖται τοῦ τμάματος. ἔστω γὰρ τμᾶμα τὸ αδβεγ, περιεχόμενον ὑπό τε εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου τομᾶς. χωρία δὲ ἔστω ὁποσαοῦν ἑξῆς κείμενα τὰ ζ, η, θ, ι. τετραπλάσιον δὲ ἔστω τὸ ζ. καὶ ἔστω τὸ ζ ἴσον τῷ τριγώνῳ τῷ βάσιν ἔχοντι τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ὕψος ἴσον. λέγω ὅτι τὸ τμᾶμα τῶν ζ, η, θ, ι χωρίων μεῖζόν ἐστιν. ἔστω τοῦ μὲν ὅλου τμάματος κορυφὰ τὸ β. τῶν δὲ περιλειπομένων τμαμάτων τὰ δ, ε. ἐπεὶ οὖν τὸ αβγ τρίγωνον ὀκταπλάσιόν ἐστιν ἑκατέρου τῶν αδβ, βεγ τριγώνων, δῆλον ὅτι ὡς ἀμφοτέρων αὐτῶν ἐστι τετραπλάσιον. καὶ ἐπεὶ τὸ αβγ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ζ χωρίῳ, κατὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ τὰ αδβ, βεγ τρίγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ η χωρίῳ. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, ὅτι καὶ εἰς τὰ περιλειπόμενα τμήματα ἐγγραφόμενα τρίγωνα, τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντα τοῖς τμήμασι, καὶ ὕψος τὸ αὐτό, ἴσων ὄντων τῷ θ. καὶ εἰς τὰ ὕστερον γινόμενα τμήματα ἐγγραφόμενα τρίγωνα ἴσα τῷ ι χωρίῳ, σύμπαντα ἄρα τὰ προτεθέντα χωρία ἴσα ἐσσοῦνται πολυγώνῳ τινὶ ἐγγραφέντι εἰς τὸ τμᾶμα. φανερὸν οὖν, ὅτι ἔλασσόν ἐστι τοῦ τμάματος.

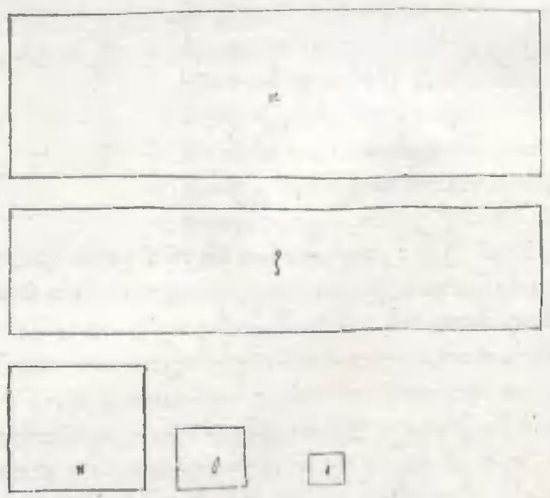


Εἴκα μεγέθεα συντεθέωντι ἑξῆς ἐν τῷ τετραπλασίονι λόγῳ τὰ πάντα μεγέθεα, καὶ ἔτι τοῦ κγ ἐλαχίστου τὸ τρίτον μέρος εἰς τὸ αὐτὸ συντεθέντα, ἐπίτριτα ἐσσοῦνται τοῦ μεγίστου. ἔστω οὖν ὁποσαοῦν μεγέθεα ἑξῆς κείμενα τὰ α, β, γ, δ, ε τετραπλάσιον ἕκαστον τοῦ ἑπομένου. μέγιστον δὲ ἔστω τὸ α. ἔστω δὲ τὸ μὲν ζ τρίτον τοῦ β, τὸ δὲ η τοῦ γ, τὸ δὲ θ τοῦ δ, τὸ δὲ ι τοῦ ε. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ζ τοῦ β τρίτον μέρος ἐστί, τὸ δὲ β τοῦ α τέταρτον μέρος ἐστίν, ἀμφότερα τὰ β, ζ, μέρος τρίτον ἐστὶ τοῦ α. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὰ η, γ τοῦ β. καὶ τὰ θ, δ τοῦ γ. καὶ τὰ ι, ε τοῦ δ, καὶ δ. καὶ τὰ σύμπαντα δὴ τὰ β γ δ ε ζ η θ ι, τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ συμπάντων τῶν α β γ δ ε. ἐντὶ δὲ καὶ αὐτὰ τὰ ζ η θ τρίτον μέρος αὐτῶν τῶν β γ δ. καὶ τὰ λοιπὰ ἄρα τὰ β γ δ ε ι τοῦ λοιποῦ τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ α. δῆλον οὖν, ὅτι τὰ σύμπαντα τὰ α β γ δ ε, καὶ τὸ ι, τουτέστι τὸ τρίτον τοῦ ε, τοῦ α ἐστὶν ἐπίτριτα.



κδ Πᾶν τμῆμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, ἐπίτριτόν ἐστι τριγώνου τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ, καὶ ὕψος ἴσον. ἔστω γὰρ τὸ α δ β ε γ τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς. τὸ δὲ α β γ τρίγωνον ἔστω, τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμήματι, καὶ ὕψος ἴσον. τοῦ δὲ α β γ τριγώνου ἔστω ἐπίτριτον τὸ κ χωρίον. δεικτέον ὅτι ἴσον ἐστὶ τῷ α δ β ε γ τμάματι. εἰ γὰρ μή ἐστιν ἴσον, ἤτοι μεῖζον, ἢ ἔλασσον. ἔστω πρότερον, εἰ δυνατόν, μεῖζον τὸ α δ ε β τμῆμα τοῦ κ χωρίου. ἐνέγραψα δὴ τὰ α δ β, β ε γ τρίγωνα, ὡς εἴρηται. ἐνέγραψα δὲ εἰς τὰ περιλειπόμενα τμήματα ἄλλα τρίγωνα, τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντα τοῖς τμήμασι, καὶ ὕψος τὸ αὐτό. καὶ ἀεὶ εἰς τὰ ὕστερον γινόμενα τμήματα ἐγγράφω δύο τρίγωνα τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντα τοῖς τμήμασι, καὶ ὕψος τὸ αὐτό. ἐσσοῦνται δὴ τὰ καταλειπόμενα τμήματα ἐλάσσονα τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει τὸ α δ ε β γ τμῆμα τοῦ κ χωρίου. ὥστε τὸ ἐγγραφόμενον πολύγωνον μεῖζον ἐσσεῖται τοῦ κ, ὅπερ ἀδύνατον. ἐπεὶ ἐστὶν ἑξῆς κείμενα χωρία ἐν τῷ τετραπλασίονι λόγῳ. πρῶτον μὲν τὸ α β γ τρίγωνον τετραπλάσιον τῶν α δ β, β ε γ τριγώνων. ἔπειτα δὲ, ταῦτα τετραπλάσια τῶν εἰς τὰ ἑπόμενα τμήματα ἐγγραφέντων. καὶ ἀεὶ οὕτω δῆλον, ὡς σύμπαντα τὰ χωρία ἐλάσσονα ἐστὶν, ἢ ἐπίτριτα τοῦ μεγίστου. τὸ δὲ κ ἐπίτριτόν ἐστι τοῦ μεγίστου χωρίου. οὐκ ἄρα ἐστὶ μεῖζον τὸ α δ β ε γ τμῆμα τοῦ κ χωρίου. ἔστω δὲ εἰ δυνατόν, ἔλασσον. κείσθω δὴ τὸ μὲν α β γ τρίγωνον, ἴσον τῷ ζ. τοῦ δὲ ζ τέταρ-





τον τὸ η. καὶ ὁμοίως τοῦ η τὸ θ. καὶ ἀεὶ ἑξῆς τιθέσθω. ὥστε καταγένηται τὸ ἔσχατον ἔλαττον τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει τὸ κ χωρίον τοῦ τμήματος, καὶ ἔστω ἔλασσον τὸ ι. ἐστὶ δὲ τὰ ζ η θ ι χωρία, καὶ τὸ τρίτον τοῦ ι, ἐπίτριτα τοῦ ζ. ἐστὶ δὲ καὶ τὸ κ τοῦ ζ ἐπίτριτον. ἴσον ἄρα τὸ κ τοῖς ζ η θ ι, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ι. ἐπεὶ οὖν τὸ κ χωρίον τῶν μὲν ζ η θ ι χωρίων ὑπερέχει ἐλάσσονι τοῦ ι, τοῦ δὲ τμήματος μείζονι τοῦ ι, δῆλον ὡς μείζονα ἐντὶ τὰ ζ η θ ι χωρία τοῦ τμήματος, ὅπερ ἀδύνατον. ἐδείχθη γὰρ, ὅτι ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν χωρία ἑξῆς κείμενα ἐν τετραπλασίονι λόγῳ, τὸ δὲ μέγιστον ἴσον ᾖ τῷ εἰς τὸ τμῆμα ἐγγραφομένῳ τριγώνῳ, τὰ σύμπαντα χωρία ἐλάσσονα ἐσσεῖται τοῦ τμήματος. οὐκ ἄρα τὸ α δ β ε γ τμῆμα ἔλασσόν ἐστι τοῦ κ χωρίου. ἐδείχθη δὲ, ὅτι οὐδὲ μεῖζον, ἴσον ἄρα ἐστὶν τῷ κ. τὸ δὲ κ χωρίον ἐπίτριτόν ἐστι τοῦ τριγώνου τοῦ α β γ. καὶ τὸ α δ β ε γ τμῆμα ἐπίτριτόν ἐστι τοῦ α β γ τριγώνου.

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΣΜΟΥ παραβολῆς τέλος.

ARCHIMEDIS SYRACVSANI PHILOSOPHI AC GEOMETRAE EXCELLENTISSIMI OPERA, quæ quidem extant omnia, latinitate iam olim donata, nuncq; primum in lucem edita.

Cum Cæsareæ Maiestatis gratia & priuilegio ad quinquennium.

BASILEAE.

AMPLISSIMO SENATORVM ORDINI VRBIS NORINBERGAE, DOMINIS SVIS obſeruandis, Thomas Gechauff, cognomento Venatorius, ſe ipſum commendat.

*PHiloſophorum omnium, ut uidere licet, P. C.
unum hoc ac ſubinde continuum fuit ſtudium, ut ſi-
mul & animos & actiones inconditæ multitudi-
nis, ab illis nunquam non genus noſtrum ſequenti
bus erroribus, eximerent, atq; ad inquirendæ ue-
ritatis amorem potius inclinarent, inſtigarent,
inflammarent. Quorum magiſtros bifariam diui
ſos à ueteribus iam olim accepimus. Aut enim Italici uocabantur, ab ea
Italiæ parte, quæ pridem magna Græcia eſt dicta, quorum autor & ma
giſter Pythagoras ille Samius fuiſſe perhibetur. Putabant illi plenam
naturalium rerum, ſynceramq; cognitionem penes ſe unos reperiri poſſe.
Qui ab ea ſecta alieni eſſe uidebantur, Ionicos ſe dicebant, hoc potiſſi-
mum nomine ſibi placentes, quod in ipſa media, ut dicitur, Græcia philo-
ſophiæ placita traderent. Poſt longam uerò ſeriem doctorum tandē ad
Anaxagoram et ſumma et caput eius ſectæ rediјt: cui deinde Archelaū
ſucceſſiſſe perhibent. Huius Archelai ſucceſſorem, Auguſtinus doctor
eccleſiaſticus ſanctus, Socratem facit: quem ipſe Plato (aliorum philo
ſophorum quaſi deus) magiſtrum habuiſſe, antiqua et iam olim recepta
in ſcholis noſtris opinione, ad nos uſq; perlatum eſt. Atqui Socrates cū
uideret cauſas rerum ab illis non rarò inquiri, qui parnm purgato eſſent
animo: cum ipſe interim animum ſuum ad cognitionem potius ueri et ſum
mi illius boni intenderet: noluit imperitam multitudinem rebus illis, quæ
captum humani ingenij ut plurimum ſuperant, implicatam teneri. placuit
communi hominum utilitati conſulere, ac ipſum iam ſapientiæ ſtudium ad
corrigendos mores, componendasq; ciuiles actiones, quaſi cœlo ereptam
prædam, inter homines collocare. Et rectè quidem ille cenſuit. Vt quid
enim relictis imis, ad ſumma ſtatim admitterentur, quæ alioqui infauſto
ſidere nata cōſpiciuntur ingenia? ad aratrum potius quàm ad Muſarum
ſacra, idonea iudicamus huiuſmodi portenta. Præter rugas, & triſte ſu
percilium, & ueſanam in pectore bilem, quid illi aliud è ſtudijs ſuis refe-
runt? Quæ uerè generoſa eſt aquila, implumis adhuc cum eſt, nunquam
ſe cœlco credit aperto: ſecus factura, ubi ad ſolis radios contuendos iam lu
minis ſibi eſſe uiderit ſatis. Sic præclara quæ ſunt ingenia, intra præſcri*

*ptos sapientiæ limites tantisper sese continebunt, donec non tam suo amo
re, quàm doctorum uirorum iudicio, summas bonarum artium partes cũ
laude tueri & possint & ualeant. Quisquis hæc quæ dicimus hic, impro
bare conatus fuerit, illum nos extra se positum, equidem non temerè con-
tenderimus. Quid enim omnino esset uita nostra, si hisce studijs carere o-
porteret, sine quibus nulla inter nos constare potest humanitatis societas,
nisi barbara quædam barbaries, aut (ut Plato uocat) ἀφιλόσοφος καὶ ἄ-
μουσος. Homine nesciente põdera, atq; adeò nesciente mensuras rerum,
quid stolidius, imò quid inhumanius uidere queat ille omnia inspicientis so
lis oculus? Quare non ab re uidetur ille mihi cum sacra tũ prophana pol-
luere, quisquis posthac honestas disciplinas uel contẽpserit, uel alijs ad
ea penetrare uolẽtibus, aditum recluserit, aut alioquin data opera remo
ratus fuerit. Præstat cum præclaris ingenijs conuenire potius, quàm lon
gè lateq; regnantem, ac bonas artes uastantem, iuuentutem à contempla
tione ueritatis deterrentem, sequi consuetudinem. Quid est enim consue
tudo ad ueritatem collata, nisi pabulum erroris? Qui tales sunt, in orbẽ
illum disciplinarũ, quæ studio quærendæ ueritatis famulantur, nullo mo
do se intromitti sperent. Occinimus illis uetus hoc: Procul este propha-
ni. Procul, inquã ego, à lectione Archimedis nostri absint uniuersi, qui
nihil ad regulã, nihil ad perpendiculum, nihil ad libellam reuocare didi
cerunt. Nos ut hoc cõsilium nostrũ admiserint, non ualde laboramus. nõ
enim studemus placere illis, dum ui magna conamur rectis studijs prodes
se, ac ipsi etiam humanitati satisfacere. Officij nostri partes sunt, laten-
tẽ adhuc in rebus ueritatẽ eruere, ac omnia illius optima quæ sunt, huma
nis oculis conspicienda inferre. Quid hic enim positi agimus aliud, quàm
ut plurimos ad ueritatis studia inuitemus, dum reuelata facie, ipsam per-
fectè contemplaturi sumus in patria? Interim tanquam in transcursu his-
ce uerè liberalibus artibus tædia præsentis uitæ fallentes non illibenter.
Solent enim hæ artes honestissimæ non tantũ delectare suos cultores, sed
etiam commouere, afficere quoq; & inflammare animũ ipsum, ut hoc ma
iore desiderio ad perfruendæ olim ueritatis bonũ rapiatur, quo præstan
tior est umbrâ ueritas, lux tenebris, deniq; quo est maior & melior homi
nibus ipse Deus. Nouimus uestri Senatorij ordinis uiros non paucos, qui
se hisce artibus penè immerserint, cum alioqui naturalium rerum contem
platione & essent & haberentur clarissimi ab omnibus. Arbitrati sunt
illi sapienter quidem, quòd in his ipsis studijs insumptas in Remp. uires,
recollecturi esset, ac parum reclusis à se publicis curis, quoties in gratiã*

*redirent cum literatis literis, lau dem longè amplissimam sese consecutos
esse censebant. Quis enim indecorum putauerit in ea re recreari, refocil
lariq; animo, à qua neq; naturæ nostræ Genius abhorret, neq; ipse opifex
rerũ subinde offendi possit unquã? Et meritò illi in hoc potissimũ studiorũ
genus incubuerũt. Quia enim liberæ ciuitates aut mari aut terra uictus ra
tionẽ quærere uidẽtur: ut naufragia uitẽt gubernatores, astronomiæ cog
nitio cũ primis sulcãtib. maria, nõ tam utilis quàm necessaria erit futura.
quæ hac deinde industria importãtur merces, ut rectissimè in singulos di
spensentur, numerorũ scientia primas sibi uendicare solet. Ne porrò ter
mini rerũ confunderentur, ab Aegyptijs, propter Nili exundationes, no
ua apud illos iuuẽta esse perhibetur dimensio agrorum, quæ ob eam causã
Geometriæ nomen ferre iure queat. Excelluisse in hisce disciplinis Vul
canum illum, Homerus haud obscurè significauit:*

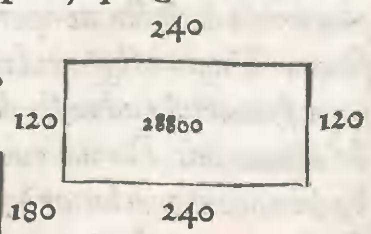
*Cum Thetis Idæos (heu nunquam uana parentum
Auguria) expauit uitreo sub gurgite remos.*

*Vulcanus itaq; ad Thetidis preces, Achilli clypeum cõfecturus, quid
non summè, quid non artificiosissimè ob oculos lectoris posuit? Videmus
eodem in clypeo non tam uirtutum quàm disciplinarum semina omnium,
ac rerum præclarissimarum perfectissimè expressa simulacra, quibus ille
artificiosa compositione sua, dij boni, quantam maiestatem addere solet?
Quantum deinde gratiæ & laudis consecutus est, in coniungendis per du
as subinde ciuitates, cum machinamentis, tum instrumentis, tum ornamen
tis, ut in unius clypei circumferentiam unà simul & officia magistratus,
& studia militum, & uulgi spectacula, & agricolarum exercitia, & pa
storum lusus, & alia id genus multa, quæ Geometrica proportione con-
templanda doctorum uirorum oculis obiecerit: quæ omnia, qui sapien-
tiæ nomen daturus est, ignorare non debet. Nam uirtutis & iustitiæ i-
maginem in eius clypei descriptione propositam, facile quisquis non est
ingenio præditus obtuso, dispicere queat. Quid quod optimus uates &
sphæram imaginum cœli, solis dico & lunæ, stellarumq; cursus, cum a-
lijs multis, callidissime unius clypei planicie est complexus? quæ in contem
plationem deducta, ut operosum, ita magnificum absoluere uidentur ædi
ficium. Tanta est gratia rerum bene dispositarũ, ubi illa singularum par
tium symmetria ad rectè doctos & inculpatos iudices fuerit conuocata.
Vidimus nos Romæ cum essemus in monte Capitolino (Capitolium
hodie uocant eum locum) Comœdiam agi, cumq; à personis peragẽda es-
set Pœnulus, ipsa quæ una è uiginti numero est comœdia Plauti, per eos*

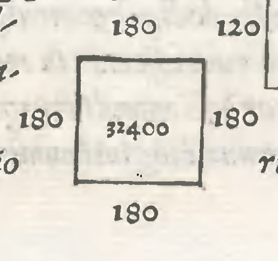
homines, qui haud ita bene ad illam subeundam prouinciam essent parati. Neq; enim personas, quas referebant (licet Itala proles) ubique fœliciter repræsentabāt: quod cuius uitio factum sit, equidem nunc non sum scripturus. Erat hic locus nō parum à prima sui constitutione iam factus alienissimus. In eo tamen, quia erat capax multitudinis, & quia omnia numero, pondere quoq; & mensura digesta esse uidebantur, facile quod in actoribus fabulæ desiderabant complures, iusta illa compositæ aulæ symmetria, spectatores in officio retinebat. Tanta est, ut diximus, bene in ordinem digestarum rerum gratia.

Hic iuuat augustum Romæ uidisse theatrum,
Instratumq; locum tabulis, nitidisq; columnis,
Qui ter uiginti, sex atq; ascendit in ulnas,
Si in longum reuoces. latè contraxior exit,
Fert uix dimidio, ceu continet area longi.
Bis quoq; quindenis ulnis spaciatur in altum.
Hic quia Saturnus latuit, Saturnius olim
Dictus. post Cicero cecinit, Tarpeia rupes.
Postera deinde ætas tenuit Capitolia dici.
Non ratione tamen sine, &c.

Hæc ideo retulimus copiosius, ut opinionibus imperitæ multitudinis commodius occurreremus: ac dein ut intelligant hi qui tractabiles adhuc sese præbēt mansuetioribus Musis, hæc studia non tantum priuatis hominibus summam sæpè adferre uoluptatem, sed etiam publicè & in foro & in curia, & in scholis exercitamēta esse honesta, docta & laude digna, utilia quoq;, & rebusq; necessaria. Ob eā, opinor, causam, M. Fabius Quintil. lib. de Institutione oratoria primo, futurū ait oratorē Geometriæ oportere omnino esse peritū, quod Geometria potiss. in numeros diuisa sit, atq; formas. Nos hic de iugeri mēsura, quæ adfert ille, adducimus tantū, & præterea nihil. Nos facillimū, inquit Quintilianus, et imperitis sequamur experimentū. Iugeri mensurā ducētos et quadraginta lōgitudinis pedes esse, dimidioq; in latitudine patēre, non ferè quisquā est qui ignoret. Huius schema nos ita rudibus literarū exprimimus.

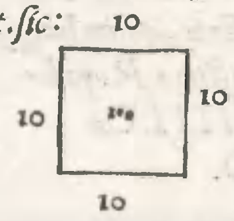


At centeni & octogeni in quamq; partē pedes, idē spaciū extremitatis. Sed multo amplius diuisæ quatuor lineis areæ faciunt. exemplum esto.

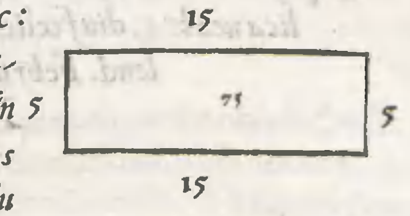


Id si computare quē piget, breuioribus numeris idem discat.

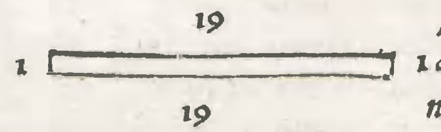
scat. Nam deni in quadram pedes, quadraginta per oram intra centum erunt. sic:



At si quini deni per latera, quini in frōte sint, ex illo amplectuntur quartam partem deducent, eo dē circumductu, sic:



Si uero porrecti utrinq; undeuiceni singulis distent, non plures intus quadratos habebunt, quàm per quot lōgitudo circūducetur: quæ circūibit autē linea, eiusdem spacij erit, cuius ea quæ centum continet. Schema illius sic formabis. Hunc locum ideo figuris suis expositū, oculis subijcere uolui, quod uiderim quosdam alioqui non indoctos uiros, qui ipsum aut non intellexerunt: aut quod iuxta est, simulando prætererierunt.



Hæc cum dico, non doctoris partes usurpo mihi, sed monitoris tamen personā ubi recepero, qui æqui sunt iudices, nō contēnent. Non hic ostendā quæ elemēta geometrica, quo nomine à nostris appellentur. nam quid signum sit, quid linea, quid angulus, circunferentia quoq; & superficies, præter Archimedē nostrū Euclides quoq; philosophus et mathematicus Megarensis, nō utiq; incelebris, admodū copiosè cōscripsit. In solidis corporibus cōficiendis, qualia sunt pyramides, coni, cylindri, cubi, sphæræ, & id genus alia corpora, magistrū hunc nostrū Archimedem, nemo non tutissime fuerit sequutus. Hic est Archimedes ille, cuius machinationibus M. Marcellus multū ac diu uictoriā suā apud Syracusas inhibitā sensit: eximia tamen hominis prudentia delectatus uictor, adeò, ut captis Syracusis capiti illius parceretur edixerit: penè tantū gloriæ in seruato Archimede, quantū in oppressis Syracusis reponens. Quanquā intentū geometricis formis, quas in puluere descripserat, ab ignaro milite, quis nā esset rogatus, cū nomen suū non statim indicaret, obtruncatus, sanguine suo artis propriæ lineamēta confudit. Quo factū, ut propter idē studiū modò donaretur uita, modò spoliaretur. Aegrè id Marcellum tulisse, sepulturæq; curā habuisse, ac propinquis etiā inquisitis, honori, præsidioq; nomē eius ac memoriam fuisse. Atque hæc de Archimede partim ex T. Liuio, partim ex Valerio Max. in præsentia retulisse sit satis. Superest P. C. ut magno cōsensu, hisce præsertim turbulentiss. temporib. exulātes, nudasq; ac penè iam extinctas illas uerè liberales disciplinas humaniter colligere atq; fouere studeatis. Decet enim magistratus assuescere cū primis nō tantū rebus humi repentib. sed etiā studijs

dijs

dijs Musarum, ut quæ solæ molem illam tractandarum rerum, non raro leuare, frequenter uero & excutere ab humeris uestris, quàm longißime & poßint et ualeant. Valete unà cum florentißima Republica uestra, diu fœlices. Ex urbe uestra, IIII. Calend. Februarij, Anno M.D. XLIIII.

ARCHIMEDIS DE SPHAERA ET CYLINDRO LIBER PRIMUS.

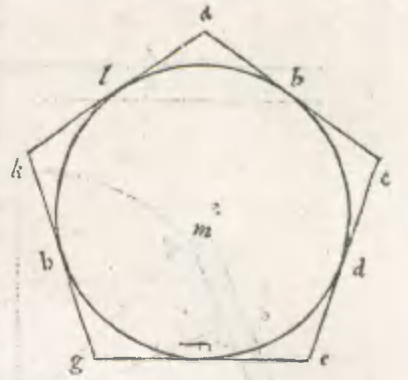
ARCHIMEDES DOSITHEO Salutem.

PRIUS quidem ad te misi quę à nobis inspecta essent, cõscribentes eorum demonstrationes, quod omnis portio contenta à recta, & à coni rectanguli sectione, sesquitertia sit triangulo habenti basim cum portione eandem, & altitudinẽ eidem æqualem. Nunc autem quorundam occurrentiũ theorematum, quæ effectu probata uidentur, demonstrationes conscripsimus. Ipsa uero huiusmodi sunt. Primum quidem, quod omnis superficies spheræ quadrupla est circulo in ea maximo. Deinde quod superficiei cuiuscunq; portionis sphæræ circulus ille æqualis est, cuius quæ ex centro æqualis sit rectæ ductæ à uertice portionis, ad circuli qui basis est portionis circumferentiam. Ad hæc quòd cuiusq; sphæræ cylindrus, qui basem habeat circulum in sphæra maximum, & altitudinem æqualem sphæræ diametro sesquialter habetur: & superficies eius cum basibus superficiei sphærę est itidem sesquialtera. Hæc autem accidentia natura ipsa inerant prius circa dictas figuras, uerum non fuerant à superioribus cognita, qui ante nos

Scribantur autem prius & dignitates, & sumpta ad demonstrationem eorũ.
Sunt quædam in plano curuæ lineæ terminatæ, quæ rectis iũgentibus terminos
earum, aut totæ sunt in easdem partes cauæ, aut nihil habent in alteras. In easdem
partes cauam uoco lineam talem, in qua si duo puncta utcunq; sumantur, lineæ
rectæ inter illa puncta mediæ, aut omnes in easdem partes dictæ lineæ cadunt:
aut quædam in easdem partes, quædam secundum eam, nulla uero in alteras par
tes. Similiter autem & superficies quædam finitæ sunt ipsæ quidem nõ in plano,
sed terminos suos in plano habentes: & in easdem plani eius in quo earum sunt
termini, partes aut totæ erunt, aut nihil habebunt in alteras partes. In easdẽ par-
tes cauas illas uoco, in quibus si sumantur duo puncta, rectæ inter illa ductæ me
diæ, aut omnes in easdem partes cadunt superficiei: aut quædam quidem in eas-
dem partes, quædam secundum eas, nulla autem earum in alteras partes. Frustũ
uerò solidum uoco, si quando sphæram secuerit conus, qui uerticem habeat ad
centrum sphæræ, figuram intra comprensam, & à superficie coni, & à superficie
sphæræ intra conum comprensæ. Rhombum autem solidum uoco, ubi duo
coni in eadem base constantes, uertices habuerint utrinq; sitos plano basis, ita ut
axes eorum sint in directum sibi inuicem coniuncti, figuram ex utrisq; conis cõ-
positam. Sumo autem hæc: Linearum eosdem terminos habentium rectam mini
mam esse. Aliarum uero quæ in plano fuerint, si eosdem habuerint terminos, eas
inæquales esse. Vbi autem ambæ in easdem partes cauæ fuerint, ut uel altera tota
comprendatur ab altera, uel altera earum ab alterius superficie, & recta eosdem
cum illa terminos habente contineatur: uel quidpiam ipsius contineatur, quid-
piam uero habeat commune cum altera, & comprensam esse minorem. Similiter
autem & superficierum eosdem terminos habentium, si in plano terminos ha-
buerint, minimam esse planam. Aliarum uero superficierum, et eosdem terminos
habentium, si in plano terminos habeant, eas esse inæquales: ubi autem ambæ
in partes easdem cauæ fuerint, & uel altera tota contineatur ab altera, aut alteram
earum ab altera superficie, & plana eosdem terminos cum illa habente: aut eius
partem quidem comprendi constet, partem uero communem habere, & compren
sam esse cõprendente minorem. Amplius autem & inæqualium linearum, siue su
perficierum, siue solidorum, maius excedere minus tanto, quantum ipsum sibiipsi
totiens complicari potest, ut excedat omnem propositam sui generis quãtitatem.
His autem suppositis, si in circulum figura multiangula inscribatur, constat am-
bitum figuræ inscriptæ esse circumferentia circuli minorem. Vnum-
quodq; enim figuræ inscriptæ latus minus est ea circumfe-
rentiæ parte, quæ per ipsum abscisa fuerit.

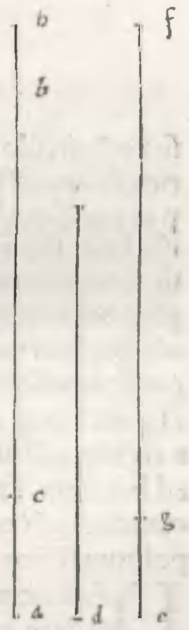
Si

SI circulo figura plurium angulorum circumscribatur, linea recta quæ ex om- 1
nibus figuræ circumscriptæ lateribus simul in directum coniunctis efficitur,
ipsius circuli circũferentia longior esse probatur.



Circulo itaq; cuicunq; figura quæuis pluribus an
gulis constituta circumscribatur: Dico lineas di-
ctam figuram claudentes, si simul in directum cõ
iungantur, lineam unam rectam constituere, cir-
culi dicti circumferentia longiorem. Esto igitur,
exempli gratia, circulus cuius centrum m, quem
circa sit aptata figura a b c d e f g h k l, cuius angu
li sint ad puncta a c e g k notati, contactus uero la
terum & circuli ad puncta b d f h l. Quoniam ita-
que a b, a l, cum arcum b l intra se coerceant, ipso
longiores habentur: similiter c b, c d, suo arcu b
d: item e d, e f, maiores: item f g, g h suo, demum k h, k l, quæq; duæ coniunctæ
suis arcubus maiores sint. eisdem enim terminis cum suo quæq; duæ arcu prode-
untes ipsum includunt, erit, ut si una ex omnibus his recta linea iungatur, circu-
li circumferentia sit longior, quæ ex illis arcubus colligitur.

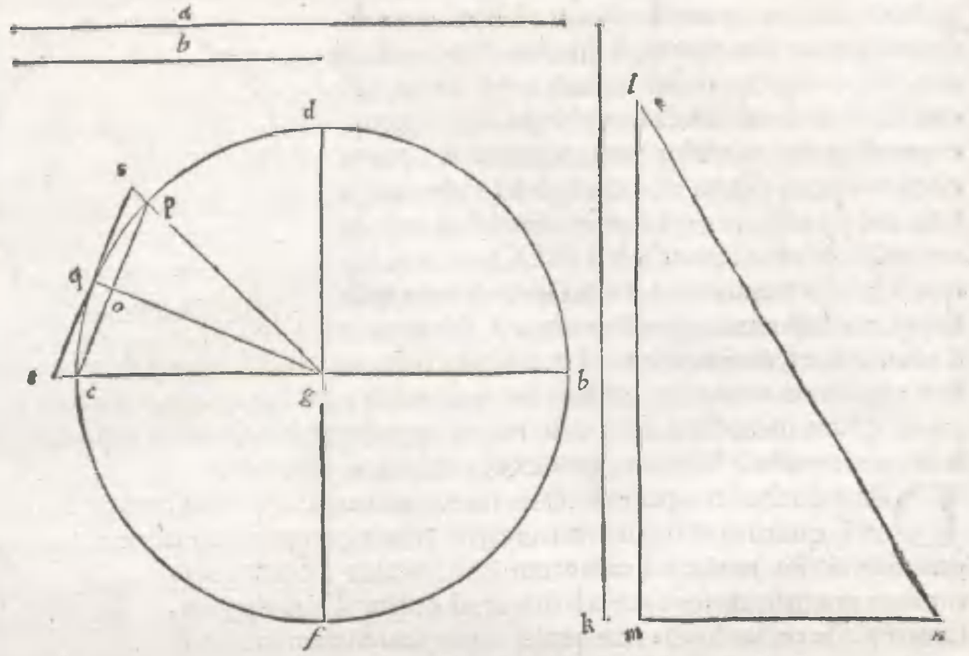
DAtis duabus magnitudinibus inæqualibus, duæ rectæ lineæ possunt inue- 2
niri, quarum maior ad minorem sit relata proportione minori, quàm ma-
gnitudo posita maior ad minorem contineatur. Sunto igi-
tur duæ magnitudines datæ a b maior, d minor. Dico duas in-
ueniri posse rectas lineas inæquales, quæ sententiam proposi-
tionis exæquantur. Statuatur itaq; per secundam primi Eucli-
dis b c æqualis ipsi d, sumatur deinde linea quæuis recta, quæ
sit f g, atq; a c totiens sibi ipsi coaceruetur & multiplicetur, do-
nec productum excrescat maius ipso d, quod uocetur a k. esto et
f g tantundem multiplex ipsius g h. erit itaq; ex hoc, ut quemad
modum a k & a c sese respiciunt, ita f g, & g h, & item modo cõ
uerso, sicut a c refertur ad a k, ita quoq; g h ad g f. Ast quoniam
a k est maius ipso d, cui c b positus est æqualis, referetur igitur
a c ad a k minori proportione, quàm idem a c ad c b. quare ex
coniuncta proportione c a k ad a k minori, quàm a c b ad c b. ea
dem ratione h g f ad g f minori, quàm a c b ad c b. Verum c b e-
rat ipsi d sumpta æqualis, ergo linea h g f ad g f lineam minori
proportione habetur, quàm a c b magnitudo ad ipsam d. In-
uentæ sunt igit duæ rectæ inæquales, quæ id quod iussum fue-
rat effecerunt, ut maior ad minorem proportione sit relata mino
ri, quàm magnitudo maior data ad magnitudinem minorem.



DAtis duabus magnitudinibus inæqualibus, & circulo quocunq;, fieri potest 3
ut intra circulum datũ plurium angulorũ figura collocetur, at altera huic ip-
si similis eidem circulo aptetur extrinsecus, ita ut exterioris latus ad latus interioris
proportione minori colligetur, quàm magnitudo data, maior scilicet ad minorẽ.
Sint duæ datæ magnitudines a b, & circulus quiuis datus. Dico id effici posse,
quod propositio iubet. Inuentæ iam duæ rectæ supra proxime fuerunt, quarum
sit k maior, l m minor, contineantq; minorem proportionem quàm duæ datæ
magnitudines. educaturq; à puncto m linea perpendicularis m n, & à puncto l
ducatur ad lineam m n recta æqualis k, quod fieri potest. ducantur etiam in circu-
lo duæ diametri c b, d f, sese ad angulos rectos secantes in centro g. diuidentes igi
tur in duo æqualia angulum d c g, & huius iterum dimidiũ in duo æqua: ab hac
diuisione nõ desistemus, donec angulum offenderimus quempiam, qui sit minor

 duplo

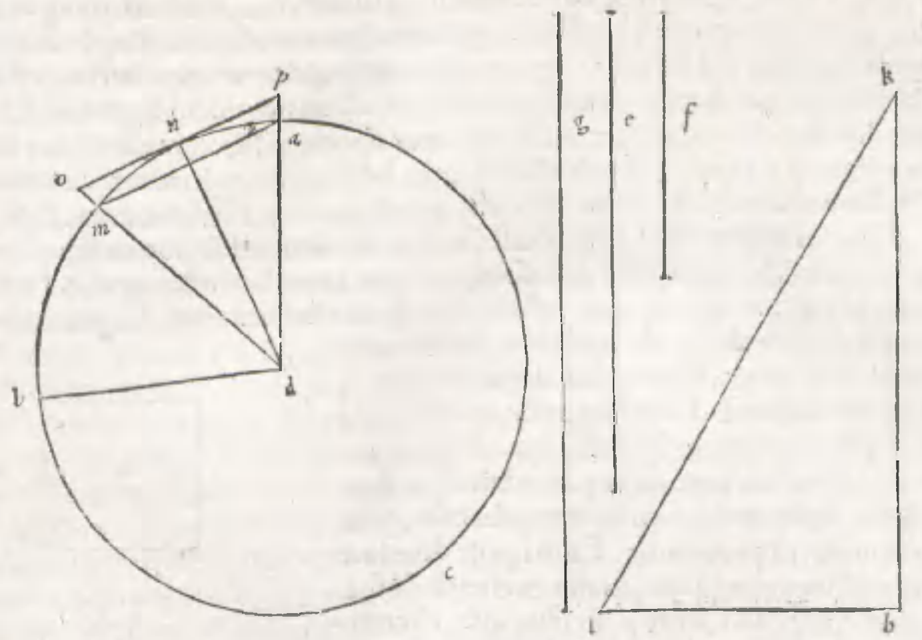
duplo anguli m l n, qui sit p g c. & ducatur linea recta p c, quæ erit latus figuræ plurium angulorum æquilateræ. angulus enim p g c, angulum d g c metitur, & p c arcus eadem ratione d c arcum metitur, & circulum totum, quapropter figura quæ-



sita erit circulo inscripta. Secetur item in duo æqua angulus p g c, ducta g q linea, & à puncto q ducatur una recta contingens circulum s q t, occurrens lineæ g p in puncto s, & lineæ g c in pūcto t, extra circulum ductis utrisq;: erit igitur s t recta, latus figuræ plurium angulorum æquis lateribus compræhensæ, quæ circulo sit circumducta. At uero quoniam p g c angulus minor est duplo anguli m l n, duplus autem angulo q g c, minor erit angulus q g c angulo m l n. cumq; o angulus, ubi g q secat rectam p c, & angulus m sint recti: l n recta ad l m rectam maiore proportione referetur, quàm g c recta ad g o rectam. est autem g c recta æqualis g q rectæ: ex hoc g q rectam ad g o rectam constat minori proportione referri, quàm l n rectam ad l m rectā. preterea l n ad l m minori proportione tenetur, quàm a recta ad b rectam. Est igitur s q t latus figuræ plurium angulorū æquilateræ circulo circumductę, & p o c latus intra circulum collocatæ figuræ: quæ sic se habent, ut propositum fuerat inueniri posse.

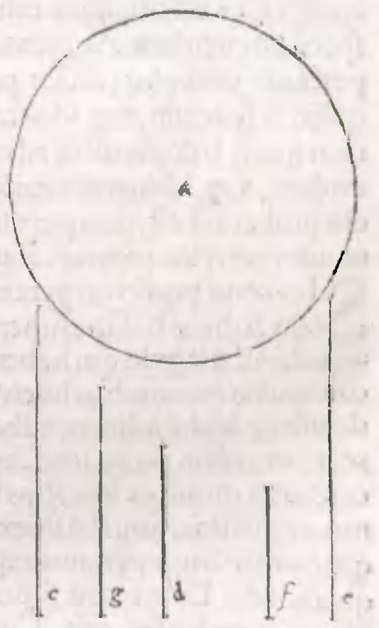
4 DAtis item duabus magnitudinibus inæqualibus, & circuli cuiuspiam sectore dato, potest altera circa sectorem, altera intra eundem aptari figura pluriū angulorū, ita ut exterioris latus ad latus interioris minorē proportionem retineat, quàm magnitudo maior data ad minorem. Sint itē duæ magnitudines inæquales datæ, e maior, f minor. Esto etiam quiuis circulus a b c, cuius centrum d, sectorque eius ad ipsum d terminatus a d b. iubemur itaq; ipsi sectori circumaptare, & intra duas figuras plurium angulorum reliqua latera habentes æqualia, exceptis d a & d b, ita effectas ut propositio dicit. Esto inuentas esse duas rectas inæquales g h k, maiorem g, atq; ita effectas ut g recta ad h k minorem proportionem habeat, quàm magnitudo maior ad minorem. hoc enim fieri posse suprà demonstrauimus. & à puncto h ducatur perpendicularis h l, & à puncto k ducatur ad rectam h l recta æqualis g rectæ. quod fieri potest, cum g recta sit longior h k. diuiso igitur angulo a d b in duo æqua, & item eius dimidio in duo æqua distributo, & hac diuisione perducta quousq; occurrat angulus minor duplo anguli h k l, qui sit

sit a d m. erit igitur a m recta latus figuræ plurium angulorum intra sectorem collocatæ. Si præterea diuidamus in duo æqua angulum a d m, ducta recta d n, & à puncto n eduxerimus rectam p n o, contingentem sectorem in puncto n, occur-



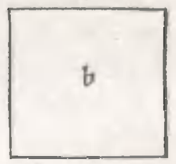
rentem ipsi d a in puncto p, & ipsi d m in puncto o, fecerimus p n o rectam, latus figuræ plurium angulorum ipsi sectori circumductæ, quod ad latus figuræ iam intra sectorem descriptæ minorem seruat proportionem, quàm magnitudo maior e ad minorem f, prout propositio dicebat fieri posse.

CIrculo dato, & duabus magnitudinibus inæqualibus, ipsi circulo posse unā intra eundem, alteram extra aptare figuram plurium angulorum, quarum 5 exterior ad interiorem seruat minorem proportionem, quàm magnitudo maior ad minorē. Exponatur circulus a, & duæ magnitudines inæquales, e maior, f minor. Oportet igitur ipsi circulo a alteram intra, alteram extra aptare figuram plurium angulorum, ita ut fiat quod propositum est. Constituam primo duas rectas inæquales, c maiorem, d minorem, ita ut c minori proportione referatur ad ipsam d, quàm e ad ipsam f. accepta media proportionali inter c & d, quæ sit g, constat c ipsa g esse maiorem. Circumdetur itaque circulo figura plurium angulorum, & altera similis illi intra eundem statuatur, hoc pacto ut latus exterioris ad latus interioris minorem teneat proportionem, quàm c ad ipsam g, quemadmodū suprà docti fuimus. Quoniam igitur figuræ exterioris ad interiorem est ea quæ lateris illius ad latus istius duplicata proportio, hæc autem ipsa minor habetur quàm c ad ipsam g duplicata, quæ est c ad ipsam d, quæ quidem & ipsa minor est cōstituta quàm ea quæ maioris magnitudinis habetur ad f minorem: colligitur inde, ut figuræ exterioris & figuræ interioris proportio multo minor sit ea quæ est magnitudinum e & f proportione.

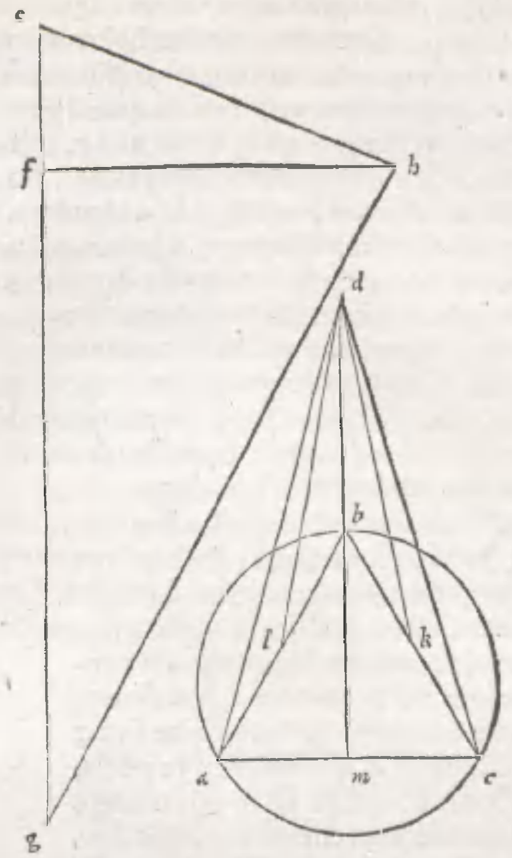


Similem ostendemus, duabus inæqualibus magnitudinibus datis, & circuli sectore dato, posse duas, alteram circa ipsum, alteram intra constituere figuras plurium angulorum inter se similes, quarum exterior ad interiorem minori teneatur proportione, quàm magnitudo maior ad minorem. Vnde id quoq; manifestum est, si quiuis circulus aut sector, præterea spacium aliquod proponatur, posse intra circulum uel sectorem figuras plurium angulorum æquilateras collocari, & item in reliquis semper partibus circuli uel sectoris eundem figuras inscribendi modum continuari, donec tandem quæ ex circulo uel sectore portiones superestent, dato spacio probarentur esse minores. hoc autem in elementis datum est.

6 DEmonstrandum autem nunc est, quod circulo uel sectore dato, & aliquo spacio similiter dato, fieri potest ut circa circulum uel sectorem figuram plurium angulorum æquilaterã describamus, intra cuius latera & circuli uel sectoris circumferentiam, partes quæ restant dato spacio sint minores. Sit primum conuentum, ut quæ de circulo tradentur, eadem ad sectorem referantur. Esto igitur datus circulus a, & spacium datum b. Dico fieri posse, ut circa circulum figuram plurium angulorum æquilateram componamus hac ratione, ut partes lateribus figuræ & circumferentia circuli compræhensæ, dato spacio minores probentur. Cum igitur duæ sint magnitudines inæquales, maior ex circulo & spacio dato composita, minor circulus ipse, circumscribatur una altera, inscribatur circulo figuræ plurium angulorum, ita ut circumscripta minorem proportionem habeat ad inscriptam, quàm dicta magnitudo maior ad minorem. Dico hanc figuram circumscriptam esse, cuius partes à lateribus suis & circumferentia cõprehensæ minores sunt b spacio. Si enim circumscriptæ ad inscriptã minor sit proportio, quàm circuli, & spacij b ad circulum, inscripta uero maior est circulus, erit circumscriptæ ad circulum minor quàm circuli, & spacij ad circulum. Argumenti igit ex disiũcta proportione probatur, dictas partes minorem proportionem ad circulum habere, quàm b spacium, atq; idcirco minores esse b spacio dato. Vel etiam hac ratione, cum spacij b & circuli sit ad circulum proportio maior quàm circumscriptæ ad eundem, atq; idcirco circumscriptam minorem esse circulo & spacio b simul iunctis probatum est, dempto utrinq; circulo: illic spacium b maius, istic partes dictæ eo minores relinquentur. Eandem rationem in sectore sequemur.

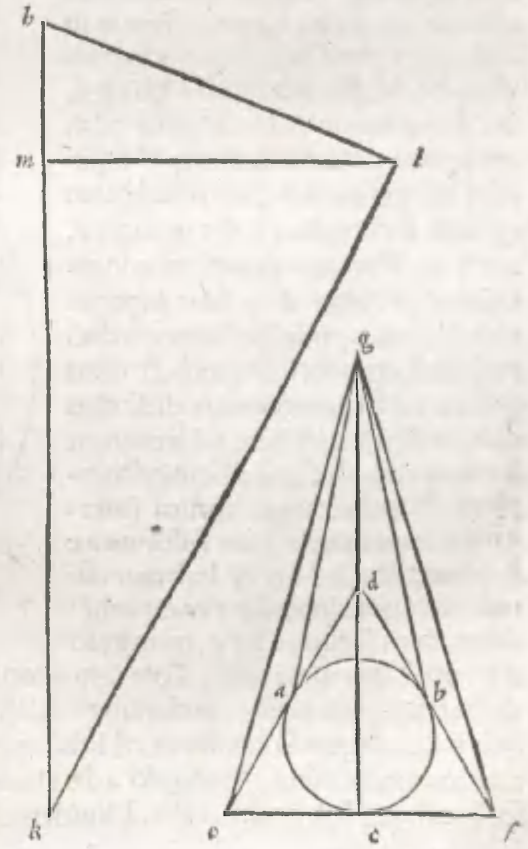


7 SI in cono æquicruri pyramis inscribatur æquilateram habens basim, superficies eius dempta base æqualis est triãgulo qui habet basim æqualem lineæ coniunctæ ex omnibus lineis basim pyramidis claudentibus: & altitudinem habet lineam perpendicularem, æqualem perpendiculari quæ ducta sit à uertice coni ad unum ex lateribus basis pyramidis. Sit conus æquicruris, cuius basis existat circulus a b c, intra quem inscribatur pyramis æquilaterã basim habens, quæ sit a b c. Dico huius superficiẽ, basi dempta, triãgulo dicto æqualem esse. Cum enim conus sit æquicruris constitutus, & basis pyramidis æquilatera ponatur, altitudines triangulorum basim pyramidis claudentium perpendiculares inter se æquales esse oportet, trianguli uero basim habenta b, b c, c a. altitudinem autem eam quàm diximus perpendicularem: quare triangulos necesse est esse omnes triangulo æquales, qui basim habeat æqualem a b, b c, c a simul iunctis: altitudinem uero eam quæ sæpe dicta est, perpendicularem.



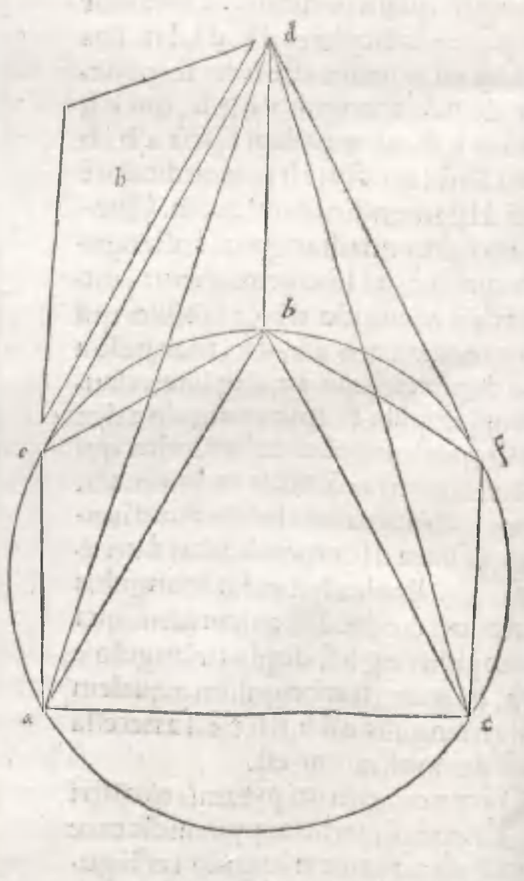
Alia clarior demonstratio. Esto conus æquicruris, cuius basis circulus a b c, uertex aũt punctũ d. & in eũ pyramis inscribatur, basim habens a b c æquilateram, & ducantur lineæ rectæ d a, d b. Dico quod a d b, a d c, b d c trianguli æquales sunt triangulo rectangulo, cuius basis equa sit trib. lineis trianguli a b c: perpẽdicularis uero, quæ à uertice coni ad basis latus ducitur, æqualis perpendiculari trianguli rectanguli quem ponimus. Ducantur itaq; perpendiculares d k, d l, d m. has palàm est æquales esse inter se. ponatur deinde triangulus e g h, qui e g basim habeat æqualem lineis a b, b c, c a simul iunctis: e h perpendicularẽ ipsi d l perpendiculari æquam. Quoniam igitur quadrangulus rectangulus qui b c, d l lineis continetur, duplus est triangulo d b c: similiter qui continetur lineis a b, d k, triangulo a b d duplus: itẽ qui a c, d m lineis clauditur, duplus & ipse triangulo a d c: fit ut quadrangulus rectangulus qui clauditur linea cõstituta ex lineis a b, b c, c a, claudentibus basim simul iunctis, & linea d l perpendiculari à uertice ducta, duplus habeatur triangulus a d b, b d c, c d a. Est autem idem quadrangulus e g h f, duplus triangulo e g h. quare e g h triangulum æqualem esse triangulis a d b, d b c, c d a necessariò demonstratum est.

8 SI cono ęquicruri pyramis circũscribatur, superficies pyramidis excepta base æquatur triangulo rectãgulo, qui basim habeat æqualem lineis basim pyramidis cõtinentibus simul iunctis, altitudinem uero lateri ipsius coni æqualem. Esto conus, cuius basis circulus a b c. huic pyramis circũscribatur, ita ut latera eius basis d e f circum-



circulum contingant. Dico igitur superficiem huius pyramidis, excepta base, triangulo dicto probari æqualem. Quoniam igitur ipsius coni axis supra basim a b c perpendiculariter erectus habetur, uidelicet supra circulum a b c. & quæ ab eius centro rectæ ad contactus ducuntur, perpendiculares sunt ipsis d e, e f, f d contingentibus: erunt etiam quæ à g uertice coni ad eosdem contactus deductæ fuerint rectæ, g a, g b, g c, eisdem d e, e f, f d perpendiculares, quas inter se æquas esse positum est, cum sint latera coni. Ponatur itaq; triangulus h k l, qui habeat h k latus æquum lineis d e, e f, f d claudentibus basim pyramidis, & habeat m l perpendicularem æquam g a. Quoniam itaq; quadrangulus rectangulus qui continetur d c, a g lineis, duplus est c d g trianguli: & qui continetur d f, g b, duplus trianguli d f g: item qui continetur e f, e g, duplus trianguli e g f: erit igitur qui h k, & a g, quæ æquatur m l lineis continetur quadrangulus, duplus e d g, f d g, e g f triãgulis. Est autem & qui h k, l m lineis clauditur quadrangulus, duplus triangulo h k l. quare colligitur, superficiem pyramidis excepta base æquam esse triãgulo, qui basim habeat æquam lineis claudentibus basim pyramidis simul iunctis: altitudinem uero lateri coni æqualem.

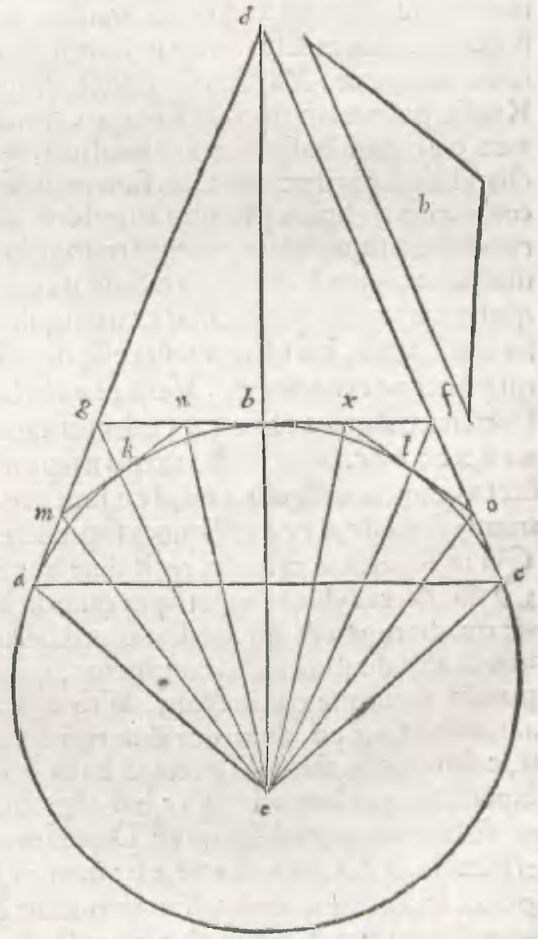
9 SI cono quouis exposito æquicruri, intra circulum, qui est basis ipsius coni, linea recta inciderit, & ab ipsius rectæ terminis duæ rectæ ad coni uerticem educantur: triangulus qui ab incidente & ab eductis ad uerticem comprehendit, minor est ea coni superficie quæ inter rectas ad uerticem ductas continetur. Esto coni æquicruris basim esse a b c circulum, uerticem uero d, & recta quędam ducatur intra basim quæ sit a c: & à uertice d, ducantur ad a c pũcta, d a, d c rectæ duæ. Dico a d c triangulum minorem esse ea coni superficie, quæ intra a d c comprehenditur. Diuidatur itaq; a b c circumferentia in duo æqua puncto b, & ducantur rectæ a b, c b, d b. trianguli ergo a b d, b c d maiores erunt triangulo a d c. quantum uero dicti trianguli superant triãgulum a d c, esto illud h: aut igitur h sectionib. a b, b c minus est, aut non. Ponatur primò nõ minus. Quoniam igitur duæ sunt superficies, & conica, uidelicet inter a b d cõprehensa, cum sectione a e b, & triangularis a d b quæ terminis eisdẽ clauduntur, lineis uidelicet a d b trianguli, erit ut complectens sit maior complexa. Superficies igit conica inter a b d comprehensa, cum sectione a e b, triangulo a b d maior habetur. similiter & quæ inter d b c comprehẽditur, cum sectione b f c, triangulo d b c probatur maior esse. Tota igitur conica superficies dicta, cum h spacio, erit dictis triangulis maior. Sed trianguli dicti æquantur triangulo a d c, & h spacio: ipso h spacio quod commune est sublato, relinquitur, superficiem conicam inter a d c comprehensam, triangulo a d c esse maiorem. Ponatur secundò, h spacium sectionibus a b, b c minus esse. Diuidentes igitur a b, b c arcus in duo æqualia, &



eorum

eorum dimidia rursus in duo æqualia, sumemus tandem sectiones quæ sint h spacio minores, sintq; illæ a e, e b, b f, f c lineis contentæ. & ducatur rectæ d e, d f. Rursus eadem prorsus argumentatione, superficies coni inter a e d contenta, cum sectione a e, triangulo a d e probatur esse maior. & ea quæ inter e d b, cum sectione e b, triangulo e d b maior. Superficies igitur conica inter a d b compræhensa, cum sectionibus a e, e b, maior erit a d e, e b d triangulis. Cum autem a d e, e d b trianguli, sint a d b maiores, uti demonstratum est, multo magis erit superficies coni inter a d b comprehensa, cum sectionibus a e, e b, maior triangulo a d b. atq; eadem ratione superficies conica quæ inter b d c compræhendit, cum sectionibus b f, f c, triangulo b d c maior esse ostenditur. quare tota superficies conica, quæ inter a d c cõprehenditur, cum sectionibus a e, e b, b f, f c dictis, maior esse colligitur triangulis a b d, b d c. ipsi autem æquales sunt triangulo a d c, & spacio h. atq; horum sectiones dictæ h spacio sunt positæ minores. reliquum est igitur, ut superficies conica inter a d c compræhensa, necessariò maior esse dicatur triangulo a d c: quod erat ostendendum.

SI rectæ ductæ circulum, qui sit coni basis, contingant, in eodem plano cum cir- 10
culo constitutæ, atq; inuicem concurrant, & à punctis contactuum atq; cõcursu rectæ ducantur ad uerticem coni trianguli à rectis circulum contingentibus, & ab his quæ à uertice ad dicta puncta descendunt comprehensi, sunt maiores ea superficie coni quam dicti trianguli complectuntur. Esto conus, cuius basis circulus a b c, uertex autem punctum e, & circulum a b c contingentes ducãtur in eodem plano cum circulo quæ sint a d, c d. & à puncto e, qui est uertex coni, ad puncta a d c rectæ ducantur, quæ sint e a, e d, e c. Dico triangulos a e d, d e c maiores esse ea coni superficie, quæ rectis e a, e c, & arcu a b c continet. Diuiso enim arcu a b c per æqua in puncto b, ab ipso puncto ducatur in utramq; partem recta, cõtingens circulum in dicto puncto, quæ sit f b g, eritq; lineæ a c intra circulum æquedistans. & f sit punctũ quo ipsa incidit lineæ a d, punctum uero ubi incidit lineæ c d sit g. deinde ab e uertice deducantur deorsum lineæ e f, e g. Quoniam igitur lineæ f d, & g d maiores sunt simul iũctæ, quàm linea f g, si simul sumantur communes a f & c g, erũt totæ a d, d c lineæ maiores a f, f g, g c. & quia e a, e b, e c sunt latera coni, idcirco sunt inter se æquales, cum conus sit positus æquicruris. Sunt etiam perpendiculares lineis a d & c d, quia anguli e a f, e c g sunt recti. Cum igitur triangulorum a e d, d e c bases, scilicet a d, d c, sint maiores basibus triangulorum a e f, f e g, g e c, quæ sunt a f, f g, g c:



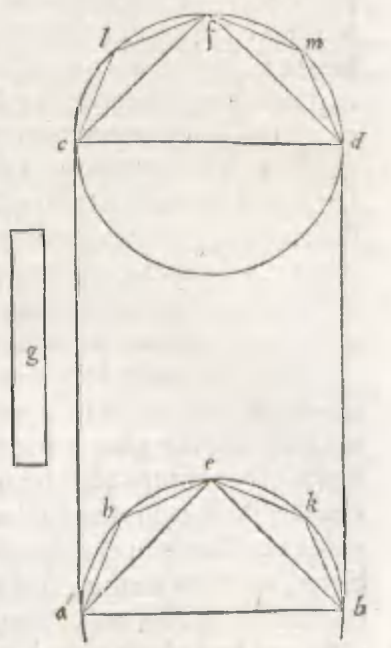
 eorum

eorum uero altitudines, id eſt perpendiculares, ſunt inter ſe æquales, uidelicet e a, e b, e c. propter hoc erunt trianguli a e d, d e c, maiores triãgulis a e f, f e g, g e c. Quã tum igitur trianguli a e d, d e c excedunt triangulos a e f, f e g, g e c, ſit æquale ſpacio quod uocetur h. aut igitur h minus eſt eis plani particulis, quæ lineis rectis a f, f g, g c, & arcubus a b, b c circa circumferentiam compræhenduntur: aut non minus eiſdem. Eſto primum h non minus. Quoniam igitur duas ſuperficies coniũctas habemus, unam pyramidis eius quæ baſim habet f a g c quadrãgulam ſuperficiẽ, quæq; uerticem habet e: alteram conicam, quæ inter a e c includitur, cum ſectione a b c, hæcq; ambæ eiſdem terminis inſiſtunt, uidelicet trianguli a e c lineis, manifeſtum eſt ex hoc, ſuperficiem pyramidis excepto triangulo a e c, maiorem eſſe conica ſuperficie, unà cum ſectione circuli a b c. Hac igitur ſectione, quæ utriſq; ſuperficiebus ſumitur communis, remota ab utriſque, relinquentur trianguli a e f, f e g, g e c, unà cum plani particulis, quæ circa circumferentiam lineis rectis continentur: relinquetur etiam ſuperficies conica a b c arcu, & e uertice comprehenſa, quæ dictis triangulis unà cum particulis dictis oſtenſa eſt minor eſſe. Verum quoniam h ſpacium fuit poſitum non minus particulis illis: erunt idcirco dicti trianguli a e f, f e g, g e c unà cũ ſpacio h prædicta ſuperficie conica maiores. ipſi uero trianguli unà cum h ſpacio æquãtur triangulis a e d, d e c. Erũt igitur a e d, d e c trianguli, dicta ſuperficie conica ampliores. Eſto ſecundò ſpaciũ h minus particulis dictis, tunc aſſidue circa circumferentiam a b c deſcribemus figuras plurium angulorũ, ſemper diuidendo arcus in duo æqua, & à punctis ſectionum lineas rectas educẽdo, quæ circulum contingant: nec ab iſta opera deſiſtemus, donec particulas circa circumferentiam lineis dictis & arcubus contentas, ſimul omnes habuerimus ipſo h ſpacio minores. Eſto igitur ut ſumptę ſint a m k, k n b, b x l, l o c, quæ h ſpacio minores habentur. & à ſingulis punctis ſingulæ lineæ rectæ ad uerticem e erigãtur. Rurſus patet, triangulos a e f, f e g, g e c, maiores eſſe triangulis a e m, m e n, n e x, x e o, o e c. nam baſes illorum ſimul iunctæ, ſunt maiores baſibus horum ſimul iũctis: altitudines uero omnium ſunt æquales. Vnde rurſus ſequitur, quod pyramis cuius baſis eſt figura plurium angulorũ, uidelicet a m n, x o c, uertex uero e maiorem habeat ſuperficiem, excepto triangulo a e c, ſuperficie conica quæ inter a e c cõtinetur, unà cum ſectione a b c. Sublata igitur a b c, ſectione utriſq; communi, reliquum pyramidis quod cõſtat ex triangulis a e m, m e n, n e x, x e o, o e c, & particulis a m k, k n b, b x l, l o c, maius eſſe neceſſe eſt reliquo, ſcilicet ſuperficie conica quæ inter a e c continetur. Verũ prædictis particulis ſpacium h poſitũ eſt maius. Præterea triãguli a e f, f e g, g e c demõſtrati ſunt eſſe maiores triãgulis a e m, m e n, n e x, x e o, o e c. igitur multo magis trianguli a e f, f e g, g e c, unà cũ ſpacio h, qui ſcilicet æquantur triãgulis a e d, d e c, ſunt maiores conica ſuperficie ſæpe dicta. quare triangulos a d c, d e c, eadẽ quoq; ſuperficie maiores eſſe, neceſſariò probatũ eſt.

11 SI in ſuperficie cylindri recti duæ lineæ rectæ fuerint ab eius capite ad baſim ductæ, ea cylindri ſuperficies quæ dictis lineis includetur, maior erit ſuperficie quadrangula & æquediſtantium laterum, quæ quidem ſuperficies dictis lineis & alijs duabus rectis continetur, quæ duæ extrema prædictarum duarum puncta utrinque connectunt. Eſto cylindrus rectus, cuius baſis ſit circulus a b, eius caput c d. ducantur duæ rectæ a c, b d: item duæ aliæ rectæ a b in baſi, c d in capite, ſecantes circulos baſis & capitis. Dico itaque, quod ea cylindri ſuperficies quæ lineis rectis a c, b d cõprehenditur, maior eſt ſuperficie a b c d plana, & laterum æquediſtantium. Diuidantur enim a b, & c d arcus in duo æqua ad e f puncta. & ducant rectæ a e, e b: item c f, f d. hoc facto, quoniam a e, b e rectæ ipſa a b recta ſunt maiores, & in ipſis ſtant duæ ſuperficies quadrangulæ laterum æquediſtantium, & æquè altæ ipſi cylindro & ſuperficiei a b c d quadrangulæ, fit ut dictæ duæ ſuperficies planę, quarum baſes ſunt a e, e b, ſuperficie a b c d quadrã-

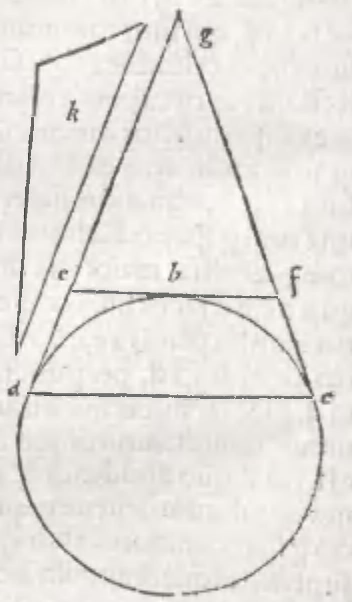
gula

gula plana maiores habeantur. Eſto igitur g ſpaciũ æquale ei, quo illæ inueniuntur illa maiores. aut igitur g ſpacium minus eſt partibus plani, quæ continentur ab arcubus & rectis a e, e b, c f, f d, aut non minus eſt. Ponatur igitur primò non minus eis, tunc quoniam ſuperficies cylindrica à lineis rectis a c b d abſciſa, & ſuperficies compoſita ex ſuperficiebus quadrãgulis æquediſtantium laterum, quarum baſes ſunt a e, e b: altitudo uero eadem cum cylindro & triangulis a e b, c f d terminum habent eundem, ſcilicet ſuperficiem planam a b, c d rectis cõpræhenſam, & ambæ ſunt uerſus eandem concauitatem collocatæ, colligitur ſuperficiem cylindricam rectis lineis a b c d abſciſam, ſimul cum portionibus circulorum a b, c d maiorem eſſe ſuperficie compoſita ex ſuperficiebus quadrangulis æquediſtantium laterum, quarum baſes ſunt a e, e b: altitudo uero eadem cum cylindro. & ex triangulis a e b, c f d: ſublatis utrinq; triangulis a e b, c f d, qui ſunt communes utriſq;: relinquetũ ſuperficies cylindrica abſciſa rectis a b, c d, unà cũ ſectionibus circulorum planis a e, e b, c f, f d: quæ ſunt maiores ſuperficie compoſita ex ſuperficiebus quadrangulis æquediſtantium laterum, quarum baſes a e, e b ſunt: altitudo uero eadem cum cylindro. Dictæ autem ſuperficies, quarum baſes ſunt a e, e b, æquantur ſuperficiei a c b d quadrangulæ, & æquediſtantium laterũ, unà cum g ſpacio. Reliquum eſt igitur, ut cylindrica ſuperficies rectis lineis a c, b d compræhenſa, maior eſſe dicatur ſuperficie quadrangula æquediſtantium laterũ, quæ a c, b d rectis lineis cõtinetur. Eſto igitur ſecundò, ut g ſpacium ſectionib. circulorum planis a e, e b, c f, f d minus ſit: tunc ſcindantur in duo æqua ſinguli arcus a e, e b, c f, f d, per puncta h k l m. & ducantur rectæ a h, h e, e k, k b, c l, l f, f m, m d. Hoc facto, perſpiciemus à portionibus circulorum planis a e, e b, c f, f d, non minus dimidio unicuique ſuo ablatum eſſe per triangulos rectilineas a h e, e k b, c l f, f m d. quo diuidendi & auferendi modo ſeruato, neceſſe eſt tandem ad portiones circulorum deuenire, quæ ſint g ſpacio minores. Eſto igitur ut ſumptæ ſint dicto g ſpacio minores a h, h e, e k, k b, c l, l f, f m, m d. Similiter demõſtrabimus quod ſuperficies quadrangulæ æquediſtantium laterum, quarũ baſes ſunt a h, h e, e k, k b, & altitudo æqualis cylindro maiores ſunt ſuperficieb. quadrangulis æquediſtantium laterum, quarum baſes ſunt a e, e b, & altitudo æqualis cylindro. Cum igitur cylindrica ſuperficies abſciſa rectis lineis a c, b d, unà cum ſectionibus circulorum planis a c b, c f d terminum habeant ſuperficiem planam rectis lineis a c, b d contentam: præterea eundem terminum habeat ſuperficies compoſita ex ſuperficiebus quadrangulis æquediſtantium laterum, quarum baſes ſunt a h, h e, e k, k b: altitudo uerò cũ cylindro eſt eadẽ, & ex rectilineis plani portionibus a h e k b, c l f m d: cumq; ſint utręque in eandem concauitatis partem collocatæ, & cylindrica complectatur rectilineam, erit complectens maior cõplexa. Si igitur rectilineæ plani portiones a h e k b, c l f m d, quæ utriſq; communes ſunt, auferantur, reſtabit ſuperficies cylindrica rectis a c, b d compræhenſa, unà cum ſectiunculis circulorũ planis a h, h e, e k, k b, c l, l f, f m, m d: quæ maior eſſe concluditur ſuperficieb. quadrangulis æquediſtantiũ laterum, quę ſimiliter ſunt relictæ: quarum baſes habentur a h, h e, e k, k b: altitudo eadem cum cylindro. Hæ autem ſuperficies nuper dictæ maiores ſunt ſuperficiebus quadrangulis æquediſtantium laterum, quarum



bases sunt a e, e b. & altitudo eadem cum cylindro. Item istæ impropriè dictæ superficies quadrangulæ, sunt æquales superficiei quadrangulæ æquedistantium laterum a c, b d, una cum spacio g. Superficies igitur cylindrica rectis lineis compræhensa a c, b d, una cum sectiunculis circulorum planis a h, h e, e k, k b, c l, l f, f m, m d, maior erit superficie a c, b d quadrangula æquedistantium laterũ, una cũ g spacio, quod spacium positum est maius dictis sectiunculis. Hoc igitur spacio g à dicta superficie quadrangula sublato, dictis etiam sectiũculis a h, h e, e k, k b, c l, l f, f m, m d, à cylindrica subtractis, cum maius de minori, & minus de maiore sit ablatum, relinquetur superficies cylindrica rectis a c, b d compræhensa, maior superficie a c, b d plana quadrangula.

12 SI in superficie cuiuspiam cylindri recti duæ rectæ lineæ ductæ sint, & ab earũ terminis aliæ rectæ ducantur contingentes circulum, qui quidem circulus dicti cylindri sit basis, sintq; idem cum lineis rectis eum contingentibus in eodem plano constitutus, dictæ insuper contingentes ad unum concurrant: tunc superficies quadrangulæ planæ æquedistantium laterum ab ipsis contingentibus & cylindri lateribus compræhensæ, maiores erunt ea superficie cylindri quæ intra duas lineas rectas in cylindro ductas continetur. Esto itaq; cuiuscunq; cylindri basis circulus a b c, sintq; in eiusdem superficie duæ rectæ lineæ, quarum termini sint a c. à quibus terminis ducantur duæ rectæ circulum contingentes, atq; in eodem plano cum circulo cõstitutæ, & itẽ concurrentes in puncto g. notentur & in capite cylindri aliæ duæ à terminis ductarũ in cylindro linearum ductæ, & in eodem plano cum circulo capitis constitutæ, & ipsum capitis circulum contingentes, & uersus eandem partem concurrẽtes in quam lineæ circulum basis contingentes concurrerunt. Hoc facto, ostendendum est superficies planas quadrangulares æquedistantibus lateribus contentas, quæ uidelicet superficies cõpræhenduntur à prædictis lineis contingentibus, & à lateribus cylindri, maiores esse superficie cylindri quæ secundum a b c arcum basis est compræhensa. Diuiso enim a b c arcu in duo æqua in pũcto b, ab ipso b puncto ducatur in utramque partem recta contingens circulum basis, & applicas extremitates suas lineis basim contingentibus in punctis e f. & ab ipsis punctis e f erigantur duæ rectæ usq; ad superficiem capitis, quæ sint æquedistantes axi cylindri. tunc superficies quadrangulares æquedistantium laterum, quæ continentur lineis rectis a g & g c, & à lateribus cylindri, maiores sunt eis superficiebus quadrangularibus æquedistantium laterum, quæ sub rectis a e, e f, f c, & sub laterib. cylindri sunt cõpræhensæ. Cum enim e g & g f maiores sint e f, si posuerimus a e, f c communes, sequetur totas simul a g, g c sumptas maiores esse a e, e f, f c. & ideo superficies a g, g c, superficiebus a e, e f, f c simul sumptis esse maiores. Quo autẽ sunt maiores illis, sit æquale spacio k. dimidium igitur spacij k, aut est maius portionibus plani compræhensis ab a e, e f, f c rectis lineis & ab arcubus a d, d b, b h, h c, aut non est maius. Esto primò maius. eius itaq; superficiei quæ componitur ex quadrangularib. & æquilateris superficiebus, quarum bases sunt a e, e f, f c, & ex quadrãgula plana a e, f c, in base cylindri, & alio quadrangulo ei simili in capite eiusdem cylindri constituto, termini sunt lineæ rectæ claudentes superficiem quadrangularem, cuius basis

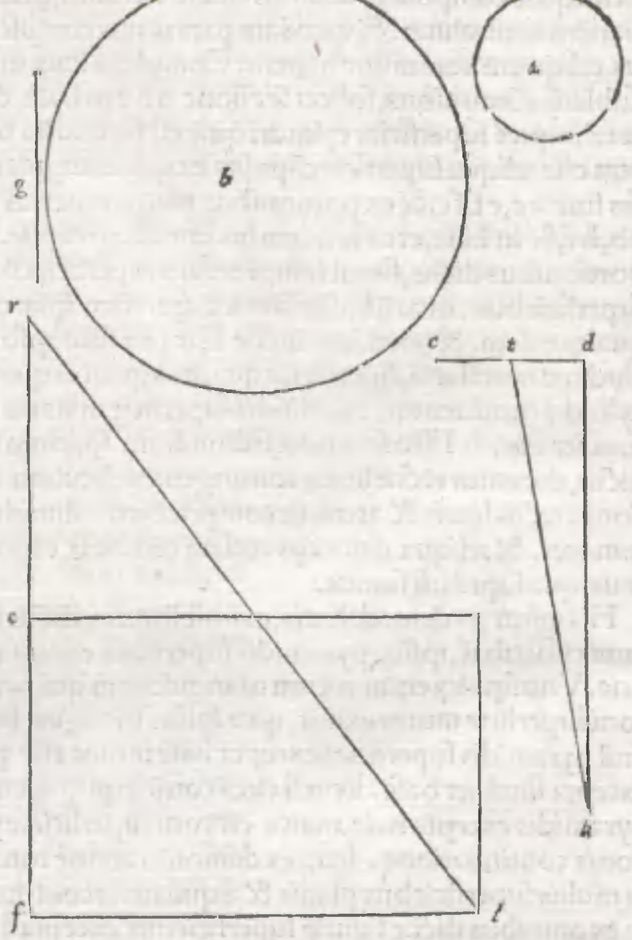


basis est linea recta a c. Sunt etiam prædictæ lineæ termini eius superficiei, quæ cõponitur ex cylindri superficie illa quæ secundum a b c arcum sumpta est, & ex sectionibus a b c in base, & altera in capite, quæ similis est illi. Duæ igitur dictæ superficies quas compositas diximus eidem termino, plano insistunt, & sunt in eandem partem conuolutæ. & quædam pars unius complectitur quandam partem alterius, reliquum commune habent. Complexa itaq; minor erit complectente. Igitur sublatis cõmunibus, scilicet sectione a b c in base, & ea quæ sibi similis est in capite relinquetur superficies cylindri quæ est secundũ a b c sumpta, quam cõstat minorem esse reliqua superficie cõposita ex quadrangularib. superficiebus, quarum bases sunt a e, e f, f c: & ex portionibus plani contentis ab arcubus & lineis rectis a c, e b, b f, f c in base, et ex totidem his similib. in capite. Sed superficies nuper dictæ cũ portionibus dictis, simul minores sunt superficie composita ex quadrangularibus superficiebus, quarũ bases sunt a g, g c. nam ipsæ cum k spacio fuerant positæ æquales eidem. & portiones dictæ sumptæ sunt ipso k spacio minores. quare concluditur necessariò, superficies quadrangulares quæ lineis rectis a g, g c, & laterib. cylindri continentur, ea cylindri superficie maiores esse, quæ secundum a b c arcũ sumpta fuit. Esto secundò, si dimidium spacium k nõ fuerit maius portionibus dictis, ducentur rectæ lineæ contingentes circulum, ut suprà factum est, donec portiones rectis lineis & arcubus compræhensæ dimidio k spacio simul sumptæ sint minores. & reliqua deinceps eodem ordine & eadem arguendi ratione conficiemus, qua suprà usi sumus.

His igitur ita demonstratis, manifestum ex dictis fit, quod si cono æquicruri pyramis inscribatur, ipsius pyramidis superficies excepta base, minor est conica superficie. Vnusquisq; enim eorum triangulorum qui pyramidem comprehendunt, ea coni superficie minor existit, quæ ipsius trianguli lateribus insistit. quare tota simul pyramidis superficies excepta base minor esse probatur tota coni superficie, excepta similiter base. Item si circa conũ æquicrurem pyramis aptetur, superficies pyramidis excepta base, maior est coni superficie, excepta similiter base eadem rationis continuatione. Item ex demonstratione constat, si in cylindro recto figura multis superficiebus planis & æquilateris constituta inscribatur, quod superficies ex omnibus dictæ figuræ superficiebus excepta base collecta, minor necessariò existit superficie cylindri excepta base. nam unaquæq; superficies dictæ figuræ parallelis lateribus constans, minor est ea cylindri superficie quæ sibi incumbit. Item si circa cylindrum figura multis superficiebus planis & parallelis lateribus constituta circumponatur, superficies dictæ figuræ ex omnibus suis superficiebus excepta base collecta, maior est superficie cylindri excepta similiter base.

CViuslibet cylindri recti superficies, excepta base, illi circulo æqualis esse probatur, cuius quidem circuli semidiameter inter latus cylindri & diametrum 13
basis eius media secundum proportionem existat. Esto cuiuspiam cylindri recti basis circulus a diametro, cuius æqualis ponatur linea c d, lateri uero cylindri linea e f æquetur. linea uero g statuatur inter e f lineam, & c d lineam, media secundum proportionem. describatur etiã circulus b, cuius semidiameter sit æqualis lineæ g. his constitutis, demonstrandum est b circulum dicti cylindri superficiei esse æqualem, excepta cylindri base. Et si non sit ei æqualis, aut maior erit, aut minor necessariò. Esto primũ, si fieri potest, minor. tunc cum duas magnitudines inæquales habeamus, circulum b, & superficiem cylindri dictam, possumus intra circulum b unam figuram rectilineam multorũ angulorum & æqualium laterum inscribere, & alteram illi similem eidem circulo circumscribere hoc pacto, ut circumscriptę ad inscriptam minor proportio habeatur, quàm superficiei cylindri dicti ad circulũ. Intelligamus igitur ita circũscriptam & inscriptam dicto circulo esse, ut posuimus, dictam figuram, deinde circa circulum a circumscribatur rectilinea figura, similis uide-

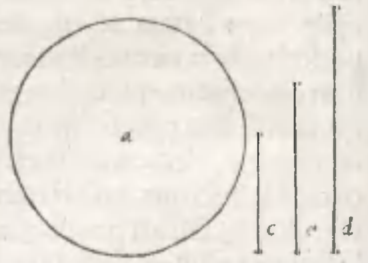
uidelicet illi quæ circa b circulum intelligitur circumſcripta. & ab angulis & punctis dictæ figuræ rectilineæ circulo a circumſcriptæ erigantur lineæ rectæ uerſus caput cylindri, quæ cõcludent figuram plurium laterum & æqualium circa ipſum cylindrum deſcriptam. Eſto etiam perimetro eius figuræ rectilineæ circa a circulum conſtitutæ, æqualis k d linea. iterũ ipſi k d ſit æqualis l f. ſit aũt dimidiũ ipſius c d linea c t, & fiat triangulus rectãgulus k d t, ita quòd angulus rectus ſit ad punctũ d. erit igit̃ triangulus k d t, æqualis figuræ rectilineæ, quam circa a circulum ſuprà deſcripſimus: quoniã dictus k d t triangulus baſem habet æqualem perimetro illius figuræ, & altitudinem æqualem lineæ ex centro a ad circumferentiam ductæ. Super e f conſtituatur figura lineis quatuor parallelis contenta, & rectis angulis. Huius figuræ ſuperficies probatur eſſe æqualis ſuperficiei figuræ rectilineæ circa cylindrum ſuprà deſcriptæ, quoniam continetur linea e f æquali lateri cylindri, & linea f l æquali baſi perimetræ dictæ figuræ circa cylindrum conſtitutæ. Ponatur item e r linea æqualis e f lineæ, & ducatur linea r l, erit confectus triangulus f r l æqualis ſuperficiei e l parallelogrãmæ: quare & idem triangulus ęqualis erit ſuperficiei figuræ circa cylindrum ſtantis. & quoniam rectilinea figura circa b circulum deſcripta, ſimilis eſt figuræ rectilineæ circa ipſum a circulũ deſcriptę, habebũt iſtæ duæ figuræ inter ſe proportionem illam, quam habent ſemidiametri dictorum circulorum a & b, ſecundum potentiam. igitur triangulus k d t, habebit eandem proportionem ad figuram rectilineam circa b circulum deſcriptam, quam habet t d linea ad lineam g ſecundum potentiam. nam t d, g lineæ æquantur lineis quæ ex centris ducuntur ad circumferentias. Sed quam proportionem habet linea t d ad lineam g poteſtate, hanc habet t d linea ad lineam r f longitudine. nam g linea inter t d & r f lineas, media eſt ſecundum proportionem. Propterea quòd etiam inter e d & e f lineas media eſt ſecundum proportionem. Quomodo autem hoc ſit, declaratur ſic. Quoniã enim d t linea æquatur t c lineæ, & r e linea e f lineæ eſt æqualis: linea igitur c d dupla eſt lineæ t d, & linea r f dupla r e. Ergo ſicut ſe habet linea d c ad lineam d t, ſic linea r f ad ſ e. Id igitur quod fit ex c d in e f, æquatur ei quod producitur ex t d in r f. Quod autem ex c d in e f producitur, æquale eſt ei quod fit ex g linea in ſe ducta. igitur quod fit ex t d in r f, æqua-



æquatur ei quod fit ex g in ſe. Eſt ergo ſicut t d ad g, ita g ad r f. quare ſicut t d ſe habet ad r f, ſic quadratum t d ad quadratum g. Nam ſi tres lineæ ponãtur continuæ proportionales, ſicut ſe habet prima ad tertiam, ita figura æquilatera ſuper primã conſtituta, ad figuram conſtitutam ſuper ſecundam, ſi fuerit ſimilis dictæ figuræ, & ſimiliter deſcriptæ. Quam proportionem habet t d ad r f longitudine, eandem habet k d t triangulus ad r l f triangulum, cum k d & l f ſint æquales. Eandem igitur proportionem habet k t d triangulus ad rectilineam figuram circa b circulum ſuprà conſtitutam, quam habet t k d triangulus ad r f l triangulum. Triangulus ergo f l r æquatur rectilineæ figuræ circa b circulum deſcriptæ. quare & ſuperficies figuræ rectilineæ circa cylindrum ſuprà deſcriptæ æqualis erit ſuperficiei figuræ rectilineæ circa b circulum conſtitutæ. At uero quoniam rectilinea ſuperficies circa b circulum conſtans minorem proportionem habet ad ſuperficiem rectilineã ſibi ſimilem, intra b circulum inſcriptam, quàm habeat ſuperficies rectilinea circa cylindrum aptata ad circulum b: propter hoc minorẽ habebit proportionem ſuperficies dicta circa cylindrum conſtans, ad ſuperficiem rectilineam intra b circulum inſcriptam, quàm ſuperficies cylindri ad circulum b. & permutatim quoque: quod eſſe non poteſt omnino. nam ſuperficies figuræ rectilineæ circa cylindrum conſtitutæ, demonſtrata eſt eſſe maior ſuperficie cylindri. rectilinea uero figura circulo b inſcripta, ipſo b circulo minor exiſtit. Nõ eſt igit̃ b circulus minor ſuperficie cylindri. Eſto ſi poteſt eſſe, quod ponatur maior. Rurſus intelligatur in b circulo figura rectilinea inſcripta, & eidem altera circumſcripta ſimilis inſcriptæ, ita ut circumſcriptæ ad inſcriptam minor ſit proportio, quàm circuli b ad ſuperficiem cylindri. et inſcribat̃ in a circulo figura polygonia, ſimilis ei quę b circulo fuit inſcripta: & erigatur, ut ſuprà, figura rectilinea ex angulis figuræ circulo a nuper inſcriptæ, & rurſus k d linea ſit æqualis perimetro figuræ rectilineæ in a circulo inſcriptæ. Sit etiam l f linea æqualis eidem. Iſtis ſic poſitis, cætera ut ſuprà teneantur, erit triangulus k t d maior figura rectilinea circulo a inſcripta: quoniam baſis ipſius trianguli æqualis eſt perimetro dictæ figuræ: altitudo uero maior ea linea quæ à centro a ducitur perpendiculariter ad unũ latus dictæ figuræ. At uero e l ſuperficies quadrilatera æquatur ſuperficiei quæ ſit cõpoſita ex quadrilateris ſuperficieb. omnib. figuræ rectilineæ cylindro ſuprà inſcriptæ: quoniã dicta e l ſuperficies cõtinetur à latere cylindri, & à linea quæ æqualis eſt poſita perimetro figuræ dicto circulo a inſcriptæ, quæ eſt baſis figuræ rectilineæ quæ cylindro fuit inſcripta. Quare etiam l r f triangulus, eſt æqualis ſuperficiei dictæ figuræ cylindro inſcriptæ. Et quoniam ſimiles ſunt rectilineæ figuræ in circulo a b inſcriptæ, proportionem inter ſe eandẽ habebunt, quam habent ſuæ inter ſe diametri in potentia: trianguli quoq; k t d & f r l inter ſe habẽt proportionem, quam habẽt dictorũ circulorum ſemidiametri in potentia. Eandem igitur proportionem habebit rectilinea ſuperficies circulo a inſcripta, ad rectilineam circulo b inſcriptam, quam habet triangulus k t d ad triãgulum l f r. Rectilinea uero ſuperficies circulo a inſcripta, minor eſt k d t triangulo. quare & eandem minorem eſſe oportet ſuperficie figuræ rectilineæ cylindro inſcriptæ: quod ſanè eſſe non poteſt. quoniam minorem habet proportionem figura rectilinea circulo b circumſcripta, ad figuram ſibi ſimilem eidem b inſcriptam, quã circulus b ad ſuperficiem cylindri: & permutatim. Maior autem eſt figura rectilinea circulo b circumſcripta, quàm ipſe b circulus. maior igitur eſt figura rectilinea circulo b inſcripta, quàm ſit cylindri ſuperficies: quare et quàm ſit ſuperficies figuræ rectilineæ cylindro inſcriptæ. non erit igitur maior circulus b ſuperficie cylindri. Et demonſtratum eſt quod minor eſſe nõ poteſt. igitur neceſſe eſt eidem eſſe æqualem.

CVIuslibet coni æquicruris ſuperficies excepta baſe æqualis eſt circulo, cuius 14
ſemidiameter media eſt ſecundum proportionem inter latus coni & ſemidiametrum

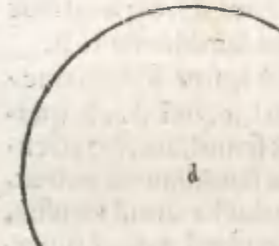
metrum circuli, qui quidem circulus dicti coni basis existat. Esto conus æquicruris, cuius basis sit circulus a, eius circuli semidiameter sit c: lateri uero coni esto d æqualis. media autem inter d & c, secundum proportionem esto e. ponatur deinde b circulus, cuius semidiameter sit æqualis e lineæ. Assero igitur, b circulum æquū esse superficiei dicti coni, excepta base. Et si non concedatur æqualis ei, esto aut maior ea, aut minor dicetur. Primum igitur ponatur minor, si fieri potest. habebimus itaq; duas magnitudines inæquales, superficiem uidelicet coni, & circulum b. & coni superficies ponatur maior. Potest igitur intra circulū b, figura una polygonia inscribi, & æquilatera: & altera eidem circumscribi similis inscriptæ, ita ut circumscriptæ ad inscriptam minor sit proportio, quàm superficiei coni ad b circulū. Intelligatur itaq; sic factum esse. deinde circa circulum a, figura polygonia circūscribatur similis ei quæ b circulo intelligitur circumscripta: & ab ea quæ circulo a circumscripta est erigatur pyramis ad uerticem coni dicti, quæ eūdem uerticem cum cono habebit. Quoniam igitur figuræ polygoniæ circulis a & b circumscriptæ similes sunt effectæ, eandem inter se habebūt proportionem, quam habent semidiametri dictorum circulorum in potentia. Quam uero habet semidiameter c ad semidiametrum e, eandem habet c ad ipsum d in longitudine: & quam habet c ad d in longitudine, eandem habet figura polygonia circulo a circumscripta, ad superficiem pyramidis circa conum erectæ. nā c æqualis est perpendiculari, quæ à centro a circuli ducitur ad unum latus figuræ polygoniæ, linea uero d lateri coni est æqualis. Cōmunis uero est altitudo, linea æqualis perimetro dictæ polygoniæ figuræ. & superficies pyramidis, excepta base, æquatur dimidio superficiei quæ producitur ex d latere coni in lineam æquam perimetro dictæ figuræ polygoniæ. & superficies eiusdem figuræ polygoniæ æquatur dimidio superficiei, quæ producitur ex c linea in eandem lineam dicto perimetro æqualem. Eandem igitur proportionem habebit rectilinea figura circulo a circūscripta, ad rectilineam figuram circulo b circumscriptam, quam habet eadem superficies ad superficiem pyramidis cono circumscriptæ. atque idcirco superficies pyramidis dictæ, æqualis erit figuræ rectilineæ circulo b circūscriptæ. At uero quoniam dicta figura circulo b circūscripta, ad eā sibi similem quæ ipsi b fuit inscripta minorem habet proportionē quàm superficies coni ad circulū b, sequitur ut superficies pyramidis circa conum aptatæ, ad figuram rectilineam circulo b inscriptam minorem habeat proportionem, quàm superficies coni ad circulum b: quod quidem esse non potest. nam superficies pyramidis ostensa est maior esse superficie coni. Figura uero rectilinea circulo b inscripta, ipso b minor existit. non est igitur b circulus minor superficie coni. Dico præterea, quod neq; maior esse potest. Quod si potest, esto maior. & rursus intelligatur b circulo figura una pluriū angulorum inscripta, & altera illi similis circumscripta, ita ut circumscriptæ ad inscriptam minor proportio habeatur, quàm b circuli ad superficiem coni. & ipsi circulo a intelligatur inscriptam esse figuram multorū angulorum, similem illi quæ b circulo fuit inscripta. & ab hac figura erigatur pyramis intra conum inscripta, quæ eundem uerticem cum ipso cono habeat. Quoniam igitur figuræ polygoniæ ipsis a & b circulis inscriptæ positæ fuerunt similes, eandem inter se proportionem retinebunt, quam

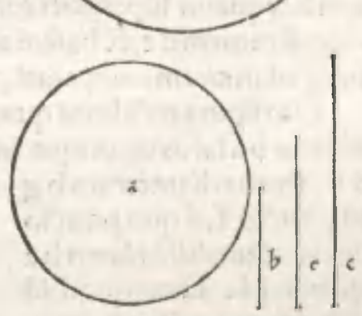


quàm habeāt dictorum circulorum semidiametri inter se potentia. Eandem igitur habet figura polygonia, ad figuram polygoniam proportionem, quam habet c ad lineam d, in longitudine. c autem ad ipsam d maiorem habet proportionē, quàm figura polygonia ipsi a circulo inscripta, ad superficiem pyramidis cono inscriptæ. nam semidiameter a circuli ad latus coni maiorē proportionem habet, quàm perpendicularis, quæ à centro ad unum ex lateribus figuræ polygoniæ ducitur, habeat ad perpendicularem ductam à uertice coni ad idem latus. Quare maiorem proportionem habet figura polygonia circulo a inscripta, ad poligoniam figuram b circulo inscriptam, quàm ipsa eadem figura polygonia habeat ad superficiem pyramidis. Maior igitur est pyramidis superficies, quàm figura polygonia circulo b inscripta. Figura autem polygonia circulo b circumscripta, minorem habet proportionem ad figuram eidem inscriptam, quàm b circulus ad superficiē coni. Multo igitur magis figura polygonia circulo b circumscripta, ad superficiem pyramidis cono inscriptæ minorē proportionem habebit, quàm ipse b circulus ad superficiem coni: quod esse non potest. nam figura polygonia b circulo circumscripta, maior est eo circulo: superficies uero pyramidis cono inscriptæ, minor est superficie coni. Ostensum itaq; est, quod b circulus neq; coni superficie maior, neque minor esse potest. relinquitur ergo, ut necessariò sit ei æqualis.

CVIuslibet coni æquicruris superficies ad basim suam, eandem habet proportionem, quàm latus ipsius coni habet ad lineam eductam à centro basis coni ad eiusdem circumferentiam. 15

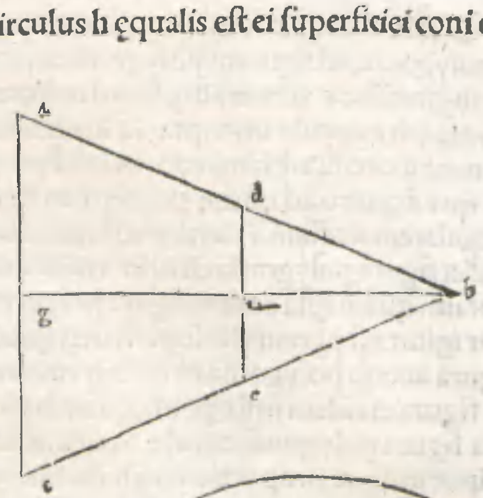
Esto conus æquicruris, cuius basis sit circulus a, esto b linea æqualis semidiametro circuli a, & linea c sit æqualis lateri coni. Demonstrandū itaq; est, quod superficies coni eandē habeat proportionem ad a circulum, quam c habet ad ipsam b. Sumatur enim media inter b & c, secundum proportionē, quæ sit e. & ponatur circulus d, cuius semidiameter sit æqualis e. circulus igitur d est æqualis superficiei coni. Per præmissam demonstratū etiam est, quod circulus d ad circulum a eandem habet proportionē, quam c ad b habet in longitudine. Vtraq; enim proportio eadē est proportioni e ad b, in potentia: quoniam circuli ad circulū ea est proportio, quę est quadrati diametri ad quadratum diametri: & similiter se habent quadrata semidiametrorum. sicut enim diametri totæ, ita earum dimidia. Semidiametris uero sunt æquales lineæ b & e. Igitur manifestum est, superficiem coni eandem habere proportionem ad a circulum, quam habet c linea ad b lineam, in longitudine.

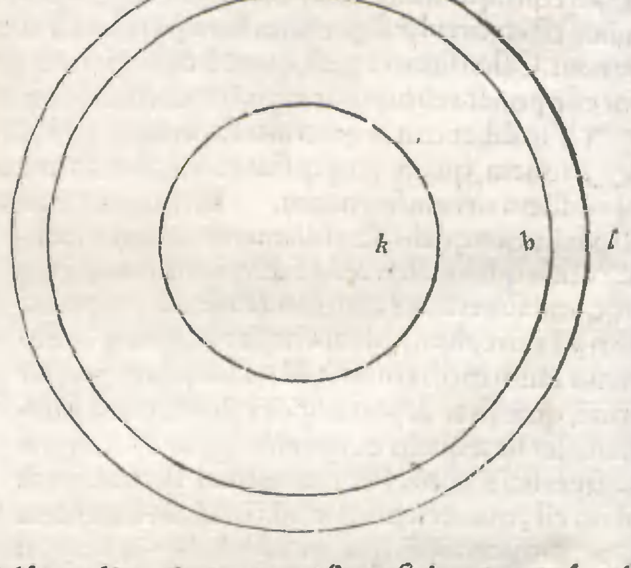




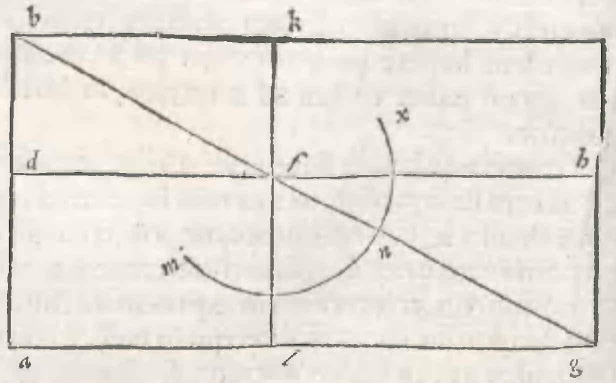
SI conus æquicruris secetur superficie plana, quæ quidem superficies basi ipsius coni sit æquedistans: ea coni superficies, quæ à secante & à base concluditur ei circulo æqualis esse probatur, cuius circuli semidiameter sit media secundū proportionem inter latus superficiei conicæ, eius scilicet quæ inter basim & secantem continetur, et inter lineam æqualem duabus semidiametris simul iunctis duorum circulorum, eorum scilicet qui in base & secante notatur. 16

Esto conus cuius triangulus qui ab axe constituitur, sit æqualis triangulo a b c, qui a b c à linea quadam secetur, quæ linea sit basi eius æquedistans, & uocet d e. axis uero coni sit b g. & exponatur circulus aliquis, cuius semidiameter sit media secundum proportionem inter a d latus, & inter compositam ex d f, & a g: semidiametri uero huius circulus ſit h. Dico igit̃, quod circulus h ęqualis eſt ei ſuperficiei coni quæ inter d e & a c compræhẽditur. Igitur ſtatuantur duo circuli k, l, & ſemidiameter circuli k tantũ poſſit quantum continetur ſub b d, d f. ſemidiameter uero circuli l tantum poſſit quã tum continet̃ ſub b a, a g. Circulus igitur l æqualis ſuperficiei a b c coni, circulus uero k æquatur ſuperficiei a d e. Et quoniam id quod ex a b in a g fit, ęquatur his: ei quod fit ex b d in d f, & ei quod fit ex a d in utrãq; d f & a g: quoniam æquediſtantes ſunt d f, & a g. At uero quod ex a b in a g producitur, æquatur quadrato ſemidiametri circuli l. et quod ex b d in d f naſcitur, ęquatur quadrato ſemidiametri circuli k: quod ex d a in utranq; ſimul d f, a g æquatur quadrato ſemidiametri h. quadratũ igitur ſemidiametri circuli l, æquat̃ duob. quadratis ex ſemidiametro circuli k, & ex ſemidiametro circuli h productis ſimul iunctis. Verũ circulus l æquat̃ ſuperficiei coni a b c: circulus autem k æquatur ſuperficiei coni d b e. relinquitur ergo, ut ſuperſicies compræhenſa inter ſecantem d e, & baſem a c, ſit æqualis circulo h. nam circuli quicunq; ſic ſe habent ad inuicem comparati, ſicut quadrata ſuarum diametrorum.





Eſto figura rectilinea quadrilatera rectangula b a g, cuius diameter ſit b g, diuidatur b a latus utcunque in puncto d, à quo ducatur æquediſtans a g, quæ ſit d h, ſecans diametrum b g in puncto f, à quo puncto ducat̃ æquediſtãs lateri b a quæ ſit k l. Dico quod id quod fit ex b a in a g, æquatur ei quod fit ex b d in d f, & ex d a in utrãq; ſimul d f, a g. quoniã igit̃ id quod fit ex b a in a g totã, eſt b g ſuperficies: quod aũt fit ex b d in d f, eſt b f: & quod ex d a, in utramq; ſimul d f, a g, eſt gnomõ m n x. Quod enim ex d a in a g, æquatur k g, quia ſupplementũ k h æquatur ſupplemento d l. quod fit ex d a in d f, æquatur d l. Tota igitur ſuperficies b g, quæ fit ex b a in a g. æquat̃ ei quod



ei quod fit ex b d in d f, & gnomoni n m x, qui æquatur ei quod fit ex d a in utrãque ſimul a g, d f.

Coni qui altitudines habuerint æquales, ſuis baſibus ſunt proportionales. qui uero baſes æquas habuerint, ſuis altitudinibus proportionales erunt.

Si cylindrus plana ſuperficie ſecetur, quæ æquediſtet baſi ſuæ, erit totius ad quãcunq; partem ſuam, uel etiam partis ad partem, ſicut axis ad axem proportio.

Coni in eiſdem baſibus cum cylindris conſtituti, eadem proportione qua cylindri referuntur.

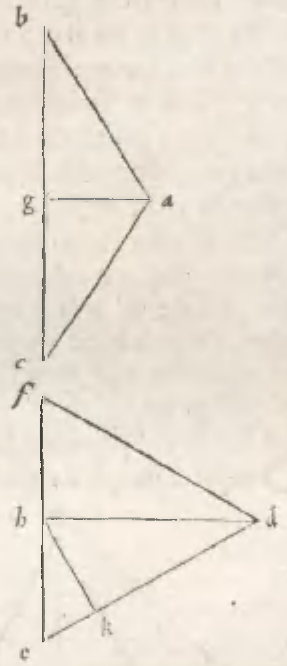
Altitudines conorum æqualiũ, mutuam ſuis baſibus proportionẽ ſequuntur.

Coni quorum altitudines mutuam ſuis baſibus proportionem ſequũtur, ſunt inter ſe æquales.

Coni, quorum diametri baſium eãdem cum ſuis axibus proportionem habuerint, ſeruant inter ſe proportionem, quæ inter diametros ſuarum baſium habetur triplicatam. Hęc autem omnia à ſuperioribus ſunt demonſtrata.

SI fuerint duo coni æquicrures, fueritq; alterius ſuperficies baſi alterius æ- 17
qualis, fuerit item linea recta quæ à centro dictæ baſis ducta ſit ad latus coni perpẽdiculariter æqualis altitudini alterius coni, illos conos æquos eſſe neceſſe eſt.

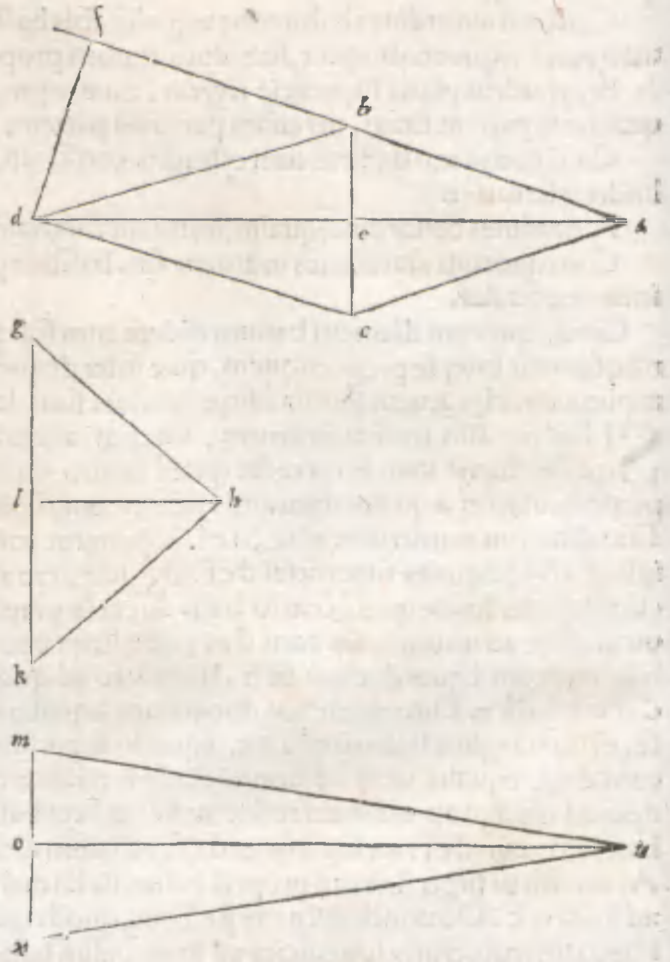
Eſto duo coni æquicrures a b c, d e f. & ponatur baſis ipſius a b c, æqualis ſuperficiei d e f. altitudo uero a g eſto æqualis lineæ quæ à centro baſis ducta ſit perpẽdiculariter ad unum latus coni d e f, quæ linea uocet̃ h k. centrum à quo ducitur ſit h. latus uero ad quod ducta eſt, d k e. Dico igitur hos duos conos æquales eſſe. Quoniã igitur baſis coni a b c, æquatur ſuperficiei coni d e f, æqualia uero ad unum & idem relata eandem ad illud proportionem retinent: fiet ut ſicut baſis b a c, ad baſim d e f: ita ſuperficies d e f, ad baſim d e f. At uero ſicut ſuperficies ad propriã baſim, ſic linea d h ad lineã h k. Demonſtratũ namq; eſt hoc, quod cuiuſlibet coni æquicruris ſuperficies ad ſuam baſim habet eandem proportionem, quam latus ipſius coni ad ſemidiametrũ baſis, ſicut uidelicet d e ad e h: ſed ſicut d e ad e h, ita d h ad h k. ſunt enim trianguli æquiãguli. eſt autem h k æqualis a g. igitur ſicut baſis a b c coni ad baſim d e f coni, ita altitudo d e f ad altitudinem a b c. Horum igitur conorum altitudines mutuam ſuis baſibus habent proportionem. Ex quo ſequitur, eos eſſe æquales.



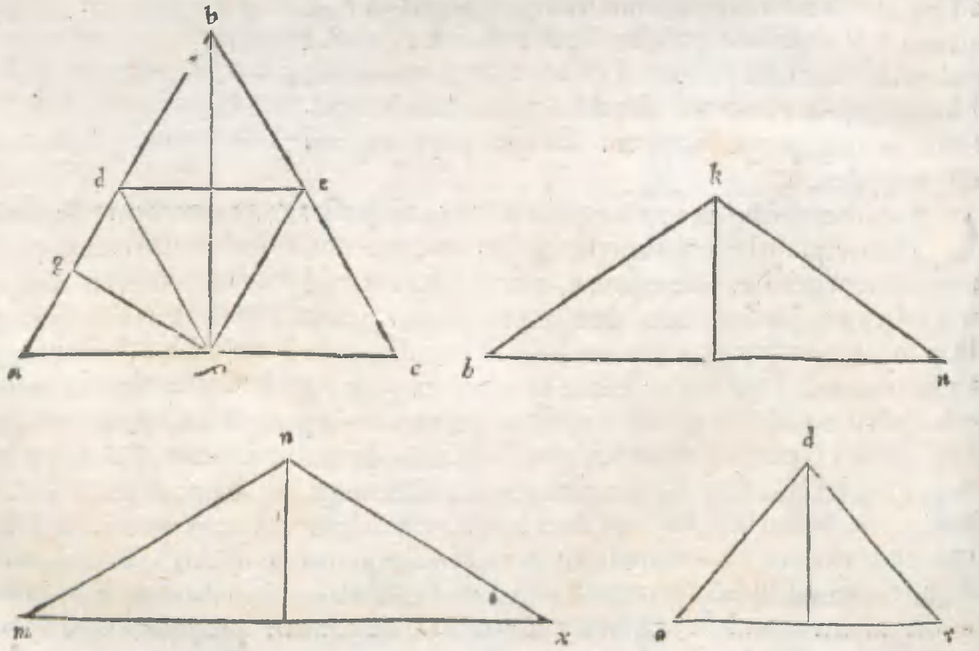
CVilibet rhõbo ex conis æquicruribus compoſito, æquatur conus ille qui ba- 18
ſem æquam habeat ſuperficiei alterius conorum, qui rhõbum comprendũt: altitudinem uero æqualem lineæ, quæ quidem linea ducta ſit ab alterius coni uertice ad unumquoduis latus alterius perpendiculariter. Eſto rhõbus ex æquicruribus conis collectus a b c d, cuius baſis ſit circulus circa diametrũ b c deſcriptus, altitudo uero a d. Exponatur etiam alter conus g h k, qui baſim habeat ſuperficiei a b c coni æqualem, altitudinem uero æquam lineæ quæ ab ipſo d puncto ducta ſit ad latus a b perpẽdiculariter, quæ ſit d f. altitudo uero g h k coni, ſit h l. & eſto h l æqualis d f. Dico tunc quod etiam conus rhõbo æquatur. Exponatur & alter conus m n x, baſim habens æqualem baſi a b c coni, altitudinem uero ipſi a d: ſitq; eius altitudo n o. Quoniam igitur n o ipſi a d æquatur, erit idcirco ſicut n o ad ipſum d e, ita a d ad d e. At uero ſicut a d ad d e, ſic a b c d rhombus ad b c d conum. Sicut autem n o ad d e, ita m n x conus ad b c d conum: propterea quod eorum

 baſes

bases sunt æquales. Ergo sicut m n x conus ad b c d conum, sic a b c d rhombus ad b c d conum. Conus igitˉ m n x est æqualis rhombo a b c d. item quia superficies a b c æquatur basi g h k. sicut ergo superficies a b c ad propriā basim, sic basis g h k ad basim m n x. At uero sicut superficies a b c ad propriam basim, sic a b ad b e, quod idē est a d ad d f. nam trianguli sunt similes. quare sicut basis ipsius g h k ad basim n m x, sic a d ad d f. Est aūt a d æqualis n o per suppositum: d f uero æqualis h l. quare sicut basis g h k ad basim m n x, ita n o altitudo ad h l. Conorum igitur g h k, & m n x bases altitudinibus mutuam habent proportionem. Sunt igitur hi coni æquales. Ostēsum est autem, m n x esse rhombo a b c d æqualem. quare & g h k conum, dicto a b c d rhombo æqualem esse, necessariò colligitur.



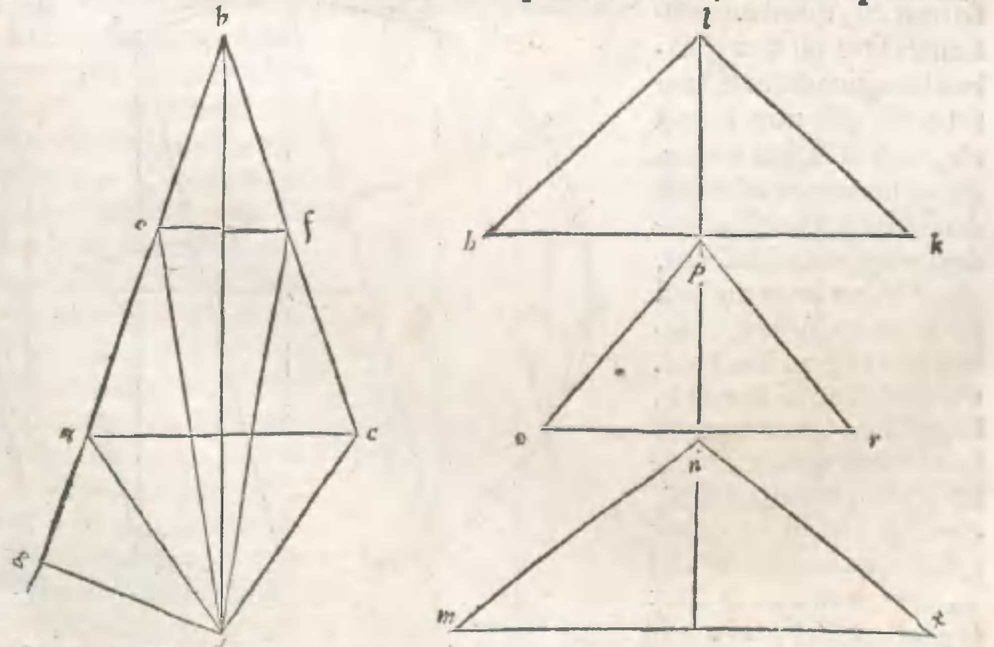
19 SI conus æquicruris superficie plana secetur, quæ quidem superficies basi coni æquedistet, & à circulo in sectione producto conus deorsum describatˉ, uerti-



cem

cem defigens in centrum basis prioris coni, rhombū cum coni parte superiori efficiet, qui quidem rhōbus si à toto priore cono auferatur, ei quod relinquitur conus ille probatur æqualis: cuius quidem coni basis sit æqualis ei superficiei coni qui sectus ponitur, quæ superficies intra secantem & basem concluditur. altitudo præterea prædicti coni sit æqualis lineæ à centro basis primi coni ductæ perpendiculariter, ad unumquoduis latus primi coni. Esto conus æquicruris a b c, qui secetur à plana superficie quæ basi ipsius æquedistet. Esto hæc sectio d e, centrum uero basis f. & à circulo, cuius diameter est d e, describatur conus, cuius uertex sit f. & sic habemus rhombū ex duobus conis æquicruribus constitutum, qui est b d f e. Exponatur etiam quidam conus k h l, cuius basis esto æqualis superficiei, quæ inter a c, d e continetur: altitudo uero æqualis lineæ quæ à centro f ducta sit perpendiculariter ad latus a b, quæ ducta sit f g. Dico itaq;, quod si à cono a b c intelligatur ablatus rhombus b d f e, ei quod relinquetur æqualis erit conus h k l. Exponātur itē duo coni m n x, o p r, ita ut basis ipsius m n x superficiei coni a b c sit æqualis, & altitudo æqualis f g. Propter hoc itaq; m n x conus est æqualis a b c cono. Nā si duo coni æquicrures ita statuantur, ut superficies alterius coni sit æqualis basi alterius: præterea linea à centro ducta perpendiculariter ad unum latus alterius, sit æqualis altitudini alterius, conos illos æquos esse demonstratum est. Propter id uero quod coni o p r basis est posita æqualis superficiei d e b coni, & altitudo ipsi f g, conus o p r æquatur rhombo b d f e. hoc enim suprà demonstratum fuit. Quoniā autem superficies coni a b c componitur ex b d e, & ea quæ inter d e & a c continetur; præterea superficies a b c coni: æquatur basi m n x coni: superficies uerò d b e coni æquatur basi o p r coni, quæ uero media est inter d e & a c æquatur basi h k l: sequitur, ut basis m n x sit æqualis basibus conorum h k l, o p r. Cum que sint hi coni altitudine æqua erecti, erit conus m n x, æqualis conis simul h k l, o p r. Verū conus m n x, æqualis est cono a b c: conus uero o p r, æqualis rhombo b d e f. Reliquum est igitur, ut h k l conus, æqualis sit ei quod sublato rhombo relinquitur.

SI ex his conis æquicruribus, quib. rhombus compositus sit, alter plana superficie secetur, quæ sit basi æquedistans: & à producto in sectione circulo conus erigatur ad uerticē alterius coni: deinde à toto priore rhombo, rhōbus nuper factus 20

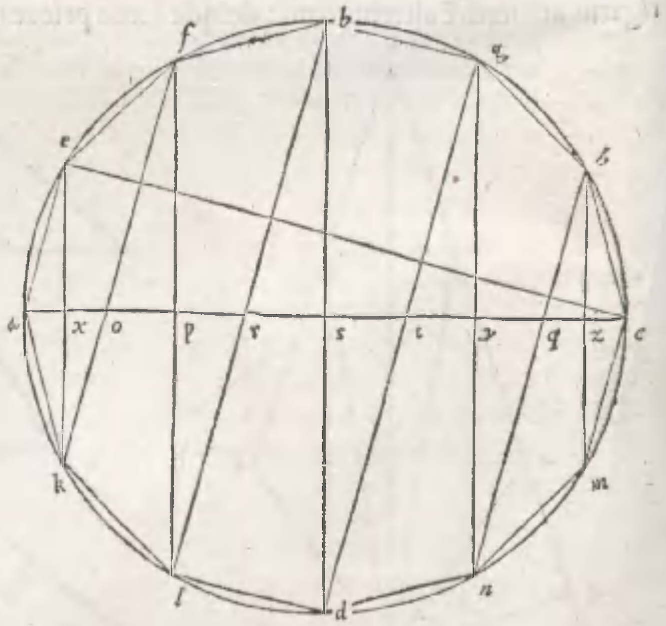


auferatur: ei quod residuum est æquatur conus, qui basim habeat æqualem ei superficiei coni, quæ inter secantem & basem continetur: altitudinem uero æqualē

 lineæ,

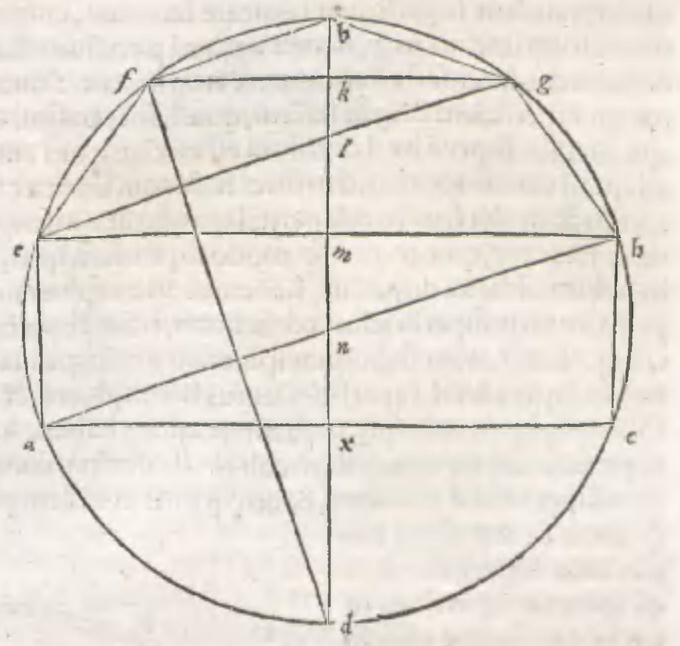
lineæ, quæ à uertice alterius coni, ad unum latus alterius coni perpendiculariter ducta sit. Esto rhombus, ex conis æquicruribus compositus a b c d, & alter illorum conorum secetur plana superficie, quæ basi æquedistans sit, & fiat sectio e f. à circulo uero cuius diameter est e f, erigatur conus habẽs uerticem d punctũ, iaq; factus est rhombus e b d f, qui intelligatur ablatus à toto rhombo. Exponatur autem quidem conus h k l, qui basim habeat æqualem superficiei coni, quæ à secante & base concluditur a c e f: altitudinem uero ei lineæ quæ à puncto d ducitur, perpendiculariter ad latus b a. Dico itaq;, quod h k l conus æqualis est dicto residuo. Expositi autem sint duo coni isti, uidelicet m n x, o p r. & basis m n x coni æqualis ponatur superficiei a b c: altitudo uero æqualis d g. Propter illa erga quæ demonstrata sunt, conus m n x æquatur rhombo a b c d. coni uero o p r basis, cũ ponatur æqualis superficiei e b f coni, & altitudo æqualis lineæ d g: similiter o p r conus æquatur rhombo e b d f. Quoniam igitur superficies a b c coni, similiter componatur ex superficie coni e b f, & ex ea quæ media est inter e f, a c. Insuper coni a b c superficies æquatur basi m n x, superficies uero e b f æquatur basi coni p o r. quæ autem media est inter e f, a c, æquatur basi h k l. Basis igitur m n x, æquatur basibus conorum o p r, h k l. & sunt hi coni sub eadem altitudine. quare m n x conus æquabitur h k l, o p r conis. Verũ conus m n x æquatur rhombo a b c d, conus aũt o p r rhombo e b d f est æqualis. reliquus igĩt conus h k l ęqualis residuo erit necessario.

21 SI intra circulum quemcunq; inscribatur figura rectilinea, quæ multis angulis constet, quæq; latera inter se æqualia & numero paria habeat, insuper ducantur lineæ rectæ ab angulis ad angulos dictæ figuræ latera ipsius coniũgentes, sitq; ut hæ ductæ sint æquedistantes uni ex earum numero: illi scilicet, quæ duobus dictæ figuræ lateribus subtenditur: tunc istæ quæ latera dicta coniungunt, omnes ad diametrum circuli eandem habent proportionem, quam habet illa linea recta ad latus dictæ figuræ, quæ quidem linea ipsi diametro & lateri dictæ figuræ quod diametro sit applicatum subtenditur. Esto circulus a b c d, & sibi inscribatur figura rectilinea multis angulis constans, quæ sit a e f b g h c m n d l k: & iungantur e k, f l, b d, g n, h m, ductis lineis e k, f l, &c. manifestum est, quod æquedistantes sunt illi quæ duobus lateribus dictæ figuræ subtensa est, quæ est uel e k, uel h m. Dico itaque, quod hæ omnes ad circuli diametrum quæ est a c, eãdem proportionẽ habent, quam habet linea ducta à pũcto c ad punctũ e, uidelicet linea c e ad lineã a e. ducantur itaque lineæ f k, l b, g d, h n. Igitur æquedistans erit f k ipsi e a, deinde b l ipsi f k, etiã d g ipsi b l, demum h n ipsi d g, & m c ipsi h n. quare sicut e x ad x a, ita k x ad x o. & sicut k x ad x o, ita f p ad p o. sicut autem f p ad p o, ita l p ad p r. Deinde sicut l p ad p r, sic b s ad s r. & sicut b s ad r s, ita d s ad s t. & sicut d s ad s t, ita g y ad y t. & sicut g y ad y t, ita n y ad y q. & sicut n y ad

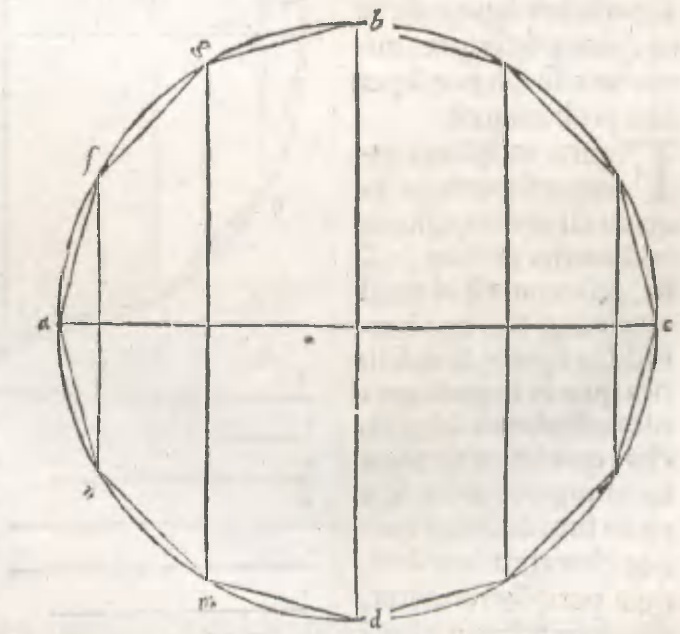


n y ad y q, ita h z ad z q. & sicut h z ad z q, ita m z ad z c. & demum sicut una ad unam, ita omnes simul collectæ ad omnes simul collectas se habent. quare sicut e x ad x a, ita e k, f l, b d, g n, h m ad ipsam a c diametrum. At uero sicut e x ad x a, ita c e ad e a. unde sicut c e ad e a, ita omnes e k, f l, b d, g n, h m ad a c diametrum.

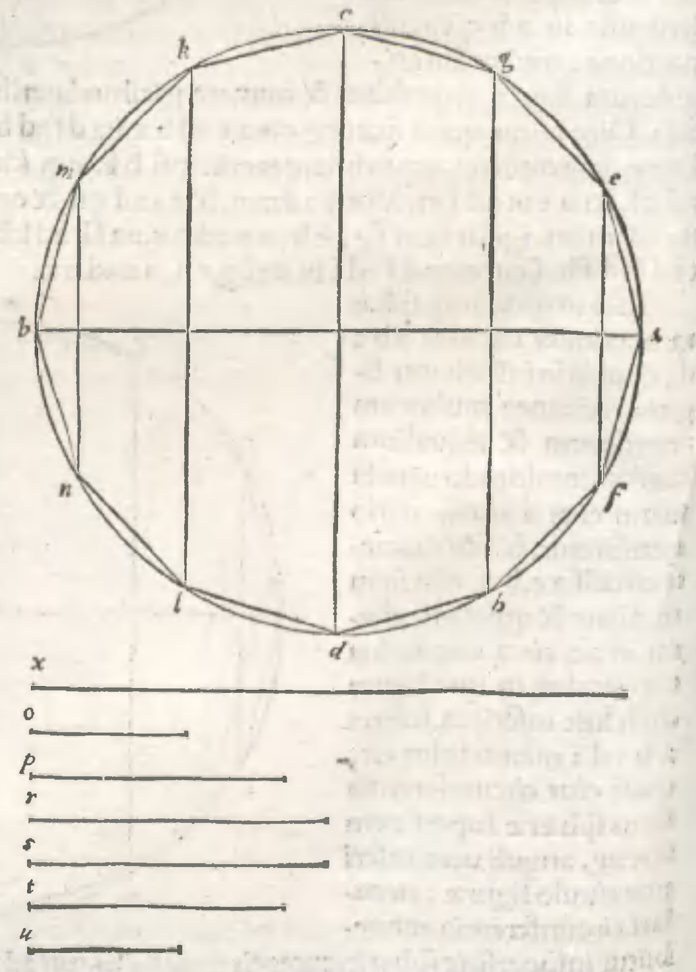
SI in circuli cuiuspiam portione figura multorum angulorum inscribatur, quæ quidem figura latera habeat excepta base inter se ęqualia, & numero paria, deinde rectæ lineæ ducantur æquedistantes basi portionis, & quæ latera dictæ figurę coniungant: tunc hę omnes ductæ simul, cũ dimidio basis portionis, habebũt ad altitudinem portionis eandem proportionẽ, quã habet linea illa ad latus figuræ dictæ, quæ linea ab una extremitate diametri totius circuli ad latus figuræ ipsi diametro applicatum ducta sit. Intra circulum a b c, quædã linea recta ducatur, quæ sit a c. & super base a c inscribatur in a b c circuli portione, multorum angulorum figura, æqualibus & numero paribus lateribus, excepta base, a c constãs. Dico igitur, quod sicut f g, e h, a x ad b x, ita d f ad b f. Ducantur rursus g e, a h lineæ, quæ quidem æquedistantes erũt ipsi b f. atq; idcirco sicut k f ad k b, ita g k ad k l, & ita e m ad l m, & m h ad m n, & x a ad x n, & omnes simul ad omnes, ut una ad unam. igitur sicut f g, e h, a x ad b x, ita f k ad k b. At uero sicut f k ad k b, ita d f ad f b. sicut ergo d f ad f b, ita f g, e h, a x ad b x. 22



Esto in quacunq; sphæra maximus circulus a b c d, & in ipso inscribatur figura rectilinea multorum angulorum & æqualium laterum: multitudo uero laterum eius à quaternario mensuretur, & sint diametri circuli a c, b d. esto item manente & quietante diametro a c, circa eam uoluatur circulus in quo figura dicta fuit inscripta, scilicet a b c d: manifestum est, quod eius circumferentia secus sphæræ superficiem feretur. anguli uero inscriptæ circulo figuræ, circulari circumferentia mouebũtur in superficie sphęræ: exceptis tamen illis, qui ad puncta a et c insistũt. quotq; ipsi



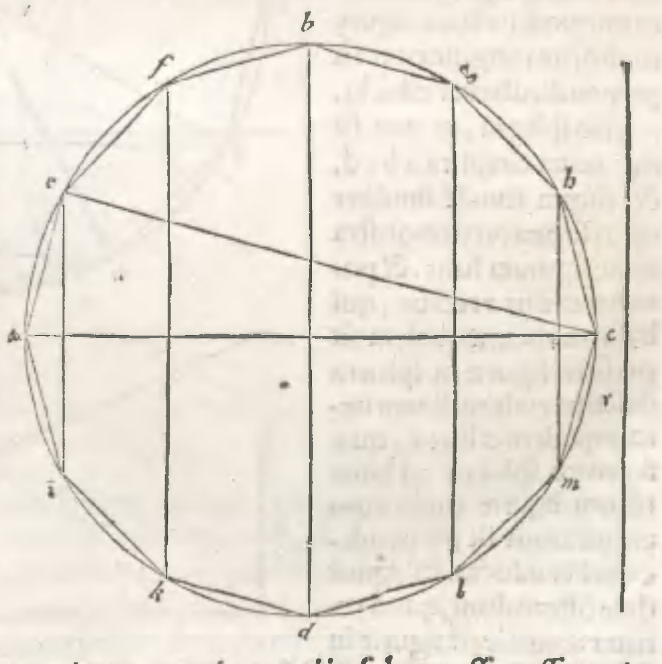
ipſi fuerint qui moti ſunt, totidem circulos intra ſphæram deſcribent qui erunt ſupra a b c d circulum erecti, & eorum diametri erunt lineæ illæ quæ figuræ inſcriptæ latera coniungebant: eruntq; omnes ipſi b d æquediſtantes. latera uero figuræ inſcriptæ eodem modo circumuoluta, quaſdam conicas ſuperficies intra ſphæram deſcribunt: ſed a f & a n conum perficient, cuius baſis erit circulus ille qui habet lineam f n diametrum, uerticem uero punctum a. Lineæ autem f g, m n ſecundum quandam ſuperficiem conicam ferentur, cuius baſis circulus eſt, qui habet diametrum lineam m g, uertex uero ad punctum illud, ad quod f g & m n lineæ concurrent, inter ſe ſi educantur, & cum linea a c: lineæ uero b g, m d ſecundum conicam ſuperficiem & ipſæ ferẽtur, quæ habet baſim, circulum cuius diameter b d, qui circulus ſuper a b c d circulum eſt erectus. coni autem uertex ad punctum illud ad quod concurrent b g, d m inter ſe, & cum linea a c ſi educantur. Similiter quoq; accidit & in alia ſemicirculi parte: latera figuræ inſcriptæ ſecundum conicas ſuperficies ferentur, quæ conuerſo modo ſupra deſcriptis, in ſphæra figuras deſcriptas habebunt. His ita diſpoſitis, habemus intra ſphæram figuram corpoream deſcriptam, conicis ſuperficiebus contentam, cuius ſuperficies minor ſphęræ ſuperficie eſſe probatur. nam ſi diuiſam ſphæram intelligamus à circulo b d plano, qui eſt erectus ſuper a b c d, ſuperficies unius hemiſphærij, & ſuperficies figuræ dictæ in ipſo hemiſphęrio inſcriptę, eoſdem terminos habent in eodem plano. nam utrarũq; ſuperficierum terminus eſt circuli circumferẽtia, cuius diameter eſt b d, qui eſt erectus ſuper a b c d circulum, & utręq; ſunt in eãdem partem eductæ & conuolutæ, & altera earum alterã cõplectitur ſuperficiẽ: hoc eſt ſphæræ ſuperficies ſuperficiem figuræ eiſdem terminis cum ea contentam. Similiter etiam in alio hemiſphærio figuræ ſuperficies, concluditur minor eſſe ſuperficie hemiſphærij: quare totam ſuperficiem figuræ dictæ in ſphæra deſcriptæ, minorem eſſe ſphæræ ſuperficie probatum eſt.



23 Figuræ in ſphæra inſcriptę ſuperficies, æqualis eſt circulo, cuius ſemidiameter tantum poſſit, quantum eſt id quod continetur ſub uno latere dictæ figuræ, & ſub linea quæ ſit æqualis omnibus illis lineis ſimul iũctis, quæ lineæ ab angulis ad angulos dictæ figuræ ita ſunt ductę, ut quęque duæ cum lateribus, quæ per ipſas iungũtur, quadrangularem figurã efficiãt: & ei quæ duob.

lateribus ſubtenditur, ſint æquediſtantes. Eſto in ſphæra maximus circulus a b c d, & in ipſo inſcribatur figura multorum angulorum, & æqualium laterum, cuius multitudo laterũ numeretur à quaternario, & ab hac figura intelligatur figuram corpoream eſſe in ſphęra deſcriptã: & ducãtur e f, g h, c d, k l, m n lineæ, quæ ſint æquediſtãtes illi quæ duobus lateribus dictæ figuræ ſubtenſa eſt. Exponatur item quidam circulus qui ſit x, cuius ſemidiametros tantũ poſſit, quantũ eſt quod continetur ſub a e latere dictæ figuræ, & ſub linea quæ ſit æqualis e f, g h, c d, k l, m n, lineis ſimul iunctis. Dico igitur, quod hic circulus x, æquatur ſuperficie figuræ in ſphæra deſcriptæ. Exponantur item circuli o p r s t u, & ipſius o ſemidiametros poſſit tantum quantum continetur ſub e a, & dimidio e f. & diameter p poſſit id quod continetur ſub e a, & dimidijs e f, g h. ſemidiametros uero ipſius r poſſit id quod continetur ſub e a, & dimidijs g h, c d. ſemidiametros ipſius s poſſit id quod ſub e a, & dimidijs c d, k l continetur. ſemidiametros ipſius t, poſſit id quod continetur ſub a e, & dimidijs k l, m n. ſemidiametros demum u, poſſit id quod continetur ſub a e, & dimidia m n. Ex his igitur quæ poſita ſunt, circulus o æquatur ſuperficiei a e f coni. circulus p æquatur ſuperficiei conicæ quæ inter e f & g h lineas comprenditur. circulus r æquatur ſuperficiei conicæ à lineis g h, c d comprenſæ. circulus s æquatur ſuperficiei conicæ à lineis c d, k l contentæ. præterea circulus t ſuperficiei conicæ, inter k l, m n concluſæ. demum circulus u ſuperficiei coni m b n, eſt æqualis. Hi igitur circuli omnes ęquales ſunt ſuperficiei figuræ, quæ ſphæræ inſcripta fuit. Et palàm eſt quòd ſemidiametri circulorum o p r s t u poſſunt id quod continetur ſub a e latere, & ſub linea dupla cõpoſitæ ex dimidijs e f, g h, c d, k l, m n, quæ eſt æqualis lineæ compoſitæ ex ipſis integris. quare ſemidiametri circulorum o p r s t u poſſunt id quod cõtinetur ſub a e, & omnibus e f, g h, c d, k l, m n ſimul iunctis. Verum & ſemidiametros circuli x poteſt idem quod continetur ſub a e, & ſub linea compoſita ex omnibus illis e f, g h, c d, k l, m n. quare ſemidiametros circuli x tantum ſola poteſt, quantum ſemidiametrorum ſimul o p r s t u circulorum quadrata componunt. Igitur circulus x, æquatur omnibus ſimul circulis o p r s t u. ipſos aũt circulos oſtenſum eſt æquales eſſe ſuperficiei dictæ figurę. ex quo ſequitur, ipſum x circulum ſuperficiei dictæ figuræ eſſe æqualem, ut propoſitum fuerat.

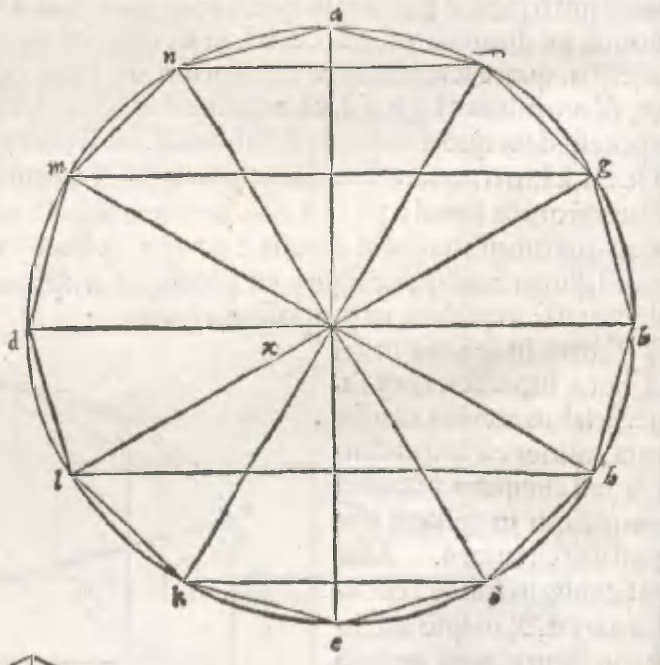
Figuræ in ſphæra inſcriptæ ſuperficies, ex ſuperficiebus conicis conſtituta, minor eſt q; quadrupla, ad circulum maximũ omniũ qui in ſphæra eſſe poſſunt circulorũ. 24

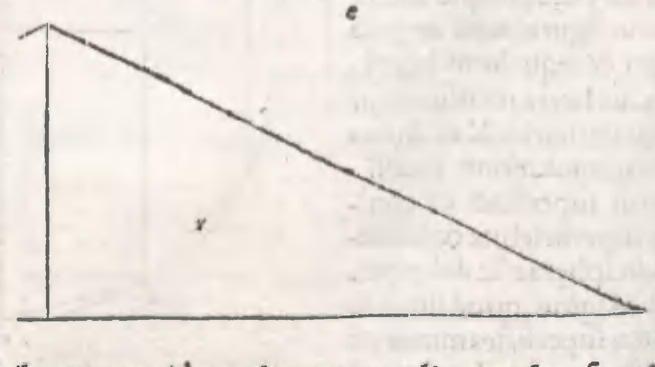


Eſto maximus in ſphæra circulus a b c d, & in ipſo inſcribatur figura pariũ angulorum & æqualium laterũ, et eius latera menſurentur à quaternario, & ex huius circumuolutione intelligatur ſuperficies ex conicis ſuperficiebus conſtituta, in ſphęra eſſe deſcripta. Dico igitur, quod iſtius figuræ ſuperficies minor eſt quàm quadrupla ad circulum maximum omnium qui in ſphæra eſſe poſſunt circulorum.

culorum. Ducantur itaq; duæ lineæ, quæ ſubtendantur ſingulæ duobus lateribus figuræ prædictæ, quorum hæc duo quib. una ſubtenditur, ſint oppoſita reliquis duobus quibus altera ſubtenſa eſt. ſintq; hæ ductæ e t, h m: & reliquæ iſtis æquediſtãtes f k, d b, g l. Exponatur item circulus r, cuius ſemidiametros poſſit id quod ſub a e, & ſub linea æquali compoſitæ ex omnibus illis e t, f k, b d, g l, h m. Ex his igitur quæ ſuperius demonſtrata ſunt, circulus r æquatur ſuperficiei dictæ figuræ. & quoniam inſuper demonſtratum eſt, quod ſicut linea æqualis omnibus ſimul illis e t, f k, b d, g l, h m ſe habet ad diametrum circuli a c, ſic linea c e ad lineam e a. Quod igitur ſub illa quæ æquatur omnibus ſimul dictis, & ſub ea cõtinet, quod idẽ eſt ei quod à ſemidiametro circuli r, in ſe ducto producitur, æquale eſt ei quod ſub a c & c e comprenditur. uerũ id quod ſub a c & c e cõprenditur, minus eſt quadrato a c. quadratum igitur ſemidiametri r circuli minus eſt quadrato lineæ a c, ſequitur ergo, diametrũ r circuli minorem eſſe quàm duplam diametri a b c d circuli. Duæ igitur diametri a b c d circuli, diametro r circuli ſunt maiores. & quod ſit, à diametro circuli a b c d, hoc eſt a c linea quater in ſe ducta, maius eſt quadrato diametri circuli r. At uero ſicut eius quod fit ab a c linea, quater in ſe ducta, ad quadratum diametri circuli r, ita quatuor circuli æquales a b c d ad circulum r. quatuor itaq; circuli equales a b c d circulo, ſunt maiores circulo r. Igitur circulus r minor eſt quadruplo a b c d circulo in ſphæra maximo. Circulus autem r demonſtratus eſt æqualis ſuperficiei dictæ figuræ. quare colligitur, ſuperficiem dictæ figuræ minorem eſſe, quàm quadruplam maximi circuli in ſphæra deſcripti.

25 FIguræ in ſphera deſcriptæ, quæ conicis ſuperficiebus contineatur, ille conus æqualis eſſe probatur, cuius coni baſis ſit circulus, qui æquatur ſuperficiei figuræ in ſphæra deſcriptæ: altitudo uero eius æqualis ſit lineæ illi, quæ à centro ſpheræ ad unumquoduis latus figure multorum angulorum ſit perpendiculariter educta.



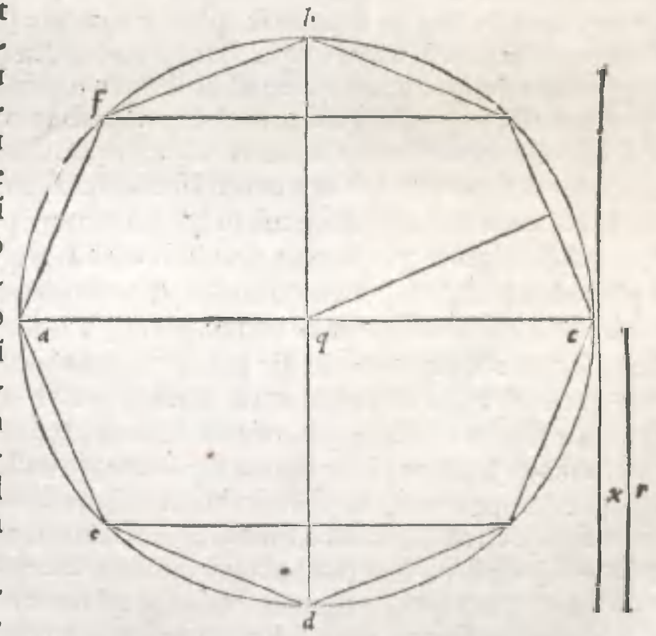


Eſto ſphæra, in qua ſit maximus circulus a b c d, & reliqua ſumãt ſimiliter uti in ſuperiori demonſtratione figurata ſunt. & ponatur conus r rectus, qui baſim habeat æqualem ſuperficiei figuræ in ſphæra deſcriptæ: altitudinem uero æqualem ei lineæ, quæ à centro ſphæræ ad latus unum figuræ multorum angulorum ſit perpendiculariter educta. Eſt igitur demõſtrandum, quod conus r æqualis eſt figuræ in ſphæra deſcriptæ, nam deſcribantur coni à circulis, quorum diametri ſunt f n, g m, h l,

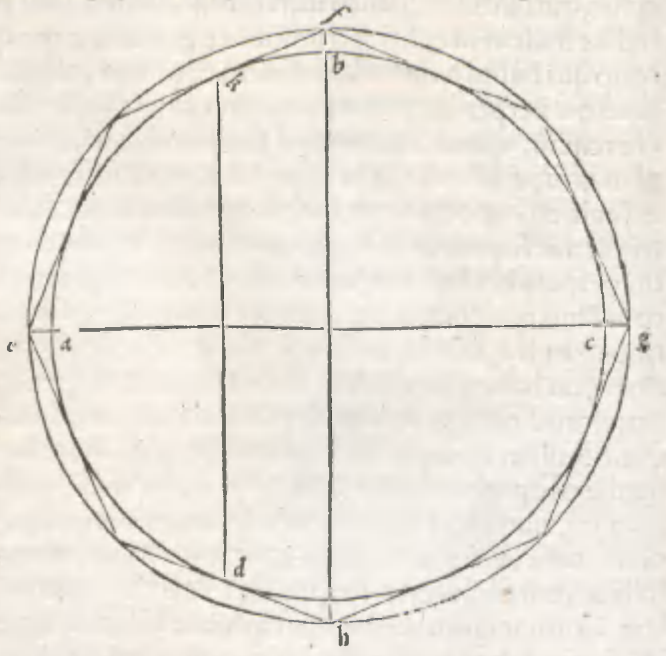
h l, i k, quorum conorum baſes ſint dicti circulie, uertices uero ad x centrum ſphæræ deducti. Habemus rhombum ſolidũ, qui conficitur ex cono, cuius baſis eſt circulus, qui circa f n diametrum conſtat, uertex uero punctum a: & ex cono, cuius baſis eſt idem circulus, uertex uero punctum x. qui quidem rhombus eſt æqualis cono qui baſim habeat ſuperficiem coni n a f, altitudinem uero æqualem lineæ à centro x perpendiculariter ad unum latus ductæ. Rurſus reſiduum à rhombo dicto relictũ, quod continetur à ſuperficie coni, illa ſcilicet quæ inter æquediſtãtes planas ſuperficies f n, g m cõprẽhẽditur, & inter ſuperficies conorũ f n x, & g m x æquale eſt cono habenti baſem æqualem ſuperficiei conicæ, illi uidelicet quæ inter planas ſuperficies f n, g m continetur. altitudo uero, lineæ ab x centro ad f g latus perpendiculariter eductæ. Hæc autem ſuprà ſunt demonſtrata. item reſiduum coni illius qui continetur à conica ſuperficie, quæ includitur à planis æquediſtantibus g m, b d, & à ſuperficie coni m g x, & circulo cuius diameter b d ęqualis eſt cono baſim habenti æqualem ei coni ſuperficiei, quæ inter g m, b d planas continetur: altitudinem uero æqualem lineæ à centro x ad latus b g perpendiculariter ductæ. Similiter quoque in alio hemiſphærio rhombus x k c l, & reſidua conorũ æqualia eſſe probabuntur talibus & tantis conis, ut ſuprà dictum eſt. Manifeſtum itaq; eſt, quod tota ſimul figura ſphæræ inſcripta æqualis erit omnib. ſimul conis dictis. coni uero ipſi æquales ſunt ipſi r cono, cum conus r altitudinem quidem habeat unicuiq; illorum æqualem, & baſim omnibus ſimul illorũ baſibus æqualem. Conſtat igitur, inſcriptam ſphæræ figuram expoſito cono eſſe æqualẽ.

FIgura ſphæræ inſcripta, quæ conicis ſuperficieb. contineatur, minor eſt quàm quadrupla eius coni qui baſim habeat æqualem circulo, qui in ſphæra ſit maximus, altitudinẽ uero æqualem ſemidiametro ſphæræ. 26

Eſto deſcriptus ſit conus æqualis figuræ inſcriptæ ſphęræ, qui conus baſim habeat æqualem ſuperficiei dictæ figuræ inſcriptæ ſphęræ, altitudinem æqualem lineæ à centro circuli ad unum latus figuræ multorum angulorũ, quæ circulo ſit inſcripta, perpendiculariter ductæ. ſit que hic conus r. ſit alter conus x, qui baſim habeat æqualem circulo a b c d, altitudinem uero ſemidiametro a b c d circuli. Quoniam igitur conus r, baſim habet æqualem ſuperficiei figuræ inſcriptæ in ſphæra, altitudinem autem æqualem lineæ à centro, ad latus a f, perpendiculariter ductæ. oſtenſum eſt autem, ſuperficiem figuræ inſcriptæ minorem eſſe quàm quadruplam circuli in ſphæra maximi. eſt igitur coni ipſius r baſis minor, quàm quadrupla baſis x coni. Eſt etiã coni r altitudo minor altitudine x coni. Cũ igitur conus r minorẽ habeat baſim quàm quadruplam ad baſim x, altitudinẽ etiã minorem illius altitudine, manifeſtum eſt quod ipſe r conus minor eſt quàm quadruplus ad conum x. Verum conus r æqualis eſt figuræ inſcriptæ, figura igitur inſcripta minor eſt quàm quadrupla ad conũ x, quod principio propoſitũ fuerat.



27 ESto in ſphæra maximus circulus a b c d, circa quem deſcribatur figura multorum angulorum & æqualium, quæ latera quoq; habeat æqualia, quorū multitudo à quaternario menſuret. Huic aūt figuræ circumſcribatur circulus, cōprendēs eam, circa idem centrum conuolutus circa quod a b c d exiſtit. Deinde quieſcēte e g diametro, circūuoluatur plana ſuperficies e f g h, in qua multorum angulorum figura & circulus a b c d continetur. Perſpicuū eſt, quod circumferentia circuli a b c d, ſecundum ſphæræ ſuperficiē feretur. circumferentia uero circuli e f g h, ſecundum alterius ſphæræ ſuperficiem ducetur, quæ idem centrum cū minori ſphæra habebit. puncta uero in quibus latera figuræ inſcriptæ contingunt



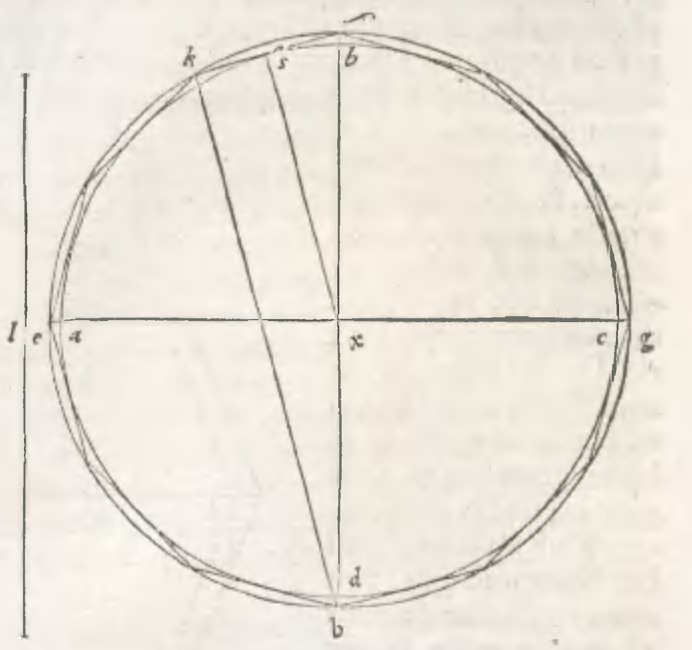
circulum a b c d, in circumuolutione, deſcribent circulos qui ſunt erecti ſupra circulum a b c d in ſphæra minori. anguli uero dictæ figuræ ſecundum circuli circūferentias ferentur, illis duobus exceptis, qui ſunt alter ad e, alter ad g puncta collocati: deſcribentq; in ſuperficie ſphæræ maioris ſinguli ſingulos circulos, qui ſunt erecti ſuper circulum e f g h. Latera uero dictæ figuræ conicas ſuperficies circumuoluta deſignabunt, quemadmodum in ſuperiori proxima figuratione conſpectum eſt. atq; ipſa figura conicis ſuperficiebus compræhenſa minori quidem ſphæræ erit circumſcripta, maiori uero inſcripta. Quod aūt ipſius figuræ ſuperficies maior ſit ſuperficie ſphæræ cui eſt circūſcripta, hac ratione demonſtrabitur. Eſto k d diametrus cuiuſpiā circuli in ſphęra minori: puncta k d ſint, in quibus duo latera dictæ figuræ contingant circulum a b c d. ſi igitur ſphæra intelligatur ſecta à plano k d, circulo ſuper a b c d erecto, ſuperficies quoq; figurę ſibi circumſcriptæ ſimul ſecta eſſe intelligetur ab eodem plano. Vnde manifeſtum erit, utraſq; ſuperficies ſectas eiſdē terminis in illo plano comprꝗhenſas eſſe. nam utrarūq; terminus eſt circuli circumferentia, cuius diametrus eſt k d, erecti ſuper circulum a b c d: & ambæ ſunt in eandem partem conglobatæ, & altera earum ab altera complectitur: ſphærica ſcilicet à planę figuræ ſuperficie, quæ illi finitima eſt. Minor igitur illa eſt, quæ compræhenſa eſt, ſcilicet ſphęrica illius ſectionis ſuperficies, quàm ſuperficies figuræ circūſcriptæ ſibi. Similiter probabitur, reſidui ſuperficiem ſphæricam minorem eſſe ſuperficie reſidui figuræ ſibi circūſcriptę. Manifeſtū igitur eſt quod tota quoq; ſimul ſphęræ ſuperficies minor eſt ſuperficie figurę ſibi circumſcriptæ.

28 SVperficiei figuræ circa ſphęram deſcriptę circulus ille æqualis eſt, cuius quidem circuli ſemidiametrus tantum poteſt quantū quod continetur ſub uno latere figuræ circumſcriptę, & ſub linea quæ ſit æqualis omnibus ſimul lineis, quæ latera dictę figuræ ita continuent, ut omnes ſint uni earum æquediſtantes, quæ una duobus dictę figurę lateribus ſit ſubtenſa. Figura enim quæ circūſcribitur ſphęræ minori, inſcribitur ſphæræ maiori. eius uero figuræ quæ ſphæræ inſcribitur, quæ ue ſuperficiebus conicis cōtineatur, ſuperficies æquatur circulo, cuius ſemidiametros tantū poteſt quantum eſt quod continetur ſub uno latere dictæ figu-

ræ,

ræ, & ſub linea quæ ſit æqualis omnibus ſimul lineis, quæ dictæ figuræ angulos ita coniungant, ut ſint æquediſtantes uni earum, quæ duobus dictæ figuræ lateribus ſubtenditur. Quare manifeſtum eſt, id quod propoſitum fuerat.

FIguræ circa ſphæram deſcriptæ ſuperficies maior eſt, quàm quadrupla ad maximum circulum in ſphæra collocatū. 29 Eſto itaq; & ſphæra, & circulus, & cætera ſumantur eadem & eodem modo, ut ſuprà in proximis fuit poſitum: et ponatur l circulus æqualis ſuperficiei figurę propoſitæ, quæ circa ſphęrā minorem ſit circūſcripta. Quoniam igitur in circulo e f g h, figura multorū angulorum & parium angulorum inſcripta fuit, & lineæ, quæ latera dictæ figurę iungebant æquediſtantes lineę h f, ad ipſam eādem h f proportionem habēt, quam h k ad k f habet. figura igitur comprehenſa ſub uno latere dictę figuræ, et ſub omnib. ſimul lineis angulos dictę figuræ continuātibus, æ-



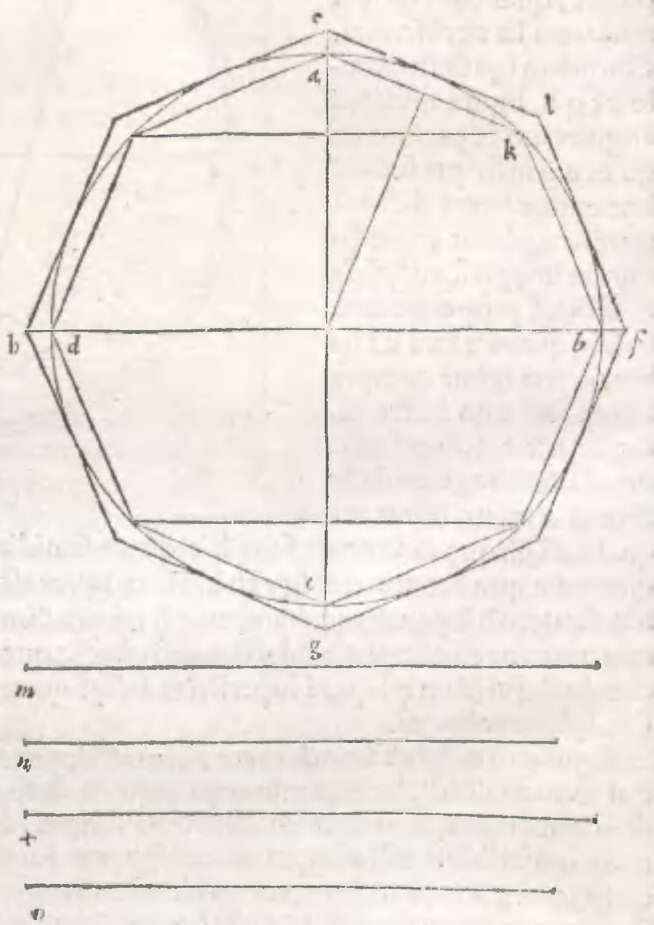
qualis eſt illi quę continetur ſub f h k. quare ſemidiametros circuli l tātum poteſt, quantum quod continetur ſub f h k. maior igitur eſt ſemidiametros circuli l, quàm h k. At uero h k ęqualis eſt diametro a b c d circuli. nam dupla eſt lineæ ſ x, quæ ſemidiametros eſt circuli a b c d. Manifeſtum eſt, quod maior eſt quàm quadruplus circulus l, qui idem eſt quod ſuperficies dictę figuræ ad ſuperficiem maximi circuli in ſphęra collocati.

Figuræ circa ſphęram minorem circumſcriptæ conus ille ęqualis eſſe probatur, qui conus baſim habeat circulum qui æqualis ſit ſuperficiei dictæ figurę, altitudinem uero habeat æqualem ſemidiametro ſphęrę. Figura enim quę minori ſphęrę circumſcribitur, eſt inſcripta maiori ſphęræ. Figuræ autem inſcriptæ quæ conicis ſuperficiebus cōtineatur, conus ille oſtenſus eſt ęqualis eſſe, qui baſim habeat circulum ęqualem ſuperficiei dictę figurę: altitudinem uero, lineam lineę illi ęqualem, quę quidem linea à centro ſphęræ ad unum latus dictæ figuræ ſit perpendiculariter educta. Hęc eadem uero æqualis eſt ſemidiametro minoris ſphęrę. quare conſtat id quod propoſitum fuerat. Ex his igitur quæ ſunt demonſtrata, manifeſtum eſt quod figura circumſcripta minori ſphęræ maior eſt, quàm quadrupla coni qui habet baſim maximum in ſphæra circulum, & altitudinem ſemidiametro ſphæræ æqualem. Quoniam igitur dictæ figuræ ille conus æqualis eſt qui habet baſem æqualem ſuperficiei dictæ figuræ, altitudinē uero æqualem lineæ quæ à cētro ſphęræ ſit ad unū latus dictæ figuræ perpendiculariter educta, hoc eſt ſemidiametro minoris ſphæræ. Superficies autem circumſcriptæ figuræ circa ſphærā maior eſt, quàm quadrupla maximi in ſphæra circuli. Figura igitur dictæ ſphęræ circumſcripta, maior eſt quàm quadrupla coni, qui baſim habeat maximum in ſphęra circulum, altitudinem uero ſemidiametrum ſphęrę: quoniam conus qui dictę figuræ eſt ęqualis, maior eſt, quàm quadruplus ad dictum conum. nam & ba-

 ſim

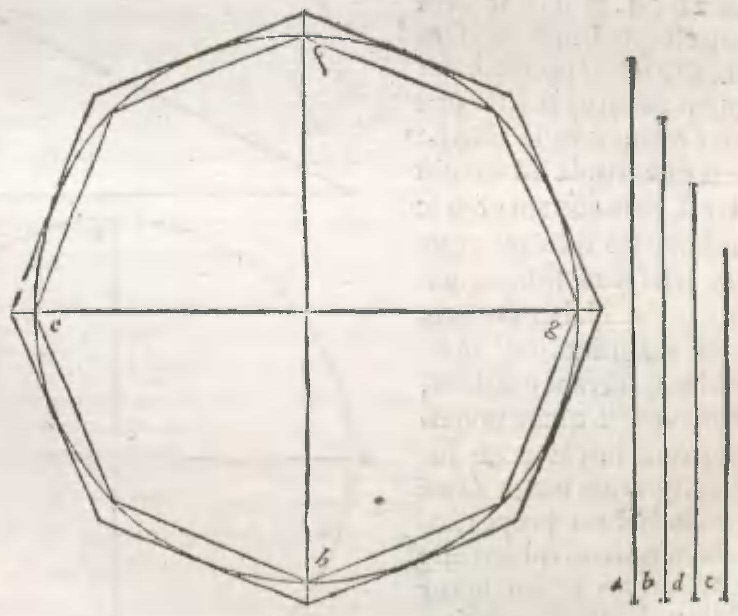
sim maiorem, quàm quadruplam ad illius basem habet, & altitudinem seruat æqualem.

30 SI figura una sphæræ sit inscripta, & eidem altera circumscripta, quæ quidem figuræ ambæ sint, ut suprà dictum est, à duabus planis figuris circum & intra circulum in sphæra maximum descriptis, per circumuolutionem productæ: superficies figuræ circumscriptæ ad superficiem inscriptæ habet proportionem duplicatam, eam scilicet quæ est lateris figuræ planę circulo, ut dictum est, circumscriptæ, ad latus figuræ inscriptæ in eodem circulo. ipsa uero figura corporea circumscripta ad figuram inscriptam sphæræ, ut dictum est, habebit eandem proportionem triplicatam. Esto in sphæra circulus maximus a b c d, & inscribatur ipsi circulo figura multorum angulorum & laterum æqualium, quorum multitudo mensuretur à quaternario. Deinde eidem circulo altera figura circumscribatur similis inscriptæ, ita ut latera circumscriptæ cõtingant in puncto medio arcus circuli abscisos à lateribus figurę inscriptæ. Sint etiam e g, f h duæ diametri ad angulos rectos secãtes sese circuli comprehendẽtis figuram circumscriptã, sintq; omnino similiter & ad easdem partes ductę ad quas sunt diametri a b c d. Deinde intelligãtur lineæ rectæ ductæ ad oppositos figuræ angulos, quæ iungant latera eius quæ quidem erunt & inter se æque distantes, & ipsis h f, b d. quiescente itaq; e g diametro, & circa eam lateribus figurarum circumuolutis, & circulis ipsis, sphæræ simul duæ & duæ figuræ multorum angulorum corporeæ efficientur, quarum figurarum altera sphęrę circumscripta erit, altera eidem inscripta. Demonstrandum itaq; est primũ, quòd superficies circumscriptę ad superficiem inscriptæ habeat eã proportionẽ duplicatã, quam habet latus e l ad latus a k. Secũdò, quòd ipsa figura circũscripta ad figuram inscriptã habeat eandem proportionem triplicatam. Esto itaq; circulus m æqualis superficiei figuræ circa sphæram descriptæ, circulus uero n æqualis superficiei figurę inscriptæ. Semidiametros itaq; circuli m, potest tantũ, quantum est quod continetur sub e l, & sub linea quæ sit æqualis omnibus simul lineis, quæ angulos figuræ circumscriptæ coniungunt. Semidiametros uero circuli n potest id quod sub a k, & sub linea æquali omnibus simul lineis, quæ iungunt angulos inscriptæ. At uero quoniam dictæ figuræ sunt similes positæ, spacia quoque



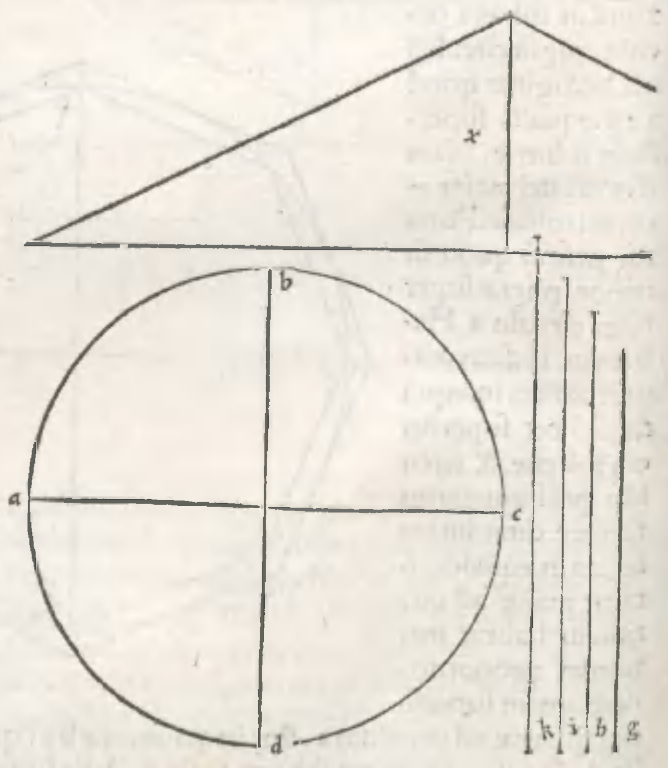
que à dictis lineis, hoc est angulis & lateribus dictarum figurarum comprehensa, similia esse necesse est. quare eandem inter se proportionem retinebunt, quam habent semidiametri circulorum m & n inter se potentia. Quare sequitur, diametros circulorum m & n eandem habere inter se proportionem, quam habent latera figurarum. Circuli uero habent inter se eam proportionem duplicatam, quam habent suæ diametri inuicem, qui circuli æquantur superficiebus duarum figurarum, inscriptæ scilicet & circumscriptæ. Constat igitur, superficiem figuræ circa sphæram descriptæ, ad superficiẽ figuræ eidem sphæræ inscriptæ, habere eam proportionem duplicatam, quam habere e l ad a k. Sumantur preterea duo coni o & x. Esto x conus, cuius basis sit circulus x, qui sit æqualis m. alter uero conus basim habeat o circulum, qui sit æqualis n. altitudinẽ uero ipsius x ponamus æqualem semidiametro sphæræ. at uero conus o altitudinẽ habeat lineam, quæ à centro sphæræ ad latus a k perpendiculariter ducta sit. Conus igitur x erit æqualis figuræ circumscriptæ sphæræ, conus uero o æquabitur inscriptæ. nã hæc iam demonstrata sunt. at uero quoniam figurę dictæ sunt similes, eandem proportionem habet e l ad a k, quam habet semidiametros sphæræ ad eam quæ à centro perpendiculariter ducta est ad a k. Eandem igitur proportionem habet altitudo coni x ad altitudinem coni o, quam e l habet ad a k. Diametrus autem circuli m, ad diametrum circuli n, eam habet quam e l ad a k. diametri ergo basium coni x, & coni o, suis altitudinib. sunt proportionales. igitur hi coni sunt similes inter se. & propter hoc conus x ad conũ o habet eam proportionem triplicatam, quam diametrus circuli m ad dimetrum circuli n. Manifestum igitur est, quod figura circumscripta habet ad figuram inscriptam, proportionem illam triplicatam, quam habet e l ad a k: quod erat demonstrandum.

CViuslibet sphæræ superficies quadrupla est circuli, qui in ea maximus habetur. 31
Esto sphæra quęcũq;: esto deinde superficies quędã quadrupla ad maximũ in sphæra circulũ, quę sit circulus a. Dico igitur quod a est æqualis superficiei sphæræ. Nam si non, uel maior erit, uel minor. Ponatur primò quod sit maior sphæræ superficies circulo a. Habemus iã duas magnitudines inæquales, scilicet superficiem sphæræ, & circulũ a. possumus ergo sumere duas lineas rectas inæquales, ita ut maior ad minorem habeat minorem proportionem, quam superficies sphæræ ad circulum a. sint itaq; sumptæ b c: quarum media proportionalis sit d. Intelligatur etiam sphæra secta à plana superficie transeunte per eius centrum, sitq; illa secans circulus e f g h. intelligatur prætereà illi circulo una figura circumscripta, altera inscripta multorum angulorum, ita ut circumscripta sit inscriptæ



ptæ ſimilis: & circumſcriptæ latus minorem habeat proportionem ad latus inſcriptæ, quàm b habet ad ipſam d, & ſic illa proportio duplicata minor erit hac ſimiliter proportione duplicata. Proportio autem b ad c eſt duplicata, ea quam habet b ad ipſam d: proportio autem lateris figuræ circumſcriptæ, ad latus figuræ inſcriptæ, duplicata eſt tanta, quanta eſt ſuperficiei circumſcriptæ figuræ ſolidæ, ad ſuperficiem inſcriptæ. Superficies igitur figuræ ſolidæ circumſcriptæ ſphærę, ad ſuperficiem figuræ inſcriptæ, minorem proportionem habet quàm ſuperficies ſphæræ ad a circulum. quod quidem eſt inconueniens, & abſurdum. Nam ſuperficies figuræ circumſcriptæ, ſuperficie ſphæræ maior exiſtit. ſuperficies uero inſcriptæ a circulo minor eſt. Oſtenſum eſt enim, ſuperficiem figuræ inſcriptę minorem eſſe quàm quadruplam circuli in ſphæra maximi. Circulus autem a quadruplus eſt poſitus circuli in ſphæra maximi. Igitur ſphæræ ſuperficies non poteſt maior eſſe ſuperficie circuli a. Dico item quod neq; minor eſſe poteſt. nam ſi poteſt, eſto: & inueniantur ſimiliter duæ lineæ rectæ b, c: ita ut b ad c habeat minorem proportionem, quàm circulus a ad ſuperficiem ſphæræ. ſitq; illarum media proportionalis d, & circumſcribatur iterum, & inſcribatur figura ut ſuprà, ita ut circumſcriptæ ad inſcriptam minor ſit proportio quàm b ad lineam d. igitur & ea duplicata erit minor. Quare ſuperficies circumſcriptæ ad ſuperficiem inſcriptæ minorem habet proportionem, quàm a circulus ad ſphæræ ſuperficiem. quod ſanè abſurdum eſt. nam circumſcriptæ ſuperficies maior eſt a circulo, inſcriptæ uero ſuperficies ſphæræ ſuperficie minor exiſtit. Nō ergo ſuperficies ſphęræ a circulo poteſt eſſe minor. Cum etiam demonſtratum ſit quod nequeat maior eſſe, neceſſariò colligitur eam circulo a, hoc eſt quadruplo circuli in ſphæra maximi æqualem eſſe.

32 QVælibet ſphæra quadrupla eſt eius coni, qui quidem conus habuerit baſim æqualem circulo in ſphæra maximo, altitudine uero ęqualem ſemidiametro ſphæræ. Eſto quædā ſphęra, & maximus in ea circulus a b c d. Si itaq; ſphæra non eſt quadrupla dicti coni, eſto ſi fieri poteſt maior quàm quadrupla. Eſto prætereà conus x, qui baſim habeat quadruplā ad circulū a b c d, altitudinem uero ſemidiametro ſphæræ æqualem. erit igitur ſphæra maior cono x. Habemus itaq; duas magnitudines inæquales, ſphæram uidelicet, & conum x. quare poterimus duas lineas rectas ſumere, quarum maior ad minorem habeat proportionem minorem, quam ſphęra ad conum x. Sint igitur iſtę k g, & aliæ duæ i h ſumptæ, ita ut æquali quantitate ſeſe excedant. k excedat i, & i h, & h ipſam g. intelligatur etiam in circulo



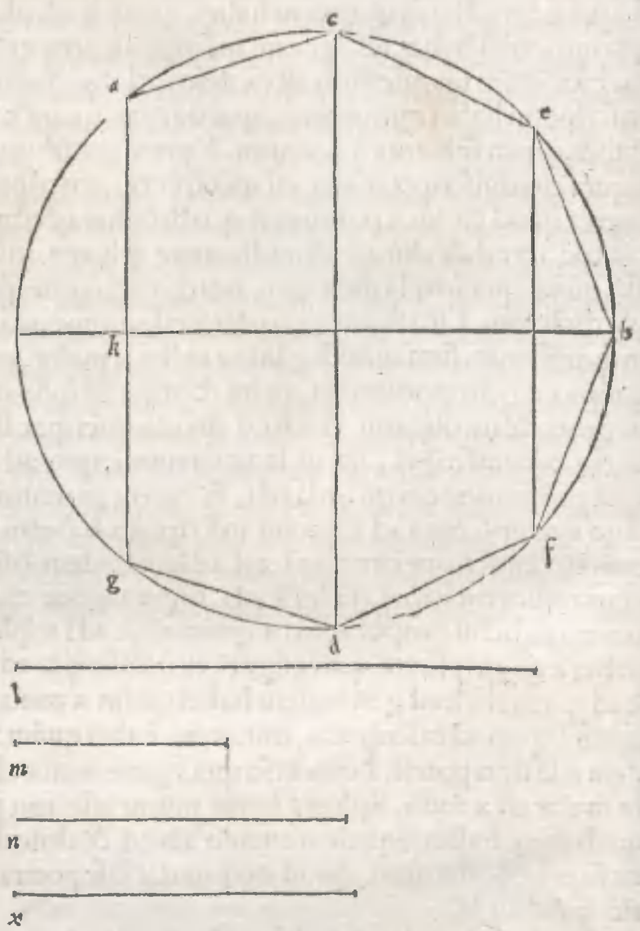
a b c d inſcripta una figura, cuius multitudo laterum menſuretur à quaternario. altera

tera

tera prætereà circumſcripta ſimilis inſcriptæ, quemadmodum ſuperius quoq; factum eſt. Latus uero circumſcriptæ ad latus inſcriptæ minorem habeat proportionem, quàm k ad ipſam i: & ſint a c, b d diametri ſe ad angulos rectos ſecantes. Si igitur quieſcente a c diametro circumferatur planus circulus, in quo figura eſt inſcripta, & circa quem altera circūſcripta fuerat, fient duæ figuræ, altera circa ſphęram, altera intrà deſcripta. Et circumſcripta habebit ad inſcriptam eam proportionem triplicatam, quam habet latus circūſcriptæ, ad latus inſcriptæ circulo a b c d. Latus uero ad latus minorem habet, quàm k ad ipſam i: quare figura circumſcripta minorem habet ad figuram inſcriptam proportionem, quàm eſt k ad i triplicata. Hoc enim manifeſtum eſt ex deſcriptione. multo magis ergo circumſcripta ad inſcriptam habet minorem proportionem, quàm k ad g. At uero k ad g minorem habet, quàm ſphæra ad x conum. & permutatim: quod ſanè eſſe non poteſt. nam figura circumſcripta maior eſt ipſa ſphæra, inſcripta uero eſt minor cono x: proptereà quod conus x poſitus eſt quadruplus ad eum conū, cuius baſis æqualis ſit circulo a b c d, & altitudo ſemidiametro ſphæræ. inſcripta uero figura minor exiſtit quàm quadrupla dicti coni. non poteſt igitur ſphæra maior eſſe quàm quadrupla dicti coni. Eſto ſecundò, ſi poteſt eſſe minor quàm quadrupla, ita ut ſphæra ſit minor x cono. ſumantur k g lineæ rectæ, k maior, g minor. Habeatq; k ad ipſam g minorem proportionem, quàm conus x ad ſphæram. & diſponantur i & h lineę ut prius, & intelligatur in a b c d circulo inſcripta figura multorum angulorum, altera circumſcripta, ita ut latus circumſcriptæ ad latus inſcriptæ, minorem habeat proportionem quàm k ad i, & cætera parentur eodem modo ut prius. figura ergo circumſcripta ad figuram inſcriptam, habebit eam proportionem quæ eſt lateris circumſcriptæ circulo a b c d, ad latus eidem inſcriptę triplicata. Latus uero ad latus minorem habet, quàm k ad i. Figura igitur circumſcripta ad inſcriptam, minorem habebit proportionem quàm eſt k ad i triplicata. k uero ad g eſt ea quam habet k ad i triplicata. quare figura circumſcripta ad inſcriptam, habet minorem quàm k ad g. at uero k ad g minorem habet quàm x conus ad ſphæram. Circumſcripta igitur figura ad inſcriptam, minorem habet quàm x conus ad ſphærā. quod quidem eſſe non poteſt. Nam inſcripta figura minor eſt ipſa ſphæra. circumſcripta uero maior eſt x cono. Sphæra igitur minor eſſe non poteſt, quàm quadrupla coni, qui habeat baſim æqualem circulo a b c d, & altitudinem ſemidiametro ſphæræ. Et ſuprà eſt oſtenſum, quod neq; maior eſſe poterat: erit igitur dicti coni neceſſariò quadrupla.

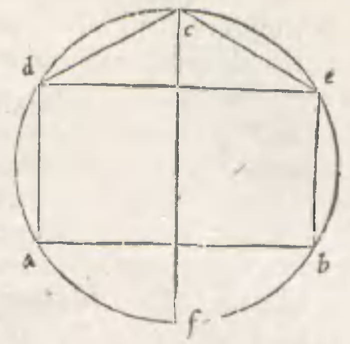
Ex illis igitur quæ ſuprà ſunt demonſtrata, manifeſtum eſt, quod quilibet cylindrus, qui baſim habeat maximum in ſphæra circulum, & altitudinem diametrum ſphęræ, ad ipſam ſphęram ſeſquialter habetur, & ſuperficies eius cum baſibus ſeſquialtera ad ſphæræ ſuperficiem. nam cylindrus prædictus ſextuplus eſt eius coni qui baſim habeat cum cylindro eandem, habeat uerò altitudinem æqualem ſemidiametro ſphæræ. Sphæra uero eſt demonſtrata eſſe quadrupla dicti coni. ex quo conſtat, cylindrum eſſe ſphæræ ſeſquialterum. Item cum ſuperficies cylindri exceptis baſibus circulo oſtenſa eſt æqualis, cuius ſemidiametrus ſit media proportionalis inter latus cylindri & diametrum baſis eius: dicti autem cylindri circa ſphæram latus eſt æquale diametro baſis ſuæ: manifeſtum eſt, quod media proportionalis eſt & ipſa æqualis eidem diametro. Circulus autem cuius ſemidiametrus ſit æqualis diametro baſis, quadruplus eſſe probatur ad baſem, quæ eſt maximus in ſphæra circulus. Superficies autem cylindri exceptis baſibus habet quadrupla maximi in ſphæra circuli. quare tota ſimul cum baſibus ad eundem circulum ſextupla apparebit. ipſa quoq; ſphæræ ſuperficies ad circulum in ſphæra maximum, quadrupla probata eſt. quare tota cylindri ſuperficies, ad ſphæræ ſuperficiem exiſtet ſeſquialtera.

33 SVperficies figuræ in portione ſphæræ deſcriptæ, æqualis eſt circulo, cuius ſemidiametros tantum poſſit, quantum eſt quod continetur ſub uno latere figuræ multorum angulorum, inſcriptæ in ſectione maximi circuli, & ſub linea quę ſit æqualis omnibus ſimul lineis, quæ baſe ſectionis ſint æquediſtantes, & dimidio ipſius baſis cum prælictis adiecto. Eſto ſphæra, & in ipſa portio ſecta, cuius baſis ſit circulus, cuius ſit diametrus a g: inſcribatur in ipſa portione figura qualis ſæpe dicta eſt, comprenſa à conicis ſuperficiebus. & ſit maximus in ſphæra circulus a g h, & ſit figura pari laterum numero conſtās a c e h f d g, excepto latere a g: & ſumatur circulus l, cuius ſemidiametros tantum poſſit, quantum quod continet ſub latere a c, & ſub omnibus ſimul e f c d, atq; etiā dimidia baſe, hoc eſt a k. demōſtrandum deinceps eſt, quod l circulus æqualis eſt ſuperficiei dictæ figuræ. Sumatur enim circulus m, cuius ſemidiametros tantū poſſit quantum quod cōtinetur ſub h e, & ſub dimidia e f. Circulus ergo m æqualis eſt ſuperficiei coni illius, cuius baſis eſt circulus habens e f diametrum: eius uero altitudo et uertex, ſignum h. ſumatur item alius circulus n, cuius ſemidiametrus tantum poſſit quantum continetur ſub e c, & dimidia utriuſq; ſimul e f, c d, erit hic ęqualis ſuperficiei coni, illi uidelicet quæ ſita eſt media inter planas ſuperficies æquediſtantes, ſecundum lineas uel circulos e f, c d. Item alius ſimiliter ſumatur qui ſit circulus x, cuius ſemidiametrus poſſit id quod ſub a c, & dimidia utriuſq; ſimul c d, a g continetur, qui & æqualis eſt ſuperficiei conicæ, quæ inter planas æquediſtantes a g c d comprenditur. Omnes igitur circuli æquales erunt toti ſuperficiei figuræ dictæ. Et eorum ſemidiametri tantum poterunt, quantum ſub uno latere a c, & ſub linea quæ ſit æqualis omnibus ſimul e f, c d, & dimidia baſi a k. poterat autem ſemidiametrus circuli l æquale eidem ſpacio. quare ſequitur, l circulum circulis m n x æqualem eſſe: unde & ſuperficiei figuræ inſcriptæ æqualis exiſtet.



34 SEcetur ſphæra plana, ſuperficie non tranſeunte per centrum eius, & ſit in ea maximus circulus a e f, qui ſecet ſuperficiem ſecātem ad angulos rectos, & inſcribatur in a c b ſphæræ portione figura multorum angulorum & parium numero, & æqualium laterum, excepta baſe a b, ſimiliter ſuperiorib. ſi manente & quieſcente g c circumferatur figura anguli quidem d, e, a, b ſecundum circumferentias circulorum, latera uero ſecundum conicas ſuperficies ferentur, eritque figura

ra ſolida quæ inde confecta eſt, ſuperficiebus conicis comprætenſa, quæ baſim habebit eum circulum cuius diametrus eſt a b, uerticem uero punctum c. Hæc igitur figura ſimiliter his quæ dicta ſunt ſuperius, ſuperficiem habebit minorem ſuperficie eius figuræ quæ complectatur eam. idem enim eſt utriſque terminus in plano portionis, ſcilicet circumferentia circuli, cuius diametros eſt a b: & ambæ ſunt in eandem partem conglobatæ ſuperficies, & altera ſub altera tenetur complexa.



SVperficies figuræ in ſphæræ portione deſcriptę, minor eſt eo circulo, cuius ſemidiametros æqualis eſt lineæ, quæ à uertice portionis ad circumferentiā circuli ducitur: qui quidem circulus baſis eſt portionis. 35 Eſto ſphæra, & maximus in ea circulus a b f e: & eſto portio ſphæræ, cuius baſis ſit circulus circa diametrum a b, & inſcribatur in ipſa dicta figura & in portione circuli, figura multorum angulorum, & cętera eadem. Eſto ſphęræ diametros h l, coniunctis l e, h a. & ſit circulus m, cuius ſemidiametrus ſit æqualis a h. Oſtendendum eſt, quod circulus m maior eſt ſuperficie figuræ. ſuperficies aūt figuræ demonſtrata eſt æqualis eſſe circulo, cuius ſemidiametros tantum poteſt, quantum continetur ſub e h, & ſub omnibus e f, c d, k a. idipſum cōtentum ſub e h, & ſub e f, c d, k a, æquatur contento ſub e l, k h. contentum uero ſub e l, k h, minus eſt contento ſub a h. nam & minus contento ſub a h, k h. Manifeſtū igitur eſt, quod ſemidiametrus circuli, qui eſt æqualis ſuperficiei figuræ, minor eſt ſemidiametro m. Conſtat igitur, circulum m ſuperficie figuræ maiorem etiam.

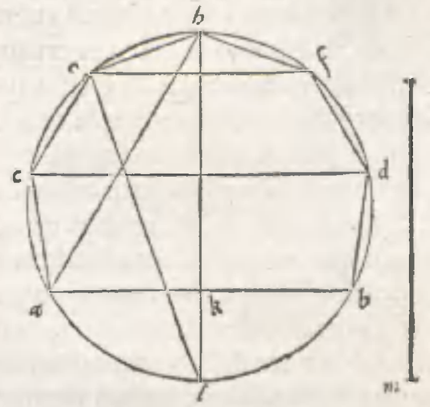
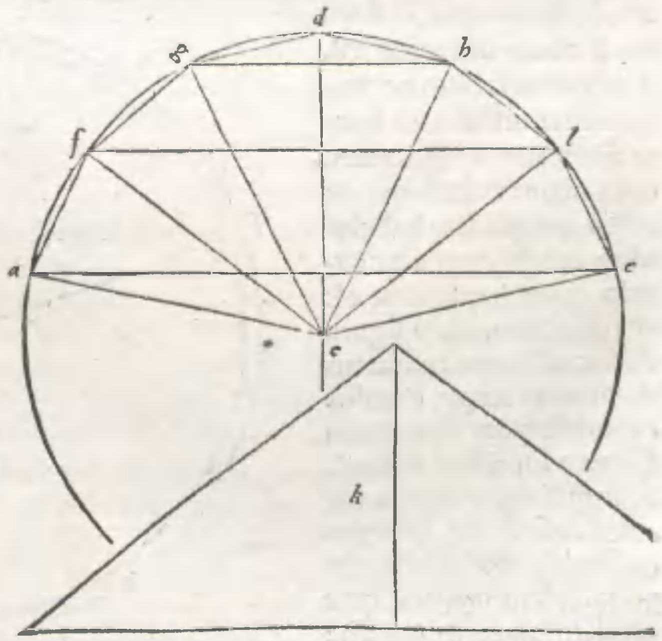
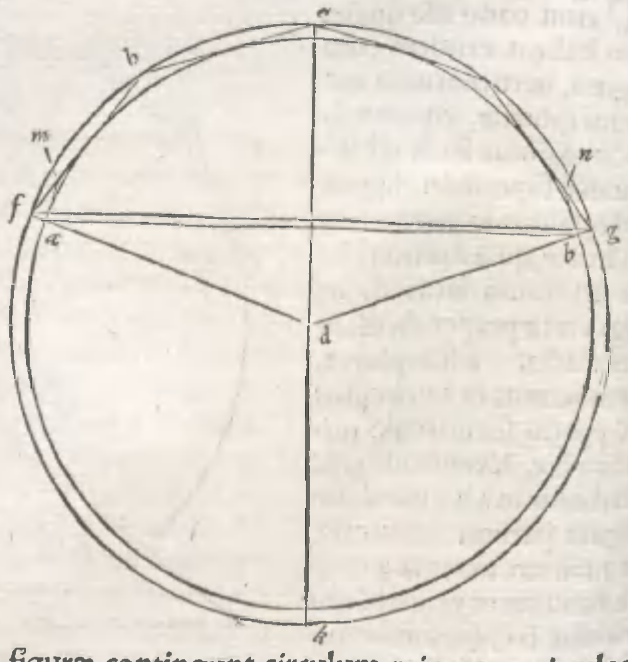


FIgura portioni ſphæræ inſcripta, quæ conicis ſuperficiebus contineatur, unà cum cono illo qui baſim habeat eandem cum figura, uerticem uero centrum ſphæræ, æquatur illi cono, cuius baſis eſt æqualis ſuperficiei figuræ dictę: altitudo uero æqualis lineæ, quæ à cētro ſphęræ ad unum latus dictæ figuræ ſit perpendiculariter ducta. 36 Eſto ſphæra, et maximus in ea circulus & portio ſemicirculo minor a b c, & centrum e: & ſcribatur in a b c portione figura parium laterum & æqualium, excepta a c baſe, ſimiliter ut prius: & quieſcente b e, circumferatur ſphæra, quæ faciet figurā quandam conicis ſuperficiebus comprenſam. & à circu



lo cuius diametros est a c, conus erigatur, qui uerticem habeat centrum sphæræ. & sumat conus k, qui basem habeat æqualem superficiei figuræ, altitudinem uero æqualẽ ei quæ à centro e ducitur perpendiculariter ad unum latus figuræ. Demonstrare itaq; oportet, quod conus k æquetur figuræ dictæ, unà cum cono a e c. erigātur etiam coni à circulis, quorum diametri sunt g h, f l, qui uerticem habeant punctum e. Igitur rhombus g b h e solidus, æqualis est cono cuius basis æquatur superficiei g b h: coni altitudo uero ei quæ ab e ad g b, sit perpendiculariter ducta. Residuum uero quod continetur sub superficie intermedia inter planas superficies, quæ sunt secũdum g h, f l, & sub conicis f e l, g e h, æquatur cono cuius basis æqualis sit superficiei intermediæ inter æquedistantes planas, quæ sunt secũdum g h, f l: altitudo uero æqualis ei quæ sit à centro e ad f g perpendiculariter ducta. Rursus residuum compræhensum à superficie intermedia planarum æquedistantium, quæ sunt secundum f l, a c, & à conicis a e c, f e l, æquatur cono cuius basis æqualis est superficiei, quæ intermedia est inter planas æquedistantes, quæ sunt secundum f l, a c, altitudo uero ei quæ ducta sit perpendiculariter ab e ad f a. Prædicti igitur coni æquales erunt figuræ unà cum cono a e c. & altitudinem quidem habent eam quæ ab e ad unum latus figuræ perpendiculariter sit ducta, bases uero æquales superficiei a f g b l c figuræ. Habet aũt & conus k eãdem altitudinem, & basem æqualem superficiei dictæ figuræ: quare erit æqualis dictis conis. Coni uero dicti ostẽsi sunt æquales esse dictæ figuræ, unà cum a e c cono. Igitur & k conus æquat̃ dictæ figuræ, unà cũ a e c cono. Ex hoc igitur manifestũ est, quod conus qui basem habeat circulum, cuius semidiametros æqualis sit ei quæ à uertice portionis ad circumferentiam circuli, qui est basis figuræ, ducta sit: altitudinem uero æqualem semidiametro sphæræ: maior est figura portioni inscripta unà cum cono, &c. nam dictus conus maior est cono æquali figurę, unà cum cono, &c. qui conus basem habeat basem figuræ portionis ad centrum: hoc est, qui basem habeat æqualem superficiei figuræ, altitudinem uero æqualem ei quæ sit à centro ad unum latus figuræ multorum angulorum perpendiculariter ducta. nam basis illius, base huius maior existit, & altitudo altitudine maior.

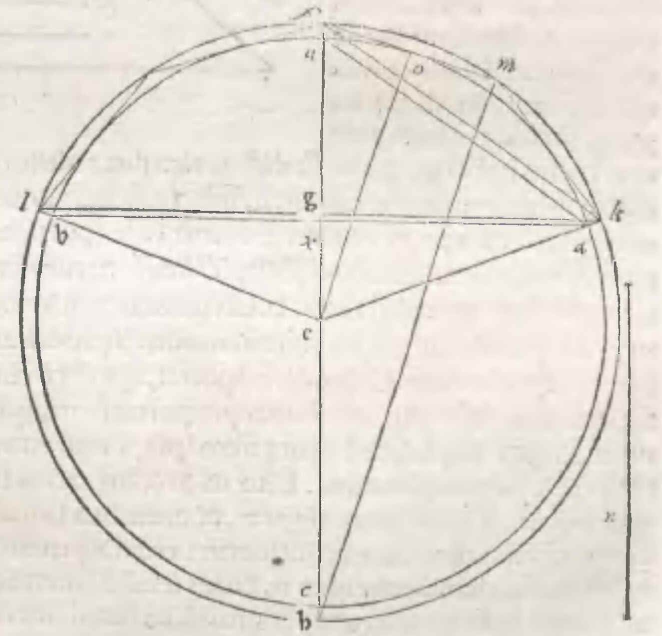
37 Esto sphæra, & maximus in ea circulus a b c, & secetur in ea portio semicirculo minor, quã secet a b, & sit cẽtrum d, & à centro d ad a b ducantur a d, d b. & circa factam portionem circumscribatur figura multorum angulorum, circa quam describatur circulus, qui quidem habebit idem centrũ cum a b c circulo. quod si quiescẽte e k circumferatur dicta figura donec ad locum redeat unde moueri cœpit, circulus circumscriptus secundum sphæræ superficiẽ feretur: & anguli dictæ figuræ circulos describent, quorum diametri erunt lineæ angulos figuræ iungentes, quæ æquedistãtes erũt ipsi a b:



puncta uero, in quibus latera figuræ contingunt circulum minorem, circulos descri-

describent in minori sphæra, quorum diametri erunt lineæ continuantes puncta contactuum æquedistantes lineæ a b, latera uero dictæ figuræ secundum conicas superficies ferentur. & figura circumscripta sub conicis superficiebus continetur, cuius basis circulus est, qui est circa f g diametrũ: dictæ uero figuræ superficies est maior superficie minoris sectionis, cuius basis est circulus qui est circa a b diametrum. Ductæ enim sunt contingentes a m, b n. quare secundum conicas superficies ferentur: & figura quæ causatur à figura multorum angulorum, circumuoluta a m h e n b, maiorem habebit superficiem quàm portio sphæræ, cuius basis est circulus circa a b constitutus. nam utraq; in eodem plano existunt, & eundem terminum habent, circulum circa a b descriptum. & portio à figura compræhenditur. cæterum conica superficies a b f m g n producta, maior est ea quæ a b m a n b effecta est. nam f m maior est m a: nam subtenditur rectæ. linea uero n g, maior n b. cũ autem hoc sic se habeat, maior erit superficies superficie. nam hæc sunt in his quæ sumpta fuerunt, demonstrata. Manifestum est igitur, quod circumscriptæ figuræ superficies maior est superficie portionis sphæræ minoris. Insuper manifestũ est, quod superficies inscriptæ figuræ quæ circa portionem existit, æqualis est circulo cuius semidiametros possit id quod sub uno latere figuræ continetur, & sub omnibus simul lineis continuantibus angulos dictæ figuræ, & dimidia base dictæ figuræ multorum angulorum, secundum quod descripta fuit figura solida in maiori sphæra descripta. Hoc autem per ea quæ antè descripta sunt, manifestum est.

Superficies figuræ quæ circa sphæræ portionem sit descripta, eo circulo maior 38
existit, cuius semidiametros sit æqualis lineæ, quæ à uertice portionis ad circũferentiã circuli sit ducta, qui circulus basis portionis existat. Esto sphęra, & maximus in ea circulus a b c d, centrum eius e. Deinde circa portionem describatur figura multorum angulorum l k f, & circa hãc describatur circulus, & fiat figura, ut prius circumuoluendo, &c. deinde esto circulus n, cuius semidiametros possit id quod continetur sub uno latere figuræ, & sub omnibus simul coniungentibus angulos, & dimidia k l. uerũ idem spacium dictũ æquatur ei quod sub m h & f g continetur, quæ est altitudo portionis maioris sphęræ. Hoc autem prius ostẽsum est. semidiametros igitur circuli n, potest æ-

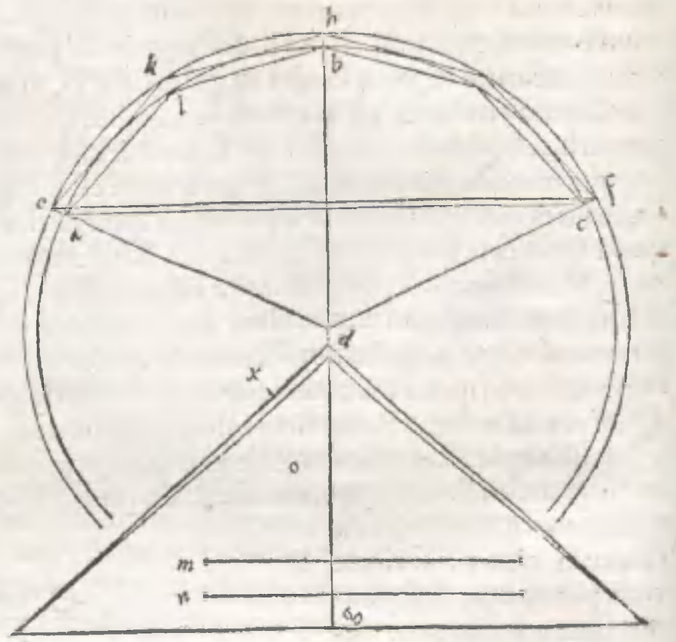


quale ei quod sub m h, g f continetur. sed g f quidem maior est d x, quæ est altitudo minoris portionis. nam si iungamus k f, erit æquedistans ipsi d a. Est autem & a b æquedistans ipsi k l, & conus est f e. Triangulus igitur f k g, similis est triangulo d a x. & maior est f k quàm d a. maior est igitur etiã f g quàm d x. At uero m o æquatur ipsi o f, ipsa uero h e ipsi e f. est igitur e o æquedistans ipsi m h: igitur m h dupla est e o. Sed etiam c d dupla est ipsius e o. quare c d æqualis est ipsi m h. Quod aũt sub c d & d x continetur, est æquale quadrato a d. Superficies igit̃ figuræ k f l, ma-

maior eſt circulo cuius ſemidiametros ſit æqualis ei quæ à uertice portionis ad circumferentiam circuli ducta ſit, qui eſt baſis eius portionis quæ eſt circa diametrū a b. quoniam n circulus æqualis eſt ſuperficiei figuræ circa portionē deſcriptæ.

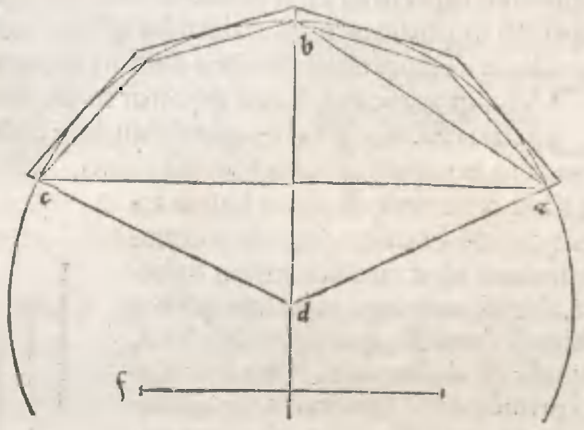
39 Figura circa ſphæræ portionem deſcripta, unà cum cono cuius baſis ſit circulus circa k l diametrum conſtitutus, uertex centrū ſphæræ æqualis eſt cono, cuius baſis ſit ęqualis ſuperficiei figuræ: altitudo uero æqualis ei lineę, quæ à cētro ad latus figurę ſit perpendiculariter ducta, quæ quidem ſemidiametro quoq; ſphęræ inuenitur æqualis. Nā figura portioni circumſcripta, eſt in portione maioris ſphærę inſcripta, cuius centrum eſt idem cum minori. unde conſtat, quod propoſitum eſt ex antè deſcripta figuratiōe. Ex hoc igitur manifeſtū eſt, quod figura circumſcripta unà cum cono, maior eſt eo cono qui baſim habeat circulum, cuius ſemidiameter æqualis ſit lineæ ductæ à uertice portionis ſphæræ minoris, ad circumferentiam circuli, qui ſit baſis portionis dictæ: altitudinem uero æqualem ſemidiametro ſphæræ. Nam conus qui erit æqualis dictæ figurę, unà cum cono maiorem baſim habebit, quàm ſit dictus circulus: altitudinem uero æqualem ſemidiametro ſphęræ minoris. Eſto item ſphęra, & maximus in ea circulus & portio a b c, minor ſemicirculo, & cētrum d: & intra a b c portionem inſcribatur figura multorum & parium angulorum, & huic ſimilis circumſcribatur eidem, & ponantur latera lateribus æquediſtantia. & circulus circumſcribatur figuræ circumſcriptæ, & ut prius quieſcente g h, circuli circumducti producant figuras conicis ſuperficiebus compræhenſas. Oſtendere oportet, quod circumſcriptæ figurę ſuperficies ad ſuperficiem inſcriptę eam habet proportionem, quæ eſt lateris circūſcriptæ ad latus inſcriptæ duplicatā. Figura uero ipſa, ſimul cum cono ad figurā, habet eandē proportionem triplicatam. Eſto m circulus, cuius ſemidiametros tantum poteſt, quantum ſub uno latere figuræ, & omnibus ſimul lineis angulos continuantibus, unà cum dimidia e f continetur: erit itaq; m circulus æqualis ſuperficiei figurę. Sumatur deinde circulus n, cuius ſemidiametros tantum poſſit, quantum ſub uno latere inſcriptæ figuræ, & omnibus ſimul lineis iungentibus angulos unà cū dimidia a c. Hic quoq; circulus erit æqualis ſuperficiei figuræ inſcriptæ. Verum dicta ſpacia habēt inter ſe eam proportionem, quam habet quadratum lateris e k ad quadratum a l. Igitur ut figura ad figuram, ita m circulus ad n circulum. Quare manifeſtū eſt, quod ſuperficies figurę circumſcriptę ad ſuperficiem inſcriptæ figuræ, habet eam proportionem duplicatam, quā habet e k ad a l: eandem uidelicet, quam figura ad figuram. Eſto item conus x, qui baſim habeat æqualem circulo m, altitudinem uero ſemidiametrum ſphæræ minoris. Hic conus æqualis eſt figuræ circumſcriptæ unà cum cono illo, cuius quidē coni baſis eſt circulus qui eſt cir-

ca e f



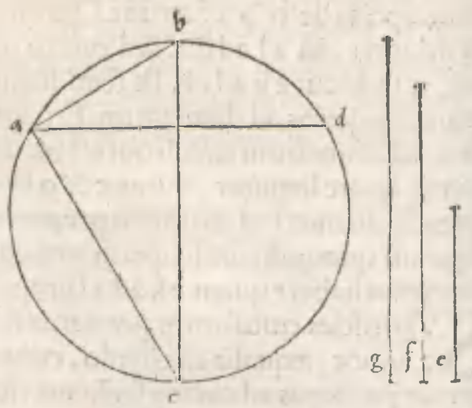
ca e f diametrum, uertex uero d. Eſto item alius conus o, qui baſim habeat æqualē ipſi n, altitudinem uero æqualem ei quæ ab ipſo d ad a l perpendiculariter ducta ſit. hic quoq; figuræ inſcriptæ unà cum una cono eſt æqualis, cuius quidem coni baſis eſt circulus circa a c diametrum deſcriptus, uertex uero d cētrum. Hæc enim omnia prius deſcripta fuerunt. Quoniam igitur ſicut e k ad ſemidiametrum ſphæræ minoris, ita a l ad ductā à centro perpēdiculariter ad ipſam a l. Oſtenſum aūt fuit, quod ſicut e k ad a l, ſic ſemidiametros circuli m ad ſemidiametrū circuli n, et etiam diametros ad diametrum. Erit igitur, ſicut diametros circuli illius qui eſt baſis x, ad diametrum circuli qui eſt baſis ipſius o, ita altitudo coni x ad altitudinem coni o. quare ſequitur, conos x & o ſimiles eſſe. conus ergo x habet ad conū o, eā quæ eſt diametri ad diametrū proportionem triplicatam. Vnde manifeſtum eſt, figuram quoq; circumſcriptam unà cum cono ad figuram inſcriptam, unà cum cono eam habere quam e k ad a l proportionem triplicatam. quare, &c.

SVperficies cuiuſcunq; portionis ſphęræ, quæ quidem portio ſit dimidia ſphæ 40
ra minor, æqualis eſt circulo, cuius ſemidiametros æquatur lineæ illi, quæ à uertice portionis ad circumferētiam circuli ducta ſit, qui circulus portionis eſt baſis. Eſto ſphęra, et maximus in ea circulus a b c. itē ſectio in ea minor dimidia ſphæra, cuius baſis ſit circulus circa a c cōſtitutus, erectus ſuper a b c circulo. & ſumatur circulus f, cuius ſemidiametros ſit æqualis lineæ a b. Oportet itaq; demōſtrare, ſuperficiē a b c portionis ęqualem eſſe circulo f. nā ſi non ſit: eſto primò maior dicta ſuperficies circulo f, & ponatur d centrū, & ab ipſo duę lineę ductę ad a, & ad c extra educantur. Cū igitur ſint duę magnitudines inęquales, ſuperficies uidelicet portionis, et f circulus, deſcribemus duas figuras multorum angulorum, & parium & ęqualium laterū, omnino ſimiles, unam circa ſectorem circuli a b c, alteram intra eundem, ita ut circumſcriptę ad inſcriptam ſit minor proportio, quàm ſuperficiei portionis ſphęrę ad circulum f. circumuoluto deinde circulo, ut prius, duas figuras efficiemus conicis ſuperficiebus compręhenſas, quarum altera circumſcripta, altera inſcripta erit: & ſuperficies circumſcriptę ad ſuperficiem inſcriptę eandem habebit proportionem, quam circumſcripta figura habet ad inſcriptam. nam utraq; proportio eſt duplicata illa quam habet latus circumſcriptę, ad latus inſcriptę figurę multorum angulorum. Sed circumſcripta multorum angulorū figura ad inſcriptā, minorem habet proportionem, quam dictę portionis ſuperficies ad circulum f. maior autem eſt circūſcriptę figurę ſuperficies ſuperficie portionis. igitur & ſuperficies figurę inſcriptę maior erit f circulo. quod quidem eſſe non poteſt. Nam ſupra demonſtratum eſt, dictam figurę ſuperficiem tali circulo minorem eſſe. Eſto ſecundò, quod circulus ponatur maior eſſe ſuperficie, & ſimiliter circumſcribatur & inſcribatur figura altera alteri ſimilis, & circumſcriptæ ad inſcriptam minor ſit proportio quàm circuli f ad ſuperficiem figurę: & item demonſtrabitur deducendo ad idem inconueniens, circulum f non poſſe eſſe maiorem dicta ſuperficie. Cum igitur neq; maior eſſe poſſit dicta ſuperficies f circulo, neq; minor, ut demonſtratum eſt, ſit neceſſariò, ut ſit eidem æqualis.

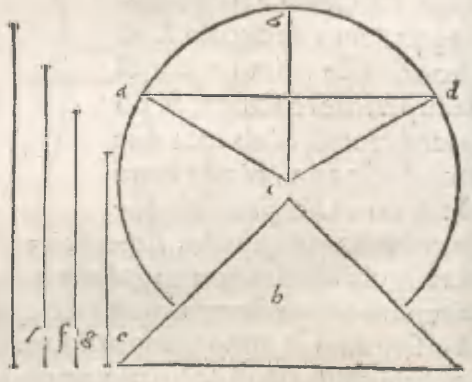


Si

41 SI portio ſphęrę ſit maior dimidia ſphęra, rurſus eius ſuperficies æquatur circulo, cuius ſemidiametros ſit ęqualis lineę illi quę ducta ſit à uertice portionis ad circumferentiam circuli, qui eſt baſis dictæ portionis. Eſto ſphęra, & maximus in ea circulus a b c d, & intelligatur ipſa ſecta à plano ſecūdum a d, & ſit a b d minor dimidia ſphęra, et diametrus b c ſecet ad angulos rectos diametrum a d, & ipſa c & b iungantur c a, b a: & ſit e circulus, cuius ſemidiametrus ſit ęqualis ipſi a b. Sit autem f circulus, cuius ſemidiametrus ſit ęqualis ipſi a c. & g ſit circulus, cuius ſemidiametrus ſit ęqualis b c. Circulus igitur g, ęqualis eſt duobus ſimul circulis e, f. Circulus autem g, ęqualis eſt toti ſuperficiei ſphęræ, cum utraq; ſint quadrupla circuli, qui eſt circa diametrum b c. circulus e, æqualis eſt ſuperficiei a b d portionis minoris: nam hoc eſt demonſtratū proxima ſuperiori in portione minori dimidia ſphæra. reliquus ergo circulus f, æqualis eſt ſuperficiei a c d portionis maioris dimidia ſphæra.



42 CVicūq; portioni ſphæræ æquatur conus ille, qui baſim habeat æqualē ſuperficiei ſectionis ſphæræ, quæ ſecundum dictam portionem habeatur: altitudinem uero æqualem ſphæræ ſemidiametro. Eſto ſphæra, & maximus in ea circulus a b d, centrum c. & conus baſem habens circulū æqualem ſuperficiei, quæ ſecundum a b d circūferentiam habetur, altitudinem uero æqualem ipſi b c. Oſtendēdum eſt, quod portio a b c d, æqualis eſt dicto cono. Nam ſi non: eſto primò portio maior cono, & ponatur h conus qualis dictus eſt. Cum igitur duæ ſint magnitudines inęquales, portio ſcilicet, & conus h, inueniantur duæ lineæ l & e, l maior, e minor, quæ habeat minorē proportionem, quàm portio ad conum: & ſumantur duæ lineæ, f, g: ita ut l tantum excedat f, quantum f excedit g, & g, e. & circa planam circuli portionem circumſcribatur figura multorum angulorum, & æqualium laterū, & parium angulorum: & altera huic ſimilis inſcribatur eidem, ita ut circumſcriptæ ad inſcriptam ſit maior proportio, quàm l ad ipſam f. & ſimili modo, ut prius factum eſt, circūducto circulo producentur duæ figuræ conicis ſuperficiebus compræhenſæ. Figura itaq; circumſcripta, unà cum cono, qui uerticem habeat punctum c ad figuram inſcriptam, unà cum cono habet eam proportionem triplicatam, quam habet latus figuræ multorum angulorum circumſcriptæ, ad latus inſcriptæ. Verum latus circumſcriptę ad latus inſcriptæ, habet minorem proportionem quàm l ad f. Figura igitur ſolida quæ dicta eſt, minorem habebit proportionem quàm eſt l ad f triplicata. At uero l ad e maiorem habet proportionem, quàm eſt l ad f triplicata. figura ergo ſolida circumſcripta portioni, ad inſcriptam figuram, minorem habet proportionem, quàm eſt l ad e. Verum l ad e minorem habet, quàm portio ſolida, ad conum h. quare figura ſolida circumſcripta portioni, ad inſcriptam eidem, minorem ha-



bet

bet proportionem, quàm portio ſolida ad conum h: & permutatim. figura ſolida uero circumſcripta maior eſt portione. Inſcriptam ergo figuram ipſi portioni maiorem eſſe cono concludemus, quod ſanè eſſe non poteſt. demōſtratum enim eſt in ſuperioribus, dictam figurā minorē eſſe oportere eo uidelicet cono, qui baſim habeat circulū, cuius ſemidiametros æqualis ſit lineæ à uertice portionis ad circūferentiam portionis ductæ, qui circulus baſis portionis exiſtat: altitudinem uero ſemidiametrum ſphæræ. Hic aūt eſt dictus conus h. habet enim baſem circulum æqualem ſuperficiei portionis, hoc eſt dicto circulo, & altitudinem æqualem ſemidiametro ſphæræ. Portio igitur ſolida non eſt maior cono h. Eſto ſecundò conus h maior ſolida portione: rurſus atq; ſimiliter l ad ipſam e, cum ſit maior, ea minorē habeto proportionem, quàm conus ad portionem. & ſimiliter ſumantur f g, ita ut latus figuræ multorum angulorum & parium circumſcriptæ circa planam portionem circuli ad latus inſcriptæ eidem, minorem habeat proportionem quàm eſt l ad f. & fiant circa portionem ſolidam figuræ ſolidæ, ut ſuperius fecimus. Demonſtrabimus itaq; eodem modo, quòd figura ſolida portioni ſolidæ circumſcripta, ad inſcriptā figuram minorem habeat proportionem, quàm l ad e, & quàm h conus ad portionem. quare portio quoque ad conum minorem habebit proportionem, quàm figura ſolida portioni inſcripta ad figuram circumſcriptam. Portio autem maior eſt figura ſibi inſcripta. igitur concludemus, h conum eſſe figura circumſcripta maiorem: quod item eſſe non poteſt. nam hoc demōſtratum eſt, quod talis conus neceſſariò minor eſt figura portioni circumſcripta. Ex qua re colligimus, portionem cono dicto eſſe æqualem.

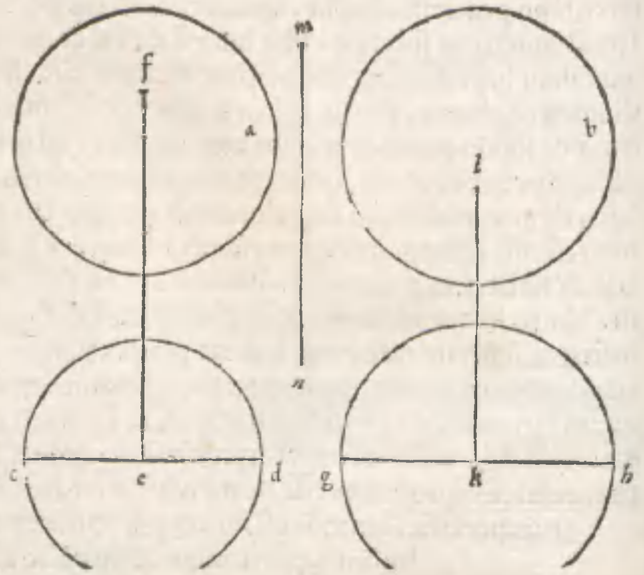
ARCHIMEDIS DE SPHAERA ET Cylindro Libri primi Finis.

ARCHIMEDIS DE SPHAERA ET CYLINDRO LIBER ſecundus.

ARCHIMEDES DOSITHÆO Salutem.

ANTEA quidem mihi iuſſeras, ut problematum demonſtrationes ſcriberem, quorum ipſe iam propoſitiones miſeram ad Cononem. Contingit autem eorum plurima ſcribi per theoremata, quorum iampridem ad te miſeram demonſtrationes. Quòd uidelicet cuiuslibet ſphæræ ſuperficies maximi in ſphæra circuli quadrupla exiſtit. Et quòd ſuperficiei cuiuſcunque ſphæræ circulus ille eſt æqualis, cuius ſemidiametros diametro ſphæræ eſt æqualis. Item cuiuſcunque portionis ſphæræ ſuperficies æquatur circulo, cuius ſemidiametros eſt æqualis lineæ rectæ, quæ à uertice portionis ad circumferentiam circuli, qui eſt baſis portionis, ducatur. Itē quod cylindrus qui baſem habeat maximum in ſphæra circulum, altitudinem uerò æqualem diametro ſphæræ, ipſeq; ſeſquialter eſt magnitudini ſphæræ, & eius ſuperficies ſuperficiei ſphæræ ſeſquialtera habetur. Item quòd omnis portio ſolida ſphæræ æqualis eſt cono, qui baſim habeat circulum, qui ſit æqualis ſuperficiei portionis ſphæræ: altitudinem uerò æqualem ſemidiametro ſphæræ. Quæcunq; igitur inſpecta theoremata & problemata ex his quę dicta ſunt oriuntur, ad te miſſa ſunt, omnia in hoc libro conſcripta. Quæ uero ex alia inſpectione colliguntur, ut quæ de elicis & conoidibus, nitor quàm celeriter mittere. Primū autem quod propoſitum fuerat, habebatur huiuſmodi. Sphæra data ſpacium planum inuenire, quod ſuperficiei ſphæræ eſſet æquale. Hoc autem manifeſtum & demonſtratum eſt ex prædictis inſpectis & theorematibus. Spacium enim planum quod circulo in ſphæra maximo ſit quadruplum, æquale eſt ſuperficiei ſphæræ.

1 Secundum propoſitũ fuit, cono, ſiue cylindro dato ſpheram inuenire, dicto cono uel cylindro æqualem. Eſto datus conus, ſiue cylindrus, a: & ſphæra ipſi a æqualis, ſit b: & ponatur cylindrus c f d, qui ſit ſeſquialter dato cono, uel cylindro a. Sphæræ uero b cylindrus ſeſquialter eſto, qui baſem habet circulum, qui eſt circa diametrum g h: axem uero k l, æqualem diametro ſphæræ b. erit igitur e cylindrus æqualis cylindro k. cylindrorũ aũt æqualium baſes ſuis altitudinib. ſunt mutuæ in proportione. Sicut ergo e circulus ad k circulum, hoc eſt ſicut quadratum c d ad quadratum g h, ſic k l ad e f. Eſt autem k l æqualis ipſi g h. nam cylindrus ſeſquialter ſphæræ, axem habet æqualem diametro ſphæræ, & circulus k eſt in ſphæra maximus. ſicut ergo quadratum c d ad quadratum g h, ſic g h ad e f. Eſto id quod ſub c d, m n continetur, æquale quadrato g h. Sicut ergo c d ad m n, ſic quadratum c d ad quadratum g h, hoc eſt g h ad e f: & permutatim, ſicut c d ad g h, ita g h ad m n, & m n ad e f. Et utraque c d & e f data eſt. Igitur inter duas datas rectas lineas duæ mediæ proportionales ſunt, g h, m n. quare utraqꝫ g h & m n data erit. Componetur autem iam propoſitum hoc modo. Eſto datus conus, ſiue cylindrus, a. oportet itaqꝫ ipſi cono, uel cylindro, ſphæram æqualem conſtituere. Eſto coni, ſiue cylindri a, cylindrus ſeſquialter, cuius baſis ſit circulus qui eſt circa diametrũ c d, axis uero e f. & ſumantur inter c d & e f duæ mediæ proportionales g h, m n: ita ut ſicut c d ad g h, ita g h, ad m n, & m n ad e f. Et intelligatur cylindrus, cuius baſis ſit circulus, qui fiat circa diametrum g h, axis autem k l æqualis diametro g h. Dico iam, quod æqualis eſt e cylindrus ipſi k cylindro. Nam quoniã ſicut c d ad g h, ita m n ad e f. & permutatim, & g h eſt æqualis ipſi k l. Sicut igitur c d ad m n, hoc eſt quadratum c d ad quadratum g h, ſic e circulus ad k circulum. ſicut ergo e circulus ad k circulum, ſic k l ad e f. Cylindrorũ igitur e & k baſes, ſuis altitudinibus in proportione ſunt mutuæ. quare e cylindrus ipſi k cylindro erit neceſſario æqualis. Cylindrus uero k ſphæræ illius eſt ſeſquialter, cuius diametros eſt g h. Ergo ſphæra cuius diametros æquatur g h, hoc eſt b, æqualis eſt a cono, ſiue cylindro.

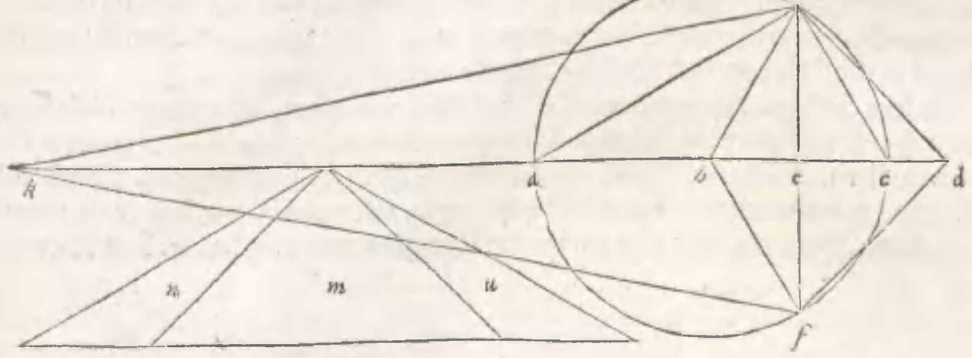


2 QVicunqꝫ portioni ſphæræ conus ille habetur æqualis, qui baſim habeat eandem cum portione, altitudinem uero lineam rectã, quæ ad altitudinem portionis eandem habeat proportionem, quam ſemidiametros ſphæræ unà cum altitudine reliquæ portionis habet, ad eandem reliquæ portionis altitudinem.

Eſto ſphæra, & maximus in ea circulus, cuius diametros a c, & ſecet ſphæra à plano ſecundum b f, ad angulos rectos ſuper ipſam a c, & ſit centrum h, & fiat ſicut utraqꝫ ſimul h a, a e ad a e, ſic d e ad c e. Item fiat ſicut utraqꝫ ſimul h c, c e ad c e, ſic k e

ad

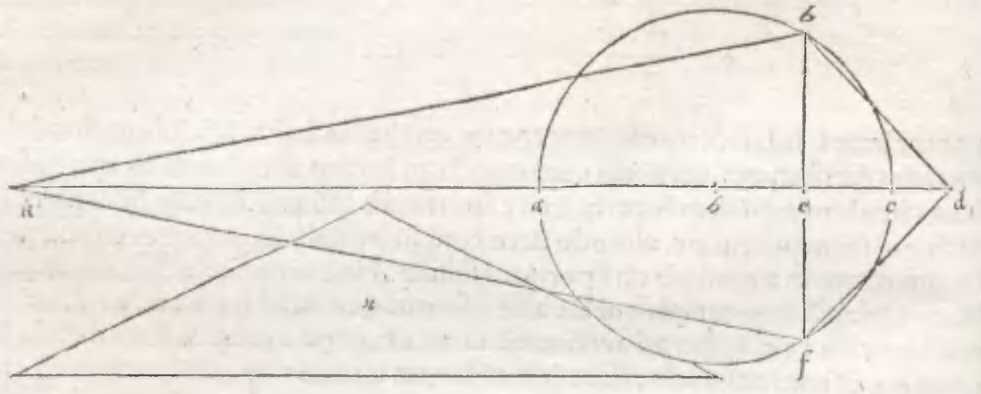
ad e a. Et erigantur coni utrinque à circulo circa b f diametrum conſtituto, uertices habentes puncta k d. Dico itaqꝫ, quod b d f conus, æquatur ei quæ eſt ſecundũ c portioni ſphæræ. conus autem b k f portioni, quæ eſt ſecũdum a punctum. Iungantur itaqꝫ b h, h f: & intelligatur conus, qui baſim habeat circulum circa b f diametrum conſtantem, uerticem uerò punctum h. item alter conus m, qui baſim habeat circulum æqualem ſuperficiei b c f portionis ſphæræ: hoc eſt, habentem ſemidiametrum æqualem b c. altitudo uero coni ſit æqualis ſemidiametro ſphæræ. Erit iam conus m æqualis b c h f portioni ſolidæ. Hoc autem eſt oſtenſum in primo libro. Quoniam igitur eſt ſicut d e ad e c, ſic utraque ſimul h a, a e ad a e, diuidendo erit ſicut c d ad c e, ita h a ad a e: hoc eſt c h ad a e. & permutatim, ſicut d c ad c h, ſic c e ad e a. & coniungendo, ſicut h d ad h c, ita c a ad a e: hoc eſt quadratum c b, ad quadratum b e. Sicut ergo d h ad c h, ita quadratum c b ad quadratum b e. Eſt autem c b æqualis ſemidiametro circuli m. At uero b e eſt ſemidiametros circuli circa b f diametrum conſtituti. Erit igitur, ut d h ad h c, ſic m circulus ad circulum circa diametrum b f conſtitutum, & h c eſt æqualis axi coni m. ergo ſicut d h ad axem coni m, ſic circulus m ad circulum circa b f diametrum conſtitutum. Conus igitur qui habet baſem circulum m, & altitudinem ſphæræ ſemidiametrum, æqualis eſt b d f h ſolido rhombo. nam hoc in his quæ in primo libro ſumpta ſunt, demõſtratum fuit. Vel hoc modo cõcludemus: Quoniam eſt ſicut d h ad altitudinem m coni, ita m circulus ad circulum circa b f diametrum conſtitutum. quare conus m æquabitur cono, cuius baſis ſit circulus circa b f diametrum conſtitutus, altitudo autem d h. nam iſtorum baſes altitudinibus ſunt mutuæ in proportione. ſed conus qui baſem habet circulum circa b f diametrum conſtitutum, altitudinem autẽ d h, æqualis eſt b d f h ſolido rhombo: conus uero m æquatur b c f h, ſolidæ portioni: & b c f h ſolida portio æqualis erit b d f h ſolido rhombo. Communi itaqꝫ ſublato cono uidelicet cuius baſis eſt circulus circa b f diametrum conuolutus, altitudo autem e h: reſiduum ſcilicet b d f conus, æqualis erit b f c portioni ſphæræ. Similiter autem oſtendetur, b k f conum portioni ſphæræ b a f eſſe æqualem. Nam quoniã ſicut utraqꝫ ſimul h c, c e ſe habet ad c e: ſic k e ad e a, diuidendo erit ſicut k a ad a e, ita h c ad c e. æqualis eſt aũt h c ipſi h a. quare & permutatim, ſicut k a ad a h, ita a e, ad e c. unde cõponendo, ſicut k h ad h a, ſic a c ad e c: hoc eſt, quadratũ b a ad quadratum b e. Ponatur itaqꝫ rurſus circulus n, ſemidiametrum habens æqualem lineæ ductæ à uertice portionis b a f, ad circumferentiam baſis portionis, & intelligatur conus n, qui altitudinem habeat æqualem ſemidiametro ſphæræ: æqualis ergo hic erit b h f a ſolidæ portioni. nam hoc in primo fuit oſtenſum. Et quoniam demonſtratum eſt, ſicut k h ad h a, ita eſſe quadrati a b ad quadratum b e, hoc eſt quadrati ſemidiametri n circuli, ad quadratum ſemidiametri circuli circa b f diame



 trum

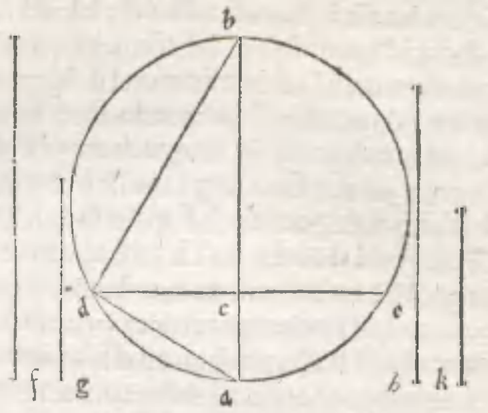
trum conuoluti: hoc eſt n circuli ad circulum circa b f diametrum conſtitutum. at uero a h æquatur altitudini n coni. quare ſicut k h ad altitudinem coni n, ſic circulus n ad circulum circa b f diametrum cõſtitutum, altitudinem uero k h. Tota igitũ a b f portio ſphęræ æquatur cono b k f, qui baſem habeat eãdem cum portione, & altitudinem æqualem ei, quæ eandem habeat proportionẽ ad altitudinem portionis ſphæræ, quam proportionem habet utraq; ſimul & ſemidiametrus ſphæræ, & perpendicularis reliquæ ſectionis ad perpendicularẽ reliquæ ſectionis. ſicut enim d e ad e c: ſic d f b conus, hoc eſt b c f portio ad b c f conum.

Eadem deſcriptione retenta, & eiſdem ſubiectis oſtendemus, quod k b f conus æqualis eſt a b f portioni ſphęræ. Eſto itaq; n conus, baſem habẽs ſuperficiei ſphęræ æqualem, altitudinem uero ſemidiametrũ ſphæræ. Conus igitur iſte eſt æqualis ſphæræ. nam ſphæra oſtenſa eſt quadrupla eſſe coni baſem habentis maximũ in ſphæra circulum, altitudinem autem ſemidiametrum ſphæræ. Sed & conus n

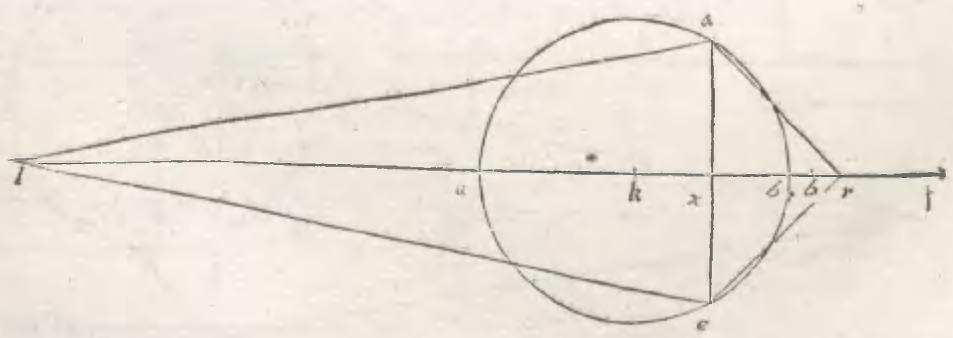


eſt quadruplus eiuſdem coni, cum baſis ſit quadrupla baſis. Nam ſuperficies ſphæræ quadrupla eſt maximi in ea circuli, & altitudo altitudini æqualis. & quoniam ſicut utrũq; ſimul h a, a e ad a e, ſic d e ad e c, diſiũgendo & permutatim argumentabimur, ſicut h c ad c d, ita a e ad e c. Rurſus quoniã ſicut k e ad e a, ſic utraque ſimul h c, c e ad c e diſiungendo, & permutatim ſicut k a ad c h, hoc eſt ad h a, ſic a e ad e c: hoc eſt h c ad c d. & coniungendo. æqualis eſt autem a h, h c. Sicut ergo k h ad h c, ſit h d ad d c. & ſic tota k d ad d h, ut d h ad d c, hoc eſt k h ad h a. quod continetur igitur ſub d k, h a, æquatur ei quod ſub d h k cõtinetur. rurſus quoniã eſt ſicut k h ad h c, ſic h d ad c d, & permutatim. at uero ſicut h c ad c d oſtẽſum eſt, ſic eſſe a e ad e c. ſicut igitur k h ad a h, ſic a e ad e c. quare & ſicut quadratum k d, ad id quod continetur ſub k h, h d: ſic quadratum a c ad id quod continetur ſub a e, e c. quod continetur uero ſub k h, h d, oſtenſum eſt æquale eſſe ei quod ſub k d a h continetur. Sicut igitur quadratum k d ad id quod continetur ſub k d a h, hoc eſt k d ad a h: ſic quadratum a c, ad id quod ſub a e, e c continetur, hoc eſt ad quadratum e b. & a c, æqualis eſt ſemidiametro circuli n. ſicut ergo quadratum ſemidiametri n circuli ad quadratum b e, hoc eſt n circulus ad circulum circa b f diametrum conuolutum: ſic k d ad a h: hoc eſt k d ad altitudinem coni n. Conus igitur n, hoc eſt ſphæra, æqualis eſt b d f k ſolido rhombo. Vel ſic. eſt igitur ſicut circulus n ad circulum circa b f diametrum conſtitutum, ſic d k ad altitudinem coni n. Conus igitur n æqualis eſt cono, cuius baſis ſit circulus circa b f diametrum conſtans, altitudo d k. eorũ enim baſes ſuis altitudinibus ſunt in proportione mutuæ. ſed talis conus æqualis eſt b k f d ſolido rhombo. quare conus quoq; n, hoc eſt ſphæra, æquatur b f k d ſolido rhombo, ex conis b d f & b k f compoſito. quorum b d f conus oſtenſus eſt eſſe æqualis b c f portioni ſphæræ: reliquus igitur b k f conus erit neceſſario æqualis b a f reliquæ portioni ſphæræ.

DAtam ſphæram ſic ſecare plana ſuperficie, ut portionũ ſuperficies inter ſe ſi 3
mile cuicũq; proportioni datæ retineant proportionẽ. Vt hoc exequamur, eſto hoc factũ eſſe. & ſit maximus in ſphęra circulus a d b e, diametros eius a b, & emittatur plana ſuperficies ad a b ſecũdum angulos rectos, & fiat à plana ſuperficie in a d b e circulo ſectio d e, & iungantur lineæ a d, b d. Quoniã itaq; proportio data eſt ſuperficiei d a e portionis, ad ſuperficiem d b e portionis: & ſuperficiei portionis d a e æqualis eſt circulus, cuius ſemidiametros æqualis eſt ipſi a d: ſuperficiei autem portionis d b e, æqualis eſt circulus, cuius ſemidiametrus eſt æqualis ipſi b d. Sicut autem dicti circuli inter ſe, ſic quadratum a d ad quadratum d b: hoc eſt, a c ad c b. Proportio igitur quæ eſt a c ad c b, erit data proportio. quare c punctum datum erit, & ſuper a b ad angulos rectos erecta eſt linea d e. ergo & plana ſuperficies, quæ eſt ſecundũ d e, erecta ſtabit ſimiliter. Cõficietur autem ſic. Eſto ſphæra, & maximus in ea circulus a b d e, cuius diametros a b. proportio autem data ſit f ad g, & diuidatur a b ad punctum c. diuidatur ſphæra à plano ad angulos rectos ſuper a b linea recta conſtituto, & ſit communis ſectio d e, & iungantur a d, d b. & exponantur duo circuli h k: circulus h æqualem habens ſemidiametrum ipſi a d, circulus uero k æqualem ſemidiametrum ipſi d b habens. Eſt igitur h circulus æqualis ſuperficiei d a e portionis, k uero æqualis ſuperficiei d b e portionis. Hoc enim ante demonſtratũ eſt in primo libro. & quoniam data eſt ſuperficies quæ ſub a b d continetur, & c d perpẽdicularis exiſtit, erit ut a c ad c b, hoc eſt f ad g, ſic quadratum a d ad quadratum d b: hoc eſt quadratum ſemidiametri h circuli, ad quadratum ſemidiametri k circuli: hoc eſt h circulus ad k circulũ. hoc item eſt ſuperficies d a e portionis, ad ſuperficiem d b e portionis ſphæræ.

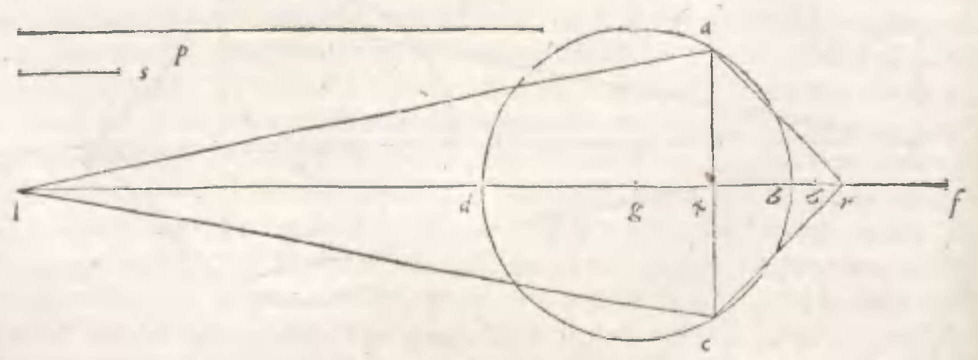


DAtam ſphæram ſic ſecare, ut portiones ſphæræ inter ſe eandem habeant 4
proportionem ei, quęcunq; data ſit proportioni. Eſto data ſphæra a b c d, oportet eam plano ſecare, ſic ut ipſæ ſphæræ portiones inter ſe habeant proportionem datam. Diuidatur itaq; ſecundũ a c à plano. proportio igitur a d c portionis, ad a b c portionem ſphæræ eſt data. diuidatur autem ſphæra per centrum, & ſit ſectio maximus circulus a b c d, centrum autem k, & diametros d b. & fiat, ut ſicut utraq; ſimul k d, d x ad d x, ſic r x ad x b. Sicut autem utraq; ſimul k b, b x ad



b x, sic l x ad x d: & iungantur a l, l c, a r, r c. conus igitur a l c, est æqualis a d c portioni sphæræ, a r c uero ipsi a b c. Proportio igitur a l c coni ad a r c conum est data. Sicut autem conus ad conum, sic l x ad x r, cum eandem basem habeant, circulum qui est circa a c diametrum conuolutus. Proportio igitur etiam l x ad x r est data, & iam eadem sequuntur, quæ prius propter apparatum sicut l d ad k d, sic k b ad b r, & d x ad x b. & quoniam est sicut r b ad b k, ita k d ad l d coniungendo sicut r k ad k b, hoc est ad k d, sic k l ad l d. Tota igitur r l ad totam k l est, sicut k l ad l d. quod igitur sub r l, l d cōtinetur, æquatur quadrato l k. Sicut igitur r l ad l d, sic quadratum k l ad quadratum l d. & quoniam est sicut l d ad d k, sic d x ad x b: erit etiam è conuerso & iungendo, sicut k l ad l d, sic b d ad d x. sicut igitur quadratum k l ad quadratum l d, sic quadratum b d ad quadratum d x. Rursus quoniam est sicut l x ad d x, sic utraque simul k b, b x, ad b x. disiungendo erit sicut l d ad d x, ita k b ad b x. & ponatur b f æqualis ipsi k b. quod autē f extra r cadet, manifestū est. & est sicut l d ad d x, ita f b ad b x. quare & sicut d l ad l x, sic b f ad f x. Cum autem proportio r x ad l x sit data, erit etiam r l ad l x proportio data. Quoniam igitur proportio r l ad l x componitur ex proportione quam r l habet ad l d, & d l ad l x. uerū sicut r l ad l d, sic quadratum d b ad quadratum d x. sicut autem d l ad l x, sic b f ad f x. igitur proportio r l ad l x coniungitur ex proportione, quam habet quadratū b d ad quadratū d x, & ex b f ad f x. Fiat autem sicut r l ad l x, sic b f ad f h. Proportio autē r l ad l x erat data: quare & proportio b f ad f h erit data. Linea uero b f est data, nam est æqualis semidiametro: igitur & f h linea data erit, & proportio b f ad f h componitur ex proportione quadrati b d ad quadratum d x, & ex b f ad f x. sed b f ad f h proportio componitur ex proportione b f ad f x, & ex f x ad f h. sublata cōmuni, quę est b f ad f x: reliquum erit igitur, sicut quadratum b d quod est datum ad quadratum d x, sic x f ad f h quod est datum. & est f d linea data iuxta datā d b, quam diuidere oportet secundum x, & facere ut x f ad f h datam sit sicut quadratum b d datum ad quadratum d x. Hoc autem non habet determinationem simpliciter dictam, sed ijs quæ istic requiruntur positis: hoc est posito hoc, duplam esse d b ipsius b f, & hoc, maiorem esse f h quàm h b, tanquam per resolutionem, nō habet determinationem. Problema uero tale est. Datis duabus lineis rectis d b, b f, quarū d b sit dupla ipsius b f, & signo h in b f posito, diuidere ipsam d b in puncto x, & facere quod sicut quadratum b d ad quadratum d x, sic f x ad f h. Vtraque uero hæc in fine resoluentur & componentur.

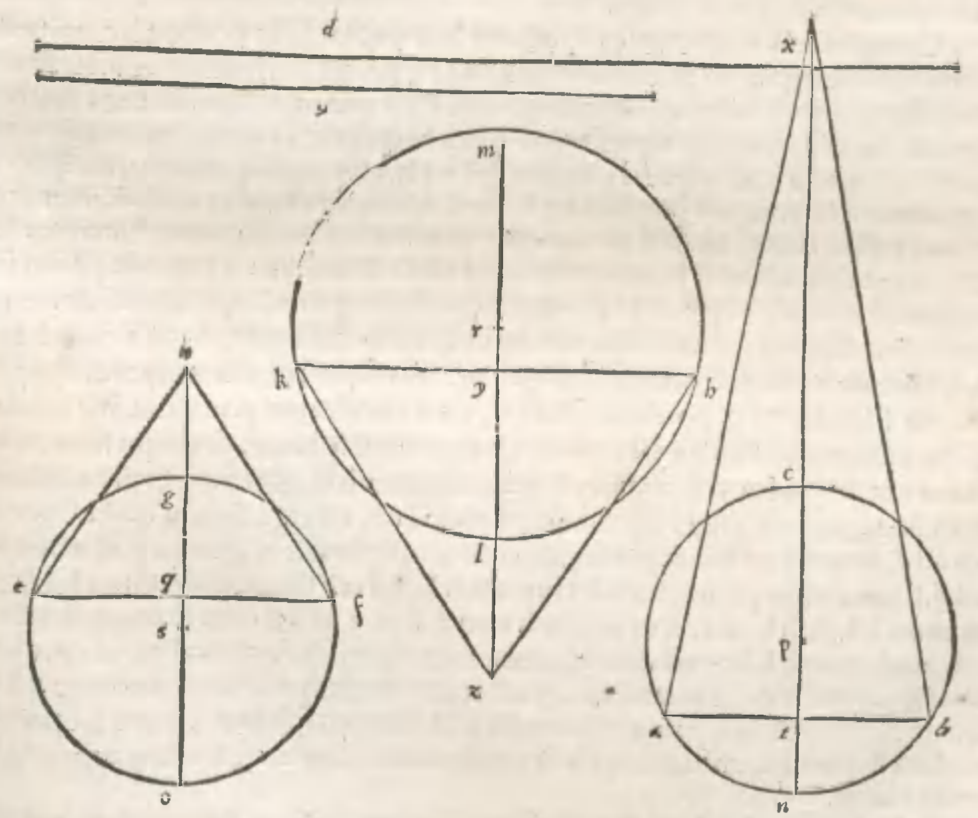
Componitur autem problema hoc modo. Esto data proportio, quam p maior habeat ad s minorem, & detur quædam sphæra, & diuidatur plano per centrum ducto, & sit sectio a b c d circulus, cuius diametros sit b d, centrum k, & ipsi k b ponatur æqualis b f, & diuidatur b f in puncto h, ita ut sit h f ad h b, sicut p ad



s.&

s. & etiam diuidatur b d in puncto x, ita ut sit x f ad h f, sicut quadratū b d ad quadratū d x. Et per punctum x educatur planum, erectū super b d secundū angulos rectos. Dico itaque, quod planū illud diuidit sphęram, ita ut maior portio ad minorem sic se habeat, uti p ad s. Factū sit enim, ut sicut utraque simul k b, b x ad b x, sic l x ad d x. Sicut aūt utraque simul k d, d x ad x d, ita r x ad x b. Et iungantur a l, l c, a r, r c. est igitur secundū apparatum ita, sicut in resolutione ostendimus, id quod sub r l, l d continetur, æquale quadrato l k: & sicut k l ad l d, ita b d ad d x. Quare sicut quadratum k l ad quadratum l d, sic quadratum b d ad quadratum d x. & quia id quod sub r l, l d continetur, est æquale quadrato l k, erit sicut r l ad l d, ita quadratum l k ad quadratum l d. erit igitur, & sicut r l ad l d, sic quadratum b d ad quadratum d x: hoc est, x f ad f h. & quoniam sicut utraque simul k b, b x ad b x, sic l x ad x d. æqualis est autē k b ipsi b f, erit igitur & sic f x ad x b, sicut l x ad x d. & euertēdo, sicut x f ad f b, ita x l ad l d. quare & sicut l d ad l x, sic b f ad f x. & quoniam est sicut r l ad l d, sic f x ad f h. sicut autem d l ad l x, sic b f ad f x. & per æquale in proportionalitate indirecta, sicut r l ad l x, ita b f ad f h. sicut ergo l x ad x r, sic f h ad h b. sicut autem f h ad h b, sic p ad s. quare sicut l x ad x r: hoc est, a l c conus ad a r c conum: hoc est a d c portio sphęræ, ad a b c portionem sphæræ, sic p ad s.

Datis duabus sphæræ portionibus, tertiam constituere portionem, quæ alteri earum quæ datæ sunt similis sit, alteri uero æqualis. Esto duæ portiones 5
sphæræ datæ a b c, e f g: & sit basis ipsius portionis a b c, circulus circa diametrum



a b constitutus: eius uero uertex sit c pūctum: basis uero e f g, sit circulus circa diametrum e f constans: uertex g punctū. Oportet itaque portionem sphæræ inuenire, quæ sit æqualis ipsi a b c portioni, & ipsi e f g similis. Esto inuenta sit, & ponatur esse h k, & sit eius basis circulus circa h k diametrum conuolutus, uertex uero l punctum. Sint etiam circuli in sphæris a n b c, h m k l, e o f g: diametri uero corū

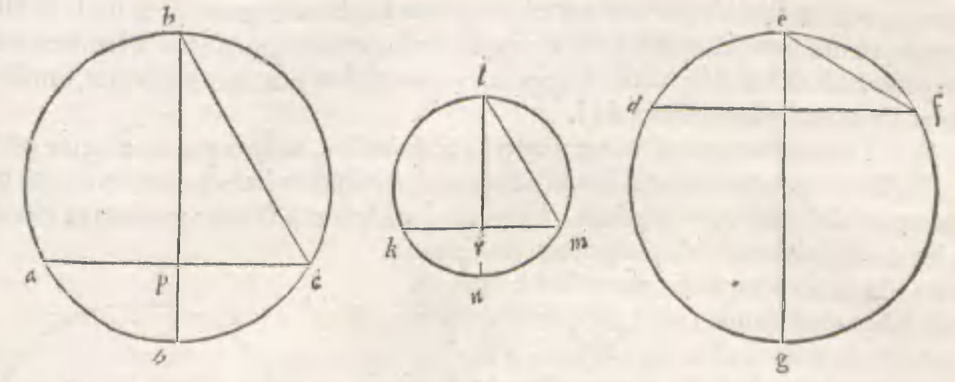
ad

ad angulos rectos baſibus portionum inſtituti ſint c n,l m,g o.& ſint centra p,r, s.& factum ſit ſic,ut utraq; ſimul p n,n t ad n t,ita x t ad t c.ſicut autẽ utraq; ſimul r m,m y ad m y,ſic z y ad y l.& ſicut utraq; ſimul s o,o q ad o q,ſic u q ad q g.et intelligantur coni, quorum baſes ſint circuli circa diametros a b,h k, c f conſtituti, uertices uero x z u puncta.conus itaq; a b x,æquat portioni a b c ſphæræ.conus uero h z k,æquatur ipſi h k l. conus demum e u f,æquatur ipſi e g f.hoc enim demonſtratum eſt antea.Et quoniam ſphæræ portio a c b ęquatur h l k portioni, conus a x b erit æqualis h z k cono. æqualiũ autem conorum baſes ſunt altitudinibus mutuæ. Circulus igitur circa diametrum a b, ad circulum circa diametrum h k,eſt ſicut z y ad x t.ſicut autem circulus ad circulum, ſic quadratum a b ad quadratum h k.Sicut ergo quadratum a b ad quadratum h k,ſic z y ad x t.Et quoniã ſimilis eſt e f g portio portioni h l k, conus igitur e u f ſimilis eſt cono z h k.Hoc autem oſtendetur.Eſt igitur ſicut u q ad e f,ſic z y ad h k.proportio autem ipſius u q ad e f data eſt:igitur proportio z y ad h k erit data . Eſto eadem x t ad d,& x t data eſt,erit & d data.& quoniam eſt ſicut z y ad x t,hoc eſt quadratũ a b ad quadratũ h k,ſic h k ad d. Ponatur id quod ſub a b & 9 continetur,æquale eſſe quadrato h k, erit igitur quadratum a b ad quadratum h k,ſicut a b ad 9 . Oſtenſum eſt aũt,quod ſicut quadratum a b ad quadratũ h k,ſic h k ad ipſam d:& permutatim,ſicut a b ad h k,ſic 9 ad d.Sicut aũt a b ad h k,ſic k h ad 9.propterea quod quadratum h k æquatur ei quod fit ex a b in 9.ſicut ergo a b ad h k,ita h k ad 9,& 9 ad d. Inter duas igitur datas duæ mediæ in proportione continua ſunt poſitæ : hoc eſt inter a b & d , ſunt h k,& 9.

Componetur autem iam propoſitum hoc pacto .Eſto portio a b c, cui uolumus ſtatuere æqualem portionem.& eſto e f g portio,cui ſimilem oportet ſtatuere.& ſint maximi in ſphæris circuli a b c n,e f g o:quorum diametri ſint c n,g o:& centra p,s.& fiat,ut ſicut utraq; ſimul p n,n t ad n t,ſic x t ad t c.ſicut aũt utraq; ſimul s o,o q ad o q,ſic u q ad q g.conus igit x a b, eſt ęqualis portioni a b c ſphęræ. conus uero f u e,æquat portioni e g f. fiat ſicut u q ad e f, ſic x t ad d. & inter duas lineas rectas datas a b , & d duæ mediæ in continua proportione ſumantur h k & 9:ita ut ſicut a b ad h k, ita h k ad 9,& 9 ad d. & ſimiliter h k circulo portio ſtatuatur h l k,ſimilis e f g portioni circuli,& perficiatur circulus,& ſit eius diametros l m,& intelligatur ſphæra cuius maximus circulus ſit l h m k,centrũ r.& ſecũdum h k planum tranſeat erectum ad angulos rectos ſuper l m,erit iam portio ſphæræ uerſus l ſimilis e f g portioni ſphæræ , cum circulorum portiones ſint ſimiles. Dico autem, quod etiam eſt æqualis a b c portioni ſphæræ . fiat enim ſicut utraq; ſimul r m, m y ad m y,ſic z y ad y l. igitur conus z h k, æquatur portioni ſphæræ h k l.& quoniam conus z h k ſimilis eſt cono f u e, eſt ergo ſicut u q ad e f,hoc eſt x t ad d,ſicut z y ad h k:& permutatim,& conuerſim.ſicut igitur z y ad x t,ſic h k ad d.Cum autem proportionales ſint a b,h k,9,d erit ſicut quadratum a b ad quadratum h k,ſic h k ad d.ſicut autem h k ad d, ſic z y ad x t. ergo ſicut quadratũ a b ad quadratum h k,hoc eſt circulus circa diametrum a b conſtitutum, ad circulum circa diametrũ h k cõſtantem , ſic z y ad x t.conus igitur a x b æquatur cono h z k. quare & a b c portio ſphæræ eſt æqualis h k l portioni ſphæræ. Igitur a b c portioni datæ æqualem conſtituimus h l k portionem ſphæræ, quæ etiam alteri e f g ſimilis exiſtit.

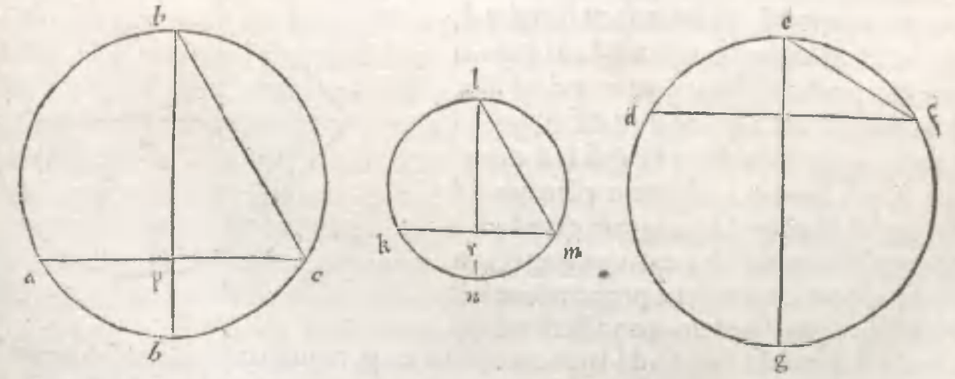
6 DVabus portionibus, ſiue eiuſdem ſiue non eiuſdem ſphæræ datis,tertiam inuenire ſphæræ portionem, quæ quidem alteri datarum portionum ſit ſimilis, ſuperficiem uero habeat alterius portionis ſuperficiei æqualem . Sint ſphæricæ portiones ſecundum a b c, d e f circumferentias ſumptæ . & eſto portio, cui ſimilem inuenire oporteat ſecundum a b c circumferẽtiam ſumpta. ea uero cuius ſuperficies æqualis eſſe debeat ſuperficiei portionis inueniendæ , ſit ſecundum

d e f circumferentiam . & ponatur factũ quod quæritur,& eſto k l m portio ſphæræ ipſi a b c portioni ſimilis . ſuperficiem quoq; habeat ſuperficiei d e f portionis æqualem:& intelligantur centra ſphærarum, & per ea tranſeãt plana erecta per-



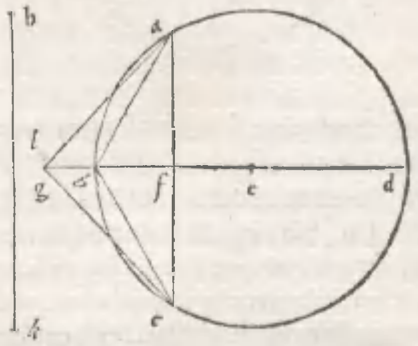
pendiculariter ſuper baſes portionum.& in ſphæris quidem ſint ſectiones hæ k l m n,a b c h,e f g d maximi circuli, & in baſibus portionum ſint k m,a c,d f diametri.ſphęrarum uero diametri ſint ſuper k m,a c,d f perpendiculariter erectæ.ſintque l n , b h , e g:& coniungantur l m,b c, e f. & quoniam ſuperficies portionis ſphæræ k l m æqualis eſt ſuperficiei d e f portionis , æqualis erit ergo circulus cuius ſemidiametros ſit ipſi l m æqualis,circulo cuius ſemidiametros ſit æqualis e f. Superficies enim dictarum portionũ oſtenſæ ſunt eſſe æquales circulis, quorum ſemidiametri ſint æquales lineis,quæ à uerticibus portionum ad baſes earum deducantur. Quapropter l m erit æqualis e f. Cum autem k l m ſit ſimilis portioni a b c, erit ſicut l r ad r n,ſic b p ad p h.& cõuerſim , & coniungendo,ſicut n l ad l r, ſic h b ad b p . uerum & ſicut r l ad l m, ſic b p ad b c.nam trianguli ſimiles exiſtũt. Sicut ergo n l ad l m,hoc eſt ad e f, ſic h b ad b c:& permutatim.proportio uero e f ad b c eſt data. nam utraq; earum eſt data.igitur proportio l n ad b h data erit.ſed b h eſt data:quare & l n,& ſphæram quoq; datam eſſe neceſſe eſt.

Componetur autem propoſitum hoc modo . Sunto duæ portiones ſphæræ datæ a b c,d e f.& ſit a b c, cui ſimilem d e f , cuius ſuperficiei æqualem oporteat conſtituere ſuperficiem.& eadem parentur omnia,quæ in reſolutione parata fue-



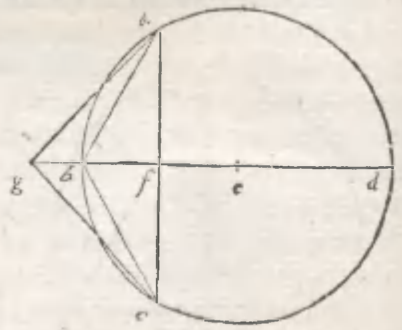
runt.& fiat,ſicut b c ad e f,ſic b h ad l n. & circa diametrum l n deſcribatur circulus, & intelligatur ſphæra cuius ſit maximus circulus l k n m . & diuidatur n l in puncto r , ita ut ſit ſicut h b ad b p , ſic n l ad l r. & ſecundum r diuidatur ſuperficies plano ſuper l n perpẽdiculariter erecto,& ducatur linea l m.portiones igitur circulorum,quæ ſunt ſuper k m,a c lineas rectas,ſunt inter ſe ſimiles:quare & ſua rum ſphærarum portiones ſimiles erunt. & quoniam eſt ſicut h b ad b p, ſic n l ad l r. etenim ſunt ſecundum diuiſionem. Sed & ſicut b p ad b c, ſic r l ad l m. ergo & ſicut h b ad n l, ſic b c ad e f. erit igitur e f ipſi l m æqualis. quare & circulus cuius ſemidiametros eſt e f, æquabitur circulo cuius ſemidiametros eſt l m. & circulus quidem cuius ſemidiametros eſt e f, æquatur ſuperficiei portionis d e f. circulus autem cuius ſemidiametros eſt l m, æquatur ſuperficiei portionis k l m. hoc enim in primo libro fuit oſtenſum. Superficies igitur k l m portionis ſphæræ, ſimilis eſt a b c, & æqualis ſuperficiei d e f.

7 AData ſphæra portionem plano ſic abſcindere, ut ipſa portio eã quæ propoſita ſit proportionem ſeruet ad conum, qui baſim habeat eandem cum portione, & altitudinem æqualem. Eſto iam data ſphæra, & maximus in ea circulus a b c d, diametros eius b d: oportet iam ſphæram plano ſecare ipſo a c, ita ut ſit a b c portionis ſphæræ ad conum a b c, proportio eadem proportioni datæ. Factum ſit hoc, & ſit centrum ſphæræ e, & ſit ſicut utraqꝫ ſimul e d, d f ad d f, ſic g f ad f b. conus igitur a c g eſt æqualis portioni a b c. Proportio igitur coni a g c, ad conum a b c eſt data. quare & proportio g f ad f b data erit. Sicut autem f g ad f b, ſic utraqꝫ ſimul e d, d f ad d f. igitur proportio utriuſque ſimul e d, d f ad d f eſt data: quare et e d ad d f data, quare & d f data erit. ſimiliter a c data. & quoniam utraqꝫ ſimul e d, d f ad d f



maiorem habet proportionẽ quàm utraqꝫ ſimul e d, d b ad d b, & eſt utraqꝫ ſimul e d, d b ter ipſa e d. ipſa uero b d, bis e d: habebit utraque ſimul e d, d f ad d f maiorem proportionẽ, quàm ſicut tria ad duo. proportio uero utriuſqꝫ ſimul e d, d f ad d f, eſt eadem proportioni datæ. Oportet igitur proportionem datam in compoſitione maiorem eſſe quàm tria ad duo.

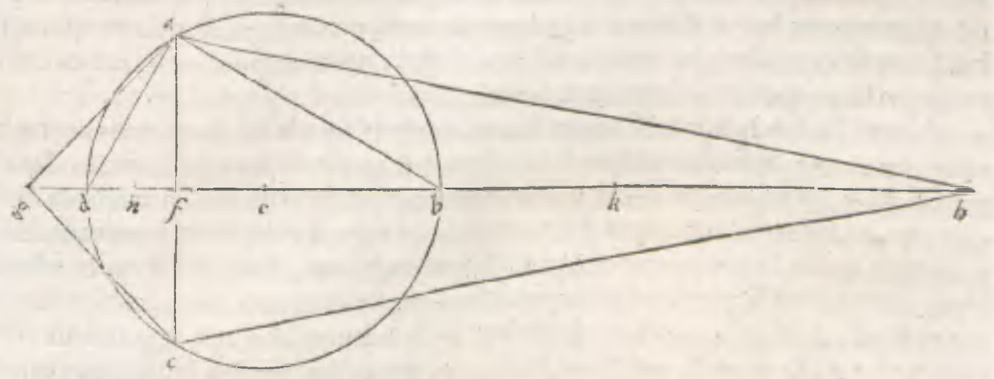
Componetur autem propoſitum hoc pacto. Eſto data ſphæra, & maximus in ea circulus a b c d, diametros uero b d, centrum e. proportio autem data ſit h k ad k l, maior ſcilicet quàm tria ad duo. ſicut autem tria ad duo, ſic utraqꝫ ſimul e d, d b, ad d b. & ideo h k ad k l maiorem habet proportionẽ, quàm utraqꝫ ſimul e d, d b ad d b. diuidendo igitur h l ad l k maiorem proportionẽ habet, quàm e d ad d b. & fiat ſicut h l ad l k, ſic e d ad d f, & per ipſum f perpendicularis a f c ipſi b d ducatur, & per lineam a c ducatur planum ad b d perpẽdiculare. Dico igitur, quod a b c portio ſphæræ ad a b c conum, habet eandem proportionem datæ proportioni h k ad k l. Factum ſit enim, quod ſicut utraqꝫ



ſimul e d, d f ad d f, ſic g f ad f b. conus igitur c a g, æquatur portioni ſphæræ a b c. & quoniam eſt ſicut h k ad k l, ſic utraque ſimul e d, d f ad d f: hoc eſt g f ad f b, hoc eſt a g c conus ad a b c conum. conus uero a g c æquatur portioni ſphæræ. Sicut igitur a b c portio ad a b c conum, ſic h k ad k l.

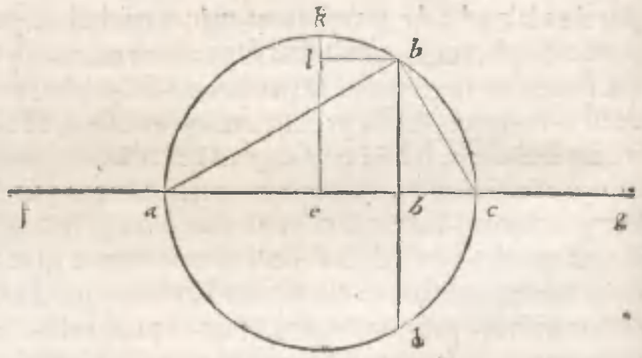
8 SI ſphæra quæuis à plano non per centrum ducto ſecetur, maior portio ad minorem habere probatur proportionem minorem, quàm ſit ea proportio duplicata, quam habet ſuperficies maioris ad ſuperficiem minoris portionis, maiorẽ uero

uero quàm ſit proportio, quæ ſit ſeſquialtera ad dictam proportionem. Eſto ſphæra, & maximus in ea circulus a b c, & diametros b d. & ſecet plano per a c ducto, & erecto ſuper a b c d circulo, & ſit maior ſphæræ portio a b c. Dico itaqꝫ, quod



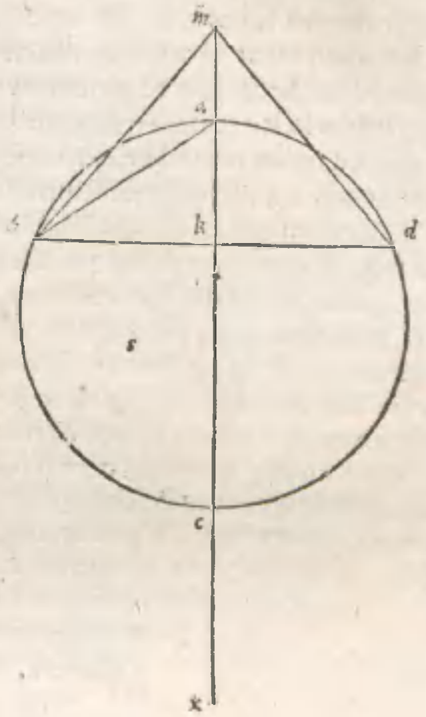
portio a b c ad a d c portionem, minorem habet proportionem, quàm ſit ea proportio duplicata, quam habet ſuperficies maioris portionis ad ſuperficiem minoris. maiorem uero quàm ſit proportio ſeſquialtera ad eandem. Iungantur b a, a d: & ſit centrum e, & fiat ut ſicut utraqꝫ ſimul e d, d f ad d f, ita h f ad f b. ſicut autem utraqꝫ ſimul e b, b f ad b f, ſic g f ad f d. & intelligantur coni baſem habentes circulum, qui eſt circa diametrum a c: uertices uero puncta h, g. & conus a h c, æqualis erit portioni ſphæræ a b c. conus uero a c g, ipſi a d c æqualis. & eſt ſicut quadrati b a ad quadratum a d, ſic ſuperficies portionis a b c ad ſuperficiem a d c portionis. hoc enim antea ſcriptũ eſt. Oſtendendum, quòd maior portio ſphæræ ad minorẽ habet minorẽ proportionem, q̃ ſit ea proportio duplicata, quam ſuperficies maioris portionis habet ad ſuperficiẽ minoris portionis. Dico quòd a h c conus, ad a g c conũ, hoc eſt f h ad f g, habet minorem proportionẽ, quàm eſt illa duplicata, quam habet quadratum b a ad quadratum a d, hoc eſt b f ad f d. Et quoniam eſt ſicut utraqꝫ ſimul e d, d f ad d f, ſic h f ad f b. ſicut autem utraqꝫ ſimul e b, b f ad b f, ſic f g ad f d: erit & ſicut b f ad f d, ita h b ad b e. nam b e eſt æqualis ipſi d e. hoc enim in ſuperioribus ſimul oſtenſum fuit. Rurſus quoniam ſicut utraque ſimul e b, b f ad b f, ſic g f ad f d. Eſto ipſi b e æqualis b k. manifeſtum naqꝫ eſt, quòd h b eſt maior b e: quoniam & b f maior eſt f d. & erit ſicut k f ad f b, ſic g f ad f d. ſicut autem f b ad f d, ita oſtenſum eſt eſſe h b ad b e. æquatur autem b e ipſi k b. ſicut ergo h b ad b k, ſic k f ad f g. Et quoniã h f ad f k minorem proportionem habet, quàm h b ad b k: ſicut autem h b ad b k, oſtenſum eſt ita eſſe k f ad f g. igitur h f ad f k minorem habet proportionem, quàm k f ad f g. minus ergo eſt quod continetur ſub h f, f g, quadrato f k. Id igitur quod cõtinetur ſub h f, f g, ad quadratum f g minorem habet proportionem, quàm quadratum k f ad quadratum f g. Quadratum uero k f ad quadratum f g, habet eam proportionem duplicatam, quæ eſt k f ad f g. igitur h f ad f g minorem proportionem habet, quàm eſt ea duplicata quæ eſt k f ad f g. Hoc autem eſt quod quærebamus. Et quoniam b e eſt æqualis ipſi d e, minus eſt igitur id quod ſub b f, f d cõtinetur, eo quod ſub b e, e d continetur. ergo f b ad b e minorem habet proportionem, quàm e d, ad d f, hoc eſt h b ad b f. quadratum igitur f b, minus eſt eo quod fit ex h b in b e. Sit itaqꝫ quadratum b n æquale ei quod ſub h b, b e. eſt igitur ſicut h b ad b k, ſic quadratum h n ad quadratum n k. quadratum autem h f ad quadratum f k maiorem habet proportionem, quàm quadratum h n ad quadratum n k. quadratum ergo h f, ad quadratũ f k maiorem proportionẽ habet, quàm h b ad b k. hoc eſt, quàm h b ad b e. Hoc idem eſt, quàm k f ad f g. ergo h f ad f g maiorem habet proportionem, quàm ſit ſeſquialtera ad proportionem k f ad f g. hoc enim perficit quod intendimus. et eſt ſicut h f ad f g, ſic a h c conus ad a g c conum: hoc eſt portio a b c ad portionẽ a d c. ſicut autem k f ad f g, ſic b f ad f d: hoc eſt quadratum b a ad quadratum a d: hoc idem eſt ſicut ſuperficies portionis a b c a d ſuperficiẽ a d portionis. ſed maior portio ad minorem habet minorem proportionem, quàm ſit ea duplicata quam habet ſuperficies maioris portionis ad ſuperficiem minoris portionis, maiorem uero quàm ſit proportio ſeſquialtera ad eandem.

Aliter. Eſto ſphæra, & maximus in ea circulus a b c d, diametros autem a c, centrum uero e. & ſecetur plano ſecundum b d erecto ſuper a c. Dico quod maior portio d a b, ad minorem b c d, habet minorem proportionem quàm ſit ea duplicata, quam habet ſuperficies a d b portionis ad ſuperficiem b c d portionis: maiorem uero quàm ſit proportio ſeſquialtera ad eandem. Iungantur enim a b, b c. Proportio autem ſuperficiei ad ſuperficiem eſt, ſicut circuli, cuius eſt ſemidiametros a b, ad circulum cuius ſemidiameter eſt b c. hoc eſt h a ad a c. ponatur autem utraq; a f, c g eſſe æqualis ipſi ſemidiametro. proportio autem b a d, portionis ad b c d, componitur ex proportione b a d portionis ad conum, cuius baſis ſit circulus circa b d diametrũ deſcriptus, uertex uero a punctum: & ea quam habet idem conus ad conum habentem candẽ baſem, uerticem uero c punctũ: & ex ea quam habet dictus conus ad b c d portionem. ſed proportio b a d, portionis ad b a d conũ eſt, ſicut g h ad h c. coni uero ad conum eſt ſicut

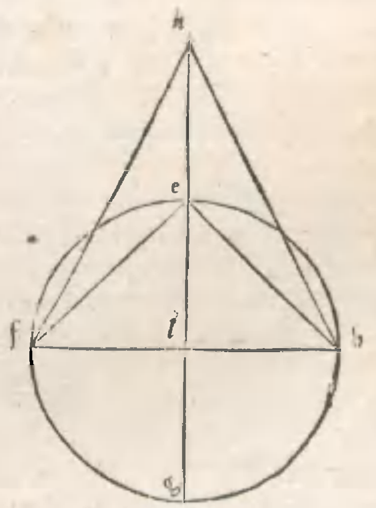


a h ad h c. coni autem b c d ad portionem b c d, eſt ſicut a h ad h f. At uero proportio cõpoſita ex proportione g h ad h c, & ex a h ad h c, eſt ſicut eius quod fit ex g h in a h, ad quadratum h c. eius autem quod fit ex g h in a h ad quadratum h c, cum ea quæ eſt a h ad h f, eſt ſicut ea quæ eſt eius quod fit ex g h, in quadratum h a, ad quadratũ h c in h f. proportio aũt eius quod fit ex g h in quadratũ h a, ad id quod fit ex quadrato h c in g h, eſt ſicut quadratum h a ad quadratum h c. quod igitur fit ex quadrato h a in h g, ad id quod fit ex quadrato c h in h f, minorem proportionẽ habet, quàm proportio quadrati a h ad quadratum h c. Quoniam enim eſt maius quadratũ c h in f h, quàm quadratum c h in h g: quoniam maior eſt h f ipſa h g. Dico igitur, quod maior portio habet ad minorem proportionem, maiorem quàm ſeſquialteram proportioni ſuperficiei ad ſuperficiem. Portio enim ad portionem oſtenſa eſt habere eam proportionem, quam habet quadratum a h, ductum in h g, ad quadratum h c in h f. proportioni autem ſuperficierũ ſeſquialtera eſt proportio cubi a b, ad cubum b c. Dico iam, quòd quadratum a h in h g, ad quadratũ c h in h f maiorem habet proportionẽ, quàm cubus a b ad cubum b c: hoc eſt cubus a h ad cubum h b, hoc eſt quadrati a h ad quadratum h b, et a h ad h b. proportio autem quadrati a h ad quadratum b h, aſſumens ſimul proportionem a h ad h b, eſt ſicut quadrati a h, ad id quod fit ex c h in h b. proportio autẽ quadrati a h, ad id quod fit ex h b in b c, eſt ſicut quadrati a h in h g, ad id quod fit ex h b in h c, ductum in h g. Dico iam quòd quadratũ a h, in h g, ad quadratum c h in h f maiorem proportionẽ habet, quàm quadratum a h, ad id quod fit ex b h in h c: hoc eſt quadratum a h in h g, ad id quod continetur ſub b h, h c, ductũ in h g. Eſt igitur oſten-

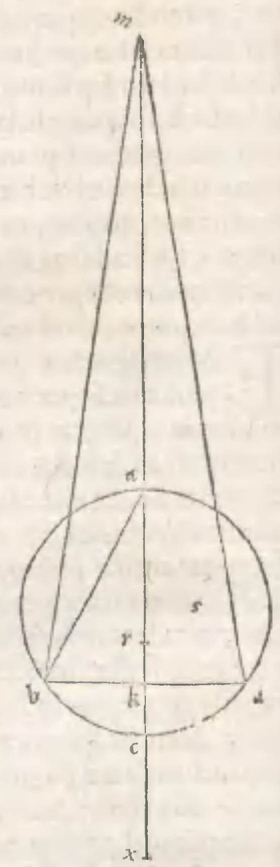
dẽdum, quod quadratum h c in h f minus producit, quàm id quod ſub b h, h c continetur, ductum in g h. quod idem eſt ac ſi demonſtremus, quòd quadratũ h c ad id quod ſub b h, h c cõtinetur, minorem habet proportionem quàm g h ad h f. Oportet itaque oſtendere, quod g h ad h f maiorem habet proportionẽ, quàm c h ad h b. Ducatur ab ipſo b perpendicularis ſuper ipſam g f, quæ ſit b d. oportet itaq; oſtendere, quòd g h ad h f maiorem proportionem habet, quàm c h ad h b. Eſt autem h f æqualis utriq; ſimul a h, k e. quare oſtẽdere oportet, quòd g h ad h f, hoc eſt ad utrãq; ſimul h a, k e maiorem habet proportionẽ, quàm c h ad h b. ſublata igitẽ c h ab ipſa g h, & ab ipſa k e ſublata e l, æquali b h oportebit oſtẽdere, quòd reliqua c g ad reliquam utramq; ſimul a h, k l maiorem habet proportionẽ, quàm c h ad h b, hoc eſt h b ad h a, hoc eſt l e ad h a. & permutatim, quòd k e ad e l maiorem habet proportionem, quàm utraque ſimul k l, h a ad h a: & diuidendo k l ad l e habet maiorem proportionem, quàm k l ad h a. quare minor eſt l e, quàm h a.



EArum ſphæræ portionum, quæ æqualibus ſuperficiebus continentur, medietas ſphæræ maxima exiſtit. Eſto maximus in ſphæra circulus a b c d, cuius diameter a c. Et eſto alia ſphæra, cuius maximus circulus e f g h: eius diameter e g. & ſecentur ambæ plano, altera per centrum ducto, altera non per centrum ducto. & ſint plana ſecantia erecta ſuper diametros a c, e g: & ſectæ ſint ſecundum lineas d b, f h. Eſt igitur portio ſub f e h ſuperficie cõtenta, dimidia ſphęra: portionũ uero quæ ſecundum b a d circumferentiam habentur in alia figura, ad a punctum, altera eſt maior dimidia ſphæra, altera in alia figura minor dimidia ſphęra. Eſto aũt ſuperficies maioris portiõis unius ſphęræ ſuperficiei dimidiæ ſphęræ æqualis, quæ eſt ad circumferentiam f e h. Dico igitur, quod maior eſt dimidia ſphæra, quæ eſt ad circumferentiam f e h, quàm portio quæ eſt ſecundum b a d circumferentiam. Quoniam igitur ſuperficies dictarum portionũ poſitæ ſunt æquales, manifeſtũ eſt quod b a linea recta eſt æqualis e f rectæ. nam oſtenſum eſt, quod cuiuſcunq; portionis ſphæræ ſuperficies æqualis ſit circulo, cuius ſemidiametros ſit æqualis lineę rectæ, ductæ à uertice portionis ad circumferentiam circuli, qui eſt baſis portionis. Et quoniam b a d circumferentia maior eſt dimidio circulo in altera figura, in qua eſt s punctum: manifeſtum igitur eſt, quod b a minor eſt quàm dupla in potẽtia ipſius a k, ſemidiametro autem maior quàm dupla in potentia. Eſto etiam quòd c x ſit æqualis ſemidiametro circuli a b d, & quã pro



portionem habet c x ad c k, hanc habeat m a ad a k. A' circulo uero circa diametrum b d descripto, erigatur conus, cuius uertex m punctum. conus igitur iste æquatur portioni sphæræ, quæ est ad circumferentiam b a d. Esto ipsi e l æqualis ipsa e n, & à circulo circa diametrum h f constituto erigatur conus, cuius uertex sit punctum n. & iste quoq; æqualis est dimidiæ sphæræ, quæ est secundum h e f circumferentiam. id autem quod continetur sub a r, r c, maius est contento sub a k, k c: propterea quod habet latus minus suum minore latere alterius maius. quadrato uero a r æquatur id quod continetur sub a k, c x. nam dimidium est quadrati a b. igitur utrumq; simul est maius utroq; simul. Quod igitur continetur sub c a, a r, maius est contento sub x k, k a. Ei uero quod continetur sub x k, k a, æquatur id quod continetur sub m k, k c. quare quod continetur sub c a, a r, maius est eo quod continetur sub m k, k c. quare maiorem habet proportionem c a ad k c, quàm m k ad a r. quam uero proportionem habet a c ad k c, eâdem quadratum a b ad quadratum b k. Manifestum igitur, quod dimidium quadrati a b, quod est æquale quadrato a r, ad quadratum b k maiorem habet, quàm m k ad duplam ipsius a r, quæ æquatur lineæ l n. maiorem ergo proportionem habet circulus circa diametrum h f constitutus, ad circulum circa diametrum b d descriptum, quàm m k ad l n. quare minor est conus, qui basem habet circulum circa diametrum h f constantem, uerticem uero n punctum, eo cono qui habet basem circulum circa b d constitutum, uerticem autem m punctum. Vnde manifestum quoque, dimidiam sphæram, quæ secundum e f h circumferentiam constat, maiorem esse portione, quæ secundum b a d circumferentiam posita est.

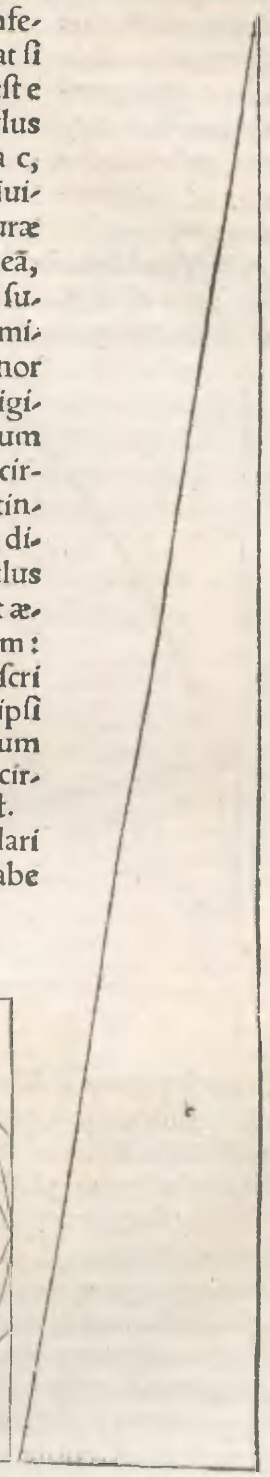


ARCHIMEDIS DE SPHAERA ET Cylindro Libri secundi Finis.

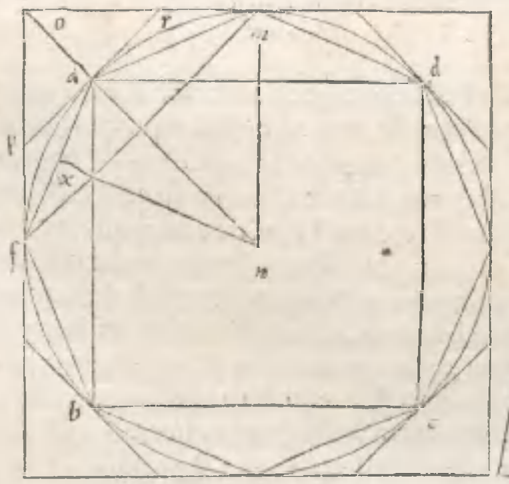
ARCHI-

ARCHIMEDIS CIRCVLI DIMENSIO.

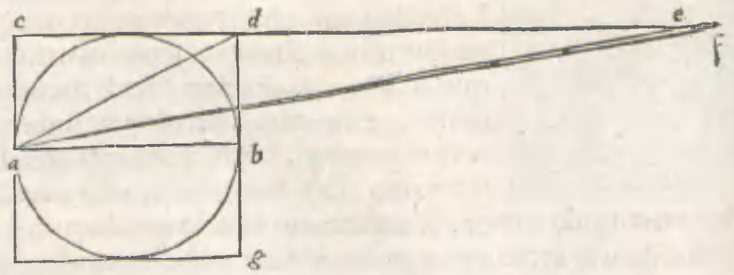
QVILIBET circulus triangulo rectangulo æqualis est, illi uidelicet cuius latus alterum eorum quæ rectum angulum ambiunt, sit dicti circuli semidiametro æqualis, alterum eiusdem circuli circumferentiæ. Esto a b c d circulus, sic habeat sicut proponitur. Dico, quod æqualis est e triangulo. Et si fieri potest, esto circulus dicto triangulo maior, & inscribatur circulo quadratum a c, & diuidantur arcus per æqualia, ducanturq; ad puncta diuisionum lineæ rectæ, fiantq; hoc modo intra circulum figuræ rectilineę, donec inciderimus in aliquam figuram rectilineā, quæ sit maior dicto triangulo: & ponatur centrum n. & sit super unum latus figuræ perpendicularis n x. igitur n x est minor latere trianguli. Est etiam linea claudens figuram, minor reliqua trianguli linea, cum sit minor circuli limbo. Dicta igitur figura minor est dicto triangulo: quod quidem absurdum est. Esto item si fieri potest, sit triangulo circulus minor, & circulo circumscribatur quadratum, & arcus inter puncta cōtingentiæ circuli interclusi in æqua diuidantur, & per puncta diuisionum ducantur lineę contingentes. rectus igitur angulus à lineis o a r ambitur, quare o r erit maior r m. nã r m, r a sunt æquales, & triãgulus r o p est maior figura o f a m q̃ dimidium: quare & maior dimidio eius partis quadrati circulo circumscripti, quæ est ex parte o. Sumptæ sint itaq; portiones similes ipsi p f a, quæ sint minores eo, quo triangulus e superat circulum a b c d: atque idcirco ipsa quoque figura rectilinea circulo circumscripta, minor erit triangulo e. quod item absurdum est. nam maior esse probatur: quia n a æqualis est perpendiculari trianguli, limbus uero dictæ figuræ base trianguli maior habetur. quare circulus dicto triangulo erit necessariò æqualis.



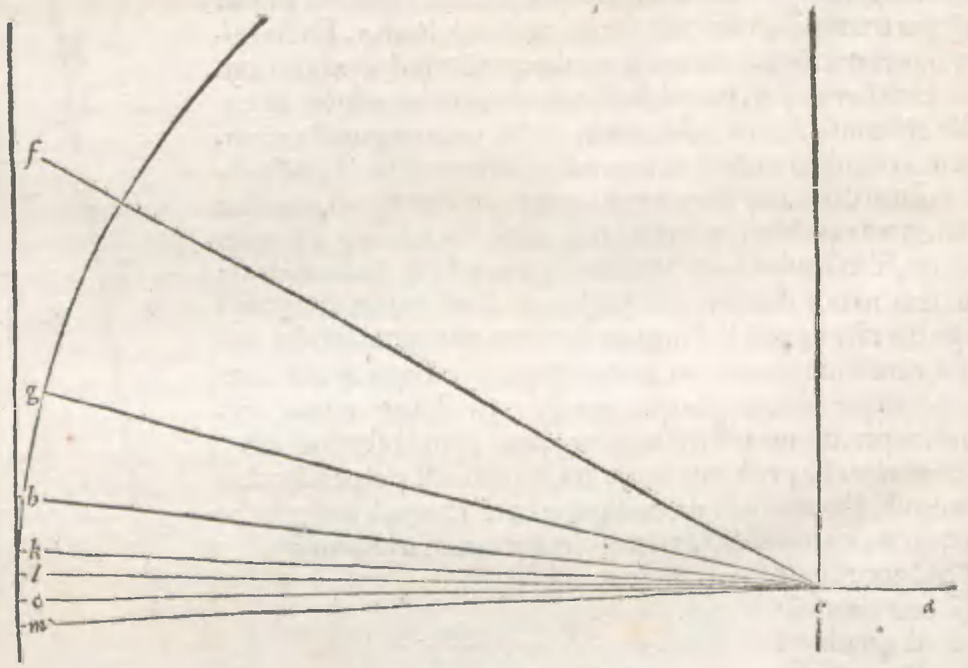
PRoportio circuli cuiuscūque ad quadratū suæ diametri est, sicut undecim ad quatuordecim. Esto circulus, cuius diametrus a b & circumscribatur ei quadratum c g: & ipsa c d dupla sit d e: ipsius etiam c d, sit e f pars septima. Quoniam igitur c e ad c d eam habet proportionē, quam uicenum primum ad septenum tenet: i c d uero ad e f etiam, quam septenum



num ad unum. c f igitur ad c d, uti uicenū ſecundum ad ſeptenum habebit. Verum ipſius a c d trianguli quadruplum eſt c g. quadratum & triangulus a c d f eſt ipſi circulo æqualis, cum c d perpendicularis ſit ſemidiametro æqualis, & baſis diametro ſit tripla, & propè ſeſquiſeptima, uti oſtendetur. Circulus igitur ad quadratum c g proportionem habet eam, quam undenus ad quatuordenum.



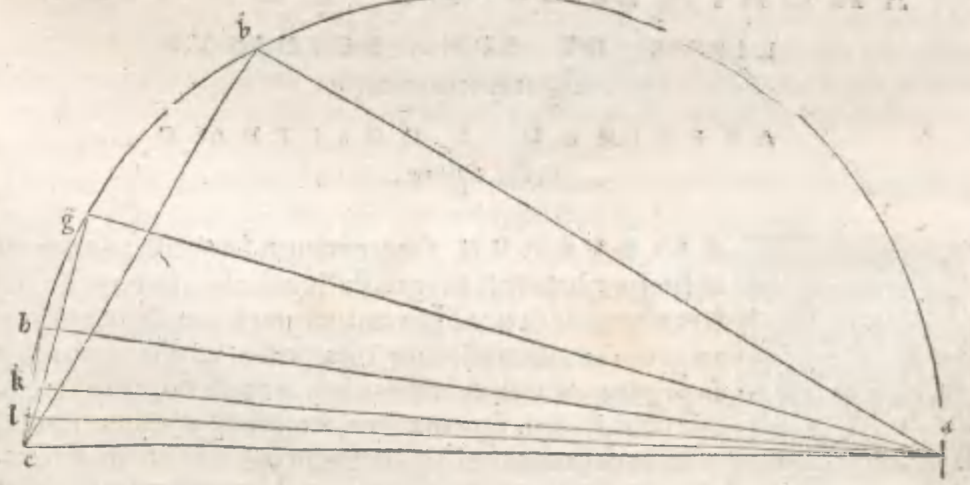
3 CViuslibet circuli circumferētia ſuæ diametri eſt tripla, & plus parte, quæ minor eſt ſeptima, & maior decem ſeptuagenis primis. Eſto circulus, cuius diametrus a c, centrū e, & c l f circulum cōtingens, angulus qui ſub f e c cōtinetur,



ſit tertia pars recti: & e f ad f c eam proportionē habeat, quam trecenti ſeni ad centum quinquagenos trinos. f c uero ad c e habet proportionem, quam ducenti ſexageniquini ad centū quinquagenos trinos. Diuidat̃ itaq; angulus f e c, in æqualia, ducta linea e g. Eſt igitur ſicut f e ad e c, ita f g ad g c: & permutatim, & componendo, ſicut utraq; ſimul f e, e c ad f c, ita e c ad c g. quare e c ad c g maiorem habet proportionem, quàm quingenti ſeptuageniprimi ad centum quinquagenos trinos. e g ergo ad g c eam potentia proportionem habet, quam trecenta ſex & uiginti milia unū & quadraginta, ad tria & uiginti milia quadringenta & nouem. longitudine uero ſicut quingenta unum & ſeptuaginta ad centum tria & quinquaginta. Rurſus ſecetur in duo æqualia angulus g e c, ducta linea e h. Eadem itaq; ratione e c ad c h maiorem habet proportionem, quàm mille centum duo & ſexaginta ad centum tria & quinquaginta. Igitur h e ad h c maiorem habet proportionem, quàm mille centū ſeptuaginta duo ad centum tria & quinquaginta. Item in duo æqua diuidatur angulus h e c, ducta linea e k. igit̃ e c ad c k maiorē habet

habet proportionē, quàm duo milia trecenta quatuor & triginta & quarta ad centum tria & quinquaginta. ergo e k ad c k maiorem habet, quàm duo milia trecenta nouem & triginta & quarta ad centum tria & quinquaginta. Item in duo æqua diuidatur angulus k e c, ducta linea e l. igitur e c ad l c habet maiorem proportionē, quàm quatuor milia quadringenta tria & ſeptuaginta, ad centum tria & quinquaginta. Quoniam igitur angulus f e g, cum ſit tertia pars anguli recti, quater diuiſus eſt in æqualia, erit angulus l e c anguli recti pars quadrageſimaoctaua. Ponatur itaq; ipſi angulo l e c æqualis angulus c e m. Angulus ergo l e m erit recti pars uigeſimaquarta, quare linea l m eſt latus figuræ multorum angulorum circa circulum deſcriptæ, quæ ſex & nonaginta lateribus concluditur. Cum igitur ſit oſtenſum, e c habere ad c l maiorem proportionem, quàm quatuor milia ſexcēta tria & ſeptuaginta & ſemis, ad centum tria & quinquaginta. Sed et ipſius e c dupla eſt a c, ipſius uero l c dupla eſt l m. habebit ergo a c, ad limbum ipſius figuræ ſex & nonaginta laterum, proportionem maiorem, quàm quatuor milia ſexcenta tria & ſeptuaginta & ſemis, ad quatuordecim milia ſexcenta & octo & octuaginta. & eſt tripla, & inſuper habens ſexcentas ſeptem & ſexaginta partes & ſemis, ipſorum quatuor milium ſexcentorum trium & ſeptuaginta & ſemis: quæ quidem ſunt dicti numeri minus ſeptima parte. quare figuræ multorum angulorum circulo circumſcriptæ, latera ſimul iuncta diametro circuli ſunt tripla, & inſuper partem parte ſeptima diametri minorem habent. Quare multo magis limbus circuli cum ſit diametro ſua plus quàm triplus, minorem tum parte ſeptima ſuper triplicatam diametrum addet.

Eſto item circulus, cuius diametrus a c, angulus uero b a c, ſit tertia pars anguli recti. Igitur a b ad b c minorem habet proportionem, quàm trecenta quatuor



& quinquaginta ad ſeptingenta octuaginta. a c uero ad c b habet eam quam mille quingenta ſexaginta ad ſeptingenta octuaginta. Secetur in duo æqua b a g, ſit æqualis angulo g c b: ſed et angulo g a c, & angulus g c b æqualis angulo g a c. & communis eſt angulus rectus a g c, & tertius angulus g f c erit tertio angulo a c g æqualis. quare triangulus a g c eſt æquiangulus triangulo c g f. erit ergo ſicut a g ad g c, ſic g c ad g f, & ita a c ad c f. Verum ſicut a c ad c f, ita & utraq; ſimul c a, a b ad b c. & ſicut utraq; ſimul c a, a b ad b c, ſic a g ad g c. Propter hoc itaque a g, ad g c minorem habet proportionem, quàm duo milia nongenta undecim ad ſeptingēta octuaginta, uerum a c ad c g minorem habet proportionem, quàm tria milia tredecim ad septingenta octuaginta. Diuidatur item in duo æqua angulus c a g, ducta linea a h. igitur a h ad h c eadem ratione minorē proportionē habet quàm quinque milia trecenta quatuor & uiginti & quinta & quarta ad septingenta octuaginta, uel quam mille octingenta quatuor & uiginti ad ducenta quinquaginta. nam utraq; utrinq; quare a c ad c h minor, quàm mille octingenta octo & triginta & nona ad ducenta quadraginta. Item angulus h a c in duo æqua diuidatur

Item k a c angulus diuidatur per lineam a l: ergo a l ad l c minorem habet proportionē quàm duo milia sedecim & sexta ad sex & sexaginta. ipsa uero a c ad c l minorem quàm duo milia decem & septem & quarta, ad centum & sex & sexaginta. Conuersim uero limbus figuræ multorum angulorum ad diametrum maiorem habet proportionem, quàm sex milia trecenta & unū & sexta ad duo milia decem & septem & quartam. Sunt illa duobus milib. decem & septē & quarta maiora, q̃ tripla super decies partientia septuagesimas primas. igitur limbus figuræ sex & nonaginta lateribus conclusæ circulo inscriptæ, maior est diametro circuli, quàm tripla super decies partiens septuagesimas primas. quare multo magis circumferentia circuli maior erit sua diametro, quàm tripla super decies partiens septuagesimas primas. Vnde colligitur, circuli circumferentiam sua diametro maiorem esse quàm triplam sesquioctauā, minorē uero quàm triplā sesquiseptimā.

ARCHIMEDIS DE CIRCVLI DImensione Finis.

ARCHIMEDIS DE CONOIDALIBVS ET SPHÆROIDIBVS figuris inuenta.

ARCHIMEDES DOSITHÆO recte agere.

RELIQVORVM theorematum demonstrationes, quas in his quæ superius ad te missa sunt uoluminibus, nō habebas, tibi nunc in hoc libro conscriptas mitto. Nonnullas prę terea quorundam aliorum, quæ postea sunt inuenta. quæ cū sæpe prius in manus adduxissem, tentassemq; inspicere & cōtemplari, ueritus sum maxime, ne difficilem admodum & penitus indeprehensibilem haberent explicationem. Atque idcirco cum cæteris tibi data non fuerunt ipsa proposita. Verum posteaquam ea diligentiori studio inuestigare cœpissem, quæ prius dubia & perobscura uidebantur, omnia cōpræhendi. Erant autem reliqua quidem priorum theorematum de rectangula figura conoidali proposita. Quę uero nuperrime sunt inuēta circa obtusianguli figuram conoidalem, & etiam sphæroidas figuras uersantur: quarum quasdam oblongas, quasdam prolatas libet appellare. De rectangulo itaq; conoidali hæc subiecta fuerant.

Si rectanguli coni sectio quiescente diametro circumferatur, donec in eū unde duci cœperat locum redierit figura, quæ à rectanguli coni sectione cōpræhendetur, conoidale rectangulum uolumus appellari, & eius axem diametrum quiescentem, uerticem uero punctū in quo superficiei conoidalis axis applicatur.

Item si conoidalem figuram rectangulam planum contingat, ipsi uero contingenti alterum planum æquedistanter ductum aliquam conoidalis portionē abscindat, ipsius portionis basim uocari planū, quod ab ipsa conoidalis sectione in abscindendo comprehensum sit: uerticem uero, punctū illud in quo alterum planum conoidale contingit. axem aūt lineam rectam, quæ inter portionem depræhendit à linea recta, quæ à uertice portionis ducta, sit axi conoidalis æquedistās.

Hæc autem proponebantur consideranda & inspicienda. Cur fiat, quod si conoidalis rectanguli sectio secetur à plano super axem erecto, portio abscisa erit sequialtera cono qui habet basem cum portione eandem, & axem eundem. Rursus quare est, si à conoidali rectangulo duæ portiones à planis utrinq; ductis abscindantur, portiones abscisæ habent inter se, eam quæ est suorum axiū, proportionem duplicatam.

Circa uero obtusianguli conoidale hæc supposita uolumus. Si in eodem plano sit obtusianguli coni sectio, & eius diametrus & lineæ, quæ sint proximę dicti coni portioni, & quiescente diametro uertatur planum donec redeat ad locum unde cœpit moueri, in quo scilicet plano dictę lineæ existunt, lineæ rectæ quæ sectioni coni obtusianguli proximę sunt, palàm est quod conum compræhendent æquicrurem, cuius uertex punctum erit in quod lineæ quæ proximę sunt cōcurrunt. axis uero diametros immota. Figura uero sub sectione coni obtusianguli compræhensa, conoidale obtusiangulum appelletur. axem autem eius diametrum immotam: uerticem uero, punctum in quo axis superficiei conoidalis applicatur. Conum aūt compræhensum à lineis sectioni coni obtusianguli proximis complectentem conoidale uocari. Lineam uero rectam, quæ intermedia capitur inter uerticem conoidalis & uerticem coni complectentis conoidale, adiectam axi dici. Et si obtusianguli conoidale planum contingat, ipsi autem contingenti alterum planum æquedistanter ducatur, quod abscindat à conoidali portionem, basem abscisę portionis uocari planum quod sit à sectione conoidalis in secando compræhensum. uerticem autem, punctum in quo planum contingit conoidale. axem uero, lineam intra portionem compræhensam, à linea ducta per uerticē portionis & uerticem coni complectentis conoidale, & quæ dictis uerticibus intermedia habetur rectam lineam ad axem adiectam uocari.

Omnia uero conoidalia rectangula sunt similia. Eorum autem quæ sunt obtusianguli, similia dicantur illa, quæ à conis similibus sunt compræhensa.

Hæc autem inspicienda proponuntur. Quare est, si à conoidali obtusianguli portio abscindatur plano super ipsius axem erecto, portio abscisa ad conū eandem basem cum portione & eundem axem habentem, habet eam proportionē quam habet utraq; simul linea, & ea quæ æquatur axi portionis, & ea quæ tripla est lineę axi adiectæ, ad lineā æqualem his duab. simul, axi portionis, & lineę quę dupla sit lineæ axi adiectæ.

Item quare est, si à cono anguli obtusi portio abscindatur plano non erecto super axem, portio inde abscisa ad figuram, quæ basim habeat eandem, & axem eūdem portioni, quæ figura sit sectio coni, eam habet proportionem, quam utraq; simul linea quæ axi portionis sit æqualis: & linea quæ tripla sit lineæ axi adiectæ ad lineam æqualem istis utrisq;, uidelicet axi portionis, & lineæ duplæ ad lineam axi adiectam.

At uero circa sphæroidas figuras subiecimus ista.

Si sectio coni anguli acuti, quiescente eius maiore diametro circumferatur, donec redeat in eum locum unde moueri cœpit, figuram inde compræhensam à sectione coni anguli acuti, sphæroides oblongum appellari. Si autem minori diametro quiescente circūferatur, item donec ad locum unde cœpta est moueri portio coni acuti anguli redeat, figuram inde à sectione coni anguli acuti compræhē ſam ſphæroides prolatum uocari. Vtriuſq; autem ſphæroidis axem dici diametrum quieſcentem : uerticem uero punctum illud in quo axis applicatur ſuperficiei ſphæroidis. Centrum uero punctum axis medium : diametrum uero lineam à centro eductam perpendiculariter ipſi axi.

Si ſphæroidas figuras utcunq; plana contingant æquediſtantia, & figuras nõ ſecantia: ipſis autem, ut dictum eſt, contingentibus alterum planum æquediſtanter agatur, diuidatq; dictas figuras ſphæroidas, portionum inde naſcentium baſem quidem uocari, id plani quod compræhenſum eſt à ſphæroidis ſectione in diuidente plano: uertices uero, puncta in quibus plana æquediſtantia contingunt ſphæroides. axes autem lineas rectas, in portionibus comprehenſas ex recta linea, quæ uertices earum iungit. Quòd aũt plana contingentia in uno ſolum puncto contingant ſphæroidis ſuperficiem, quodq; linea recta contactus coniũgens per centrum ſphæroidis tranſeat, in ſequentibus oſtendemus. Similes autem figuras ſphæroidas dici, quarum axes ad diametros eandem habent proportionẽ.

Portiones autem ſphæroidum & conoidalium figurarum ſimiles illę dicãtur, quæ à ſimilibus figuris ſint abſciſæ, quæq; baſes ſimiles habeãt, & axes earum aut erecti ſint ſuper planas baſium ſuperficies, aut angulos æquales habeant ad diametros baſium (correlatiuas) conſimiles, proportionemq; teneant ad diametros baſium conſimiles eandem.

Proponuntur autem hæc circa ſphæroidas figuras conſideranda : Cur fiat, ſi figurarum ſphæroidum aliqua ſecetur plano per eius centrum tranſeunte, & ſuper axem erecto, portionum inde productarum utraq; dupla ſit cono ſuo, eãdem baſim & axem eundem cum portione habenti. Si autem plano ſecetur non ſuper axem erecto, & per centrum tranſeunte: earum quæ inde reſultant portionũ, maior quidem ad conum eãdem baſim, & eundem cum portione axem habentem, habebit eandem proportionem, quam habet linea, quę ſit æqualis utriſque ſimul iſtis, dimidio axis ſphæroidis, & axi minoris portionis, ad axem minoris portiõis. Minor autem portio ad conum, qui eandem baſem & axem eundem cum portione habuerit, eam tenet proportionem, quam linea æqualis utriſq; ſimul iſtis, dimidio axis ſphęroidis, & axi maioris portionis habet, ad axem portionis maioris.

Item quare fit, ſi qua figurarum ſphæroidum plano ſecetur, tranſeunte per cẽtrum non erecto ſuper axem, utraque portionum inde naſcentium dupla erit figuræ, quæ baſim eandem, & axem habeat cum portione eundem : ſit autem ipſa figura abſciſor coni.

Item ſi neq; per centrum, neq; erecto ſuper axem plano, ſphæroides ſecetur, portionum inde factarum maior ad figuram eandem baſim, & eundem cum portione axem habentem, tenebit eam proportionem, quam linea æqualis utriſque ſimul iſtis dimidiæ li neæ, quæ utriuſq; portionis uertices iungit, & axi portionis minoris habet ad axem portionis minoris. Minor autem portio ad figuram eandem baſem & axem habentem cum portione eundem, habebit eam proportionem, quam linea æqualis utriſque ſimul iſtis dimidiæ lineæ, quæ utriuſque portionis uertices iungit, & axi maioris portionis ad axem maioris portionis. ſit autẽ & in his figura abſciſor coni.

Iſtis itaq; quæ dicta ſunt theorematibus demonſtratis, per hæc ipſa inueniũtur multa alia theoremata, et problemata multa: quale eſt hoc quod ſequit, Quod ſphæroides figuræ ſimiles, & portiones ſphæroidum figurarum ſimiles, & ſimiliter conoidalium, habent eam quæ eſt axis ad axem proportionem triplicatam.

Item quare ſphæroidum figurarum æqualium quadrata diametrorum mutuam habent axium proportionem. & ſi figurarum ſphæroidum quadrata diametrorum mutuam habuerint axium proportionem, ſphæroides figuras illas æquales eſſe.

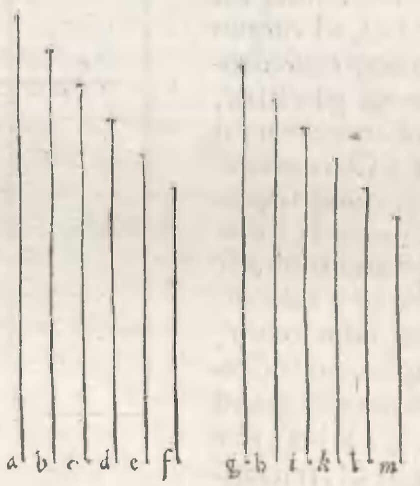
Propo

Propoſitum autem quale eſt hoc, A' data figura ſphæroidis, aut conoidalis portionem abſcindere plano, quod ſit alteri plano dato æquediſtanter ductum. Eſſe autem portionem abſciſam æqualem aut cono dato, aut cylindro, aut ſphæræ datæ. Præmittens igitur primùm & theoremata & pręcepta propoſita, quę ad illorum demonſtrationem ſunt neceſſaria, poſſea tibi ea quæ ſupra ſunt propoſita, deſcribemus feliciter.

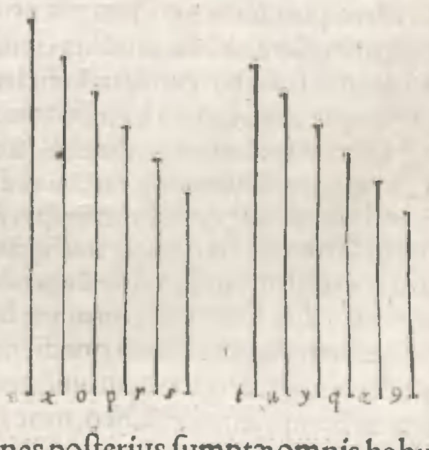
Si conus plano ſecetur omnibus lateribus ſuis coincidenti, ſectio erit aut circulus, aut coni anguli acuti ſectio. Quod ſi dicta ſectio ſit circulus, palàm eſt quod portiò ab eo uerticem uerſus compræhenſa, conus exiſtit. Si uero ſectio ſit coni anguli acuti ſectio, figura à coni ſectione dicta uerſus uerticem coni compræhenſa, abſciſor coni uocetur. Huius uero abſciſoris baſis uocetur planũ illud quod à ſectione coni acuti anguli continetur. uertex uero punctum, quod eſt & coni uertex. axis autem, linea à uertice ad centrum ſectionis coni acuti anguli ducta.

Et ſi cylindrus duobus planis æquediſtantibus ſecetur, quæ omnib. lateribus cylindri coincidant, ſectiones erunt aut circuli, aut coni acuti anguli ſectiones æquales & ſimiles inuicem. Siquidem ſectiones circuli fuerint, manifeſtũ eſt quod figura à cylindro abſciſa inter plana æquediſtantia intercepta, cylindrus exiſtit. Si uero ſectiones fuerint coni acuti anguli ſectiões, abſciſa à cylindro figura, quæ eſt inter plana æquediſtantia contenta, ſector cylindri appelletur. Ipſius autem ſectoris baſes uocentur plana comprehenſa à ſectione coni acuti anguli. axis uero linea ducta ad centra, ſectionum coni acuti anguli, Erit autem hæc ipſi axi cylindri eadem.

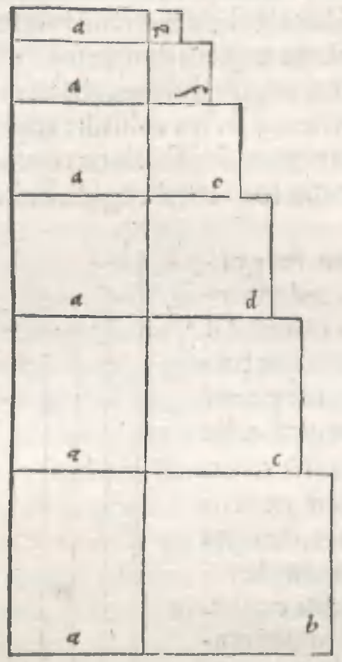
SI fuerint quotcunque numero magnitudines ſumptæ, quæ ſeſe excedant æqualiter, fueritq; earum exceſſus minime illarum æqualis, ſumantur aliæ totidem numero magnitudines omnes maximè prædictarũ æquales. iſtæ poſt ſimul ſumptæ collectæ omnis ad prius ſumptas omnis collectas minus ſunt quàm duplæ. item eædem omnis iſtæ ad illas eaſdem omnes, dempta earum maxima, plus erunt quàm duplæ. Huius aũt demonſtratio manifeſta exiſtit.

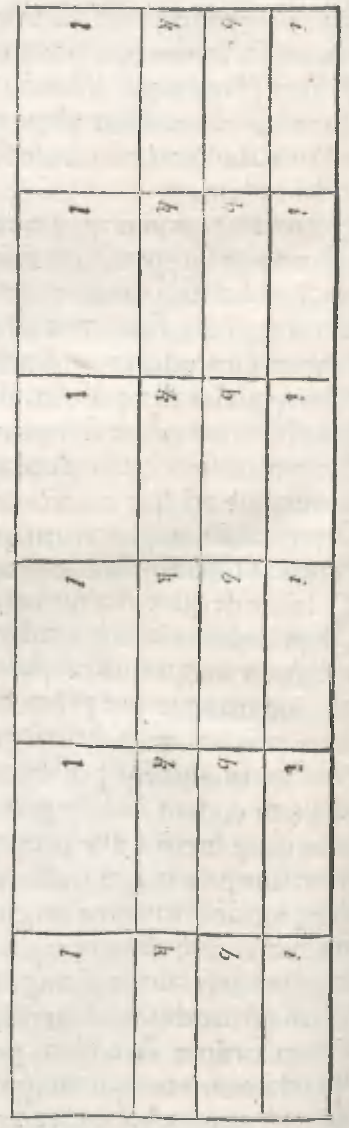


SI fuerint quotcũq; numero ſumptę magnitudines, itemq; totidem alię numero ponantur magnitudines, hoc pacto, ut quãcunque unaquaque prius ſumptarum ad ſuam proximam habuerit proportionem, eandem unaquæq; poſterius ſumptarum ad ſuam eodem ordine proximam ſeruet, quæcunq; fuerint illæ proportiones, item prius ſumptæ magnitudines ad quaſdam alias, totidem numero magnitudines omnes, aut earum aliquas, quibuſcũq; proportionibus referantur: ſumptæ quoq; poſterius magnitudines ad quaſdã alias totidẽ, eodem ordine & eiſdem proportionibus ſint relatæ: erit tunc, ut magnitudines prius ſumptæ omnes, habeant ad eas magnitudines omnes ad quas dicta ratione comparãtur, eandem proportionem, quam magnitudines poſterius ſumptæ omnis habuerint,



rint, ad omnes illas magnitudines ad quas fuerint ſimiliter comparatæ. Eſto quędam magnitudines a b c d e f, item aliæ totidē g h i k l m, ſitq; ut unaquæq; prius ſumptarum habeat ad ſuam proximam, ſicut unaquæq; poſterius ſumptarum ad ſuam proximam. Vt uidelicet a habeat ad b eandem proportionem, quam g ad h. ipſa uero b habeat ad c, ſicut h ad ipſam i, & reliquę deinceps ſimiliter. referātur autem a b c d e f magnitudines, ad alias magnitudines n x o p r s, in quibuſcūque proportionib. ipſæ uero g h i k l m ad alias, uidelicet t u y q z 9, eiſdem eodem ordine proportionibus: ut ſicut a habet ad n, ita g ad t, & ſicut b ad x, ita h ad u, & reliquæ iſtis ſimiliter. Oſtēdendū itaq; eſt, quod omnis a b c d e f, ad omnis n x o p r s eandem habent proportionem, quam habent omnes g h i k l m, ad omnes t u y q z 9. quoniam n ad a eandem habet proportionem, quam t ad g: ipſa uero a ad b, ſicut g ad h. uerum b ad x, ſicut h ad u. erit ſicut n ad x, ita t ad u. eadem ratione & x ad o, ſicut u ad y: & reliqua his ſimiliter. Habent autem omnes a b c d e f g ad a, ſicut g h i k l m ad g. uerum a ad n, ſicut g ad t. at uero n ad omnes n x o p r s, ſicut t ad omnes t u y q z 9. Manifeſtum igitur eſt, quod omnes a b c d e f, ad omnes n x o p r s: ſicut omnes g h i k l m, ad omnes t u y q z 9. Clarum autē eſt, quod ſi ipſarū a b c d e f magnitudinum, iſtę a b c d e referantur ad n x o p r, ipſa uero f nō referatur: at ipſarū g h i k l m, iſtæ g h i k l, referantur ad t u y q z ſibi correſpondentes eiſdem proportionibus, m uero nō referatur. Et ſimiliter omnis a b c d e f, ad omnes n x o p r eandem habebunt proportionē, quā omnes g h i k l m, ad omnes t u y q z.





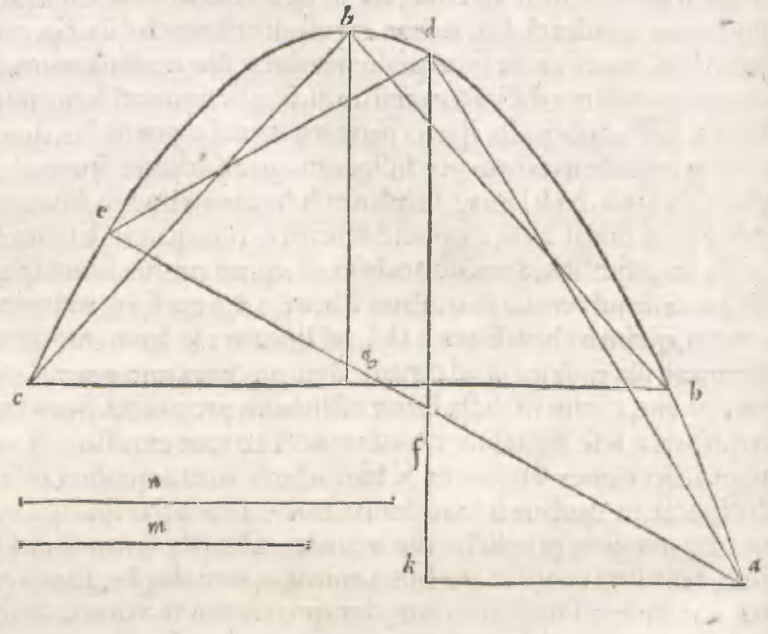
3 Si lineæ quotcunq; numero, fuerint inter ſe æquales, & unicuiq; earū accedat ſpaciū, ita quod ſpaciū ſecundæ ſuperet ſpaciū primę quadrata forma, & ſic deinceps reliqua ſe habeant, ſintq; exceſſuū latera æqualē excedētia, & hic laterū exceſſus ſit æqualis minimæ huius numeri lineæ. item ſint alia ſpacia prædictis numero æqualia, quantitate uero unumquodq; maximo prædictorum æquale. Dico, tunc hęc ſimul omnia ſpacia minorem habere proportionem ad prædicta ſimul omnia, quàm linea quæ

quæ ſit æqualis utriſque ſimul iſtis lineis, ei quæ eſt latus exceſſuum ſpaciorū maximum, & uni ex lineis æqualibus habeat ad lineam æqualem utriſq; ſimul iſtis, lineæ quæ ſit tertia pars lateris exceſſus maximi, & lineæ quæ ſit unius æqualiū dimidia. Et item hæc eadem ſpacia ad illa eadem omnia, dempto eorum maximo, maiorem habere proportionem, quàm ſit dictarum linearum proportio. Eſto lineæ rectæ quotcunque numero quantitate inter ſe æquales, in quibus a, & unicuiq; earum ſpacium accedat, ita ut creſcendo maius excedat ſibi proximum minus forma quadrata. ſint autem exceſſuum latera b c d e f g, quæ ſeſe æqualiter excedant. & exceſſus ille ſit æqualis minimæ illarum linearum, uidelicet ipſi g. ſitq; b maximum latus dictorū exceſſuum, & g ſit minimū latus minimi ſpacij ex dictis ſpacijs. Eſto quoq; alia ſpacia numero æqualia prædictis, quantitate uero unumquodq; æquale maximo prędictorum, quod adiacet lineæ a b. ſintq; hæc ſecunda ſpacia, in quib. h i k l lineę, ſitq; linea h i æqualis lineę a, linea uero k l æqualis lineę b: & utraq; ſimul h i ſit dupla ad lineam i. utraq; uero k l ſimul ſit tripla ad lineam k. His ita diſpoſitis, demōſtrandum eſt, quod omnia ſimul ſpacia in quibus h i k l, ad ſpacia ſimul omnia in quibus a b, a c, a d, a e, a f, a g minorem habent proportionem, quàm habeat linea h i k l, ad lineam i k. Item quod hæc eadē ſpacia ſimul omnia ad illa eadem ſimul omnia, dempto maximo eorum, maiorem habent proportionem, quàm ſit dicta lineæ ad lineam proportio. Sunt enim quędam ſpacia, in quibus a, ſeſe æqualiter excedentia: & eorum exceſſus eſt æqualis numero, quoniam adiectiones linearum & latitudines ſunt æqualiter ſeſe excedentes ſunt itē alia ſpacia, in quibus h i totidem numero prædictis ſpacijs, quantitate uero unūquodq; maximo prædictorum æquale. Omnia igitur ſimul in quibus h i ſpacia ſunt, omnium ſimul in quibus a, minus quàm dupla. ſunt item eadem ſimul omnia, eorundem ſimul omnium, dempto eorum maximo, pluſquam dupla. Spacia igitur omnia ſimul in quibus i, erunt omnibus ſimul in quibus a, minora: omnibus item ſimul dempto maximo, maiora erunt quàm dupla. Rurſus quædam lineæ ſunt hæ b, c, d, e, f, g: quæ ſeſe æqualiter excedunt. & ille exceſſus eſt æqualis minimæ earum. & item aliæ lineæ, in quib. k l lineis prædictis multitudine æquales, magnitudine uero unaquæq; æqualis maximæ illarum. quadrata igitur ſimul omnia linearum ſecundarum inter ſe, & lineæ prioris ordinis maximę æqualium ſunt minus quàm tripla ad quadrata ſimul omnia, linearum prioris ordinis ſeſe æqualiter excedentium. ad quadrata uero ſimul omnia reliquarum, dempto maximæ lineæ quadrato, ſunt eadem plus quàm tripla. Hoc autem eſt oſtenſum in his quę circa lineas cocleares ſunt expoſita. Spacia igitur in quibus k, ſpacijs ſimul omnibus in quibus b c d e f g, ſunt minora: ſpacijs uero ſimul omnibus in quibus c d e f g, ſunt maiora. quare & omnia ſimul ſpacia in quib. i k, ſpacijs ſimul omnib. in quibus a b c d e f g, erūt minora. Illis aūt in quibus a c d e f g ſpacijs, ſimul omnibus maiora erunt. Patet igitur, omnia ſimul ſpacia in quib. h i k l, ad ſpacia ſimul omnia in quibus a b, a c, a d, a e, a f, a g, eſſe minora: illis uero in quibus a c, a d, a e, a f, a g ſpacijs ſimul omnibus maiora. Ex quo clarum eſt, ſpacia ſimul omnia in quibus h i k l, ad ſpacia ſimul omnia in quibus a b, a c, a d, a e, a f, a g minorē proportionem habere, quàm habeat linea h l ad lineā i k. ad reliquas uero illarū dempta a b linea, maiorem proportionem dicta proportione ſeruare. quare, &c.

Si cuiuſcunq; coni ſectionē lineę rectæ ab eodem puncto exeuntes cōtigerint, ſint autem & aliæ recte lineæ intra coni ſectionē lineis contingentib. æquediſtāter ductæ, & ſeſe inuicē ſecantes quadrāgulæ ſuperficies, quæ ſub dictarū linearū ſectionib. cōtinentur, eādē habent proportionē ad quadrata contingentiū, unaquæq; ad quadratū cōtingentis illius quæ ſibi reſpondeat, quā habet ſuperficies producta ex partib. alterius lineæ una in alterā ductis, ad quadratum cōtingentis eius quæ ſibi fuerit æquediſtās. Hoc aūt demonſtratū iam fuit in conicis elemētis.

Si

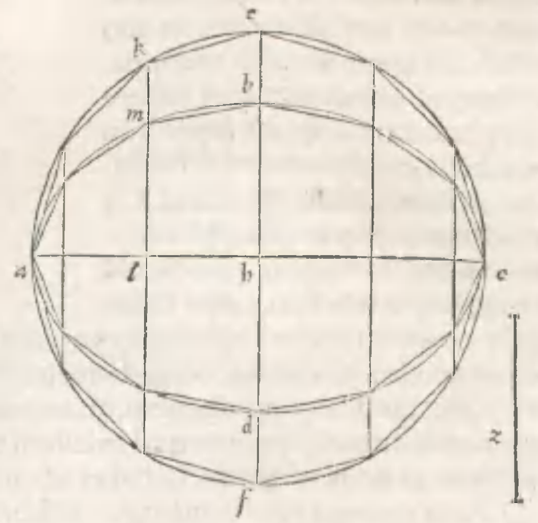
4 SI ab eadem rectanguli coni ſectione duæ portiones, utcunq; contingant, abſcindantur, quæ diametros habeant æquales, ipſæ quoq; portiones æquales erunt, & trianguli ipſis inſcripti, qui eandem cum portionibus baſim & altitudinem habuerint, erunt æquales. Diametrum autem uoco cuiuſcunq; portionis lineam rectam, quæ diuidit in duo æqua omnem lineam rectam baſi ipſius portionis æquediſtantẽ.



Eſto rectanguli coni ſectio a b c, et ab ea abſcindantur duę portiones a d e, & h b c. Eſto autem ipſius portionis a d e, diametros d f: ipſius uero h b c diametros b g, & eſto d f æqualis ipſi b g. Oſtendendum eſt, quod portiões ipſę ſunt æquales inuicem, a d e ipſi h b c. & trianguli quoque ipſis eo modo, quo dictũ eſt inſcripti, æquales inuicem. Eſto primum quæ ſcindit alteram portionem h c, ſecundum angulos rectos ad diametrum portionis coni rectanguli. ſumatur autem ea iuxta quã poſſunt illæ quæ à ſectione ducuntur dupla eius quę à ſectione ad axem ducitur, eſto illa in qua m: ducatur autem ab ipſo a perpendicularis ſuper d f, quæ ſit a k. Quoniam igitur d f eſt diametros portionis, & a e in duo æqua diuiditur in puncto f, & d f eſt æquediſtans diametro ſectionis coni rectanguli: ſic enim in duo diuidit omnes æquediſtãter ipſi a e ductas. quam itaq; proportionem habet quadratum a f ad quadratum a k, eandem habeat m ad n. quæ autem à ſectione ad ipſam d f ducuntur æquediſtanter ipſi a e poſſunt ea ſpacia, quæ lineæ ipſi n æquali adiaceant, latitudinem habentia lineam illam, quam illæ ductæ æquediſtanter ipſi a e ex d f diametro incidunt uerſus d terminum ſumptam. Nam hoc eſt oſtenſum in conicis. Igitur a f ualet tantum, quantum continetur ſub n & d f. poteſt autem & h g æquale ei quod continetur ſub m & b g, cum h g ſit perpendicularis ſuper diametrum, & quadratum a f ad quadratum h g habeat eandem proportionem quam m habet ad n, quia d f & b g ſunt poſitæ æquales. habet autem quadratum a f ad quadratum a k eandem proportionem, quam habet m ad n, erunt igitur h g & a k æquales. ſunt autem & b g, & d f ęquales: quare id quod fit ex h g in b g, æquatur ei quod fit ex a k in d f. æqualis eſt igitur triangulus h g b triangulo d a f, quare & eorum dupla æqualia ſunt. Portio autem a d e, eſt ſeſquitertia trianguli a d e: trianguli uero h b c, ſimiliter ſeſquitertia eſt portio h b c: quare patet, portiones & triangulos ipſis portionibus inſcriptos inter ſe eſſe æquales. Si uero neutra earum quæ diuidunt portiones linearum fuerit ad ipſam ſectionis diametrum ſecundum angulos rectos, ducta ex diametro ſectionis coni rectanguli uerſus eam partẽ à qua diametros ſectionis ab ipſa ſectione exierit, ſumatẽ pars quæ ſit æqualis diametro portionis unius, & à puncto huius ſumptæ extremo ducatẽ in utramq; partem ſecundũ angulos rectos linea recta, quæ abſcindit portionem

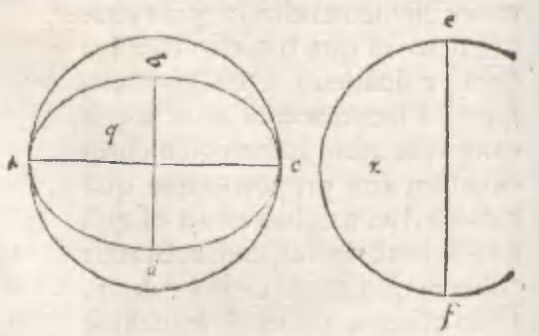
utriq; prædictarum æqualem, ut ſuprà oſtenſum eſt. quare conſtat propoſitũ.

OMne ſpacium quod comprænhenditur à ſectione coni acutianguli ad circulum, qui habeat diametrum æqualem maiori diametro ſectionis coni acutianguli, habet eam proportionem quam minor ſectionis diametros habet ad maiorem, quæ eſt circuli diametros. Eſto coni acutianguli ſectio, in qua a b c d. eius 5

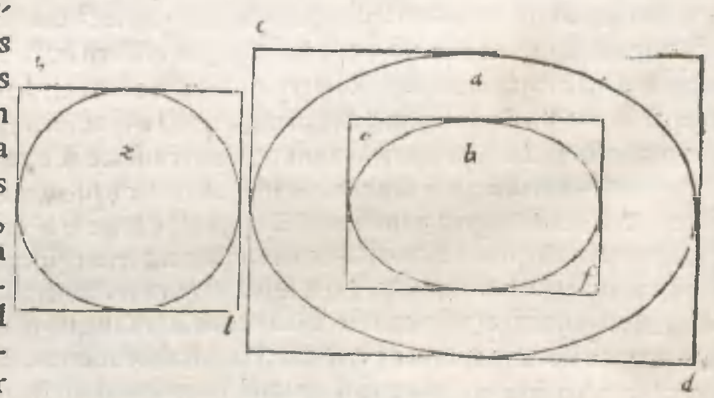


maior diametros eſto, in qua a c: minor uero, in qua b d. eſto circulus circa a c diametrũ. Oſtẽdendũ eſt, ſpaciũ à ſectione coni acutianguli compręhenſum, habere ad dictum circulum eam proportionem, quã habet b d ad a c: hoc eſt ad e f. quã itaq; habet b d ad e f, eam habeat circulus in quo z ad a e c f circulum. Dico quod circulus z eſt æqualis ſectioni coni acutianguli. Si enim circulus z non dicatẽ ęqualis ſpacio cõprehẽſo a ſectione coni acutiãguli, eſto primũ ſi fieri poteſt maior. poteſt itaq; in circulo z figura multorum angulorum & numero pariũ inſcribi, quæ ſit maior dicto ſpacio a b c d. intelligatur ergo inſcripta, & inſcribatur circulo a e c f figura ſimilis inſcriptæ circulo z, & ab eius angulis ducantur perpendiculares ſuper a c diametrum: in quibus uero punctis perpendiculares ſcindunt ſectionem coni acutianguli, ea puncta lineis rectis iungantur. eritq; iam quædam figura in ipſa cóni acutianguli ſectione inſcripta, quę figura ad rectilineam figuram circulo a e c f inſcriptam, eãdem habebit proportionem, quã habet b d ad e f. quoniam e h, k l perpendiculares in eandem proportionem diuiduntur ſecundum m b: manifeſtum eſt, quod l e ſpacium tabulare, ad h m habet eam quam h e ad b h proportionem, eadem ratione & cætera ſpacia tabularia, unumquodq; eorum quæ ſunt in circulo, ad unumquodq; eorum quæ ſunt in ſectione coni acutianguli, eam habebit quæ eſt e h ad b h proportionem: habent quoq; trianguli qui ad a c exiſtunt, in circulo ad triangulos in ſectione coni acutianguli proportionem eandẽ. Tota igitur figura rectilinea circulo inſcripta a e c f, ad totam figuram rectilineam ſectioni coni acutianguli inſcriptam, habebit eandem proportionem quam e f habet ad b d. habet autem eadem ipſa figura rectilinea ad rectilineam circulo z inſcriptam, hanc eandem proportionem, quoniam circuli eandem proportionem inter ſe retinebant. Igitur rectilinea circulo z inſcripta, eſt æqualis rectilineæ ſectioni coni acutianguli inſcriptæ: quod quidẽ eſſe non poteſt. nã maior erat toto ſpacio à ſectione coni anguli acuti cõpræhenſo. Sed eſto item ſi fieri poteſt minor. Rurſus poteſt in ſectione coni acutianguli inſcribi figura paribus contenta lateribus, quæ maior ſit circulo z. Eſto igitur inſcripta, & ab angulis eius perpendiculares ducantur ad a c, & educãtur ad circuli circumferentiam. Rurſus igitur erit, ut rectilinea circulo a e inſcripta, ad rectilineã ſectioni coni acutianguli inſcriptam, habeat eam proportionẽ, quam e f ad b d. ſi itaq; circulo z inſcribatur ſimilis illi, oſtendetur eam quæ in circulo z eſt inſcripta, æqualem illi eſſe quæ ſectioni coni acutianguli eſt inſcripta: quod ſanè eſſe non poteſt. Circulus igitur z neq; minor eſt ſpacio à ſectione coni acutianguli compræhenſo. Manifeſtum eſt igitur, quod dictum ſpacium habet ad a e c f circulum eandem proportionem, quam habet b d ad e f.

6 QVodlibet ſpacium à coni acutianguli ſectione compræhenſum, ad quemcunq; circulum comparetur, eam habet proportionem, quam ſuperficies ex utriſque eius ſectionis diametris producta habere percipitur, ad quadratum diametri eius circuli ad quem fuerit comparatū. Eſto ſpacium à coni acutianguli ſectione comprehenſum, in quo q. eius ſectionis diametri ſint a c, b d maior autem a c: & eſto circulus in quo z, eius autē diametros in quo eſt e f. Eſt igitur demōſtrandū, ſpacium q ad circulum z eam habere proportionem, quam ſuperficies producta ex a c diametro in b d habet, ad quadratum diametri e f. Circūſcribatur itaq; circulus ipſi a c diametro. Spacium igitur q, ad circulū cuius diametros eſt a c, eam habet proportionem, quam ſuperficies ex a c in b d producta habet, ad quadratum diametri a c. circulus quoque cuius diametros eſt a c, ad circulum cuius diametros eſt e f, habet eandem proportionem, quam habet quadratū a c ad quadratum e f. Ergo manifeſtum eſt, ſpacium q ad circulum z eam proportionem habere, quam ſuperficies ex a c in a d producta, habet ad quadratum e f.



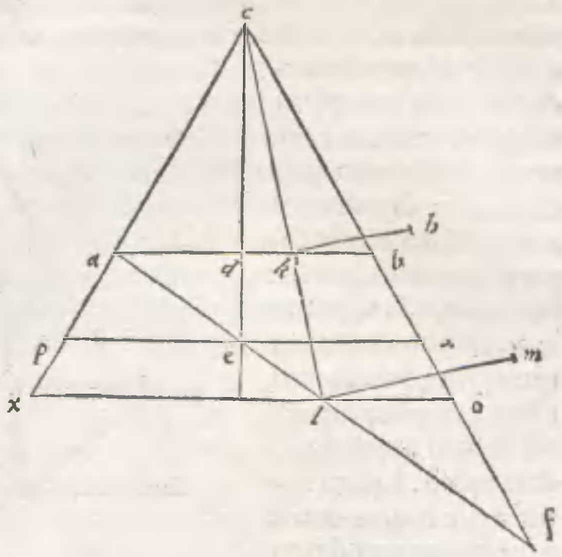
7 SPacia quæq; à coni acutianguli ſectione comprætenſa, ad alia quæq; ſpacia quæ à coni acutianguli ſectione compræhendantur comparata, eandem proportionem habere probantur, quam ſuperficies ex iſtorum diametris productæ, ad ſuperficies ex illorum diametris productas habuerit. Eſto ſpacia à coni acutianguli ſectione cōpræhenſa, in quibus a b: eſto etiam c d ſuperficies producta ex diametris ſectionis a. eſto item e f ſuperficies producta ex diametris ſectionis b. Eſt itaq; declarandū, ſpacium a ad ſpacium b, eandem proportionem habere, quam c d habuerit ad e f. Sumatur itaque quiſpiam circulus in quo z, quadratum diametri illius eſto k l: habet itaq; a ſpacium ad circulum z eandem proportionem, quam c d ad k l: circulus autem z ad b ſpacium eandem habet proportionem, quam k l ad e f. Manifeſtum eſt igitur, a ſpacium habere ad b ſpacium eā, quam c d ad e f habuerit proportionem. Ex hoc igitur manifeſtum eſt, quod ſpacia à ſimilibus ſectionibus coni acutianguli compræhenſa, eam inter ſe proportionem ſeruabunt, quam ſectionum diametri, quæ rationis eiuſdem fuerint, potentia inuicem retinebunt.



8 DAta coni acutianguli ſectione, & ab eius centro recta linea ſuper plano in quo dicta ſectio exiſtit, perpendiculariter erecta, fieri poteſt, ut conus quidā deprehendatur, qui uerticem habeat erectæ lineæ terminum, in cuius coni ſuperficie data coni ſectio compræhendatur. Detur aliqua coni acutianguli ſectio, & de eius centro recta linea ſuper planum perpendiculariter erigatur, in quo data ſe-

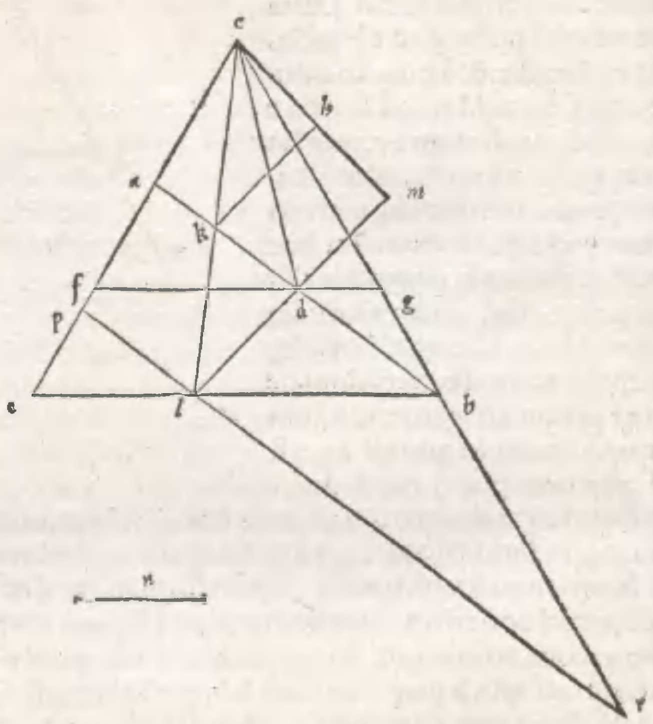
ctio

ctio continetur: per minorem uero diametrum & lineam erectam planum educatur, & ſit in ipſo minor diametros a b: centrum uero datæ ſectionis d, linea à cētro erecta c d, eius terminus c. ſectio autem coni acutianguli intelligatur circa diametrum a b deſcripta, in plano erecto a d, c d. Oportet itaq; conum inuenire, qui uerticem habeat punctum c, in cuius ſuperficie ſit coni acutianguli ſectio. Ducatur autem à pūcto c ad a b recta, quæ educatur: & à puncto a ducatur a f, ita ut id quod fit ex a e in e f, ad quadratum e c, eam habeat proportionem, quam habet quadratum dimidię maioris diametri ad quadratum d c. hoc enim fieri poteſt, cum maior ſit proportio iſta, quàm ea quam habet id quod fit ex a d in d b, ad quadratum d c. Secūdum uero a f planum erigatur, erectum ſuper planum in quo eſt a c, a f. in quo item plano circulus deſcribatur circa diametrum a f, & ab hoc circulo conus fiat qui uerticem habeat pūctum c. in huius autem coni ſuperficie demonſtrabitur eſſe ſectio coni acutianguli. Nam ſi non fuerit, neceſſe eſt punctum aliquod eſſe in ſectione coni acutianguli, quod non erit in ſuperficie coni. intelligatur itaq; punctum quoddam in ſectione coni acutianguli ſumptum, quod ſit h, quod non ſit in ſuperficie coni, & ducatur ab ipſo h perpēdicularis h k, erit igitur ipſa ſuper plano erecta in quo eſt a c, a f. ducta itaq; linea recta à puncto c ad k, incidet iā ipſa lineæ a f. eſto in pūcto l: et à pūcto l erigatur perpēdicularis ſuper a f, quæ ſit l m, in circulo circa a f deſcripto. intelligatur autem m eleuatum in circūferentia eius. ducatur autem et à puncto l æquediſtans ipſi a b, quæ ſit x o: à puncto autem e, ducatur p r. Quoniam igitur id quod ſub e a & e f continetur, ad quadratum e c, eam habet proportionem, quam quadratum dimidiæ maioris diametri, ad quadratum d c: quadratum uero e c, ad id quod cōtinetur ſub e p, e r, eam habet quam quadratū d c ad id quod fit ex a d in d b. Id igitur quod fit ex a e in e f, eā habet ad id quod ex p e in e r, quā quadratum dimidiæ maioris diametri habet ad id quod fit ex a d in d b. Eſt aūt ſicut id quod fit ex a e in e f, ad id quod fit ex p e in e r: ſic id quod fit ex a l in l f, ad id quod fit ex l x in l o. ſicut autem quadratum dimidiæ maioris diametri, ad id quod fit ex a d in d b: ſic quadratum h k, ad id quod fit ex a k in k b. Igitur eandem habet proportionem id quod fit ex a l in l f, ad id quod fit ex x l in l o: quam quadratum h k, ad id quod fit ex a k in k b. Habet autem id quod fit ex x l in l o, ad quadratum c l, eandem proportionem, quam id quod fit ex a k in k b, ad quadratum k c. Igitur id quod fit ex a l in l f, ad quadratum c l, eandem proportionem, quam quadratum h k ad quadratum k c. ei autem quod fit ex a l in l f, æquale eſt quadratum l m. nam in ſemicirculo circa a f deſcripto, ducta eſt l m perpendicularis. eandem igitur habet proportionem quadratum l m ad quadratum l c, quam quadratum h k ad quadratum k c. quare in eadem linea recta ſunt puncta tria, c h m: ipſa uero c m linea eſt in ſuperficie coni. manifeſtum igitur, quod punctum h in coni ſuperficie exiſtet. Suppoſitum autem fuerat, ibi non exiſtere: nullum igitur punctum in ſectione coni acutianguli eſt, quod non exiſtat in ſuperficie dicti co-



ni. Tota ergo coni acutianguli sectio in superficie eiusdem coni existet.

9 DAta coni acutianguli sectione, & linea recta ex eius centro non perpendiculariter educta in altum, in plano quod ex altera diametro sit erectum, super plano in quo est coni acutianguli data sectio, potest conus inueniri, qui uerticem habeat terminum lineæ eductæ, in cuius superficie coni acutianguli sectio data cōsistet. Esto itaq; datæ sectionis coni acutianguli diametros b a, centrum autem d. & sit d c ex centro educta, ut dictum est: intelligatur autem coni acutianguli sectio quędam circa diametrum a b, in plano erecto super planum in quo sūt lineæ a b, c d. Oportet itaq; conum inuenire, qui uerticē habeat punctum c, in cuius superficie sit coni acutianguli data sectio. Lineæ igitur a c, c b non erunt æquales: quare c d non stat erecta super plano, in quo est ipsius coni acutianguli sectio data. Sit igitur ęqualis c e ipsi c b, esto uero n recta æqualis dimidiæ alterius diametri, quæ est coniugalis ipsi a b, & per d ducatur f g ęquedistans ipsi e b: ab ipso uero e b erigatur planum erecte stans super planum in quo est a c, c b: & in hoc plano describatur circulus circa diametrum e b, aut ellipsis. siquidem quadratum n est æquale ei quod fit ex f d in d g, fiat circulus. Sin autem fiat coni acutianguli sectio talis, ut quadratum alterius diametri ad quadratum e b eandem habeat proportionem, quam habet quadratum n ad id quod fit ex d f in d g: deinde conus sumatur, qui uerticem habeat punctum c, in cuius superficie erit circulus: aut coni acutianguli sectio circa diametrum e b. hoc enim esse potest, quoniam linea à puncto c ad mediam e b ducta, recta est ad planum quod est secundum e b constitutum. in hac itaq; superficie inest etiam coni acutianguli sectio circa diametrum a b. Si non existit in dicta superficie, dabitur aliquod punctum in coni acutianguli sectione, quod non erit in dicta superficie coni. Intelligatur quoddam huiusmodi punctum sumptum h, quod non sit in dicta coni superficie: & à puncto h ducatur perpendicularis h k super a b: iuncta uero c k extra ducatur, & coincidat e b in puncto l. per punctum uero l ducatur quædam in plano erecto secundum e b perpendicularis super e b, quæ sit l m: ipsum autē m punctum intelligatur eleuatum super superficiem coni, & ducatur per punctum l æquedistans ipsi a b linea p r: erit iam sicut quadratum n ad id quod fit ex f d in d g, ita quadratū l m ad id quod fit ex e l in l b. uerum sicut id quod fit ex f d in d g, ad id quod fit ex a d in d b: ita quod fit ex e l in l b, ad id quod fit ex e l in l r. erit igitur sicut quadratū n, ad id quod fit ex a d in d b, ita quadratū l m, ad id quod fit ex p l in l r. sicut autē

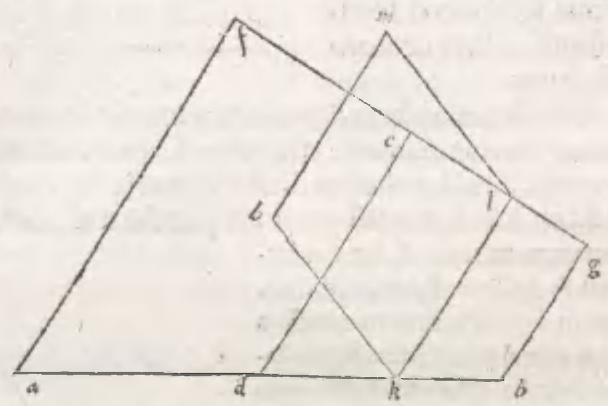


qua-

quadratum n, ad id quod fit ex a d in d b, ita quadratum h k, ad id quod fit ex a k in k b, quoniam in eadem coni acutianguli sectione ductæ sunt perpendiculares super diametrum a b. eandem igitur proportionem habet quadratum l m, ad id quod fit ex p l in l r, quam habet quadratum h k, ad id quod fit ex a k in k b. habet autem quod fit ex p l in l r ad quadratum c l eandem proportionem, quam habet id quod fit ex a k in k b, ad quadratum k c: igitur eandem proportionem habet quadratum l m, ad quadratum l c, quam quadratum h k ad quadratum k c, quare puncta c h m erunt in eadem linea recta. sed c m puncta sunt in superficie coni: quare manifestum est, h punctum in eadem superficie existere. suppositum autē fuerat, non esse: igitur patet, quod fuerat demonstrandum.

DAta coni acutianguli sectione, & linea ab eius sectionis centro erecta in plano, quod sit ex altera diametro eductum, quodq; erectum stet super plano in quo est coni acutianguli sectio data, potest cylindrus effingi, qui axem habeat directe iunctum lineæ à centro sectionis, ut dictum fuit, erectæ, in cuius cylindri superficie data coni acutianguli sectio existat. 10

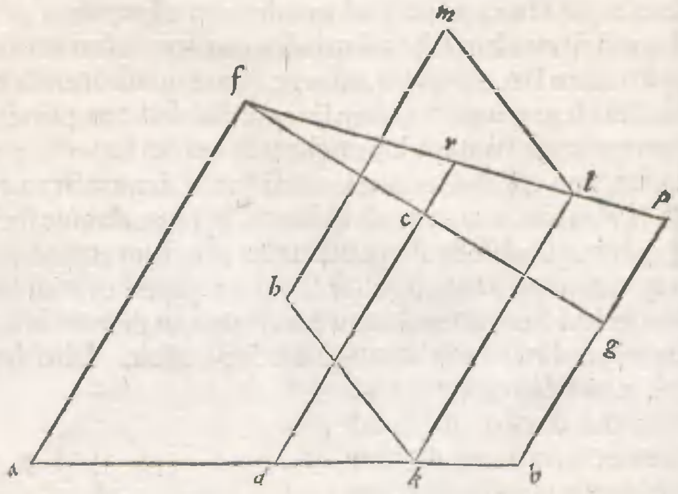
Esto datæ sectionis coni acutianguli altera diametros b a, cētrum eius d. esto autem c d linea ex centro, ut dictum fuit, erecta: intelligatur autem coni acutianguli sectio circa diametrum a b in plano illo constituta, quod stet erectū super plano, in quo sunt lineæ a b, c d. oportet itaque cylindrum effingere, qui axem habeat in directū lineæ e d coniunctum, in cuius cylindri superficie data coni acutianguli sectio existat. à punctis itaq; a b educantur a f, b g, æquedistantes ipsi c d: altera iam diametros sectionis coni acutianguli, aut æqualis erit interuallo quod inter a f & b g lineas continetur, aut maior, aut minor. Esto primum æqualis f g lineæ, & linea f g sit erecta perpendiculariter ad lineam c d: ab ipsa uero f g exeat planum, quod sit erectum super linea c d: & in hoc plano circulus esto circa diametrum f g, & ab hoc circulo cylindrus exeat habens axem c d: in superficie igitur huius cylindri erit data coni acutianguli sectio. Nam si non sit, dabitur aliquod punctum in sectione coni acutianguli, quod non continebitur in superficie dicti cylindri. sit illud h, & ab ipso h ducatur perpendicularis h k super a b: erit autem ipsa erecta super plano, in quo sunt a b, c d lineæ. à puncto uero k ducatur k l æquedistans ipsi c d, & à puncto l erigatur l m perpendiculariter ad f g, in circulo circa f g cōstituto. intelligatur autem m eleuatum in superficie semicirculi eius qui est circa diametrum f g. habet itaq; eandem proportionem quadratum h k perpendicularis, ad id quod fit ex a k in k b: & quadratum f c, ad id quod fit ex a d in d b. quoniam f g est æqualis alteri diametro. Habet autem & id quod ex f l in l g, ad id quod fit ex a k in k b, eam quam habet quadratū f c ad quadratū a d ellipsis: quare id quod fit ex f l in l g, æquatur quadrato h k, & etiam idem æquale quadrato l m: æquales igitur h k & l m perpendiculares erunt: quare lineæ l k & m h sunt æquedistātes. atq; ideo d e & m h, æquedistantes erunt. unde & in superficie cylindri erit h m, quoniam ab m puncto in superficie cylindri constituto ducta est m h, æquedistans axi. ex quo sequitur, punctum h in eadem existere superficie. Fuerat suppositū, non sic esse. unde patet id, quod oportuit demonstrare. Clarum iam est,



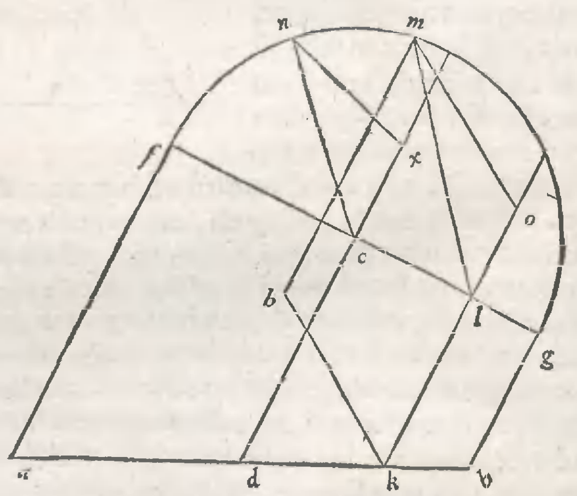
 quod

quod cylindrus compræhendens ellipsim, erit erectus, si altera diametros æqualis fuerit interuallo, quod interiacet inter lineas ab extremis alterius diametri ductas, ipsi lineæ ex centro erectæ æquedistantes.

Esto item altera diametros maior f g. et esto æqualis f p linea alteri diametro: ab ipsa autē p f erigatur planum erecte, stās super plano, in quo est b c d: & in hoc plano esto circulus circa diametrū p f. ab hoc circulo prodeat cylindrus, qui axem habeat d r. in superficie itaq; cylindri huius eadem ratione sectio coni acutianguli existere demonstrabitur.



Esto demum altera diametros minor f g. quantum maius potest f c, quàm dimidium alterius diametri: esto id c x lineæ quadratum. & à puncto x erigatur linea æqualis dimidiæ alterius diametri, erecta super plano in quo sunt lineæ rectæ a b c d, sitq; hæc x n. intelligatur aūt punctū n eleuatū, c n igitur erit æqualis c f. in plano uero in quo est f g, c n circulus describat̄, circa diametrum f g. iste autem ductus erit per n punctum. & ab ipso circulo cylindrus effingatur, qui axem habeat c d: in superficie itaq; huius cylindri sectio coni acutianguli existit. Sin autem non sic, dabitur aliquod punctum in sectione coni acutiāguli, quod nō erit in superficie cylindri. esto illud h, & ducatur h k perpendicularis super a b, & à puncto k ducatur k l æquedistans lineæ c d. & à puncto l ducatur erecte l m super f g in semicirculo circa diametrum f g constituto. intelligatur autem punctum m eleuatum in arcu semicirculi circa f g constituti, super semicirculum circa f g constitutum. & à puncto m ducatur m o, perpendicularis super lineam k l eductam. erit aūt hæc erecta super plano in quo sunt a b, c d, quia est linea k l erecta perpendiculariter super lineam f g. est itaq; sicut quadratū m o ad quadratū m l, ita quadratum n x ad quadratum c n: sicut autem quadratum m l, ad id quod fit ex a k in b k, sic quadratum c n ad quadratum a d. quia quadratum m l est æquale ei quod fit ex f l in l g: quadratū uero c n quadrato c f æquatur. erit igitur sicut quadratum m o, ad id quod fit ex a k in k b, sic quadratū x n, ad quadratum a d. Est aūt & quadratū k h, ad id quod fit ex a k in k b, sicut quadratū x n ad quadratum a d: quia x n est æqualis dimidiæ alterius diametri. patet quod lineæ perpendiculares m o, h k, erunt



erunt æquales: quare o k & h m erunt æquales. quoniam autem m h est ducta æquedistans axi in cylindro, et punctum m est situm in superficie eius, necesse est et lineam m h in cylindri esse superficie collocatam. manifestum est igitur, quod & h punctum in eadem superficie continetur. Sumptum autem fuerat, non contineri in illa. Constat ergo necessarium esse, sectionem coni acutianguli in superficie cylindri contineri.

OMnis coni ad quemcunq; conū proportionem compositam esse ex propor 11
tione basium inter se, & ex proportione altitudinum, demonstratur ex his quæ prius sunt ostensa: & quod omnis abscisio coni ab abscisione coni, habet proportionem compositam ex proportione basium & proportione altitudinum: & quod omnis sector cylindri triplus est ad abscisionē coni quę basim habeat eandem cum sectore, & eandem altitudinem. Eadem enim est demonstratio, & eius quod cylindrus est triplus ad conum, qui basim eandem, & altitudinem habeat eandem cum cylindro.

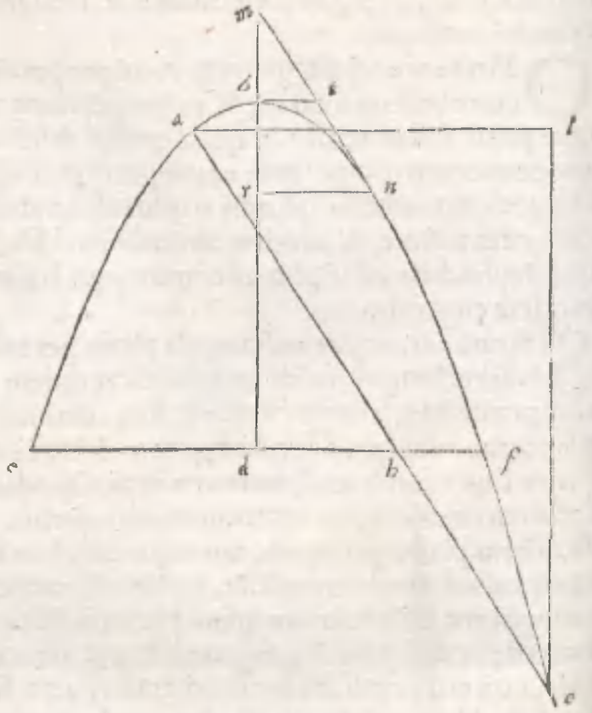
SI figura conoidalis rectangula plano per axē ducto scindatur, sectio erit conoi 12
dalis rectanguli sectio ipsa uidelicet eadem, quæ ipsam figuram conoidalem compræhendit, si fuerit circumuoluta: diametros eius erit cōmunis sectio duorū planorum, eius quod scindit figuram, & eius quod per axem ducitur perpendiculariter, superdiuidens alterum erectum. Quod si secetur plano super axem erecto, sectio circulus erit, qui centrum in axe habebit. Si conoidale obtusiangulum scindatur plano per axem, aut æquedistanter axi ductum, aut per uerticem coni compræhendentis conoidale, sectio erit coni obtusianguli sectio. Siquidem per axem ea erit quæ figuram ipsam circumuoluta describit. Si autem æquedistanter axi, erit prædictæ similis. Si autem & per uerticem coni compræhendentis conoidale, non erit prædictæ similis: diameter uero sectionis erit communis sectio planorū, diuident * figuram, & eius quod per axem ducatur erectum super planum diuidens.

Si conoidale secetur plano super axem erecto, sectio erit circulus, cuius centrū est in axe situm.

Si quæcunq; sphæroidum figurarum scindatur plano per axem, aut æquedistanter axi ducto, sectio erit coni acutianguli sectio: quod si per axem, eadem erit quæ figuram ipsam circūuoluta describit: si autem æquedistanter axi, erit illi similis. eius uero diametros erit sectio cōmunis duûm planorū: eius quod secat, et eius quod per axem ducitur erectum super planum secans. Si autem secetur plano super axem erecto, sectio erit circulus, cuius centrum in axe situm habetur. Si autem quæcunq; dictarum figurarum plano per axem ducto secetur, lineæ à punctis quæ in figuræ superficie sunt, non in sectione sita ductę perpendiculariter, ad planum secans intra sectionem figuræ cadent. Horum autem omnium demonstrationes sunt manifestæ.

SI conoidale rectangulum plano secetur, neq; per axem, neq; æquedistanter a 13
xi ducto, neq; super axem erecto, sectio erit coni acutianguli sectio. eius maior diametros erit pars in conoidali deprehensa: pars dico sectionis communis duûm planorum, eius quod figuram secuerit, & eius quod per axem ductum, erectum super secans planum: minor uero eius diameter erit æqualis interuallo inter illas duas compræhenso, quæ ab extremitatibus maioris diametri ductæ sint axi æquedistantes. Secetur itaq; conoidale rectangulum plano, uti dictum est, ipso eodem prius scisso à plano per axem ducto, & erecto super planum secans. Esto conoidalis sectio a b c, plani autem figuram secantis sit c a linea recta: axis autem conoidalis sit, & diametros sectionis b d. Ostendendum est, sectionem conoidalis quæ à plano circa a c fit, esse coni acutianguli sectionem: & maior eius diametros est a c, minor autem diametros æqualis est ipsi a l, cum c l fuerit ipsi b d ęquedistans,

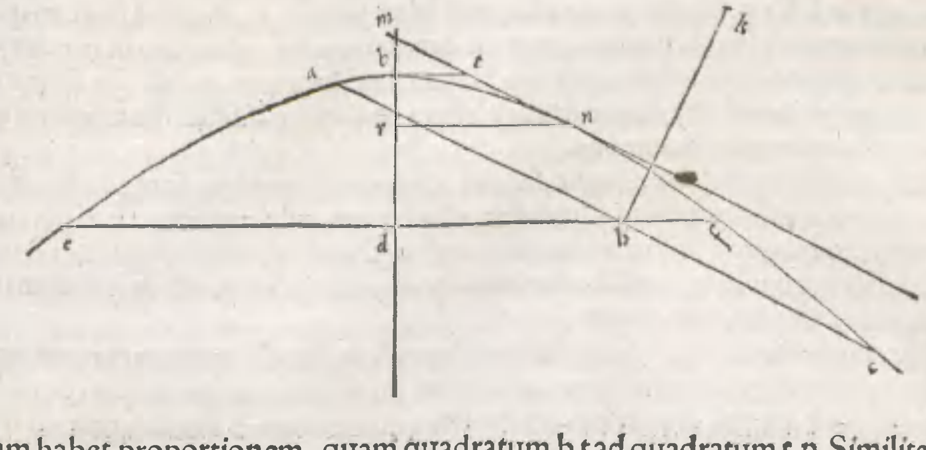
ſtans, & a l fuerit ſuper c l ducta perpendicularis: intelligatur aliquod punctum k in ipſa ſectione ſumptum, & à puncto k ducatur k h perpendicularis ſuper c a: erit igitur k h erecta ſuper plano perpendicularis, in quo eſt a c b coni rectanguli ſectio, quia & planum ſecans ſtat erectũ ſuper eodem plano. per h autem ducatur e f, quæ faciat angulos rectos ſuper b d, & per e f & k h rectas lineas extra ducatur planum: erit autem hoc erectum ſuper lineam b d. diuiditur itaq; figura conoidalis plano ſuper axem erecto, quare ea ſectio circulus erit cuius centrũ eſt d. igitur k h, æquum poterit ei quod fit ex f k in k e. nã quod eſt ſuper e f, ſemicirculus eſt: & k h, in eo eſt perpendicularis. nã eius quod fit ex e h in h f, eſt media proportionalis. ducatur aũt contingens coni ſectionem linea m n, æquediſtans ipſi a c. cõtingat uero in puncto n: ducatur item b t, æquediſtans ipſi e f. id itaq; quod fit ex a h in c h, ad id quod fit ex e h in h f, eandem habet proportionem, quam quadratum n t ad quadratum b t:



hoc enim oſtenſum eſt. linea uero n t æqualis eſt lineæ t m: quoniã & b r, ipſi b m eſt æqualis. habet igitur id quod fit ex a h in h c, ad quadratum k h, eandem proportionem, quam quadratum t m ad quadratum t b. quare & quadratum perpẽdicularis h k, ad id quod fit ex a h in h c, habet eandem proportionem, quam quadratum b t ad quadratũ t m. Quoniã igitur trianguli c a l, t m b ſunt ſimiles, ſimiliter oſtendentur quadrata, quæ fiũt ab alijs perpendicularib. ductis à ſectione ad a c, ad ea quæ fiũt ex partibus a c, altera in alterã ductis, eandẽ habebũt proportionẽ, quã quadratũ a l ad quadratum a c. unde manifeſtũ eſt, quod ſectio eſt coni acutianguli ſectio: eius uero maior diametros eſt a c, minor uero æqualis ipſi a l.

14 SI conoidale obtuſiangulum plano ſecetur, coincidenti omnibus lateribus figuræ comprætendentis conoidale, ſitq; ipſum planum non ſuper axem erectum, huiuſmodi ſectio erit coni acutianguli ſectio, eiusq; maior diametros erit linea intra conoidale deprehenſa, quæ pars eſt ſectionis duûm planorum: eius uidelicet quod eſt ſecans, & eius quod per axem conoidalis ductum eſt, erectum ſuper planum ſecans. Secetur itaq; conoidale obtuſiangulum, ut dictum eſt, & alio item plano ducto per axem, & erecto ſuper planum ſecans, ſectio uero conoidalis eſto a b c, coni obtuſianguli ſectio: plani autem ſecantis figuram ſit linea recta a c, axis autem conoidalis & diametros ſectionis b d. intelligatur iam punctũ aliquod k in ſectione ſumptum, & à puncto k ducatur k h perpendicularis ſuper a c: ipſa iam erit erecta ſuper plano in quo eſt a b c ſectio coni: per punctum uero h ducatur perpendiculariter e f ad b d, & per e f & k h lineas rectas planũ ducatur ſecans conoidale, ſecabitur iam planum recto ſuper axem. quare huiuſmodi ſectio erit circulus, cuius centrum eſt d: igitur k h perpendicularis, æquum poterit ei quod fit ex h e in h f. Ducatur item m n æquediſtans ipſi a c, & contingens ſe-

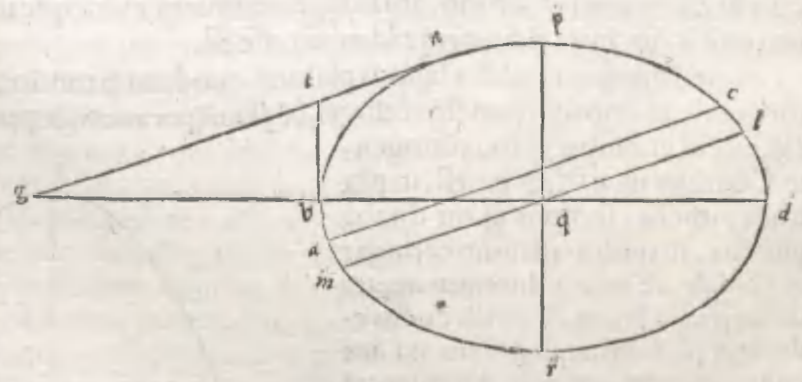
ctionem coni in puncto n, ducatur b t æquediſtans ipſi e f. Id iam quod fit ex e h in h f, ad id quod fit ex a h in h c, eãdem habet proportionem, quam quadratũ b t, ad quadratum t n. quare quadratũ k h perpendicularis ad id quod fit ex a h in h c,



eam habet proportionem, quam quadratum b t ad quadratum t n. Similiter igitur oſtenditur, quod & quadrata aliarũ perpendicularium, quæ à ſectione ad a c ducentur, ad ea quæ fiunt ex partib. a c, altera in alteram ductis, quæ partes ab ipſis fiunt perpendicularibus, eam habent proportionem, quam quadratum b t ad quadratum t n. & b t, minor eſt ipſa t n, quoniam & m t minor eſt ipſa t n: etenim m b minor eſt b r. Hoc enim eſt in ſectionib. coni obtuſianguli accidens. Conſtat igitur, ſectionem eſſe coni acutianguli ſectionem, & maior eius diametros a c. Similiter exeunte n r perpendiculari in ſectione coni obtuſianguli, diametros eius maior erit c l.

SI ſphæroides oblongum plano ſecetur ſuper axem non erecto, ſectio huiuſmodi erit coni acutianguli ſectio, eius maior diametros erit linea quæ pars cõmunis ſectionis duûm planorum exiſtit, eius quod ſecat, & eius quod per axem ductum eſt, erectum ſuper planum ſecans, quæ linea intra ſphęroides in ſecando intercipitur. 15

Si enim ſecetur per axem, aut axi æquediſtãter, manifeſtum eſt. Secetur autem alio plano per axem ducto, erecto ſuper alterum ſecans, & eſto ſphæroidis ſectio a b c d, ſectio coni acutiãguli: plani autem ſecantis eſto c a linea recta. axis autẽ ſphæroidis, & diametros ſectionis coni acutianguli eſto b d, centrum autem q, & minor diametros eſto p r:



Ducatur autẽ b t perpẽdicularis ad b d, & g n æquediſtans ipſi a c, cõtingens coni acutianguli ſectionem in puncto n. ducatur & m l per punctum q, æquediſtãs ipſi a c. Similiter iam his quæ prius dicta ſunt oſtendetur, quadrata perpendicularium earum quæ à ſectione ad a c ducuntur, ad ea quæ fiunt ex partibus a c altera in alteram ductis, eandem habere proportionem, quam quadratum b t ad quadratum

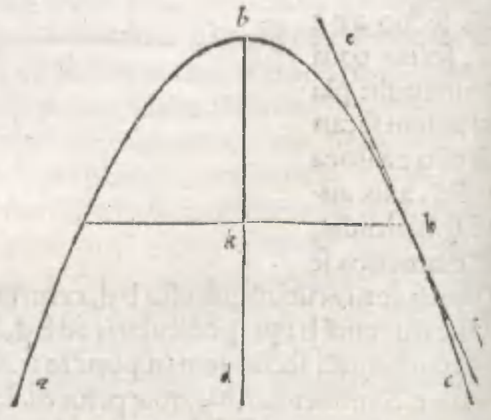
dratum t n. quod itaque huiuſmodi ſectio ſit coni acutianguli ſectio, patet: & quod diametros eius ſit a c, item patet. Quod autem ſit maior, oſtendendum eſt. quod enim fit ex p q in q r, ad id quod ſit ex m q in q l, eandem habet proportionem, quam quadratum b t ad quadratum n t: quia æquediſtantes contingentibus ſunt m l, & r p. minus autem eſt quod fit ex p q in q r, eo quod fit ex m q in q l, cum r q minor ſit q l. Minus igitur eſt quadratum b t, quadrato m t: quare & quadrata perpendicularium, quæ à ſectione ad a c ducentur, uel ductæ ſunt, minora erunt his quæ fiunt ex partibus a c, altera in alteram ductis. Manifeſtum igitur, quod a c eſt maior diametros.

Si ſphæroides prolatum plano ſecetur, cætera erunt eadem ſupradictis: diametros uero minor erit, ea quæ intra ſphæroides compræhendetur. Ex iſtis autẽ manifeſtum eſt, quod ſi planis æquediſtantibus ſecentur, eorum ſectiones erunt ſimiles. Nam quadrata perpẽdicularium ad ea quæ fiunt ex partibus, eandem inter ſe proportionem retinebunt.

16 SI in cuiuſcunque conoidis rectanguli ſuperficie puncta quæcunqꝫ notentur, lineæ quæ ab eis ducentur, æquediſtantes axi in eam partem in qua conoidis conuexa ſunt, extra ipſum conoides cadunt: quæ autem in alteram partem trahuntur, eas intra ipſum cadere neceſſe eſt. Ducto enim plano per axem et per pũctum, à quo æquediſtãs axi ducta eſt, huiuſmodi ſectio eſt coni rectanguli ſectio, diametrus uero eius axis conoidis. Verum in ſectione coni rectanguli à quocunque ſigno in ſectione ſito, lineæ ducantur axi æquediſtãtes, quæ uerſus eam partem in qua ſunt eius conuexa trahuntur, extra ſectionem cadere neceſſe eſt: quæ uero in alteram, intra cadunt. patet igirur propoſitum.

In conoidali obtuſiangulo à quocunqꝫ puncto in ſuperficie eius ſito lineæ ducantur, æquediſtãtes lineæ cuipiam quæ in conoidali exiſtit ducta à uertice coni eius qui conoidale complectitur, quæ in eam partem ducentur in qua eius conuexa exiſtunt, extra conoidale cadunt: quæ uero in alteram partem, intra cadere neceſſe eſt. Ducto enim plano per lineam quæ à uertice coni complectentis conoidale intra conoidale ducta ſit, & per punctum à quo ducitur æquediſtans illi, huiuſmodi ſectio erit ſectio coni obtuſianguli, diametros eius linea quæ à uertice coni intra conoidale ducta eſt. In ſectione autem coni obtuſianguli, à quocunqꝫ puncto in ſectione ſito ducantur lineæ æquediſtantes, lineæ ſic ductæ à uertice quæ in eam partem ducentur, ubi ſunt eius conuexa, extra: quę uero in alterã partem trahentur, intra ſectionem cadere neceſſe eſt.

Si quaſcunqꝫ conoidales figuras planum quodcunqꝫ contingat, non ſcindẽs conoidale, in uno ſolo puncto cõtinget, & planũ per axem, & per contactum ductũ, erectũ erit ſuper plano cõtingente. Cõtingat itaqꝫ ſi fieri poteſt, in pluribus punctis: ſumptis igitur duob. punctis, in quibus planum cõtingat conoidale, ab utroqꝫ ducemus æquediſtantes axi lineas, & ab his ductis educetur planum æquediſtans axi. aut enim per axem, aut ęquediſtanter axi ductum erit. quare ſectionem faciet coni ſectionem, & pũcta erunt in coni ſectione ſita. quoniam igitur ſunt in una ſuperficie, & in plano linea recta, quæ inter illa cadit, erit intra coni ſectionem: quare & intra conoidalis

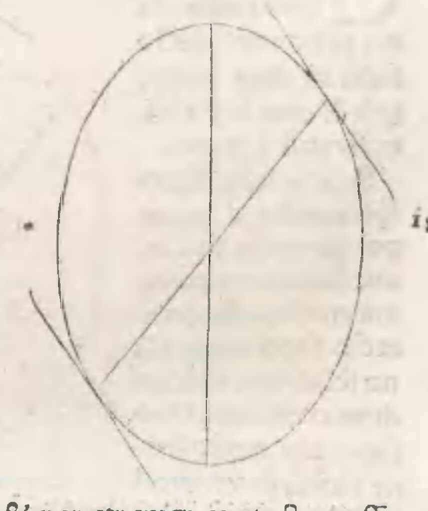


ſuperficiem exiſtat. ipſa uero eadem recta linea eſt in plano contingente, quia & puncta

pũcta in ea ſunt. erit igitur ut aliquid plani contingentis ſit intra conoidale, quod eſſe non poteſt. nam ſupponebatur, non ſecare: in uno igitur ſolo puncto contingit. Quod autem planũ per contactum & per axem ductũ, erectum ſit ſuper contingens planum. Si enim in puncto uerticis conoidale cõtingat, patet. nam duobus planis per axem ductis conoidalis ſectionis, erunt coni ſectiones, quæ diametrum habent ipſum axem: lineæ uero plani contingentis ſunt, quæ ſectiones conorum contingunt in extremitate diametri, quæ angulos rectos faciũt diametro ſectionum. erunt igitur in plano contingenti duæ lineæ rectæ, angulis rectis ad axem directæ: erit igitur planum ipſum ſuper axem erectũ. quare & planum per axem ductum, erit ſuper illud erectum. Sed eſto non contingat in uertice conoidalis planum. ducatur iam planum per contactum & axem, & ſectio conoidalis ſit b c coni ſectio, axis autem ſit & diametros ſectionis b d: contingentis autem plani ſectio ſit e h f, linea recta contingens coni ſectionem in puncto h: & perpẽdicularis ab ipſo h ducatur h k ad b d, & planum ſtatuatur erectum ſuper axem. efficiat autem hoc planum ſectionem, circulum cuius centrum ſit k, ſectio autem communis huius & contingentis plani erit contingens circulum: ergo faciet angulos rectos ad h k. quare erecta erit ſuper plano, in quo ſunt k h, b d. Cõſtat igitur, planum contingens eſſe erectum ſuper plano, cũ & lineæ rectæ ſint in eodẽ.

SI utramuis figurarũ ſphæroidum planum contingat, nõ ſcindendo figuram, 17
in uno ſolo puncto eam cõtinget: & id planum quod per axem & cõtactum fuerit ductum, erit ſuper plano contingenti erectum. Eſto, ſi fieri poteſt, contingat in pluribus punctis. notentur itaqꝫ hæc puncta, in quibus planum contingit ſphæroidem, & ab utroqꝫ horum ducantur lineæ rectæ æquediſtantes axi: & ducto per illas plano, ſectio fiet coni acutianguli ſectio, & pũcta erũt in ſectione coni: linea igit recta media inter pũcta, erit intra coni ſectionem: quare & intra ſphęroidis ſuperficiem exiſtet. ipſa autem recta linea in plano cõtingente ſituatur, quoniam & puncta ſita ſunt in eodẽ: plani igitur contingentis aliquid erit intra ſphæroidem. non eſt aũt hoc uerum. nam ſuppoſitum fuit, planum nõ ſecare ſphæroidem. Igitur manifeſtum eſt, quod in uno ſolo puncto contingit. Quod autem planum per axem & contactum actum, ſit erectum ſuper plano contingente, ſimiliter ſicut in conoidali figura oſtenſum fuit, & in hoc demonſtrabimus.

Si & ſphæroidum figurarum utrauis plano ſcindatur, per axem ducto, & ſectionem inde factam aliqua contingens linea recta ducatur, & per contingentem planum ſtatuatur erectum ſuper plano quod ſecet figuram, continget figuram ſecundum idem punctum, in quo linea eam contingit ſectionem coni. non enim in alio puncto ſuperficiei ſuæ eam cõtinget. Sin autem ducta perpendicularis à pũcto ſuper planum ſcindens, incidet intra coni ſectionem: nã ſuper cõtingentem cadet, quoniam plana alternatim alterum ſuper altero ſunt erecta: quod eſſe non poteſt. nam oſtenſum eſt quod intra cadet.

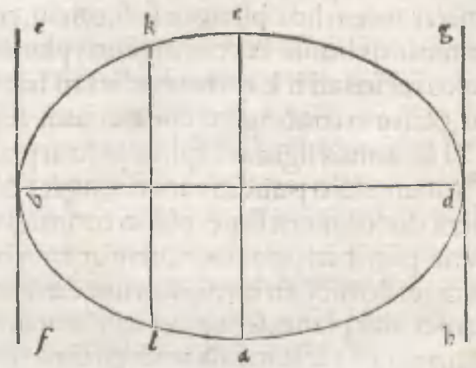


SI aliquam ſphæroidem figuram duo plana 18
inter ſe æquediſtantia contingant, linea recta quæ contactuum puncta coniunget, per centrum ſphæroidis permeabit. Si plana fuerint ſuper axem erecta, manifeſtum eſt quod dicitur. Cæterum eſto non ſint plana cõtingentia ſuper axem erecta, planum ductum per axem, & alterum contactuum erectum erit ſuper planum contingentis: quare & ſuper æquediſtans illi, neceſſe eſt igitur, planum per axem ductum, & per utrumqꝫ contactum eſſe

 actum:

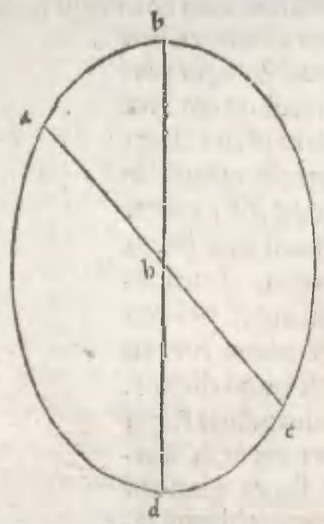
actum: ſi autem non, erunt duo plana ſuper idem planum erecta, per eandem lineam ducta, quæ non ſit ſuper planum erecta. nam ſuppoſitum eſt, axem non eſſe erectum ſuper plana æquediſtantia. in eodem igitur erunt plano, axisq; & cōtactus ipſi, & ſecta erit ſphæroides ſuper axem: ſectio igitur huiuſmodi erit coni acutianguli ſectio: ſectiones autem planorum contingentium æquediſtantes erunt, quæ contingent coni acutianguli ſectiones in contactibus planorum. & ſi duæ rectæ lineæ inter ſe æquediſtantes contingant coni acutianguli ſectionem, centrum ſectionis coni acutianguli, & puncta contactuum in eadem recta linea erunt ſita.

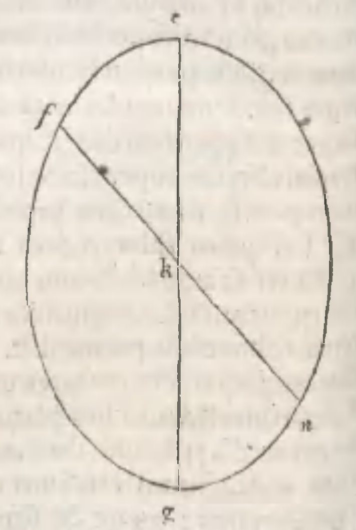
19 SI quamcunq; figuram ſphæroidem duo plana æquediſtantia contingant, ducatur autem planum quoddam per centrum ſphæroidis, æquediſtans planis contingentibus lineæ rectæ, quæ ex facta ſectione ducentur æquediſtantes ei lineæ quæ ipſos contactus coniungat, extra ſphæroidē cadēt. Supponant quæ dicta ſunt, & notetur pūctum aliquod in ſectione facta. Ex puncto igitur notato, & ex linea recta quę iungit cōtactus, ducatur planum. ſcindet autē hoc & ſphæroidem, & plana æquediſtantia. Eſto igitur ſphæroidis ſectio a b c d, coni acutianguli ſectio: ſectiones autem planorum cōtingentium, ſint e f, g h lineę rectæ. ſignum autem notatum a. ea uero quæ contactus cōiungit, ſit b d. Ipſa igitur per centrū tranſibit. ſectio uero plani æquediſtātis contingentibus eſto a c. ipſa quoq; in centrum cadet. nam et planum ipſum in quo ipſa eſt, per centrū trāſit. Quoniā igitur a b c d, uel circulus eſt, uel coni acutianguli ſectio, & ipſam contingunt duę rectæ e f g h, per centrum autem ducta eſt eis æquediſtans a c: manifeſtū eſt quod ductæ à punctis a c, æquediſtantes ipſi b d, contingent ſectionem, & extra ſphæroidē cadent. Si aūt planum æquediſtans punctis contingentib. non ſit per centrum actū, eſto k l. manifeſtū eſt, illæ quæ à recta ex ſectione facta in eam partem efficientur, in qua portio minor exiſtat, extra ſphęroidem cadent: quę autem in alteram partem ducentur, intra ſphæroidem cadere oportere probatum eſt.



20 QVælibet figura ſphæroides plano per centrū ducto ſecta in duo æqua, ipſa & eius ſuperficies ſecatur à plano.

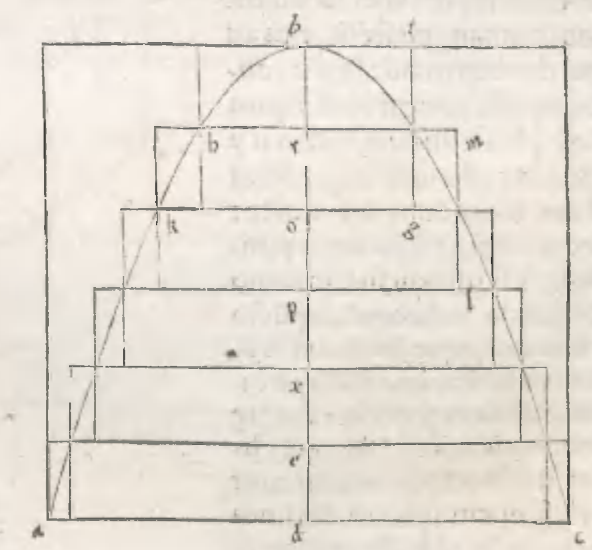
Secetur itaq; figura ſphæroides à plano per centrum ducto, aut ſecundum axem, aut erecto, aut non erecto ſuper axem plano ſecabitur. ſi ſecundum axem, uel plano ſuper axē erecto fuerit ſecta, patet quod ipſa & eius ſuperficies in duo æqua diuiditur. nam manifeſtum eſt, quod altera eius





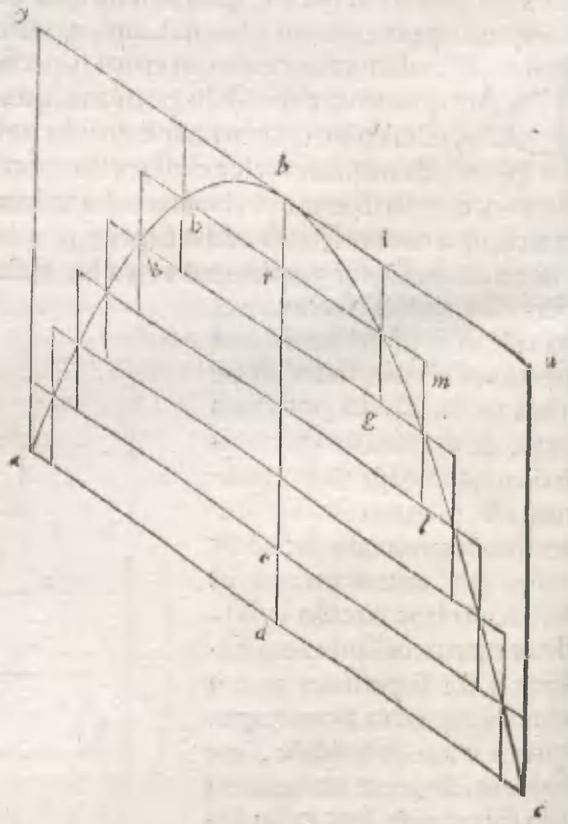
eius pars alteri coaptatꝛ, & alterius partis ſuperficies ſuperficiei alterius. Sed eſto non ſecundum axem, neq; plano ſuper axem erecto ſecetur: ſecta ipſa ſphæroide à plano ſuper primum planum ſecans erecto, ſit ſectio a b c d, coni acutianguli ſectio: eius diametros & axis ſphęroidis eſto b d, & centrū h: plani aūt quod per centrū ſphæroidē diuiſerit, eſto ſectio a c linea recta. Sumatur item altera ſphæroides huic ſimilis & ęqualis, & ſecta ipſa ſecundū axem à plano, eſto eius ſectio e f g n, coni acutianguli ſectio: diametros uero eius & axis ſphæroidis eſto e g, centrum k. & per k ducatur f n, faciens angulum k æqualem angulo h: à linea uero f n, educatur planum erectum ſuper planum in quo eſt e f g n ſectio: erunt iam conorum acutianguli ſectiones a b c d, f g n, æquales & ſimiles. aptatur itaq; altera alteri, poſita e g ſuper b d, & f n ſuper a c. aptatur etiam planum quod eſt ſecundum n f, plano quod eſt ſecundum a c: quoniam ab eadem linea ſuper idem planū conſiſtit utrumq;. aptabitur ergo & portio ſecta ex ſphæroide à plano ſecundum n f conſtituto, quæ eſt in parte ubi eſt e, alteri portioni ſectę ex altera ſphæroide à plano ſecundum a c ducto, quæ eſt in parte in qua eſt b: & reliqua ſectio reliquæ ſectioni, & ſuperficies portionum ſuperficiebus ſimiliter. Rurſus e g poſita ſuper b d, ſic ut e ſuper d ſitum ſit, & g ſuper b, linea media inter punctum f n, ſuper lineam inter puncta a c conſtituta: manifeſtum eſt, quod & conorum acutianguli ſectiones inuicē aptabunꝛ altera ſuper alterā, & f cadet ſuper c, & n ſuper a, ſimiliter autem & planum quod eſt ſecundum n f, aptabitur plano ſecundum a c ducto: & portionum quæ à plano ſecundum n f ducto ſectæ ſunt, illa quidem quæ ad partem g, aptabitur portioni à plano ſecundū a c acto ſectæ, quæ eſt in parte b. illa uero quæ eſt in parte e, aptabitur illi quæ eſt in parte d. quoniam igitur eadem portio utriq; portionum adæquabitur, manifeſtum eſt quod portiones erunt æquales, & eadem ratione earum erunt ſuperficies æquales.

DAta quacunq; conoidalis portione, quæ ſit abſciſa à plano ſuper axem erecto, data etiam quacunq; ſphæroidis portione ſimiliter abſciſa, quæ dimidia ſphæroide minime maior exiſtat, fieri poteſt ut portio ſolida una ei inſcribaꝛ, altera circumſcribatur ex cylindris habentibus altitudinem æqualem confecta, ita ut figura circumſcripta addat ſuper figuram inſcriptam, quacunq; ſolida quantitate minus. Detur portio qualis eſt a b c: ſecta aūt ipſa plano ſecundum axē ducto, eſto portiōis ſectio a b c, coni ſectio: plani autē quod portionē ſecuit, ſit ſectio a c linea recta: & eſto portionis axis, & diametros ſectionis b d. quoniam igitur ſuppoſitum eſt, planum ſecās eſſe erectum ſuper axem ſectio circulus erit. eius diametros ſit a c: & ab hoc circulo cylindrus extruatur, qui axem habeat b d: ſuperficies autem eius cadet extra portionem. quia eſt aut conoidale, aut ſphæroides, non maius dimidio ſphæroide. hoc cylindro aſſiduē in duo æqua ſecto, à plano ſuper axem erecto, fiet tandem ut reſiduum erit ſolida quantitate data minus. Eſto reliquum ab eo cylindrus, qui baſem habeat circulum circa diametrum a c conſtitutum, axem autē e d: 21



minorq; sit data quantitate solida. diuidatur itaq; b d in partes æquales e d, punctis r o p x: & à diuisionibus ducantur lineæ rectæ æquedistantes ipsi a c ad coni sectionem. ab his autem ductis, educantur plana erecta super b d: erunt igitur quæ inde fient sectiones, circuli quorum centra erunt in b d linea. ab utroq; itaq; horum circulorum duo cylindri extruantur, quorũ uterq; habeat axem æqualem ipsi e d, alter quidem in parte cylindri uersus d, alter uero in parte uersus b, erit iã quædam in portione solida figura inscripta ex cylindris cõposita, qui in eam partem effecti sunt in qua est d: & altera item circumscripta, composita ex illis cylindris, qui in partem in qua est b, sunt ducti. Reliquũ est ut ostendamus, quod circumscripta addit super inscriptam, data solida quantitate minus. Vnusquisque ergo cylindrorum qui figuræ sunt inscripti, est equalis cylindro qui ab eodem circulo uersus partem b exeat, sicut h g ipsi h i, & k l ipsi k m, & reliqui tantundem, & omnes cylindri omnibus sunt æquales. manifestum est igitur, quod figura circumscripta inscriptam superat cylindro, qui basim habet circulum circa diametrũ a c constitutum, axem uero e d. hic autem minor est solida quantitate proposita.

22 PORtione conoidalis quacunq; data, quæ à plano super axem non erecto abscisa fuerit, & data item sphæroidis portione quacunq;, similiter abscisa, quæ dimidia sphæroide minime maior existat, fieri potest ut altera portioni inscribatur solida figura, altera uero circũscribatur ex cylindris, sectionibus, altitudinem altitudini sectionis æqualem habentibus compositam: hoc pacto, ut figura circũscripta addat super inscriptam minus quacunq; solida quantitate data. Detur portio qualis dicta est: ipsa uero figura secta alio plano secũdum axem ducto, & erecto super plano portionem secante, ipsius quidẽ figuræ sectio sit a b c d, coni sectio: ipsius aũt plani, quod portionẽ abscidit, esto sectio c a linea recta. quia igitur positum est, planum abscindens portionem non esse erectum super axem, sectio erit coni acutianguli sectio, eius autem diametros a d: sit u y contingens sectionem coni in puncto b, & secundum ipsam u y educatur planum æquedistãs plano secundum a c ducto: hoc continget figuram in puncto b: & siquidem fuerit portio conoidalis rectanguli, à pũcto b ducatur æquedistãs axi b d. Si uero fuerit conoidalis obtusianguli, à uertice coni comprę hendentis conoidale, recta linea ducta ad b, extra ducatur b d: si autem sphæroidis linea recta ducta ad b, sit intercepta b d: manifestũ est quod b d diuidit a c in duo æqua. erit igitur b uertex portionis, & b d axis. Iam est coni acutianguli sectio circa diametrum a c, & linea b d à centro erecta in plano, erecto super planum in quo est coni acutianguli sectio, alio



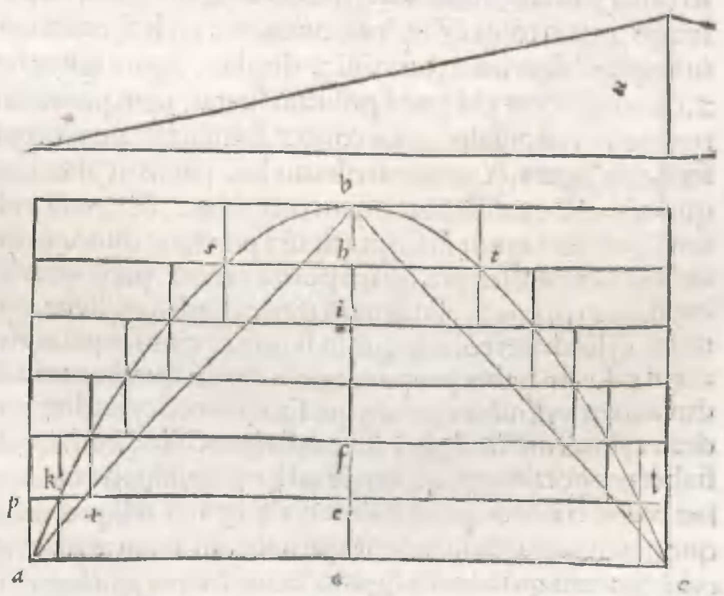
plano

plano secundum alterum diametrum constituto: potest igitur cylindrus construi qui axem habeat b d, in cuius superficie erit data coni acutianguli sectio circa diametrum a c cõstituta. eius autem superficies cadet extra portionem, quoniam est aut conoidalis aut sphæroidis portio, & non maior dimidia sphæroide. Erit igitur quoddam cylindri frustum, quod basim habet coni acutianguli sectionem circa a c diametrum constitutam, axem uero d b. hoc autem frusto in duo diuiso planis æquedistãtibus, plano secundum a c ducto, erit residuum minus solida quantitate proposita. Esto frustum, quod habeat basim coni acutianguli sectionem, diametrum a c, axem uero e d, minus solida quantitate proposita: diuidatur a b in partes æquales e d, & à punctis diuisionum ducantur lineæ rectæ, quæ æquedistent a c, erunt erectæ super coni sectionem: ab his exeant plana æquedistantia plano secundum a c ducto. secant itaq; hæc superficiem portionis, & erunt huiusmodi conorum acutianguli sectiones similes illi quæ est circa diametrum a c: quia plana æquedistantia sunt. In unaquaq; igitur coni acutianguli sectione extruantur cylindri frusta duo, hoc quidem in parte sectionis coni acutianguli uersus d, illud autem uersus b, quæ axem habeat æqualem d e: erunt itaq; quædam figuræ solidæ, hæc quidem inscripta portioni, illa uero circũscripta eidem, quæ ex cylindri frustis componuntur. Reliquum autem est, ut ostendamus quod figura circumscripta super figuram inscriptam, minus addat solida quantitate proposita. Ostendetur autem hoc similiter priori, quod figura circumscripta excedit inscriptam frusto, quod basim habet coni acutianguli sectionem, quæ circa diametrum a c consistit, axem uero e d. hoc autem minus existit proposita quantitate solida.

His itaq; hoc ordine præstitutis, demonstrabimus ea quæ de figuris proposita fuerunt.

OMnis portio conoidalis rectanguli, quod sectum fuerit plano super axem erecto, sesquialtera esse probatur coni, qui basim & axem eandem habeat cum portione. 23

Esto itaq; portio conoidalis rectanguli abscisa plano super axẽ erecto, & secto ipso conoidali ab altero plano secũdum axem ducto. esto quidem superficiei sectio a b c, coni rectanguli sectio. plani autem portionem abscindentis sit sectio linea a c recta: axis uero portionis, b d. esto item conus eandem basim & eundem axem cum portione habẽs, cuius uertex sit b. demonstrã dũ est, quod portio conoidalis sesqaltera est huius coni. Exponatur itaq; conus z, q sesquialter sit huius coni, cuius basis circulus circa a c diametrum cõstitutus: axis uero b d. Esto autem cylindrus, qui basim habeat circulum circa a c diametrum cõstitutum, axem autem b d: erit igitur conus z dimidium huius cylindri, cum conus z sit sesquialter eiusdem coni. Dico igitur, portio



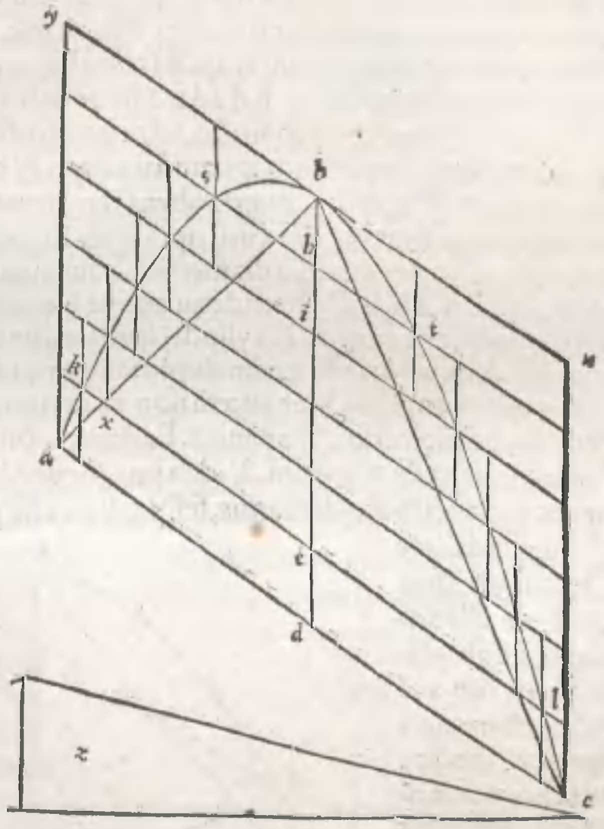
nem conoidalis æqualem esse cono z. nam si non est ęqualis, uel maior uel minor

existet.

exiſtet. Eſto itaq; ſi fieri poteſt, maior: inſcribatur aũt portioni quædam ſolida figura, & altera circumſcribatur ex cylindris altitudinem æqualem habentibus, cõpoſitam hoc pacto, ut circumſcripta ſuper inſcriptam minus addat eo, quo portio conoidalis excedit conum z: & ſit maximus cylindrorum ex quibus figura circũſcripta componitur, qui baſim habeat circulum circa diametrum a c conſtitutum, axem uero e d. eorum autem minimus ſit ille qui baſim habeat circulum circa s t diametrum deſcriptum, axem uero b i. Cylindrorum uero ex quibus figura inſcripta componitur, maximus ſit ille, qui baſim habeat circulum circa k l conſtitutum, axem uero d e. minimus autẽ, qui baſim habeat circulum circa s t diametrũ, axem autem h i. Educantur autem plana omnium cylindrorum ad ſuperficiem cylindri, qui baſim habeat circulum circa a c diametrum deſcriptum, axem uero b d: erit iam totus cylindrus diſſectus in cylindros, qui multitudine erunt æquales illis qui ſunt in figura inſcripta compræhenſi, magnitudine uero æquales eorum maximo. & quoniam circumſcripta figura portioni minus addit ſuper inſcriptam, quàm portio ſuper conum, conſtat figuram inſcriptam maiorem haberi cono z. Primus autem cylindrus eorum qui ſunt in toto cylindro, qui axem habet d e, ad primum cylindrum eorum qui in figura portioni inſcripta habentur, habentem axem d e, eãdem habet proportionem, quam d a habet ad k e poteſtate. Hæc autem eadem eſt illi quam habet b d ad b e, & quam habet d a ad e x. ſimiliter oſtenditur, ſecundus cylindrus eorum qui ſunt in toto cylindro, qui axem habet e f, ad ſecundum cylindrũ eorum qui ſunt in figura inſcripta, eandem habere proportionem, quam p e, hoc eſt d a, ad q f. & unuſquiſq; cæterorũ qui ſunt in toto cylindro, ad cylindrum in figura inſcripta, qui baſim habeant eandem, eãdem habebit proportionem, quam dimidia diametros baſis ſuæ, habet ad eam ſui partem quæ intermedia linearum rectarum a b, b d compræhenditur. & omnis cylindri, qui in cylindro compræhenduntur, cuius baſis eſt circulus circa a c diametrum deſcriptus, axis uero d i linea recta, ad omnes cylindros in figura inſcripta compræhenſos, eandem habebunt proportionem, quam omnes rectæ lineæ ex centris circulorum eductæ, qui ſunt in baſibus dictorum cylindrorum, ad omnes lineas rectas inter medium a b & b d interceptas. Dictæ uero lineæ rectæ ſunt dictis, dempta a d, pluſquam dupla. quare & cylindri ſimul omnes qui in toto ſunt cylindro, cuius axis eſt d i, erunt plus quàm dupli figuræ inſcriptæ: multo magis autem totus cylindrus, cuius axis eſt b d, exiſtet plus quàm duplus figuræ inſcriptæ. Idem uero erat coni z duplus. figura igitur inſcripta minor erit cono z, quod eſt contra id quod poſitum fuerat. nam poſita fuerat maior: non eſt igitur portio conoidalis maior cono z. Similiter autem neq; minor. Rurſus enim inſcribatur figura, & circumſcribatur hoc pacto ut altera alteram excedat minus eo quo conus z excedit portionem conoidalis, & cætera ut ſuprà ſimiliter diſponantur. Quoniam igitur inſcripta figura portione minor exiſtit, & inſcripta minus exceditur à circumſcripta, quàm portio à cono, patet quod circumſcripta minor eſt cono. Item primus cylindrus in toto cylindro exiſtens, qui axem habet d e, ad primum cylindrum eorum qui in figura circumſcripta exiſtunt, eundem qui habet axem e d, eam habet proportionem, quam quadratum a d ad ipſum idem. Secundus autem cylindrus eorum qui ſunt in toto cylindro, qui habet axem e f, ad ſecũdum cylindrum in figura circumſcripta collocatum, qui baſim habet e f, eandem habet proportionem quam d a ad k e poteſtate: hæc autem eſt eadem ei quam habet b d ad b e, & ei quam habet d a ad e x. & reliquorum cylindrorum unuſquiſque qui in toto cylindro ſunt, qui habeant axem æqualem d e, ad unumquemque cylindrorum qui ſunt in figura circumſcripta, qui habent eandem axem, habebit eam proportionem quam dimidia baſis eius ad eam ſui partem, quæ inter a b, b d interducitur media: & omnis cylindri in toto cylindro exiſtẽtes, quorũ axis eſt b d

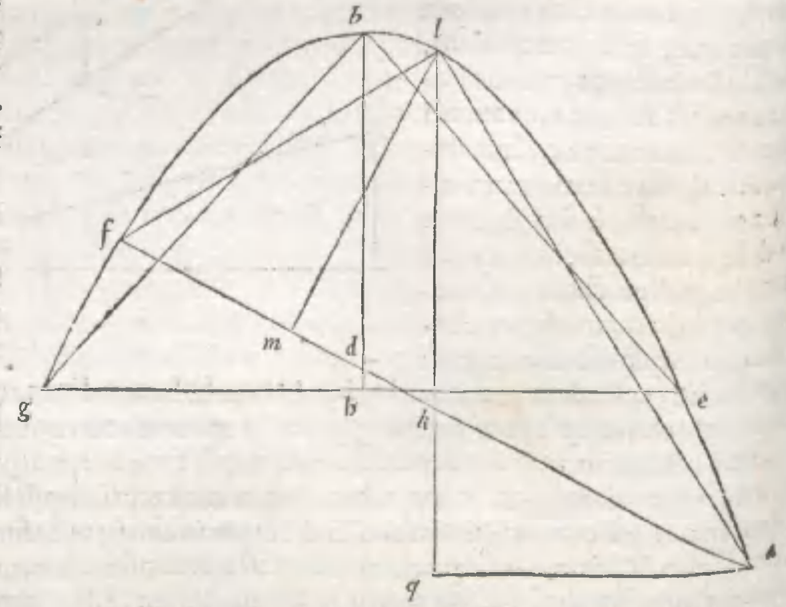
linea recta, ad omnis cylindros in figura circumſcripta collocatos eam habebunt proportionem, quam omnes rectæ lineæ ad omnes lineas rectas: ipſæ autem omnes rectæ, quæ ex centris circulorum exeunt, qui baſes ſunt cylindrorum ad rectas lineas omnes quæ ab ipſis aſſumptę ſunt, ſimul cum a d minores ſunt, quàm duplæ. manifeſtum igitur, quod cylindri omnes qui in toto cylindro exiſtunt, minores erũt quàm dupli ad cylindros in figura circumſcripta exiſtentes. cylindrus igitur, qui baſim habet circulum circa diametrum a c conſtitutum, axem autem b d, minor exiſtet quàm duplus circumſcriptæ figuræ. non eſt autem ſic, uerum maior quàm duplus eadem. nam coni z duplus exiſtit. Et oſtenſum eſt figurã circumſcriptam cono z eſſe minorem. non igitur conoidalis portio cono z minor. & oſtenſum eſt, quod neq; eo maior habetur. quare eam eſſe ſeſquialteram coni habentis baſim, & axem cum portione eundem, neceſſariò concluſum eſt.

SI à conoidali rectangulo portio abſcindatur plano ſuper axem non erecto, ſi- 24
militer ſeſquialtera eſſe probatur portionis abſciſſæ à cono quæ baſim & axẽ eundem habet, cũm ipſa portione. Eſto portio conoidalis rectanguli abſciſſa uti proponitur, & ipſo ſecto à plano ſecũdum axem ducto, erecto ſuper planam quod abſcindit portionem, figuræ quidem ſectio eſto a b c, coni rectanguli ſectio: plani uero abſcindentis portionem eſto a c linea recta. ducatur autem u y æquediſtans ipſi a c, et contingens coni rectanguli ſectionem in puncto b. & ducatur b d æquediſtans axi. Hæc autẽ iam in duo diuidit ipſam a c. planum autem ab u y educatur, æquediſtãs plano quod eſt ſecundum a d. cõtinget autem hoc conoidalem in puncto b, & erit portionis uertex punctum b, axis autem b d. Quoniam igitur planũ quod eſt ſecundum a c, nõ erectum ſuper axẽ, ſecat conoidalem, ſectio huiuſmodi erit coni acutianguli ſectio. eius autem maior diametros a c. Cum itaque ſit circa a c diametrum coni acutianguli ſectio, & linea b d ſit à centro ſectionis coni acutianguli erecta, in plano erecto ex diametro ſuper plano in quo ipſa eſt coni acutianguli ſectio, cylindrus poterit effingi qui axem habeat in linea recta a b d, in cuius ſuperficie exiſtet ipſa coni acutianguli ſectio: poterit etiã conus effici, qui uerticẽ habeat pũctum b, in cuius ſuperficie exiſtet ipſa coni acutianguli ſectio, & fruſtũ cylindri quoddam quod baſim habeat ipſam coni acutianguli ſectionem circa a c diametrum collocatam, axem autẽ b d: & portio coni qui baſim habeat eandem cum fruſto & portione, & axem eũdem. Eſt igitur oſtendendum, conoidalis portionem huiuſmodi abſciſoris coni eſſe ſeſquialteram. Eſto itaq; z conus ſeſquialter



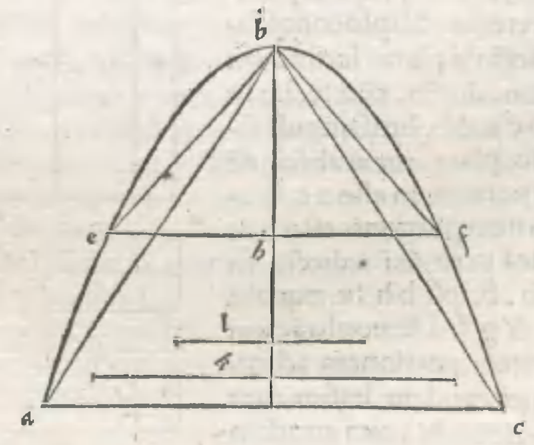
ter huius abſciſoris coni prædicti. erit igitur cylindri fruſtum, quod baſim habeat eandem cum abſciſore, & axem eundem, duplus coni z. hic namq; ſeſquialter exiſtit abſciſoris coni, baſim habentis eandem cum portione, & axem eundem. abſciſor autem coni dictus tertia pars exiſtit fruſti cylindri, baſim & axem habentis eūdem cū portione. Dico itaq; neceſſe eſſe portionē conoidalis cono z eſſe æqualē. nā ſi non ęqualis erit, maior aut minor eo exiſtet. Eſto primū maior, ſi fieri poteſt: inſcribatur itaq; portioni quædam ſolida figura, & altera circumſcribatur ex fruſtis cylindrorū compoſita, quæ baſim habeant & altitudinem æqualem inter ſe, hoc pacto, ut figura circūſcripta ſuper inſcriptam figuram addat minus eo, quo portio conoidalis excedit conum z: & plana fruſtorum erunt ad ſuperficiem fruſti baſim habentis eandem cum portione, & axem eundem. Rurſus itaq; primū fruſtum eorum quæ in toto fruſto quod habet axem d e, ad primum fruſtum eorum quæ ſunt in figura inſcripta, quod habet axem d e, eam habet proportionem quam quadratum a d, ad quadratum k e. nam ſi fruſta æquam altitudinem habentia, eandem inuicem proportionem ſuis baſibus habeant, baſes autē eorum cum ſint ſimiles conorum acutianguli ſectiones, eandem habent inter ſe proportionem, quam diametri eius rationis ſuæ poteſtate: ſunt autem diametrorū eiuſdem rationis dimidiæ lineæ a d, k e. quam autem habet proportionem a d ad ipſam k e poteſtate, eam habet b d ad b e lōgitudine, cum b d diametro æquediſtet. ipſæ uero a d, k e æquediſtant ei quæ ſecundum a c, puncto b contingit: quam autem proportionem habet b d ad b e, hanc habet a d ad e x. Primum igitur fruſtum eorum qui ſunt in toto fruſto, ad primū fruſtum in figura inſcripta collocatum, eam habet proportionē, quam a d ad e x: & reliquorum eorum quæ ſunt in toto fruſto unumquodq;, quod habet axem æqualem ipſi d e, ad unumquodque fruſtorum quæ ſunt in figura inſcripta, quod habeat axem eundem, habet eādem proportionē quam dimidia diametri baſium eius ad eam quæ ab ipſa eſt media, interſecta inter a b, b d. Oſtendetur autem ſimiliter ſuperioribus inſcriptam figuram maiorem eſſe cono z, & cylindri fruſtum quod baſim habeat & axem cū portione eundem, maius eſſe quam duplum figuræ inſcriptæ: quare etiam coni z maius eſſe quam duplum. Hoc autem non eſt uerum, ſed duplum exiſtit: non eſt igitur maior portio conoidalis cono z. Eadem ratione oſtēdetur, quod neq; minor. Vnde conſtat, eſſe æqualem. & ideo portio conoidalis coni baſim eandem, & axē cum portione eundem habentis, ſeſquialtera eſſe probata eſt.

25 SI conoidalis rectanguli duæ portiones abſcindantur, duob. planis, altero ſup axē erecto, altero non ſuper axē erecto, ſintq; portionū axes ęquales, ipſas quoq; portiones ęquales eſſe neceſſe eſt. Abſcindanť itaque à conoidali duę portiōes, ut dictū eſt: ſecto itaq; conoidali ſecūdū axē plano ducto, & altero plano ſuper axē erecto, eſto conoidalis ſectio a b c, coni rectāguli ſectio, eius aūt diametros b d:



b d: planorum uero ſint ſectiones a f, e c lineæ rectæ: eius quidem quod eſt ſuper axem erectum ſit e c, nō erecti uero ſuper axem ſit a f. axes autem portionum ſunto b h, k l inuicem æquales, uertices uero puncta b l: demonſtrandum eſt, quod portio conoidalis cuius uertex eſt b, portioni conoidalis cuius uertex eſt l, exiſtit æqualis. Quoniam igitur ab eadem coni rectanguli ſectione coni duæ portiones ſunt abſciſæ, a l f, & e b c, & earum ſunt diametri æquales k l, b h, triāgulus a l k æqualis eſt triangulo e h b. oſtenſum eſt enim, triangulum a l f triangulo e b c eſſe æqualem. ducatur iam a q perpendicularis ſuper k l eductam: & quoniam b h, & k l ſunt ęquales, ſunt quoq; e h & a q æquales. Eſto itaq; in portione cuius uertex eſt b conus inſcriptus, eandem baſim & axem eundem habens cum portione: in portione uero cuius uertex l, ſit abſciſor coni eandem baſim & axem eundem cū portione habens: ducatur autem perpendicularis ab l ſuper a f, quæ ſit l n: erit iā ipſa altitudo abſciſoris coni, cuius uertex eſt l. abſciſor autem coni cuius uertex l, & conus cuius uertex b, habent inter ſe proportionem compoſitam, ex baſiū proportione, & ex altitudinum proportione. habent itaq; proportionem compoſitam ex proportione, quam habet ſpacium contentum à ſectione coni acutianguli circa diametrum a f conſtituta, ad circulum circa diametrum e c deſcriptum, & ex proportione quam habet n l ad b h. ſpacium autem ab coni acutianguli ſectione contentum ad eundem circulum eam habet proportionem, quam id quod fit ex diametris altera in alteram ductis ad quadratum e c. & abſciſor coni cuius uertex eſt l, ad conum cuius uertex eſt b, habet proportionem compoſitam ex proportione, quam habet k a ad e h, & ex proportione quam habet n l ad b h. at uero k a dimidia eſt diametri baſis abſciſoris coni, cuius uertex eſt l: ipſa uero e h, dimidia eſt diametri baſis coni: ipſe autem l n, b h ſunt eorum altitudines. habet autem l n ad b h eandem proportionem, quam habet ad k l, cum b h ſit ipſi k l æqualis: habet etiam l n ad k l eam, quam q a ad a k: habet quoq; abſciſor coni ad conū proportionem compoſitam, ex ea quam habet a k ad a q. nam a q ęquatur ipſi e h, & ex ea quam habet l n ad h b. Compoſita autem ex dictis proportio, ſcilicet a k, ad a q, eadem eſt ei quam habet l n ad l k. abſciſor ergo habet ad conum eam proportionem, quam l n ad l k, & quam habet l n ad b h. b h autem æquatur ipſi l k. manifeſtum eſt igitur, quod abſciſor coni cuius uertex eſt l, æquatur cono cuius uertex eſt b. Ex quo conſtat portiones quoq; æquas eſſe, cum altera earum coni ſeſquialtera ſit, altera itē abſciſoris coni ſeſquialtera, cū hic & ille ſint æquales.

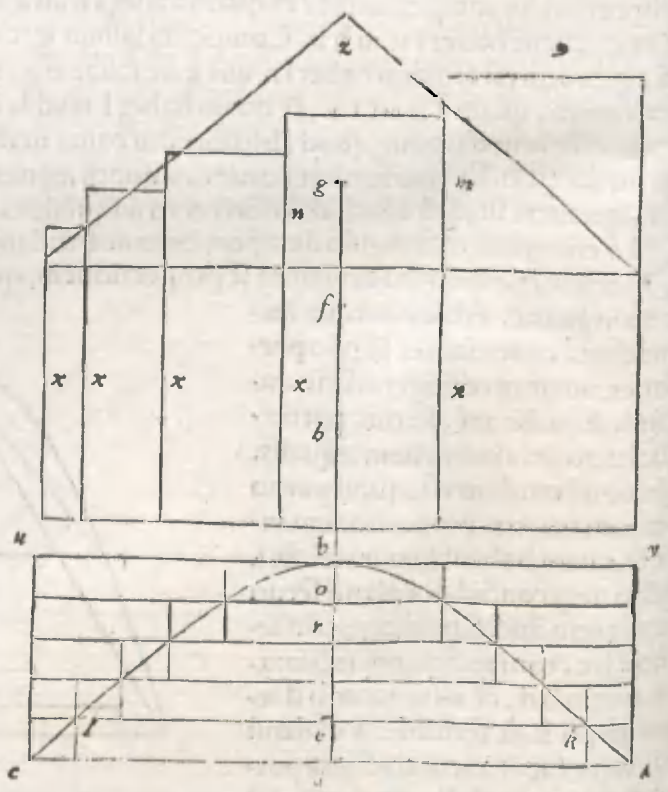
SI à conoidali rectangulo duæ portiones abſcindantur planis utcunq; ductis, portiones habebunt eam inter ſe proportionem, quam quadrata axium inter ſe retinuerint. 26 Abſcindantur itaque duæ à conoidali rectāgulo portiones, utcunq; contigerit. Eſto autem k æqualis axi alterius portionis: l uero axi alterius item æqualis. Demonſtrandum eſt, quod portiones eam habent proportionem inter ſe, quam habent quadrata k & l. ſectio itaq; conoidali à plano ſecundum axem ducto, portionis eſto ſectio a b c, coni rectanguli ſectio: axis autem b d. & aſſumatur b d æqualis ipſi k, & ſecundum d planū educatur ſuper axem erectum: portio autem conoidalis, quæ baſim habet circulum circa diametrum a c deſcriptū, axem uero b d, æqualis eſt portioni a-



xem habenti æqualem ipſi k. Siquidem igitur ipſa k ſit æqualis ipſi l, manifeſtũ eſt portiones quoq; inter ſe eſſe ęquales. nam utraq; ipſarum erit æqualis uni & eidẽ, & quadrata ipſarum l k æqualia. quare eandem habebunt proportionem portiones, quam habuerint quadrata axium. Si aũt l non ſit æqualis ipſi k, eſto æqualis ipſa l ipſi b h. & per punctum h ducatur planum erectum ſuper axem: portio autem, quæ baſim habuerit circulum circa diametrum e f deſcriptum, axem autem b h, æquatur portioni habenti axem æqualem ipſi l. Deſcribantur iam coni, qui baſes habeãt circulos circa diametros a c, e f conſtitutos, uerticem uero b punctũ. Conus aũt habens axem b d, ad conũ habentẽ axem b h, proportionem habet cõpoſitam ex ea quam habet a d ad h e poteſtate, & ex ea quam habet d b ad b h longitudine. quam autem proportionem habet d a ad h e poteſtate, eam habet b d ad b h longitudine. conus igitur habẽs axem b d, ad conum habentem axem b h, habet proportionem compoſitam ex ea quam habet d b ad b h, & ex ea quam habet d b ad b h. hæc autem eſt eadem illi quam habet quadratum d b, ad quadratũ h b. quam proportionem autem habet conus axem habens b d, ad conum habentem axem h b, hanc habet eandem portio conoidalis habens axem b d, ad portionem habentem axem h b. utraq; enim utriq; eſt ſeſquialtera: & portioni axem habenti b d æquatur portio conoidalis axem habens æqualem ipſi k. portioni autem habenti axem ipſam h b, æquatur portio conoidalis axem habens æqualem ipſi l, & ipſi b d æquatur k, ipſi uero h b æquatur ipſa l. Clarum eſt ergo, quod portio conoidalis axem habens æqualem ipſi k, eandem habet proportionem ad portionem conoidalis habentem axem æqualem ipſi l, quam quadratum k ad quadratum l.

27 QVælibet portio conoidalis obtuſianguli abſciſa plano ſuper axem erecto, habet ad conum, qui eandem baſim & axem cum portione teneat eundem, eam proportionem, quã habet utraque ſimul linea quæ ſit æqualis axi portionis, et ea quæ ſit tripla lineę ad axem adiectæ, ad lineã his utriſque æqualem, axi portionis & lineæ duplæ, ad lineam axi adiectam.

Eſto aliqua portio conoidalis cuiuſpiam obtuſianguli, abſciſa plano ſuper axẽ erecto, & ipſo conoidali ſecto à plano ſecundum axem ducto. eius ſectio ſit a b c coni obtuſianguli ſectio: plani autem abſcindẽtis portionem eſto a c, & axis item portionis eſto b d: linea uero axi adiecta ſit b h, & ipſi b h ſit æqualis f h & g f. Demonſtrãdum eſt itaq;, portionem ad conum eandem baſim cum portione, & axem eundem habẽtem, eam habere proportionem, quam g d ad d f.



Eſto itaq; cylindrus quidam, eandem baſim, & axem

cum

cum portione eundem habens: eius uero latera eſto u a, c y. Eſto item conus quis in quo z, & hic ad conum habentem eandem baſim cum portione, & axem b d, eam habeat proportionem, quam habet g d ad d f. Dico tunc portionem conoidalis æqualem eſſe cono z. Quod ſi non fuerit ei æqualis, aut maiorem eo, aut minorem eſſe neceſſe eſt. Eſto primum, ut ſit ea maior ſi fieri poteſt: inſcribatur autem in portione quædam figura ſolida, & altera circumſcribatur ex cylindris æquam altitudinem habentibus compoſita, hoc pacto, ut figura circumſcripta ſuper inſcriptam minus eo addat, quo conoidalis portio ſuperat conum z. educantur iam plana omnium cylindrorum ad ſuperficiem cylindri, qui habeat baſim circulum circa diametrum a c conſtitutum, & axem b d: erit tunc hic cylindrus totus diſtributus in cylindros numero ęquales cylindris, qui in figura inſcripta ſunt extructi: magnitudine uero æquales maximo illorum. & quoniam circumſcripta figura minus excedit inſcriptam, quàm portio conum z, & figura circumſcripta maior eſt portione, conſtat inſcriptam quoq; cono z eſſe maiorem. eſto itaq; b r pars tertia ipſius b d, erit ergo g d tripla ad h r. Et quoniam cylindrus qui baſim habet circulum circa diametrum a c deſcriptum, axem uero b d, ad conum eandẽ baſim & axem eundem habentem, habet eam proportionem quam g d ad h r: dictus autem conus habet ad z conum, eam quam f d ad g d: proportionibus non menſis ſimiliter permutatis, habebit dictus cylindrus ad z conum eãdem proportionem, quam f d ad h r. Sunto autem lineæ poſitæ, in quibus x numero æquales portionibus eis quæ ſunt in b d linea recta, magnitudine uero unaquæq; æqualis f b: & ad unamquamq; ipſarum accedat ſpacium, ſuperans alterum forma quadrata, & eorum maximum eſto in quo f b d, minimum uero quod ſub f r b continetur: latera autem exceſſuum ſeſe æqualiter excedũt. nam illæ ſunt iſtis æquales, quæ in b d linea recta ſeſe pariter excedunt. Et eſto maximi exceſſus latus, in quo m æquale b d, minoris uero æquale b i. Sunto item alia ſpacia in quibus 9 multitudine iſtis æqualia, magnitudine uero unumquodq; æquale maximo quod cõtinetur ſub f d b. at uero cylindrus qui baſim habet circulum circa a c diametrum conſtitutum, axem autem d e, ad cylindrum qui baſim habet circulum circa k l diametrũ deſcriptum, axem aũt d e, eam habet proportionem, quam d a ad k e poteſtate. Hæc autem eadem eſt ei quam habet ſpaciũ contentum ſub f d, b d, ad cõtentum ſub f e, b e. in omni enim coni obtuſianguli ſectione hoc contingit. nam dupla eius quæ adiecta eſt, hoc eſt eius quæ ex centro obliquũ eſt formæ latus, & ſpacium x m, eſt æquale ei quod continetur ſub f d, b d. ei uero quod ſub f e, b e ęquale eſt ſpacium x n. eſt enim b d linea æqualis ipſi m. b e autem ipſi n æqualis. Cylindrus igitur qui baſim habet circulum circa diametrum a c deſcriptũ, axem autem d e, habet ad cylindrum qui baſim habet circulum circa diametrum k l conſtitutum, axem uero d e, eam proportionẽ, quam ſpacium 9 ad x m. Similiter autem oſtendetur & unuſquiſq; aliorum cylindrorum qui in toto cylindro exiſtũt, axem æqualem habens ipſi d e, habere ad cylindrum exiſtentem in figura inſcripta, habentem eundem axem, eam proportionem, quam habet ſpacium 9 ad ſibi correſpondens, eorum quæ ad ipſam n x acceſſerunt, cætera excedens quadrato. Sunt autem quędam magnitudines hi cylindri, qui in toto cylindro exiſtũt, quorum unuſquiſq; axem habet æqualem ipſi d e: & aliæ item magnitudines ea ſpacia, quæ ſunt in quibus 9 numero, illis æquales quæ ſecundum binas & binas eandem habent proportionem, cum cylindri ſint inter ſe æquales, & ſpacia ſimiliter in quibus 9 inuicem æqualia. Referũtur autem cylindrorum quidam ad alios quoſdam cylindros, qui in figura inſcripta exiſtunt: extremus autem nullo pacto refertur: & ſpacia in quibus 9 ad alia ſpacia, ea ſcilicet quæ ad m x acceſſerũt, excedentia forma quadrata, ſimilia ſunt in proportionibus: extremũ autem nullo pacto refertur. manifeſtum eſt, quod omnis cylindri qui in toto cylindro exi-

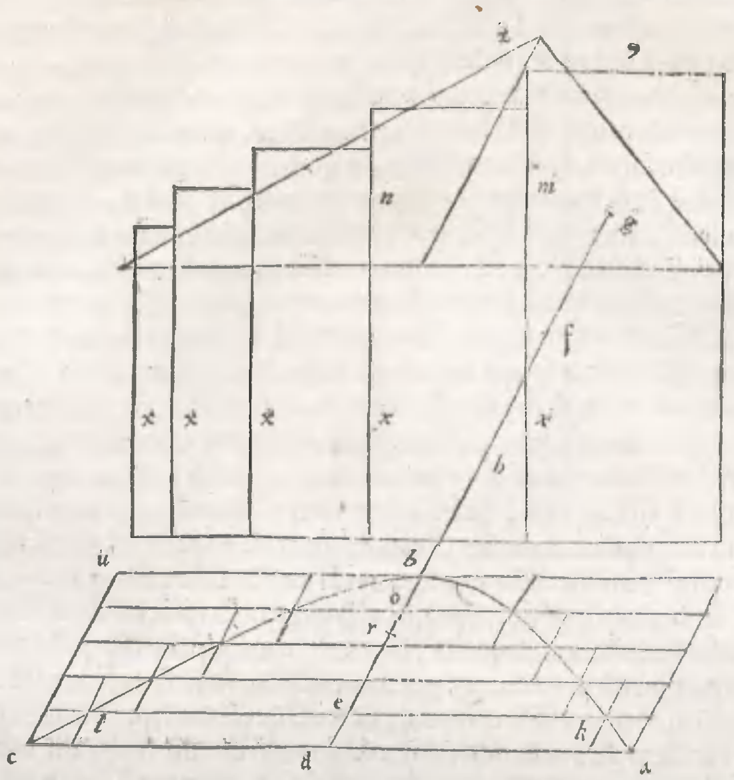
l 3 ſtunt,

ſtunt,ad omnis cylindros in ſigura inſcripta conſtitutos eam habebũt proportionem,quã ſpacia in quibus 9 ad omnia exceſſa,dempto maximo. Oſtenſum eſt autem,quod omnia ſpacia in quibus 9,ad omnia acceſſa dempto maximo maiorem habent proportionem,quam m x ad eam quæ ſit æqualis utriſq; ſimul iſtis,dimidiæ x & tertiæ parti ipſius m. quare & totus cylindrus ad figuram inſcriptam maiorem habet proportionem,quam f d ad h r,quam totus cylindrus oſtenſus eſt habere ad conum z. totus ergo cylindrus maiorẽ habet proportionem ad figuram inſcriptam,quam ad conum z. quare ſequitur,conum z maiorem eſſe figura inſcripta:quod quidẽ eſſe nõ poteſt. nam ſupra oſtenſum fuit, figuram inſcriptã cono z eſſe maiorem:non eſt igitur portio conoidalis maior cono z. Neq; utiq; minor. Eſto enim,ſi eſſe poteſt. rurſus inſcribatur portioni figura ſolida,& altera circumſcribatur ex cylindris altitudinem æqualem habentibus compoſita,hoc pacto,ut circumſcripta figura addat ſuper inſcriptam minus eo quo conus portionem excedit,& cętera præparentur ut prius. Quoniam igitur figura inſcripta portione minor exiſtit, & circumſcripta inſcriptam minus excedit quam conus z portionem, manifeſtum eſt,circumſcriptam figuram cono z eſſe minorem. Rurſus primus cylindrus eorum qui in toto cylindro exiſtunt,qui habet axem d e, ad primum cylindrum in figura circumſcripta conſtitutum, habentem axem d e,eam habet proportionem quam ſpacium 9 ad m x. nam utrumq; eſt æquale: & cæterorum cylindrorum unuſquiſq;, eorum qui ſunt in toto cylindro, habens axem æqualem d e,ad cylindrum qui eſt in circumſcripta figura,in eandem partem exeũtem,& eundem axem habentem,eam habebit proportionem,quam ſpaciũ 9 ad ſpacium ſibi correſpondens,quod eſt adiectum ad m x ſimul cum exceſſu: propterea quod unumquodq; circumſcriptorum, dempto maximo,æquale eſt unicuiq; inſcriptorum ſimul cum maximo. Habebit igitur totus cylindrus ad figuram circumſcriptã eam proportionem,quã omnia ſpacia ad omnia adiecta,ſimul cũ exceſſibus. Oſtenſum eſt rurſus,omnia ſpacia 9 ad omnia alia minorem habere proportionẽ, quam m x ad eam quæ ſit æqualis utriſq;, ſimul dimidiæ x & tertię parti m,quare & totus cylindrus ad circumſcriptam figuram minorem habebit proportionem,quam f d ad h r. uerum ſicut f d ad h r, ſic totus cylindrus ad conum z. minorem igitur habebit proportionem ipſe cylindrus ad figuram circumſcriptam,quam ad conum z. quare ſequitur,figuram circumſcriptam cono z eſſe maiorem:quod quidem eſſe non poteſt. nam figura circumſcripta oſtenſa eſt eſſe minor cono z. non eſt igitur portio conoidalis cono z minor. Cum igitur neque maior, neq; minor eſſe poſſit,conſtat propoſitum eſſe demonſtratum.

28 SI portio conoidalis obtuſianguli abſcindatur plano etiam ſuper axem non erecto, eam proportionem habebit ad abſciſorem coni, baſim eãdem & axem eundem cum portione habentem, quam habent utræq; ſimul,linea æqualis axi portionis,& tripla ad adiectã axi,ad eam quæ ſit æqualis utriſq; ſimul,axi,& eius quæ dupla ſit ad axi adiectã. Eſto portio conoidalis obtuſianguli abſciſa plano ſuper axem non erecto: ipſa uero figura alio plano abſciſa ſecũdum axem ducto, erecto ſuper planum abſcindens portionem figuræ quidem: eſto ſectio a b c coni obtuſianguli ſectio, plani autem abſcindentis portionem eſto linea recta c a: uertex autem coni complectentis conoidale eſto punctum h, & ducatur u y per b æquediſtans ipſi a c, & contingens coni ſectionem in puncto b, & ducatur ab h ad b coniungens, & educatur in longum: diuidet propter eadem f æqualia ipſam a c, diuidet uerſus eam partem a c, & erit uertex portionis b punctum, axis autem b d. adiecta uero axi b h: ipſi autem b h æqualis eſto h f & f g, ab ipſa uero u y exeat planum æquediſtans plano ſecundum a c educto. continget autem conoidale in puncto b, & erit planum ſecũdum a c eductum non ſuper axem erectum, & diuidet conoidale cuius ſectio erit coni acutianguli ſectio, diametros autem

eius

eius maior c a, cum ſit alia coni acutianguli ſectio circa diametrum a c, & recta linea b d à centro erecta in plano quod eſt à diametro erectum, ſuper planũ in quo eſt coni acutianguli ſectio. Poteſt igitur cylindrus effingi, qui axem habeat in linea recta b d, in cuius ſuperficie ſit coni acutianguli ſectio circa diametrum a c cõſtituta. hoc igitur effecto, erit quoddã cylindri fruſtũ, eandem habẽs cũ portiõe baſim, & axem eundem: altera uero eius baſis erit planũ, quod eſt ſecundum u y ductum. Item poterit etiam conus extrui, qui uerticem habeat pũctum b, in cuius ſuperficie erit coni acutianguli ſectio circa diametrum a c cõſtructa, & axis idem.



Hoc inuento, oſtendendum eſt portionem conoidalis ad coni abſciſorem dictum, eam habere proportionem,quam g d ad d f. ſicut enim g d ad d f, ita ſit conus z ad abſciſorem coni. Dico portionem conoidalis eſſe æqualem cono z. Si igitur non eſt æqualis portio conoidalis cono z,ſi eſſe poteſt,ſit maior. inſcribatur autem figuræ conoidali figura ſolida, & altera circumſcribatur ex fruſtis cylindri eandem altitudinem habentibus compoſita,hac ratione, ut circumſcripta figura ſuper inſcriptam minus addat, quam portio conoidalis ſuper conum z. Cum igitur figura circumſcripta ſit maior portione,& minus excedat inſcriptam figuram,quam portio conum z: manifeſtum eſt ſequi,inſcriptam figuram cono z eſſe maiorem. educantur autem plana fruſtorum omnium,quæ in figura ſunt inſcripta, exibunt ad ſuperficiem fruſti baſim habentis cum portione eandem,& axem eundem: & eſto b r tertia pars ipſius b d,& cętera omnia ſimiliter ſuperioribus diſponantur. Rurſus itaq; primum fruſtum eorum quæ ſunt in totõ cylindri fruſto, quod habet axem d e,ad primum fruſtum in figura inſcripta conſtitutum,habens axem d e,eã proportionem habet,quam quadratum a d ad quadratum k e. nam fruſta æqualem altitudinem habentia eam habent inter ſe proportionem, quam eorum baſes habere contigerit: cum ſint coni acutianguli ſectiones ſimiles, habebunt inuicem eam proportionem, quam earum diametri eiuſdem rationis habuerint poteſtate: quam autem habet quadratum a d proportionem ad quadratum k e,eam habet id quod ſub f d,d b continetur, ad id quod ſub f e, e b: cum f d ſit ducta per h, ſecundum eas quæ proxime concidunt & concurrunt: ipſæ uero a d,k e æquediſtantes ſunt eis, quæ ſecundum b contingunt. Eſt autem id quod ſub f d,

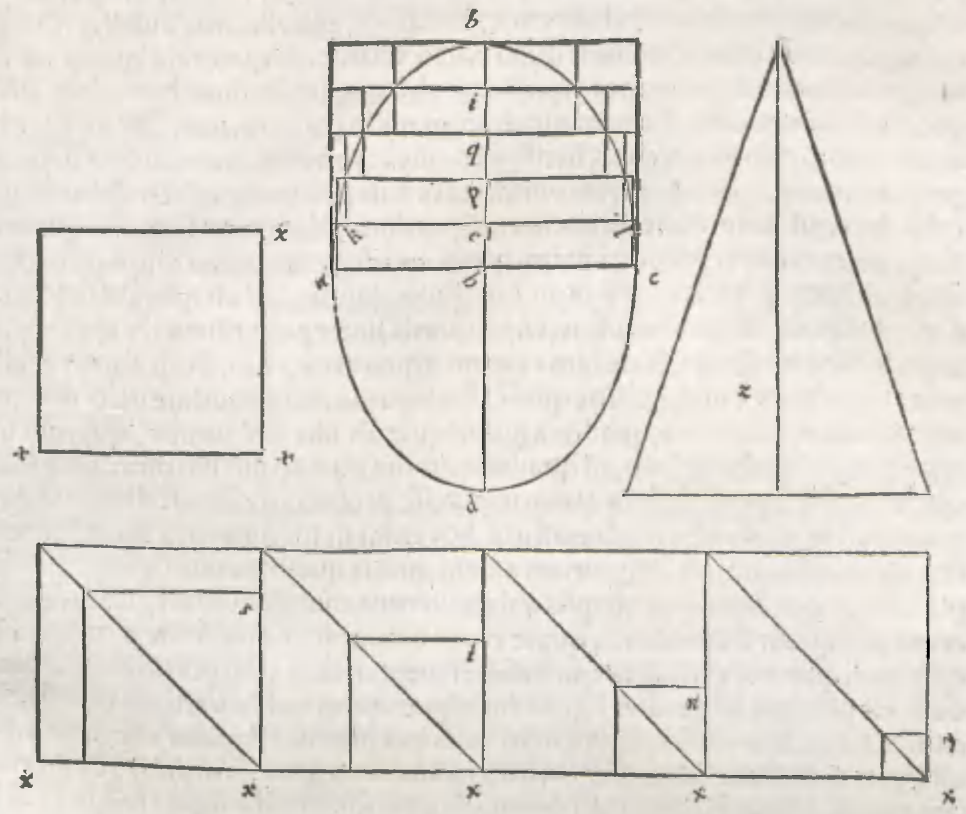
d b,

d b,continetur æquale spacio 9:quod autem sub f e,e b,æquale x n.Habet igitur primum frustum in toto frusto existens, quod axem habet d e,ad primum frustū in figura inscripta constitutum,quod axem habet d e, eam proportionem, quam spacium 9 ad x n,& aliorum unumquodq; in frusto toto existentium,axem habē tium æqualem ipsi d e,ad frustū quod existit in figura inscripta,illi correspondēs, & axem habens æqualem ipsi d e, eam proportionem, quam 9 spacium ad sibi correspondens,eorum quæ accesserunt ad n x, quæ sese excedunt forma quadrata.Similiter sunt quædam magnitudines, quæ sunt in toto frusto : & aliæ rursus magnitudines,spacia uidelicet,in quibus 9 numero quidem ęquales ipsis frustis, & binæ,eandem habent proportionem ipsis frustis. Dicuntur autem frusta ad alia frusta in figura inscripta constituta, extremum autem frustum nullo pacto dicitur:spacia uero 9 ad alia spacia dicuntur,ad ea quæ ad m x accesserunt quadrata forma superantia,similia similibus proportionibus.extremum aūt nullo pacto dicit̄.Constat igitur quod omnia frusta ad omnia eandem habebunt proportionem,quā omnia spacia ad omnia adiecta,dēpto maximo. Omnia uero spacia ad omnia adiecta, dempto maximo, maiorem habent proportionem, quàm n x ad eam quæ sit utrisque simul æqualis, dimidiæ x & tertiæ parti m.quare & maiorē ea quam habet f d ad h r: maiorem ergo habet proportionem frustum totum ad figuram inscriptam, quàm ad conum z. quod quidem esse non potest. Nam figura inscripta fuit demonstrata maior esse cono z.Non est igitur conoidalis portio cono z maior.Si autem ponatur conoidalis portio minor esse cono z,figura solida in portione descripta,& alia circumscripta,ex cylindris altitudinem æqualem habentibus composita, ita ut circumscripta inscriptā eo minus excedat, quo conus z ponitur excedere portionem.Rursus ostendetur,similiter circumscriptā figuram cono z esse minorem, & frustū cylindri quod basim habeat cum portione eandem,& axem eundem,ad figuram circumscriptam minorem habere proportionem,quàm ad conum z:quod esse non potest. Non est igitur portio conoidalis maior cono z,neq; minor esse potest.Necesse ergò est, æqualem esse.quare patet propositum.

29 CVIuslibet figuræ sphæroidis plano per cētrum ducto, & erecto super axem sectæ.dimidium sphæroidis duplum est coni qui basim habet eandem cum portione,& axem eundem. Esto sphæroidis portio plano per centrum ducto, & erecto super axem abscissa: secta uero sphæroide alio plano secundum axem ducto,huius portionis sectio sit a b c d,coni acutianguli sectio: eius autem diametros & axis sphæroidis b d,centrum uero h.nihil autem intererit siue b d sit maior diametros, siue minor sectionis coni acutianguli: plani uero abscindentis figuram sectio sit a c linea recta, & ipsa transibit per h,& rectos angulos faciet ad b d, cum planum ponatur per centrum duci,& super axem esse erectum. Ostendendum itaq;,dimidiam sphæroidis portionem, quæ basim habet circulum circa diametrum a c descriptum,uerticem uero punctum b,duplam esse coni eius qui basim habeat cum portione eandem,& axem eūdem.Esto igitur conus quis,in quo z duplus coni basim habentis cum portione eādem,& axem eundem,scilicet h b. Dico dimidium sphæroidis cono z esse æquale. Si enim dimidium dictum dicatur cono dicto minime æquale esse, esto primū si fieri potest maius eo, & iam inscribatur portioni dimidiæ sphæroidis figura solida,& altera circumscribatur ex cylindris æqualem altitudinem habentibus composita,ita ut circumscripta inscriptam minus excedat eo quo dimidium sphæroidis conum superat. Cum igitur circumscripta figura maior sit dimidio sphæroidis,& minus excedat figuram inscriptam,quàm sphæroidis dimidium excedat conum z,sequitur figuram portioni inscriptam cono z esse maiorem. Esto iam cylindrus,qui basim habeat circulū circa diametrum a c constitutū, axem uero b h. Quoniā igitur hic cylindrus tri-

plus

plus habetur coni, qui basim habeat cum portione eandem, & axem eundem: conus uero z eiusdem coni duplus existit, constat cylindrum hunc cono z sesquialterum haberi.Educantur itaq; plana omnia cylindrorum, ex quibus figura por



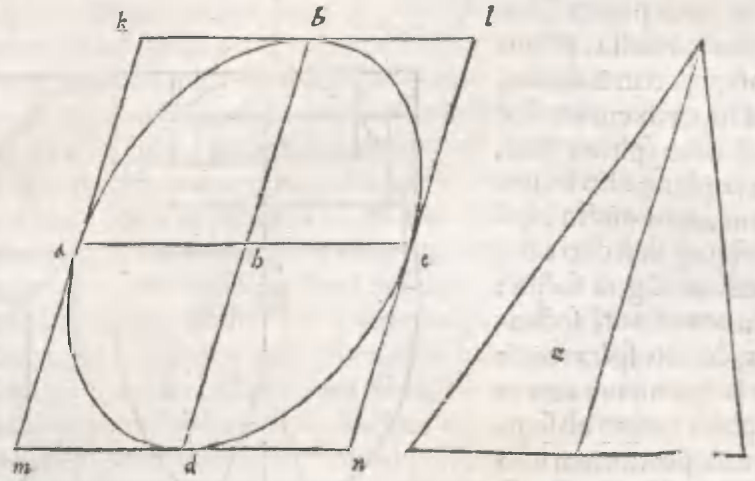
tioni inscripta conficitur, exibunt ad superficiem cylindri basim habentis cū portione eandem,& axem eundem.erit iam totus cylindrus in cylindros distributus, qui multitudine sunt æquales in figura inscripta constitutis:magnitudine autem maximo illorum æquales.Sunto iam lineæ positæ,in quibus x multitudine æquales portionibus lineæ b h rectæ, magnitudine uero unaquæque æqualis b h: & ab unaquaq; quadratum constituatur, ab ultimo uero quadrato auferatur gnomon qui latitudinem habeat æqualem b i. erit autem hic æqualis ei quod continetur sub b i, i d: à quadrato autem ei proximo auferatur gnomon,latitudinem habens duplam ipsius b i:erit & hic ęqualis contento sub e q,q d.& perpetuò à quadrato sequente gnomon auferatur,latitudinem habens pręcedentis eum gnomonis,& ante eum ablati portionem maiorem:eritq; utiq; eorum unusquisq; æqualis ei quod sub portionibus b d continetur,quarum altera portio æqualis fuerit latitudini gnomonis. erit etiam à quadrato secundo reliquum quadratum, latus habens æquale h q. Cylindrus autem primus eorum qui in toto cylindro constant, axem habens h e, ad primum cylindrum eorum qui in figura inscripta continentur,eundem axem h e habentem, eam habet proportionem,quam quadratū a h ad quadratum k e:quare & quam contentum sub b d,d h,ad contentum sub b e, e d: habet igitur cylindrus ad cylindrum eam proportionem,quam quadratum primum habet ad gnomonem, à quadrato secundo ablatum. Similiter autem & aliorum cylindrorum unusquisq;, qui axem habeat æqualem ipsi h e, ad cylindrum in figura inscripta cōstitutum,axem cum eo eundem habentem, eam pro-

m portio-

portionem habet, quam quadratum ſibi ſimiliter ordinatũ, ad gnomonem à quadrato ſibi proxime ſubſequenti ablatum: erunt iam quædam magnitudines, uidelicet cylindri qui ſunt in toto cylindro, & item aliæ, ſcilicet quadrata linearum x x æquales multitudine cylindris: & binæ & binæ eandem habent proportionem. Dicuntur autem cylindri ad alias magnitudines, ad cylindros uidelicet in figura inſcripta conſtitutos: extremus nullo pacto dicitur. & quadrata quoq; ad alias magnitudines, ad gnomones à quadratis ablatos, ſimilia ſimilibus relata eiſdem proportionibus: ultimũ autem quadratum nullo pacto dicitur. Omnis igitur cylindri in toto cylindro comprehenſi, ad omnes cylindros alios eandem habebunt proportionem, quam quadrata omnia ad omnis gnomones ab eis ablatos. quare cylindrus qui baſim habet eandem cum portione, & axem eũdem, ad figuram inſcriptam eam habet proportionem, quam quadrata omnia ad gnomones omnis ab eis ablatos. quadrata uero omnibus gnomonibus, qui ab ipſis ablati fuerunt, ſunt pluſquam ſeſquialtera: ſunt enim quædã lineæ poſitæ hæ x r, x s, x t, x y, x u, æquali ſeſe excedentes, & minima earum æquatur exceſſui. Sunt autem & aliæ lineæ, in quibus x x multitudine quidẽ iſtis æquales, magnitudine uero unaquæq; æqualis earum maximæ. quadrata igitur quæ ab illis efficiuntur, quarum unaquæq; æqualis eſt maximæ, ad quadrata omnia quæ ab illis naſcũtur, quæ ſeſe æquali exceſſu ſuperãt, minus quàm tripla eſſe probatum eſt: ad reliqua uero, dẽpto maximo, pluſquam tripla exiſtunt. hoc enim in his quæ circa elicas ſunt expoſita, demonſtratum eſt. Quoniam autem omnia quadrata minus ſunt quàm tripla, ad alia quadrata quæ ab ipſis ablata fuerunt, manifeſtum eſt quod reſiduorũ erunt pluſquam ſeſquialtera: quare erunt omnium gnomonum pluſquam ſeſquialtera. quare & cylindrus qui baſim habet eandem cum portione, & axem eũdem, eſt pluſquã ſeſquialter figuræ inſcriptæ: quod quidem eſſe nõ poteſt. Nam coni z ſeſquialter exiſtit. figura uero inſcripta oſtenſa eſt maior eſſe cono z. non eſt igitur dimidium ſphæroidis cono z maius: neq; profectò minus. Nam eſto ſi fieri poteſt, minus. Rurſus inſcribatur dimidio ſphæroidis figura ſolida, & altera circumſcribatur ex cylindris æquam altitudinem habentibus compoſita, ita ut circumſcripta ſuper inſcriptam minus addat quàm conus z ſuper dimidium ſphæroidis: & reliqua ſint prioribus ſimiliter diſpoſita. Quoniam igitur figura inſcripta portione minor exiſtit, ſequitur circumſcriptam figuram cono z eſſe minorẽ. Rurſus primus cylindrus eorum qui in toto cylindro exiſtunt, qui habet axem h e, ad primum cylindrum eorum qui in figura circumſcripta cõſtructi ſunt, qui habet axem e h, eam habet proportionem, quam quadratum primum ad ipſummet. Secundus autem cylindrus eorum qui in toto cylindro, habens axem e p, ad ſecundum cylindrum eorum qui in circumſcripta figura exiſtunt, habentem axem e p, eam habet proportionem, quam ſecundum quadratum ad gnomonẽ ab eo ablatum, & reliquorum cylindrorum, qui in toto cylindro continentur unuſquiſq; qui axem habeat æqualem h e, ad cylindrum ſibi coniunctum, eorum qui ſunt in figura inſcripta, eandem habet proportionem, quam habet quadratum ſibi correſpondens ad gnomonem ab eo ablatum. Omnis igitur cylindri in toto cylindro conſtituti, ad omnis cylindros in figura circumſcripta comprehẽſos, eam habebunt proportionem, quam quadrata omnia ad id quod primo quadrato æquale eſt, & ad omnes gnomones à reliquis quadratis ablatos: & quadrata omnia ſunt minus quàm ſeſquialtera eius quod primo quadrato æquale exiſtit, & gnomonum à reliquis ablatorũ: propterea quod quadratis quæ à lineis ſeſe æqualiter excedentibus ſunt producta, dempto quadrato à maxima earũ producto, pluſquam tripla exiſtunt. Cylindrus igitur qui baſim cum portione habet eandem, & axem eũdem, eſt minor quàm ſeſquialter figura circumſcripta: quod quidem eſſe non poteſt, nam cono z ſeſquialter habetur: circumſcripta uero figu

ra oſtenſa eſt cono z minor eſſe: non erit igitur dimidium ſphæroidis cono z minus: uerum neq; maius. neceſſe eſt igitur eſſe æquale.

SI figura ſphæroidis plano ſecetur per centrum ducto, ſuper axem non erecto, 50
dimidium ſphæroidis ſimiliter duplum exiſtet abſciſoris coni, qui quidem abſciſor baſim habeat cum portione eandem, & axem eundem. Secetur itaq; portio ſphæroidis, ſecta ipſa ſphæroide alio plano ſecundũ axem ducto, & ſuper planum ſecans erecto, ipſius figuræ ſectio ſit a b c d, coni acutiãguli ſectio: cuius centrum ſit h: plani autẽ abſcindentis figurã eſto a c linea recta: erit ipſa per h ducta, cum planum poſitum ſit per centrum duci.

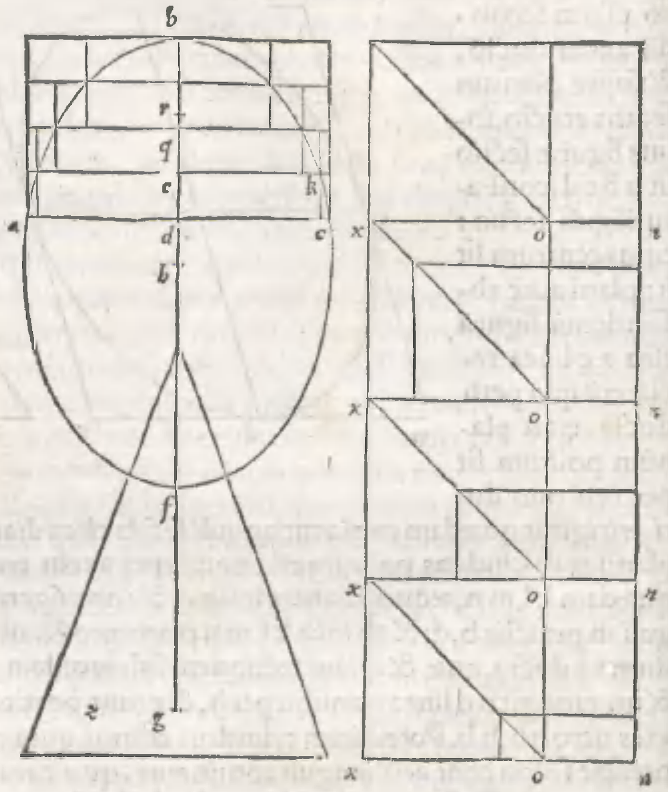


erit igitur quædam coni acutianguli ſectio circa diametrum a c conſtituta. nam planum abſcindens poſitum eſt, non ſuper axem erectum eſſe. Ducantur iam quædam k l, m n, æquediſtantes ipſi a c, & contingentes ſectionem coni acutianguli in punctis b, d: & ab ipſis k l, m n plana prodeant æquediſtantia plano ſecundum a c ducto, quæ & ipſam ſectionem ſphæroidem contingent in punctis b, d: & quæ iungit b d linea tranſibit per h, & erunt portionum uertices puncta b, d: axes uero b h, h b. Poteſt itaq; cylindrus effingi, qui axem habeat b h, in cuius ſuperficie ſectio coni acutianguli continetur, quæ circa diametrum a c eſt conſtituta. eo autem effecto, erit quoddam cylindri fruſtum, quod eandem habeat cum dimidia ſphæroide baſim, & axem eundem. Rurſus & conus effici poteſt, qui uerticem habeat punctum b, in cuius ſuperficie ſectio coni acutianguli exiſtet à diametro a c. eo pacto erit abſciſor coni, qui eandem cum portione baſim, & eũdem axem habebit. Dico iam, quòd ſphæroidis dimidium huius coni duplum exiſtet. Eſto conus z duplus ad abſciſorem coni. ſi dimidium ſphæroidis dicatur cono z non eſſe æquale, eſto primum ſi fieri poteſt maius. inſcribatur autem in dimidia ſphæroide figura ſolida, & altera circũſcribatur ex cylindricis fruſtis altitudinem æqualem habentibus compoſita, hoc pacto ut figura circumſcripta excedat figuram inſcriptã, minus eo quo dimidia ſphęroidis excedit conum z. Iam ſimili ratione qua ſuperius factum eſt, oſtendetur figuram inſcriptam cono z maiorem exiſtere, & fruſtum quod baſim habeat cum portione eandem, & axem eundem cono z ſeſquialterum exiſtens, figura inſcripta dimidiæ ſphæroidi maius quàm ſeſquialterum eſſe, quod eſſe non poteſt. non erit ergo dimidia ſphæroidis cono z maior. Si uero minor illo ponatur eſſe, inſcribatur dimidiæ ſphæroidi figura ſolida, & altera circumſcribatur ex fruſtis cylindri æqualem altitudinem habentibus compoſita, ita ut circumſcripta excedat inſcriptam minus eo quo conus z excedit dimidiam ſphæroidem. Rurſus ſimiliter ſuperioribus demonſtrabitur, figuram circumſcriptam minorem eſſe cono z, & fruſtum cylindri quod baſim habeat cũ portione eandem, & axem eundem, cono z ſeſquialterum eſſe: circumſcriptæ uero figuræ minus quàm ſeſquialterum haberi, quod eſſe non poteſt. Conus itaq;

z,neq; minor dimidia ſphæroide poterit,neq; maior haberi.æqualis igitur eſſe illi neceſſariò reliquitur,quod demonſtrare uolebamus.

31 CViuſcunq; figuræ ſpheroidis plano ſectæ non per centrum ducto,ſed ſuper axem erecto, minor portio ad conum qui eandem habeat cum portione baſem,& axem eundem,eam proportionem habere probatur, quam utraque ſimul dimidia axis ſphæroidis,& axis maioris portionis, ad axem maioris portionis.

Eſto itaq; portio ſphæroidis abſciſſa, plano non per centrū ducto, ſed ſuper axem erecto: ipſa uero ſphæroides, ſecta plano alio ſecundum axem ducto, ipſius figurę ſit ſectio a b c, coni acutiāguli ſectio: diametros autē ſectionis, & axis ſphæroidis ſit b f, centrum autem h:plani autem abſcindentis portionem eſto ſectio a c linea recta. faciet autem cum ipſa rectos angulos ad b f,cū planum ſit ſuper axem erectum,ut ponitur. eſto autem portio abſciſſa,cuius uertex ſit punctum b minor dimidia ſphæroide figura,& ipſi b h æqualis eſto f g. Oſtendendū eſt,quod portio cuius uertex eſt punctum b,ad conum qui baſim habet cum portione eandem,& axem eundem, habet eam proportionem,quam d g ad d f. Eſto itaq; cylindrus qui eandem habeat baſim cum portione minori,& axem eundem: eſto item conus,in quo z ad conum baſim eandem habentem, eam habeat proportionem,quam d g ad d f. Dico iam conum z portioni eſſe æqualem illi, quæ uerticem habeat punctum b. nā ſi non eſt æqualis, eſto primò ſi fieri poteſt,minor. Inſcribatur iam portioni figura ſolida,& alia circumſcribatur, ex cylindris altitudinem æqualem habentibus compoſita,hoc pacto ut circumſcripta inſcriptam minus excedat,quam ſphæroidis portio conum z. Cum igitur circumſcripta figura portione maior exiſtat, & inſcriptam minus excedat, quàm portio conum z, ſequitur figuram inſcriptam cono z maiorem haberi. Eſto deinde b r tertia pars ipſius b d:cum igitur ipſius b h ſit tripla b g,& d g ipſius h r tripla erit. cylindrus itaq; qui baſim habeat cum portione eandem,& axem b d,ad conum habentem eandem baſim, & axem eūdem, habebit eam proportionem,quam habet d g ad h r. Dictus autem conus ad conū z eandem habet proportionem,quam d g ad d f. Habebit igitur cylindrus,qui baſim habeat cum portione eandem,& axem eundem, proportionibus diſſimiliter ordinatis,eam proportionem ad conum z,quam d f ad h r. Sunto itaq; lineæ poſitæ, in quibus x n multitudine quidem æquales portionibus ipſius b d,magnitudine uero unaquæq; ipſi d f. ſit autem & unaquæq; x o ęqualis ipſi b d:erit igitur unaquæq;

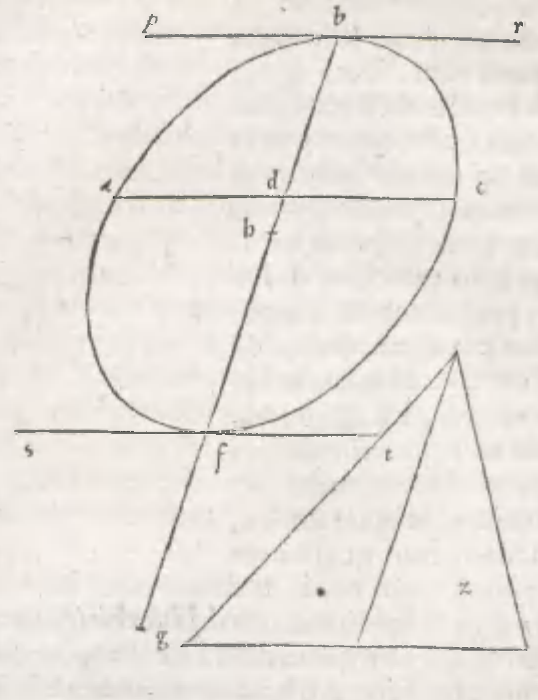


naquæque n o dupla ipſius h d. Accedat igitur ad unamquanq; earum ſpacium quoddam,cuius latitudo ſit æqualis ipſi b d, ita ut ſint diametri quadratorum diametros habentium. auferatur autem à primo gnomon, qui latitudinem habeat æqualem ipſi b e:à ſecundo uero gnomon, latitudinem habens æquam ipſi b q: & ab unoquoq; eodem modo ſequente ſpacio gnomon auferatur, latitudinem habens una parte minorem latitudine præcedentis cum gnomonis ablati. Gnomon itaq; à primo ſpacio ablatus,æqualis erit ei quod ſub b e,e f continetur: & reliquum ſpacium accedens ad ipſam n o,ſuperat forma quadrata latus exceſſus habens æquale ipſi d e:gnomon uero à ſecundo ſpacio ablatus,æquatur ei quod cōtinetur ſub f q, q b: & reliquum ſpacium quod adiacet ipſi n o, excedens forma quadrata, & reliqua iſtis ſimiliter. His ſic ſe habentibus,plana omnium cylindrorum ex quibus inſcripta figura componitur,ad ſuperficiem cylindri baſim habentis cum portione eandem, & axem eundem educantur. Iam totus cylindrus in cylindros diſtributus erit, multitudine æquales illis qui ſunt in figura circumſcripta conſtituti,magnitudine uero maximo illorū æquales. Primus itaq; cylindrus eorum qui ſunt in toto cylindro, qui habet axem d e, ad primum cylindrum in figura inſcripta conſtitutum, qui habeat d e axem, eam habet proportionem,quā quadratum d c, ad quadratum k e. Hæc autem eſt eadem ei quam habet contentum ſub b d,d f,ad contentum ſub b e,e f. Cylindrus igitur ad cylindrum habet eam proportionem,quam primum quadratum ad primum gnomonem, ablatū ab eo. Similiter autem & aliorum cylindrorum, qui ſunt in toto cylindro, unuſquiſq; axem habens æqualem ipſi d e,ad cylindrum ſibi coniunctum in figura inſcripta conſtitutum, axem habentem eundem, habebit eam proportionem,quā ſpacium ſibi correſpondens,ad gnomonem ablatum ab eo. Erunt quædam magnitudines cylindri, qui ſunt in toto cylindro: & aliæ item magnitudines,ſpacia ad n x adiecta, latitudinem habentia æqualem ipſi b d, multitudine cylindris æqualia, & bina & bina habent eandem proportionem. dicuntur autem cylindri ad alios cylindros in figura inſcripta conſtitutos, ultimus autem nullo pacto dicitur:& ſpacia dicuntur ad alia ſpacia,ad gnomones ablatos ab eis quæq; duo ſimilis rationis in eadem proportione: ultimum uero ſpacium nullo pacto dicitur. Conſtat igitur,cylindros omnes ad alios omnes eam habere proportionem, quā omnia ſpacia ad omnis gnomones. Cylindrus igitur,qui baſim habeat cum portione eandem,& axem eundem,ad figuram portioni inſcriptā,eam habebit proportionem,quā ſpacia omnia ad omnes gnomones. Et quoniam erant lineæ quędam poſitæ æquales, in quibus n o,& ad unamquanq; acceſſit ſpacium ſuperās forma quadrata,latera uero exceſſuum inter ſe æqualiter ſeſe excedentia, & erāt exceſſus eorum æquales illarum minimæ: & alia item erant ſpacia ad ipſam n x adiacentia, latitudinem ipſi b d æqualem habentia, multitudine æqualia ſpacijs prius dictis,magnitudine uero unumquodq; maximo illorum æquale,manifeſtum eſt quod omnia ſimul ſpacia quorum unumquodq; æquale eſt maximo, ad omnia alia ſpacia minorem habent proportionem, quàm n x ad lineam æqualem utriſq; ſimul,dimidiæ n o,& tertiæ parti x o. Conſtat igitur,eadem ſpacia ad omnis gnomones maiorem habere proportionem,quàm n x ad lineam æqualem utriſq; ſimul,dimidiæ n o,& duabus tertijs ipſius x o. Cylindrus ergo qui baſim habet cum portione eandem,& axem eundem,ad figuram portioni inſcriptam, maiorem habet proportionem,quàm n x ad lineam æqualem utriſq; ſimul,dimidiæ n o, & duabus tertijs x o. Eſt autem n x æqualis d f, dimidia uero n o æqualis ipſi d h:ipſis autem tertijs ipſius x o,æqualis eſt ipſa d r. totus ergo cylindrus ad figuram portioni inſcriptā, maiorem habet proportionem, quam d f ad h r:quam uero proportionem d f habet ad h r,eandem oſtenſūm eſt habere cylindrum ad conum z:maiorem ergo proportionem habebit cylindrus ad figuram portioni inſcriptam, quam ad conum z, quod eſſe non poteſt: nam oſtenſum eſt, figuram inſcriptam cono z eſſe maiorem. Non eſt ergo portio ſphæroidis cono maior. Verum ſi fieri poteſt, eſto minor eodem. Rurſus autem inſcribatur portioni figura ſolida, & altera circumſcribatur ex cylindris æqualem altitudinem habentibus compoſita hoc pacto, ut circumſcripta excedat inſcriptam minus eo quo conus z excedit portionem, & cætera ſuperioribus eadem diſponantur. Cum itaque inſcripta figura ſit portione minor, & circũſcripta minus excedit inſcriptam, quam conus z portionem: ſequetur ex hoc, figuram circumſcriptam cono z minorem eſſe. Item primus cylindrus eorum qui ſunt in toto cylindro, axem habens d e, ad primum cylindrum in figura circumſcripta conſtitutum, & axem eandem habẽtem, eam habet proportionem, quam ultimum ſpacium eorum quæ ad x n adiacent, latitudinem habentiũ æqualem ipſi b d ad ſe ipſum. utraq; enim ſunt æqualia. & ſecundus cylindrus eorum qui ſunt in cylindro toto, axem habens æqualem ipſi d e, ad cylindrum ſibi coniunctum in figura circumſcripta conſtitutum, eam habet proportionem, quam ſecundum ſpacium eorum quæ ipſi n x adiacẽt, latitudinem ipſi b d æqualem habentium, habet ad gnomonem ablatum ab eo, & aliorum cylindrorum in toto cylindro conſtantium, qui axem habent ipſi d e æqualem: unuſquiſq; ad cylindrum ſibi coniunctum in figura circumſcripta conſtitutum, eam habet proportionem, quam ſpacium ſibi correſpondens eorũ quæ ad n x adiacent, ad gnomonem ablatum ab eo ante ultimum dictum. Omnes igitur cylindri, qui in toto cylindro conſiſtunt, ad omnis cylindros in figura circumſcripta conſtitutos eam habebunt proportionem, quam omnia ſpacia ad n x adiacentia, ad ſpacium æquale ſpacio ultimo poſito, & gnomonibus ablatis ab alijs eadem ratione, ut ſuprà factum eſt. Cum igitur oſtenſum ſit, ſpacia omnia ad n o adiacentia, ad ſpacia omnia excedentia forma quadrata, dẽpto maximo, maiorem habere proportionem, quam x n ad lineam æqualem utriſq; ſimul, dimidiæ n o, & tertiæ parti x o, conſtat eadem ſpacia ad reliqua quæ ſunt æqualia ultimo ſpacio poſito, & gnominibus qui à reliquis ſunt ablati, minorem proportionem habere, quam n x ad lineam æqualem utriſq; ſimul, dimidię n o, & duabus tertijs ipſius x o. Vnde ſequitur, cylindrũ quoq; qui baſim habeat cum portione eandẽ, & axem eundem, ad figuram circumſcriptam minorem habere proportionem, quam f d ad h r. quam autem proportionem habet f d ad h r, eam habet dictus cylindrus ad conum z. minorem igitur habebit dictus cylindrus ad circumſcriptam figuram, quam ad conum z: quod quidem eſſe non poteſt. nam oſtenſum eſt, figuram circumſcriptam cono z eſſe minorem. Non eſt igitur portio ſphæroidis minor cono z: neque, ut prius oſtendimus, maior: neceſſe eſt igitur, eidem eſſe æqualem.

32 SI figura ſphęroidis plano ſecetur non ſuper axem erecto, neq; per centrum ducto, eius portio minor ad abſciſorem coni, qui baſim habeat cum portione eandem, & axem eundem, eam habebit proportionem, quam utraq; ſimul linea dimidia eius quæ iunget uertices portionum effectarum, & axis maioris portionis ad axem portionis maioris. Diuidatur itaq; aliqua figura ſphæroides, ut dictũ eſt: & diuiſa ipſa alio plano per axem ducto, erecto ſuper planũ ſecans, eſto figuræ ſectio a b c d coni acutianguli ſectio: plani autem ſecantis figuram ſit a c linea recta. & ducantur p r, s t ęquediſtantes ipſi a c, & contingentes ſectionem coni in punctis b, f: & ab eis exeant plana æquediſtantia plano ſecundum a c ducto. contingent quoq; ipſam ſphæroidem in punctis e, f: & erunt uertices portionum cõiuncti, ducta b f linea. ipſa uero tranſibit per centrum: & eſto centrum ſphęroidis & ſectionis coni acutianguli h. Quoniam igitur poſitum eſt, figuram ſecari plano ſuper axem non erecto, ſectio erit coni acutianguli ſectio, & eius diametros c d. Sumatur cylindrus axem habens in directum b d, in cuius ſuperficie erit coni acutian-

cutian-

cutianguli ſectio circa diametrum a c conſtituta: & conus qui habeat uerticẽ punctum b, in cuius ſuperficie erit coni acutianguli ſectio circa diametrum a c conſtituta: erit iam quoddam cylindri fruſtum, quod baſim habet cum portione eandem, & axem eundem: & abſciſor coni qui habeat eãdem cum portione baſim, & axẽ eundẽ. Oſtendendum eſt igitur, quod portio ſphæroidis, cuius uertex eſt punctum b, ad abſciſorem coni, qui baſim habeat cũ portione eandem, & axem eũdem, eam habebit proportionem, quam d g ad d f. Eſto autem f g æqualis h f. Sumatur itaque conus quidam, in quo z, qui habeat ad abſciſorem coni baſim habentis cum portione eandẽ, & axem eundem, eam proportionem, quam d g ad d f. Si dicatur, portionem ſphæroidis non eſſe æqualem cono z, eſto primum, ſi fieri poteſt, maior eo: & inſcribatur portioni figura ſolida, & altera circumſcribatur, ex cylindrorum fruſtis altitudinẽ æqualem habentibus compoſita, ita ut circumſcripta excedat inſcriptam minus eo quo portio ſphæroidis excedit conum z. Similiter iam præcedenti oſtendetur, inſcriptam figuram cono z eſſe maiorem, & fruſtum cylindri quod baſim habet cum portione eandem, & axem eundem, ad figuram inſcriptam maiorem habere proportionem, quam ad conum z: quod eſſe non poteſt. Non erit ergo portio ſphæroidis cono z maior. Sed eſto item, ſi eſſe poteſt, minor: & rurſus inſcripta ſit portioni ſolida figura, & altera circumſcripta ex cylindricis fruſtis æqualem altitudinem habentibus compoſita, ita ut circumſcripta figura excedat inſcriptam minus eo, quo conus z excedit portionem. Rurſus eadem ratione oſtendetur, circumſcriptam figuram cono z eſſe minorem, & fruſtum cylindri quod baſim habeat eandem cum portione, & axem eundem, ad circumſcriptam figuram habere minorem proportionem, quam ad conum z: quod eſſe non poteſt. neq; igitur ſphæroidis portio minor eſſe poteſt cono z. quare conſtat, id quod ſuſceperamus demõſtrandum.

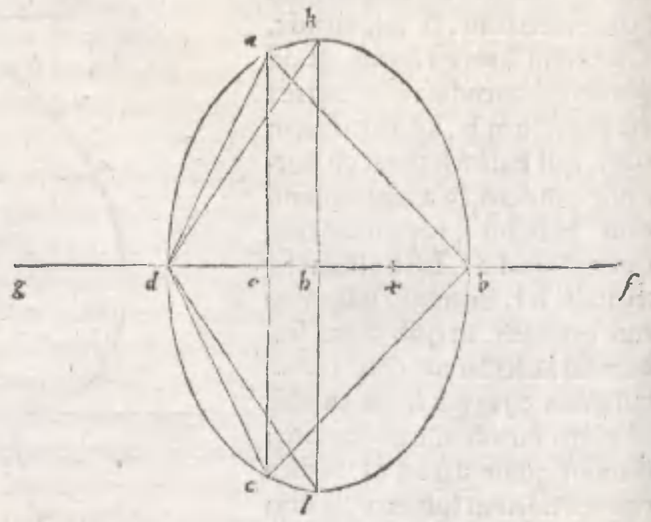


CViuslibet ſphęroidis figuræ plano ſectæ ſuper axem erecto, nõ aũt per centrũ ducto, maior portio ad conum qui baſim habeat cum portione eandem, & axem eundem, eam habet proportionem, quam habet linea æqualis utriſq; ſimul, dimidio axi ſphęroidis, & axi minoris portionis ad axem minoris portionis. 33

Secetur itaq; ſphæroides, ut dictum eſt: ſecta uero ipſa figura plano alio ſecundum axem ducto, ſuper planum ſecans erecto, figuræ quidem eſto a b c coni acutianguli ſectio. eius autem diametros, & axis figurę b d: plani uero ſecantis ſectio ſit c a linea recta. erit autem ipſa angulis rectis ſuper b d. Eſto autem maior portionum, cuius uertex ſit b punctum, & centrum ſphæroidis ſit h. addatur autem d g ad e d, ipſi d h æqualis, & b f eidem ſit æqualis. Demonſtrandum eſt, portionem ſphæroidis cuius uertex b punctum, ad conum qui habeat baſim eandem cum portione, & axem eundem, eam habere proportionem, quam e g habet ad e d. Se-

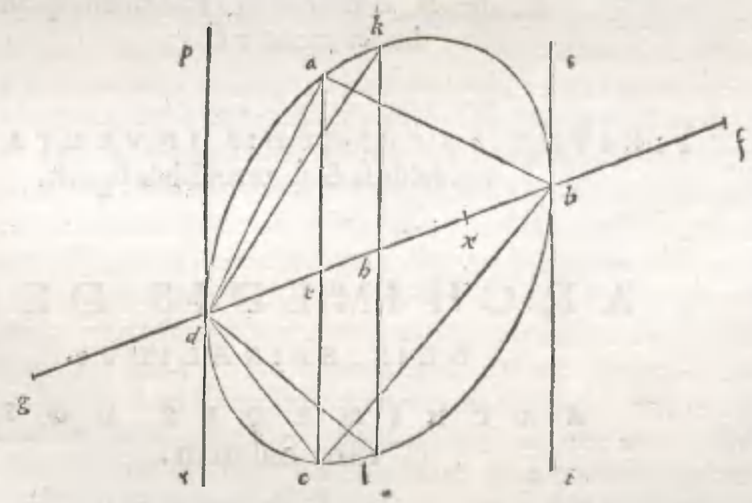
cetur

cetur iam ſphæroides plano per centrum ducto, & ſuper axem erecto: & à circulo inde facto conus exurgat, qui uerticem habeat punctum d. Eſt iam tota ſphæroides dupla portionis habentis baſim circulum circa diametrum k l conſtitutum, uerticem autem punctum d. Dicta uero portio dupla eſt coni, qui habeat baſim cum portione eandem, & axem eundem. hæc enim oſtenſa ſunt. Tota igitur ſphæroides, dicti coni quadrupla exiſtit. conus autem iſte, ad conum habentem baſim circulum circa diametrum a c deſcriptum, uerticem uero punctum d, habet proportionem compoſitam ex ea quam habet h d ad e d, & ex ea quam habet quadratum k h ad quadratum e a: quæ eſt eadem ei quam habet cōtentum ſub b h, h d, ad id quod ſub b e, e d continetur. quam uero proportionem habet h d ad e d, hanc habeat x d ad h d. Habebit igitur contentum ſub x d, b h, ad contentū ſub b h, h d, eam quam d h ad d e. Proportio autem compoſita ex ea quam habet contentum ſub x d h b, ad contentū ſub b h, h d: & ex ea quam habet contentum ſub b h, h d, ad contentum ſub b e, e d: eadem eſt ei quam habet contentum ſub x d, b h, ad contentum ſub b e, e d. Conus igitur qui baſim habet circulum circa diametrum k l conſtitutum, uerticem uero punctum d, ad conum qui baſim habeat circulum circa diametrum a c deſcriptum, uerticem uero punctum d, eam habet proportionem, quam contentum ſub x d, b h, ad contentum ſub b e, e d. Conus autem qui baſim habet circulum circa diametrum a c, uerticem uero punctum d, ad portionem ſphæroidis, quæ baſim habeat eandem eidem, & axē eundem, eam habet proportionem, quam contentum ſub b e, e d, ad contentum ſub f e, d e: hoc eſt, b e ad e f. nam minus quam dimidium ipſius ſphæroidis, ad conum qui baſim habeat cum portione eandem, & axem eundem, oſtenſum eſt, quod eam habet proportionem, quam linea quæ ſit æqualis utriſq; ſimul, dimidio axi ſphæroidis, & axi maioris portionis, ad axem maioris portionis. ea uero eſt illa quam habet f e ad b e. Conus igitur qui eſt in dimidia ſphæroide, ad portionem ſphæroidis dimidio illius minorem, eam habet proportionem, quam cōtentum ſub x d, b h ad contentum ſub f e, d e. quoniā autem tota ſphæroides, ad conum in eius dimidio conſtitutum, eam habet proportionem, quam compræhenſum ſub f g, x d, ad compræhenſum ſub b h, x d. nam utraq; quadrupla eſt: Conus autem in dimidio ſphæroidis conſtitutus, ad portionem eo dimidio minorem, eam habet proportionem, quam cōtentum ſub x d, b h, ad contentū ſub f e, e d: ſphæroides quoq; totum ad portionem eius minorem, eam habet proportionem, quam contentum ſub f g, x d, ad contentum ſub f e, e d. quare & maior ſphęroidis portio, ad minorem, eam habet proportionem, quam exceſſus quo cōtentum ſub f g, x d excedit contentum ſub f e, e d. Contentum autem ſub f g, x d, excedit contentum ſub f e, d e, eo quod continetur ſub x d, e g, & eo quod continetur ſub f e, x e. Habet igitur maior portio ad minorem, eam proportionem, quam id quod eſt æquale utriſq; ſimul, contento ſub x d, e g, & contento ſub f e,



x e ad contentum ſub f e, e d: portio uero ſphæroidis minor, ad conum baſim habentem cum portione eandem, & axem eūdem, eam habet proportionem, quam contentum ſub f e, e d ad contentum ſub b e, e d: habet enim eam proportionem, quam f h ad b e. Conus autem in minori portione conſtitutus, ad conum qui eſt in portione maiori, eam habet proportionem, quam cōtentum ſub b e, e d ad quadratum b e. nam cum coni habeant baſes æquales, altitudinum proportionem ſequentur: habet itaq; & maior portio ſphæroidis ad conum in ea inſcriptum eam proportionem, quam habet id quod eſt ęquale utriſq; ſimul, contento ſub x d, e g, & contento ſub f e, x e, ad quadratum b e. Ea uero eadem eſt ei quam habet e g ad e d. nam contentum ſub x d, e g, ad contentum ſub x d, e d, eam habet proportionem, quam e g ad e d: & contentum ſub f e, x e, ad contentum ſub f e, h e eam habet proportionem, quā e g ad e d. Propterea quod linea x d, h d, d e, ſunt inter ſe proportionales, & h d æqualis g d: igitur id quod æquatur utriſq; ſimul contento ſub x d, e g, & contento ſub f e, x e, ad id quod æquatur utriſq; ſimul, contento ſub x d, e d, & contento ſub f e, h e, eam habet proportionem, quam e g ad e d: quadratum uero ipſius b e, æquatur utriſq; ſimul, contento ſub x d, e d, & contento ſub f e, h e. nam quadratum ipſius b h, æquatur contento ſub x d, e d. Exceſſus autem quo quadratum b e excedit quadratum b h, æquatur cōtento ſub f e, h e. cum b h & b f ſint æquales. Conſtat igitur, quod maior ſphæroidis portio ad conum, qui baſim habeat cū portione eandem, & axem eundem, eam habeat proportionem, quam e g habet ad e d.

SI figura ſphæroidis plano ſecetur, neq; ſuper axem erecto, neq; per cētrum du 34
cto: maior eius portio ad eum coni abſciſorem qui baſim habeat cum portione eandem, & axem eundem, habebit eam proportionē, quam linea quæ ſit æqualis utriſq; ſimul, dimidiæ illius quæ portionum inde effectarum uertices iunxerit, & axi minoris portionis ad axem minoris portionis habuerit. Secetur itaque ſphæroides, ut dictum eſt. ipſo autē ſecto, per aliud planum ſecundum axem ductum, et erectum ſuper planū ſecans, figuræ quidem ſectio eſto a b c d coni acutianguli ſectio: plani autē figuram ſecantis ſit a c linea recta: ducātur autem p r, ſ t æquediſtantes ipſi a c, & contingentes in punctis b d coni acutianguli ſectionem: & exeant ab eis plana æquediſtantia plano ſecundum a c ducto. contingēt quoq; ipſa ſphæroidem in punctis b d, & erunt uertices portionum puncta b, d: ducatur iam b d linea recta coniungens uertices portionum effectarum: trāſibit autem ipſa per centrum, & eſto h cētrum maior portio dimidio ſphæroidis. ſit illa cuius uertex eſt b: adijciatur ipſi d h æqualis d g, & b f eidem. Oſtendendum eſt, maiorem ſphæroidis portionem ad abſciſorem coni, qui habeat baſim cum portione eandem, & axem eundem, eam habere proportionem, quam e g ad e d. ſecetur enim ipſum ſphæroides plano per centrum ducto, & æquediſtanti ipſi plano



quod ſecundum a c ductum eſt: & inſcribatur dimidiæ portioni ſphæroidis ab-
ſciſor coni, qui uerticem habeat punctum d. & quam proportionem habet d h ad
e d, eam habeto x d ad h d: ſimiliter iam ſuperioribus oſtendetur, abſciſorem co-
ni dimidio ſphærodi inſcriptum, ad abſciſorem coni in minori inſcripto eam ha-
bere proportionem, quam contentum ſub x d, b h habet ad contentum ſub b e,
e d: & abſciſor coni in minori portione cõſtitutus ad portionem cui eſt inſcriptus,
eam habet proportionem, quam contentum ſub b e, e d ad contentum ſub f e, e d.
habebit ergo abſciſor coni in dimidia ſphæroide inſcriptus, ad portionem mino-
rem ſphæroidis eam proportionem, quam contentum ſub x d, b h ad contentum
ſub f e, e d. Quare tota ſphæroides habebit ad abſciſorem coni in dimidia ſphæ-
roide inſcripti eam proportionem, quam contentum ſub f g, x d ad contentum
ſub b h, x d. nam utrumque eſt quadruplum utriuſq;. Abſciſor autẽ coni dictus
ad minorem ſphæroidis portionem eam habet proportionem, quam contentum
ſub x d, b h, ad contentum ſub f e, e d: habebit ergo tota ſphæroides ad eius mino
rem portionem eam proportionem, quam habet contentum ſub f g, x d ad con-
tentum ſub f e, e d. ipſa uero maior portio ad minorem eam habet proportionẽ,
quam habet exceſſus, quo contentum ſub f g, x d excedit cõtentum ſub f e, e d, ad
contentum ſub f e, e d: minor autem portio ad abſciſorem coni in ea deſcripti, eã
habet proportionem, quam contentum ſub f e, e d, ad contentum ſub b e, e d. nã
oſtenſum eſt eam habere proportionem, quã f e ad b e. Abſciſor uero coni in ma-
iori portione deſcriptus, eam habet proportionem ad abſciſorem coni deſcriptũ
in minore, quam contentum ſub b e, e d ad quadratum b e. Abſciſores enim
conorum dicti habent inter ſe proportionem ſuarum altitudinum: eorum uero
altitudines eam habent inter ſe proportionem, quam d e ad e b: habet autem ma-
ior ſphæroidis portio ad abſciſorem coni in ea deſcriptũ eam proportionem, quã
exceſſus quo contentum ſub f g, x d excedit contentum ſub f e, e d ad quadratum
b e habet. Hæc autem eadem proportio, eadem ratione, ut ſuprà
factum eſt, demonſtratur eſſe eadem, quam
habet e g ad e d.

FINIVNT ARCHIMEDIS INVENTA DE CO-
noidalibus & ſphæroidibus figuris.

ARCHIMEDIS DE LI-
NEIS SPIRALIBVS.

ARCHIMEDES DOSI-
theo Salutem.

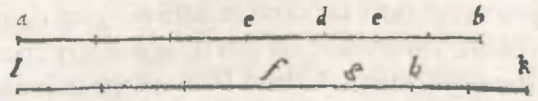
EORVM quæ ad Cononem miſſa fuerant theorematum, quo
rum aſſiduè à me flagitas ut demonſtrationes conſcribam, com
plurium quidem confectas habes in illis quæ ab Hercule allata
ſunt, quaſdam uero in hoc libro collegi, quas ad te mitto. Verũ
ne mirere, ſi in huiuſmodi demonſtrationũ expoſitionem plu-
rimum temporis conſumpſimus. Hoc enim nobis accidit, pro-
pter id quod antequam de his ſcriberemus, eos percontari & perquirere ſtatuera-
mus, qui circa doctrinas uerſati ſunt, quiq; ſibi iſthæc inueſtiganda propoſue-
rant. Nam certa quædam ſunt in Geometria theoremata, quæ non breuiter tradi

poſſe principio uideantur, eorum inueſtigationem tempore intercipiẽte. Conon
quidem non temporis ſatis ad hęc excogitanda ſortitus, uitam permutauit, & ipſa
reliquit inexplicata, cum illa inueniſſet, & alia quàm plurima perquiſiſſet, ac mul-
tum adeò geometricas facultates ampliaſſet. Nouimus enim quantum ingenij,
quàm admirabile in eo uiro iudicium uigebat, quàm non uulgaris circa doctri-
nas & aſſidua opera, quàm excellens ſtudium. Multis autem annis poſt Cono-
nis mortem neminem accepimus inuentum fuiſſe, qui ne unum quidem proble-
ma tractare tentarit. Equidem ſtatuo eorum unumquodq; perluſtrare. nam duo
quædam ex his quæ habentur in Conone, ſunt quæ minime depræhenſa fuere.
Tandem uero accedemus, ut hi qui cuncta ſe gloriantur inueniſſe, nullam autem
proferunt eorum quæ profantur demonſtrationem, reprehendantur. nam ex his
quæ à ſe inuenta uolunt, falſa quædam, & à naturæ ſunt poteſtate penitus aliena.
Quorundam uero iam tenes demonſtrationes ad te miſſas, quorundam in hoc li-
bro contulimus, dignum exiſtimantes eſſe ut ea tibi explicaremus. Primum itaq;
problematum erat, Sphæra data ſpacium inuenire quod ſuperficiei illius eſſet æ-
quale. quod quidem quamprimũ fuit declaratũ ex libro quem de Sphæra confeci
mus. Nam cum ibi demõſtratum eſſet, ſuperficiem ſphæræ maximo in ea circulo
quadruplam haberi, illico patuit ſpaciũ inueniri poſſe ſuperficiei ſphęræ æquale.
Secũdum autem, Cono ſeu cylindro datò ſphæram ipſi cono uel cylindro æqua-
lem inueniri. Tertiũ, Datam ſphæram ſic ſecare, ut eius portiones inter ſe propo
ſitam proportionem retineant. Quartũ, Datam ſphæram ſic ſecare plano, ut por-
tiones ſuperficiei ſphæræ ſeruent inter ſe datam proportionem. Quintum, Datã
ſphæræ portionem alteri ſphæræ portioni datæ ſimilem reddere. Sextum, Dua-
bus portionibus ſiue eiuſdem ſiue nõ eiuſdem ſphęræ datis, tertiam ſphęræ por-
tionem inuenire, quæ alteri portionũ datarum ſit ſimilis, ſuperficiem uero ſuper-
ficiei alterius portionis habeat æqualem. Septimum, À data ſphæra portionem
ea ratione abſcindere, ut abſciſa inde portio ad conum qui eadem baſe & eadem
conſtat altitudine, cum portione quamcunq; datam proportionem habeat, quæ
quidem proportio ea quam tria ad duo habent, proportione minime maior exi-
ſtat. Horum igitur inuentorum omnium Hercules attulit demonſtrationes.
Id autem quod poſt hæc erat ſeparatum, falſum exiſtit. Eſt autem huiuſmodi: Si
ſphęra plano ſecetur in partes inæquales, maior portio habebit ad minorem eam
proportionem duplicatam, quam maioris portionis ſuperficies ad minoris habet
ſuperficiem. Cõſtat autem ex his quæ ad te miſſa ſunt, hoc falſum eſſe. Erat & itẽ
hoc ſeparatum in illis. Si ſphęra in partes inæquales ſecetur, plano erecto ſuper u-
na quacunq; ex his quæ ſunt in ſphæra diametro, maior portio ad minorem eam
proportionem habebit, quam maior diametri portio ad minorem. Nam maior
ſphæræ portio ad minorem habet proportionem minorem, quàm ſit ea quæ eſt
ſuperficiei maioris ad ſuperficiem minoris duplicata proportio: maiorem uero, q̃
ſeſquialtera illius. Erat autem & ultimum problema ſeparatum, falſum: Quod ſi
ſphæra alicuius diametro in partes inæquales ſcindatur, ita ut quadratum maio-
ris partis quadrato minoris exiſtat triplum, & per punctum huius diuiſionis aga-
tur planum erectum ſuper diametrum ipſam, figura tali ſpecie conſtans qualis eſt
uidelicet ſphæræ portio, maxima eſt aliarũ portionum omnium quæ habeant ſu-
perficiem ſibi æqualem. Quod autem hoc falſum ſit, ex his theorematibus manife
ſtum eſt, quæ ad te prius miſſa ſunt. Nam demonſtratum eſt, dimidiam ſphæram
eſſe omnium ſphæræ portionum maximam, quæ æquali inter ſe ſuperficie ſphæ-
rica contineantur. Poſthæc circa conum quoq; hæc problemata habentur: Si co-
ni rectanguli ſectio diametro quieſcente circumferatur, ita ut diametros ſit axis,
figura quæ à coni rectanguli ſectione complectitur, conoidale uocetur. Quod ſi fi
guram conoidalem planum contigerit, & alterum planum ducatur plano cõtin-

genti æquediſtans, quod aliquam conoidalem portionem abſcindat, huius portionis abſciſæ baſis appelletur planum abſcindens, uertex uero punctum illud in quo alterum planū conoidale cōtingit. Quod ſi dicta figura plano ſecetur erecto ſuper axem, eius ſectionem conſtat circulū fore. Quod aūt portio abſciſa ſeſquialtera erit coni baſim habentis cum portione eandem, & axem eundem, hoc nos demonſtrare oportet. Item ſi conoidalis duæ portiones abſcindātur planis utcunq; ductis, quod ſectiones inde prouenientes ſint coni acutianguli ſectiones cōſtat, ſi plana abſcindentia ſuper axem non fuerit erecta. Quod autem portiones habeāt inter ſe proportionē eam quam habent inter ſe poteſtate lineæ ductę à uerticibus earum æquediſtantes axi uſque ad plana abſcindentia, hoc reſtat demōſtrare. Horum enim ad te nondum ſunt miſſæ demonſtrationes. Poſt hæc uero circa ſpirales lineas hæc fuerāt propoſita. Eſt autem hoc ueluti aliud problematum genus, nihil cum prædictis communicans, de quibus tibi in hoc libro conſcripſimus demonſtrationes. Sunt autem huiuſmodi. Si recta linea in plano altero eius termino quieſcēte circumferatur, donec ad locum redierit unde primo cœpit moueri, & ſimul cum hac circumducta linea punctum feratur, & ipſum ſibi ipſi æquali ſemper uelocitate moueatur ſecundum ipſam lineam motam, incipiatq; à termino lineæ quieſcente uerſus alterum ferri pūctum huiuſmodi ſpiralem lineam in plano deſcribet. Dico itaq; ſpacium à linea ſpirali, & à linea recta quæ circumducta fuit comprenſum, tertiam partem eſſe circuli eius qui centrum habeat punctum quieſcens, interuallum uero ſecundum eam lineæ motæ partem, quæ à puncto moto fuerit in una circumuolutione permeata. Et ſi lineam ſpiralem linea recta contigerit in puncto quod fuit in ſpirali ultimo productum, alia item linea recta à puncto circumductæ quieſcente ducatur ad ipſam circumductam, & in locum unde moueri ceperat regreſſa ſecundum angulos rectos quouſq; cum contingente concurrat: dico hanc lineam productam circumferentiæ circuli in prima circumuolutione producti eſſe æqualem. Item ſi linea circumducta, & punctum latum ſecundum illam pluribus circumuolutionibus circumferantur & in locum unde moueri ceperāt multotiens reſtituantur: dico ſpacij illius quod in ſecunda circumuolutione fuerit à ſpirali linea comprehenſum, duplum illud exiſtet quod in tertia comprahendetur. Quod uero in quarta triplum, quod in quinta quadruplum, & ſic deinceps ſemper ſpacia in poſterioribus circumuolutionibus concluſa, ſecundum conſequens augmentum numerorum muluplicia erunt, ad ſpacium in ſecunda reuolutione concluſum. Spacium uero in prima reuolutione contentum, ſexta pars exiſtet ſpacij in ſecunda reuolutione comprenſi. Item ſi in ſpirali linea duo puncta notentur, & ab eis iungantur lineæ rectæ ad terminum lineæ circumductæ quieſcentem, & duo circuli circumſcribantur centro quod ſit punctum quieſcens ſecundum interualla duarum linearum rectarum, quæ ad quieſcentem lineæ ſpiralis terminum ductæ fuerunt, & earum linearum minor extra ducatur: dico ſpacium comprenſum à circumferentiæ maioris circuli parte illa quæ in eandem partem cum linea ſpirali fertur, mediaq; inter lineam ſpiralem & rectam lineam habeatur, & à linea recta extra ducta, & à linea ſpirali ad ſpacium comprahenſum ſub minoris circuli ea circumferentiæ parte quæ inter eandem lineam ſpiralem & lineam rectam media exiſtit, & ſub linea quæ earū terminos iungit, & ſub eadem linea ſpirali eam proportionem habet, quam linea ſemidiametros maioris circuli cum duabus tertijs illius exceſſus, quo ſemidiametrum minoris excedit, habet ad eam ſemidiametrum maioris cum una dicti exceſſus tertia parte. Iſtorum itaq; & aliorum circa ſpirales lineas ſunt à me in hoc demonſtrationes collatæ. Præmittuntur uerò ueluti in cæteris quæ geometrica diſciplina ſunt tractata, quædam, quæ ad illorum demonſtrationem ſunt pernceſſaria. Sumo autem in his quoq; ea quæ in alijs quos prius edidi libris ſumpta fuerunt,

uidelicet linearum inæqualium & ſpaciorum inæqualium exceſſus, quo maius excedit minus, illi adiectus fieri poteſt ut uincat omnem propoſitam quorumcunq; inter ſe relatorum proportionem.

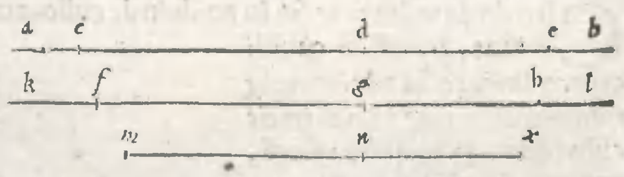
SI ſecundum quampiam lineam punctum feratur, ipſum ſibi ipſi æque uelociter, & in latione illa duas lineas permeet, lineæ illæ eandē inter ſe proportionē habebunt, quam tempora habent quibus punctum lineas permeauit. Feratur itaq; quoddā pūctum ſecundū lineam a b, ęqueuelociter ſibiipſi. Et ſumant̄ in ea duę lineæ c d, d e. Eſto autem tēpus, in quo punctū permeauit lineā c d, eſto f g. in quo uero permeauit d e, eſto g h.



Oſtendendum eſt igitur, quod c d linea ad lineam d e eam habet proportionem, quam tempus f g ad tempus g h. Ex lineis itaq; c d, d e componātur lineæ a d, d b, ſecundum quamcunq; compoſitionem, ita ut a d excedat d b. & quotiēs c d linea ſumitur in a d, totiens tempus f g ſumatur in tempore l g: quotiens autem d e linea ſumitur in d b, totiens tempus g h ſumatur in g k. Quoniam itaq; ſupponitur pūctum æqueuelociter latum eſſe per lineam a b, manifeſtum eſt in quo tempore lineam c d permeauerit, in tanto quamcunq; ipſi c d æqualem permeaturum eſſe. quare palam eſt, quod lineam a d compoſitam in tanto tempore permeabit, quantum eſt totum l g tempus, cum totiens ſumatur c d linea in linea a d, quotiens tempus f g in tempore l g, & eadem ratione in tanto tempore punctum permeabit lineam d b, quātum eſt g k tempus. Cum igitur a d linea ſit maior b d, manifeſtum eſt, quod in maiori tempore punctum permeabit lineam a d, quam lineam b d. quare colligitur, tempus l g maius eſſe tempore g k. Similiter autem oſtendetur, ſi ex temporib. f g, g h componantur tempora, ſecūdum quamcūq; cōpoſitionem, eo pacto ut alterum excedat reliquum, quod compoſitæ ex c d, & d e lineæ ſecundum eandem compoſitionem altera alteram ſuperabit, eodem ordine ſumptæ cū temporibus. Conſtat igitur c d eādem ad d e habere proportionem, quam habet tempus f g ad ipſum tempus g h.

SI duo puncta in duabus lineis ferantur, unumquodq; ſibiipſi æqueuelociter, ſumanturque in utraq; linea duæ lineæ, primæ duæ in temporibus æqualibus à punctis permeatæ, & ſecundæ duæ in altera linea, ſumptæ lineę eandem inter ſe proportionem habebunt. a

Eſto per lineam a b punctum feratur, ipſum ſibijpſi æqueuelociter: & alterum item punctum per lineam k l. Sumantur aūt in a b duæ lineæ c d, d e et in linea k l ſumant̄ f g, g h. in quo autem tempore punctum per a b latum lineam c d permeauerit, in tanto alterū pūctum per k l latum permeet f g.

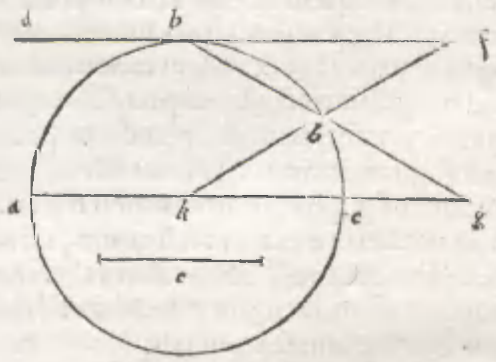


Similiter in tanto tempore punctum permeet lineam d e, in quanto alterum g h. Oſtendendum eſt, c d eādem habere ad d e proportionem, quam f g ad g h. Eſto itaq; tempus, in quo punctum lineam c d permeauit, m n. in hoc itaq; eodem tempore alterum punctum permeauit f g. Et item eſto tempus n x, in quo punctum permeauit lineam d e, & in hoc eodem alterum punctum permeauit lineam g h. Eandem itaq; proportionem habebit c d ad d e, quam tempus m n ad n x: & f g ad g h eam habet, quam tempus m n ad n x. Conſtat igitur, c d eādem habere ad d e proportionem, quam habet f g ad g h.

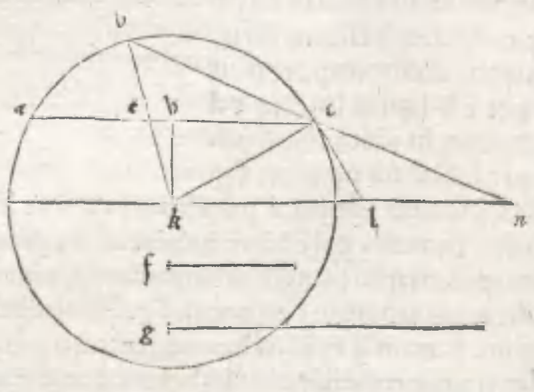
3 CIrculis quacunque multitudine datis inueniri quædam linea recta potest, quæ omnibus simul datorum circumferentijs maior existat. Si enim unicuique circulorum figura multorum angulorum circumscribatur, manifestum est, quod linea recta ex omnibus earum lateribus composita, omnibus simul circulorum circumferentijs maior existat.

4 DVabus lineis inæqualibus datis, altera recta, altera circulari potest inueniri quædam recta linea, quæ maiore datarum linearum minor, & minore maior habeat. Si enim excessus quo recta superat circularē, totiens sibijpsi coaceruetur, donec maiorē rectā recta data cōficiat, deinde recta data in tot partes ęquales diuidatur, quotiens excessus sibijpsi fuerit coaceruatus, una ex partib. illis ipso excessu minor existet. Quod si circularis sit maior recta, si ipsi rectæ una pars quàm minima adijciatur, constat hanc rectam sic confectam, maiore linearū minorem, & minore maiorem haberi. nam quæ utrinq; adijcitur pars, aut detrahitur, excessu minor existit.

5 CIrculo dato, & linea recta ipsum contingente, potest à cētro circuli linea quædam recta ad rectam contingentem hoc pacto duci, ut ea ipsius ductæ pars quæ inter cōtingentem & circuli circumferentiam intercipitur, ad semidiametrū circuli habeat minorem proportionem, quàm ea circumferentiæ pars quæ inter contactum & lineam ductam media existit ad quamcunq; datam circumferentiæ partem. Esto circulus datus a b c, cuius centrum sit k, & recta linea d f cōtingat circulum in puncto b. detur etiā pars circumferentiæ, quæcunq; fuerit. Potest autem ea circumferentię parte data sumi linea recta maior, sitq; ea sumpta e. Ducatur autem à centro k h linea a g ęquedistans ipsi d f, & ponatur h g æqualis ipsi e, & tendens ad b à centro k ducta ad h educatur, donec concurrat cum contingente in puncto f. Eandem igitur habet proportionē h f ad h k, quàm b h ad h g. igitur f h ad h k minorem habet proportionem, quàm b h circumferentiæ pars ad datam circumferentiæ partem, quoniam b h linea recta est minor arcu b h, & linea h g maior est data circumferentiæ parte.

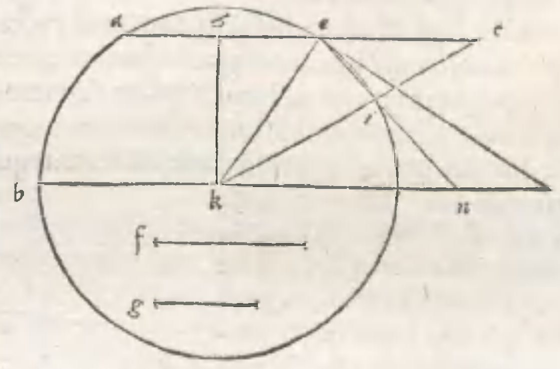


6 CIrculo dato, linea recta in eo deinde collocata, quæ quidem diametro minor existat, potest à circuli centro linea recta ad circumferentiam duci, quę à linea in circulo collocata eo pacto secet, ut pars ipsius linea ductæ, quę inter circumferentiam et lineā collocatā media depręhendit, ad lineā quæ iungit lineæ collocatæ & ductæ terminos in circumferentia cōstitutos, habeat quamcunq; proportionē datam, dum tamē proportio illa minor existat proportione, quam habet dimidia lineæ in circulo collocatæ, ad lineam quæ à centro sit ad collocatam perpendiculariter educta.



Esto datus circulus a b c, cuius centrum k, & in ipso linea collocata recta a c minor diametro, & habeat f ad g minorem proportionem, quàm c h ad h k, quæ sit à cētro k ad lineam a c perpendiculariter educta, Ducatur autem à centro linea æquedistans ipsi a c, quę sit k n: & educatur à puncto c secundū angulos rectos linea c l usque ad lineam k n. trianguli itaq; c h k, & c k l sunt similes. quare erit sicut c h ad h k, ita c k ad c l. Igitur f ad g minorē proportionem habet, quàm c k ad c l. Quam itaq; proportionē habet f ad g, eam habeat c k ad maiorem ipsa c l, quæ sit b n. Ponatur autem b n inter circumferentiam, & lineam collocatam per punctum c. Hoc enim sic potest diuidi, ut pars intra circulum collocetur, pars extra per punctum c adhæreat ipsi k n in puncto n, cum ipsa sit maior c l. Esto itaq; sic diuisa & collocata. demum ducatur k b linea secans lineam a c, primo collocatam in puncto e. Quoniam igitur k c ad b n eam proportionem habet, quam f ad g, habebit quoque e b ad b c, sicut k c ad b n. igitur & sicut f ad g. quare constat propositum.

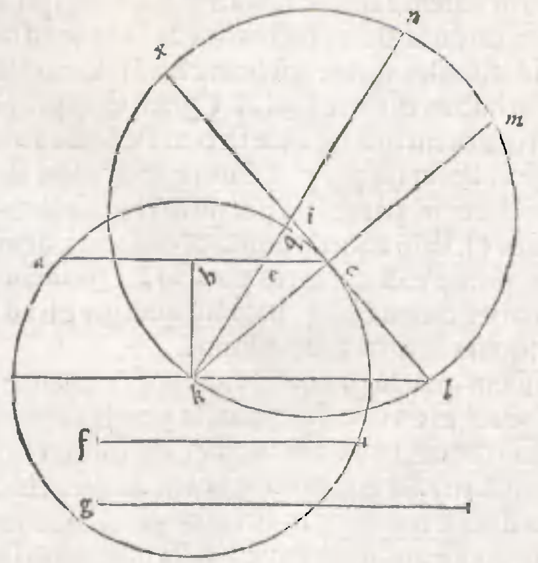
EIsdem quæ in præmissa sunt posita retentis, & linea quæ in circulo fuerit collocata, extra circulum educta, potest à centro ad eductam linea recta sic extra circulum educi, ut pars eius quæ à circumferentia & ab educta extra circulum cōpræhendatur, ad lineam iungentem lineæ principio eductæ, & à centro extra circulum ductæ terminos in circumferentia notatos habeat quamcunque proportionem propositam, dum tamen dicta proportio sit ea proportione maior quam habet dimidia linea in circulo collocata, ad lineam quæ à centro ad ipsam collocatam sit perpendiculariter educta. Retineantur itaque ea quæ in præmissa posita sunt, & linea in circulo collocata extra ducatur, & sit proportio data, quam habet f ad g maior proportione, quam habet c h ad h k: erit quoq; maior ea quam habet k c, ad c l. Quam itaq; proportionem habet f ad g, eam habet k c ad minorem c l, quæ sit i n tendēs in c. Potest autem sic diuidi, & cadet intra lineam c l, cū sit minor ipsa c l. Cū igitur eandem habeat proportionem k c ad i n, quam f ad g, & ipsa e i ad i c eādem habebit proportionē, quam f ad g. 7



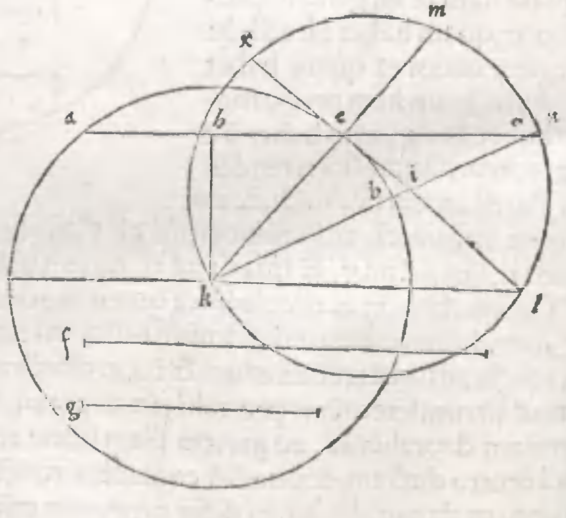
CIrculo dato, et in circulo linea quæ diametro minor sit, altera item linea quæ circulum contingat in termino lineæ in circulo datæ: potest à centro circuli linea recta ad lineā rectam educi, & ita in directum per lineæ in circulo datę sectionem ad circumferentiam protrahi, ita ut pars ipsius inter lineam rectam & circūferentiam deprehensa, ad partem illam lineæ contingentis quæ intra lineam ipsam à centro ductam, & punctū contactus concludetur, habeat quamcunq; proportionem datam, dū tamen dicta proportio minor fuerit ea proportione, quam dimidia lineæ in circulo datæ habet ad lineam quæ à centro sit ad ipsam in circulo datam perpendiculariter educta. Esto circulus datus a b c d, eius centrum k, & linea recta sit in circulo data a c minor diametro, & x l contingat circulum in puncto c. & proportio quam habet f ad g, sit minor ea quam habet c h ad h k. Erit quoq; minor ea quam habet c k ad c l, si k l sit æquedistanter ducta ipsi h c. habeat itaq; k c ad c x, eam quam habet f ad g proportionem. quare c x erit maior c l. Describatur circulus circa puncta k x l. Quoniam igitur x c maior est ipsa c l, & sunt ambæ ad angulos rectos lineæ k c m, potest duci linea i n æqualis lineę c m, 8

quæ

quæ tendat ad k. Igitur id quod continetur sub x i, i l ad contentum sub k e, i l, eā habet proportionem, quam x i ad k e. & contentum sub k i, i n ad contentum sub k i, c l, sicut i n ad c l, & sicut x i ad k e, & sicut c m ad c l, & x c ad k c, & ad k b. Et sicut x i ad k e, et sicut residua i c ad residuam b e eandem habebit proportionē, quā x c ad k c, & quam g ad f. Incidit autem k n m contingētem, & pars eius quæ inter circumferentiam & rectam a c capitur, uidelicet b e, ad partem cōtingentis inter k n, & cōtactum, deprensam eam habet proportionem, quam f ad g.

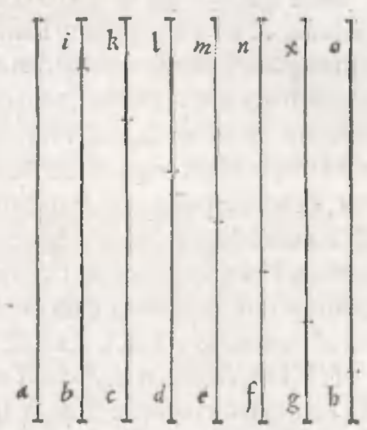


9 Eisdē quæ supra posita sunt retentis, & linea quæ in circulo datur extra circulum ducta, potest à cētro circuli ad ipsam extra ductā linea quædā recta sic duci, ut pars ipsius quæ inter circumferentiam & lineam extra ductam comprænhenditur, ad partem lineæ contingentis quæ inter contactum & ipsam à centro ductam intercipitur, habeat quācunq; datam proportionem: dum tamen proportio sit ea proportione maior, quā habet dimidia lineæ in circulo datæ, ad lineam quæ à centro sit ad ipsam perpendiculariter ducta. Esto datus circulus a b c d, & recta in circulo data minor diametro sit a c, quæ extra circulum ducatur per punctum c. & altera linea x c contingat circulum in puncto c: & proportio f ad g sit maior proportione c h ad h k. erit quoque maior proportione k c ad c l. Habeat igitur k c ad c x eā quam habet f ad g: ergo c x minor est ipsa c l. Rursus describatur circulus trāsiens per puncta x k l. cum igitur x c sit minor ipsa c l, & ambæ altera alteri ad angulos rectos insistūt, x c, & k m: potest i n poni æqualis ipsi c m, quæ tendat in punctum k. Cum itaque cōtentum sub x i, i l æquale est contento sub k i, i n: contentum uero sub l i, k e, est æquale contento sub k i, c l. propterea quod est sicut k e ad i k, ita l c ad l i. Sicut ergo x i ad k e, sic contentū sub k i, i n, ad contentū sub k i, c l. hoc est sicut n i ad c l, hoc idē est sicut c m ad c l. Est aūt sicut c m ad c l, ita x c ad k c, hoc est ad k b. Est igit̄ sicut x i ad k e, ita x c ad k b, & residua i c ad residuā b e, sicut x c ad k c. Quam aūt proportionem habet x c ad k c, eam habet g ad f. incidit igitur k e in lineam extra circulū ductā, & b e inter extra ductam & circūferentiā cōprensa ad c i, inter cōtactū & ipsam k e interceptā eam habet, quā f ad g proportionem.



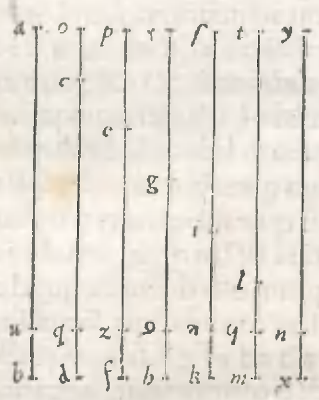
Si

Si lineæ quotcunq; numero consequenter disponantur, quæ sese æqualiter ex- 10
cedant, sitq; excessus breuissimæ illarum ęqualis: item aliæ sumantur lineæ numero prædictis æquales, magnitudine uero unaquæq; æqualis longissimæ: illarū quadrata omnium quæ sunt æquales lōgissimæ, & quadratum longissimæ, & cōtentum sub breuissima & linea æquali, omnibus simul æqualiter sese excedentibus: hęc omnia simul sumpta tripla erunt, ad quadrata linearum sese æqualiter excedentium simul sumpta. Sunto itaq; quotusq; lineæ continenter positæ, quæ sese æqualiter excedant, a b c d e f g h. Sit aūt h æqualis excessui: adijciatur uero ipsi b, linea i, æqualis ipsi h. ipsi quoq; c addatur k, æqualis ipsi g. ipsi d addatur l, æqualis f. ipsi e apponatur m, æqualis ipsi e. ipsi f addatur n, æqualis d. ipsi g addatur x, æqualis c. ipsi demum h addatur o, æqualis b. Hæ igitur quæ confectæ sunt, erunt inter se æquales, & longissimæ prædictarum. Est igitur ostendēdum, quod quadrata istarum omnium simul cum quadrato ipsius a, & eo quod continetur sub h, & sub æquali omnibus simul a b c d e f g h, tripla sunt ad quadrata simul omnium a b c d e f g h. Est itaq; quadratum b i æquale duobus quadratis b, & i, & duobus his quæ fiunt ex b in i. Quadratum uero k c est ęquale quadratis k & c, & duobus his quæ continentur sub c k. Similiter quadrata reliquarum quæ sunt æquales ipsi a, erūt æqualia quadratis partium suarum, & duobus his quæ sub earum partibus continentur. Quadrata igitur a b c d e f g h, & quadrata i k l m n x o, simul cū quadrato a, dupla sunt ad quadrata a b c d e f g h.



Reliquum ostendemus, quod dupla eorum quæ sub partibus uniuscuiusq; lineę æqualis a continentur, simul sumpta cum contento sub h, & linea æquali omnib. simul a b c d e f g h, sunt æqualia quadratis a b c d e f g h. Quoniam itaq; duo quæ sub i & b continentur, æquantur duobus cōtentis sub h & b: duo autem quæ sub k & c, æquantur contento sub h, et quadrupla c, quia k est dupla ipsius h. Duo uero contenta sub l d, æquantur contento sub h, & sexcuplo ipsius d, quia l est tripla ipsius h. Similiter & alia dupla eorum, quæ sub partibus continentur, æquantur contento sub h & multiplici cuiuscunq; secundum numeros pares continenter lineæ sequenti multiplices. Omnia igitur simul sumpta cum eo quod continetur sub h, & sub æquali omnibus a b c d e f g h, ęquabuntur cōtento sub h, & sub æquali omnibus: ipsi a, & triplo ipsius b, quincuplo c, & semper impari secūdum numeros impares continenter multiplices lineæ sequentis. Quadrata quoq; ipsarum a b c d e f g h, æqualia sunt ei quod continetur sub eisdem lineis. nam quadratum ipsius a est æquale contento sub h, & sub æquali reliquis illis quarū unaquæque æquatur ipsi a. æque multipliciter enim h mensurat ipsam a, sicut a mensurat omnis sibi æquales simul sumptas. quare quadratum ipsius a, est æquale contento sub h, & omnibus simul æqualib. ipsi a, & duplo ipsarum b c d f g h. nam illæ quæ sunt ęquales ipsi a, omnes excepta a, duplæ sunt ad b c d e f g h. Similiter quadratum b æquat̄ cōtento sub h, & sub linea æquali ipsi b, & dupla ipsis c d e f g h. Et item quadratum c æquatur contento sub h, & sub æquali ipsi c, & dupla ipsarū d e f g h. Similiter aliarum quadrata æquabuntur contentis sub h, & sub æquali unicuique, & dupla reliquarum. quare constat quadrata omnium æqualia esse ei quod continetur sub h, & sub æquali omnibus, & ipsi a, & tripla b, & quincupla c, & secundum numeros continenter impares multiplici sequentis lineæ. Ex hoc igitur manifeſtum eſt, quadrata ſimul omnia linearum ęqualium, longiſſimę quadratis ſimul omnibus linearum ſeſe æqualiter excedentium minus quàm tripla eſſe, cum aſſumptis quibuſdam tripla efficiantur illis. Reliquis uero, dempto longiſſimæ quadrato, plus quàm tripla inueniūtur, cum aſſumpta ſint minus quàm tripla ad quadratum longiſſimæ. Et ſi ſimili forma deſcribātur ab omnibus, & ab his quæ ſeſe æqualiter excedunt, & ab his quæ ſunt æquales longiſſimę earū quidem quæ ſunt ab his quæ ſeſe æqualiter excedunt formarum, minus quàm tripla exiſtent. Reliquarum uero, dempta ea quæ à longiſſima fiet, plus quam tripla. nā ſimilia ſpecie eandem habebunt inter ſe proportionem, quàm quadrata habent.

11 SI lineæ quotcunq; numero conſequenter diſponātur, quæ ſeſe æqualiter excedant, & aliæ item lineæ ſumātur, quæ quidem dictis lineis ſint multitudine una linea pauciores, magnitudine uero unaquæq; æqualis lōgiſſimæ: harū æqualium quadrata ſimul omnia, ad quadrata linearū ſeſe æqualiter excedentiū, dempta illarum breuiſſima, maiorem habēt proportionem quàm quadratum longiſſimæ ad id quod eſt æquale utriſq; ſimul, ei quod ſub longiſſima breuiſſimaq; cōtinetur, & tertiæ parti quadrati lineæ illius qua longiſſima excedit breuiſſimā. ad quadrata uero linearū ſeſe æqualiter excedentiū, dempto lōgiſſimæ quadrato, habent maiorē proportionē, q; ſit ſuperius dicta proportio. Eſto itaq; quotcunq; numero lineæ ſeſe æqualiter excedētes deinceps poſitæ a b, excedēs c d, & c d, e f, & e f, g h, & g h, i k, et i k, l m, & l m, n x. Addat uero ipſi c d quędā c o ęqualis uni exceſſui, & ipſi e f æqualis duob. e p, ipſi uero g h æqualis tribus g r, & alijs eodem modo erūt. itaq; quæ inde ſunt effectæ inter ſe æquales, & etiam ipſi lōgiſſimæ unaquęq; ęqualis. Oſtendendū itaq; eſt, quadrata ſimul harum omnia, ad quadrata ſimul omnia earū quæ ſeſe ęqualiter excedunt, dempto quadrato n x, minorem habēt proportionem, q; quadratum a b ad id quod ęquatur utriſq; ſimul, ei quod continetur ſub a b, n x, & tertiæ parti quadrati n y. ad quadrata uero earūdem dempto quadrato ipſius a b, maiorē proportione dicta habent proportionem. Adimatur unicuiq; earum, quæ ſeſe æqualiter excedunt, æqualis exceſſus. quam itaq; proportionem habet quadratum a b ad utraq; ſimul, ad cōtentū ſub a b, u b, & ad tertiā partem quadrati a u, hanc habet quadratum o d ad contentum ſub o d, d q, & tertiam partem quadrati o q. & quadratum p f ad contentum ſub p f, z f, & tertiam partem quadrati p z, & quadrata reliquarum ad ſpacia ſimiliter ſumpta. Et omnia harum omnium o d, p f, r h, ſ k, t m, y x: ad omnia contenta ſub n x, & æquali omnibus ſimul dictis lineis, & tertias partes quadratorum o q, p z, r 9, ſ π, t s, y n. eandem habebunt proportionem, quam quadratum a b ad utraq; ſimul, ad contentum ſub a b, u b, & tertiam partem quadrati a u. Si igitur oſtendatur contentum ſub n x, & ſub æquali omnibus ſimul his o d, p ſ, r h, ſ k, t m, y x, et tertias partes quadratorum o q, p z, r 9, ſ π, t s, y n, quadratis a b, c d, e f, g h, i k, l m eſſe minora: quadratis uero c d, e f, g h, i k, l m, n x maiora eſſe: propoſitum oſtenſum erit. Illud igitur quod ſub n x, et ſub ęquali omnibus ſimul o d, p f, r h, ſ k, t m, y x, & tertiæ partes quadratorum o q, p z, r 9, ſ π, t s, y n æquantur quadratis harū q d, z f, 9 h, π k, s m, n x, & contento ſub n x, & ſub ęquali omnibus ſimul o q, p z, r 9, ſ π, t s, y n, & tertijs partibus quadratorum prædictorum. Quadrata uero a b, c d, e f, g h, i k, l m, æquantur quadratis harum b u, q d, z f, 9 h, π k, s m, & contento ſub b u; & dupla iſtarum ſimul a u, c q, e z, g 9, i π, l s, cum quadratis prædictarum li-

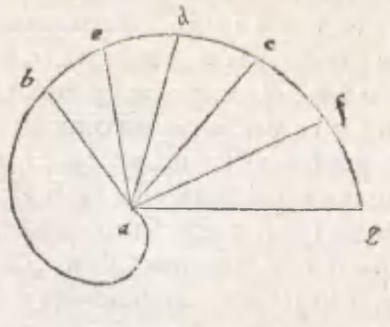


nearum. Communia itaq; ſunt utrinq; quadrata lineæ æqualis ipſi n x. Contentum autem ſub n x, & ſub æquali ſimul iſtis o q, p z, r 9, ſ π, t s, y n minus eſt contento ſub b u, & dupla iſtarum ſimul a u, c q, e z, g 9, i π, l s. quia lineæ nuper dictę ſunt æquales iſtis c o, e p, g r, i ſ, l t, n y. reſiduis uero ſunt maiores. Et quadrata iſtarum a u, c q, e z, g 9, i π, l s, maiora ſunt tertia parte quadratorum linearū o q, p z, r 9, ſ π, t s, y n. hoc enim oſtenſum fuit ſuprà. Spacia igitur prædicta minora erunt quadratis iſtarum a b, c d, e f, g, i k, l m. Reliquum igitur oſtendemus, quod ſunt maiora quadratis c d, e f, g h, i k l m, n y. Rurſus itaque quadrata iſtarum c d, e f, g h, i k, l m, n x, æquantur quadratis q c, e z, g 9, i π, l s, & quadratis d q, f z, h 9, k π, m s, n x, & contento ſub n x, & ſub dupla harum ſimul omnium c q, e z, g 9, i π, l s, & ſunt cōmunia quadrata q d, z f, 9 h, π k, s m, n x. Maius aūt eſt contentū ſub n x, & ſub æquali omnibus ſimul iſtis o q, p z, r 9, ſ π, t s, y n, contento ſub n x, & ſub dupla iſtarū ſimul omnium c q, e z, g 9, i π, l s. Sunt autem quadrata q o, z p, 9 r, π ſ, t s, y n, quadratis c q, e z, g 9, i π, l s, plus quàm tripla. Oſtenſum enim eſt iſtud. Sunt igitur dicta ſpacia maiora quadratis c d, e f, g h, i k, l m, n x. Quare conſtat propoſitum.

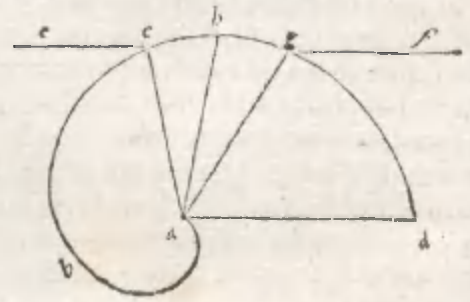
Si ſpacia quoque forma ſimilia deſcribantur ab omnibus, & ab his quæ ſeſe æqualiter excedunt, & ab his quæ ſunt æquales longiſſimæ: illarum formæ omnium, quæ ab his quæ ſunt æquales longiſſimæ producentur, minorem proportionem habebunt ad formas ſimul omnis, quæ producentur à lineis ſeſe æqualiter excedentibus, dempta breuiſſimæ forma, quàm quadratum lōgiſſimæ ad utraque ſimul, & contentum ſub longiſſima & breuiſſima, & ad tertiam partem quadrati lineæ illius qua longiſſima breuiſſimā excedit. ad formas autem eaſdem, dēpta longiſſimæ forma, proportionem habebunt dicta proportione maiorem. Similes enim ſpaciorum formæ eandem habebunt, quam quadrata habuerunt, proportionem. *Corollariū præmiſſæ.*

Si linea recta in plano ſit ducta, & quieſcente altero eius termino æquali uelocitate circumferatur, donec reſtituatur in eum locum unde moueri cœperat: & ſimul cum linea circumlata pūctum feratur æquali uelocitate ipſum ſibijpſi, & per ſe ſecundum dictam lineam latum incipiens à termino quieſcente: punctum hoc deſcribit in plano lineā ſpiralem. Terminus itaq; lineæ ſic motę quieſcēs, uocetur initiū lineæ ſpiralis. Poſitio autem lineæ, à qua linea recta incipit circumferri, initium circulationis. Linea uero recta quam punctum latum in prima reuolutione permeauerit, prima uocetur: & ea quam dictum punctum in ſecunda reuolutione permeauerit, ſecunda: & reliquæ ſimiliter pari ordine cum reuolutionibus nominentur. Spacium autem compræhenſum à linea ſpirali in prima reuolutione deſcripta, & à linea recta quæ prima exiſtit, primum uocetur. Compræhenſum uero à linea ſpirali in ſecunda reuolutione deſcripta, & à linea ſecūda, uocetur ſecundum: & reliqua deinceps hoc ordine nominentur. Item ſi à puncto quod eſt initium lineæ ſpiralis ducatur linea recta, huius lineæ ea pars quæ exiſtit, ubi circumuolutio producitur, pręcedens uocetur. quæ uero in alterā partem, ſequens. Circulus quoq; deſcriptus circa punctū, quod eſt initium lineæ ſpiralis ſecūdum interuallum lineæ quæ prima uocatur, primus & ipſe dicatur. Deſcriptus uero circa idem centrum, ſecundum interuallum lineæ duplæ priori, ſecundus dicatur: & reliqui deinceps eodem modo. *Diffinitiones.* *Non dicit propter cōſtitutionem, ſed differentiam poſitionis.*

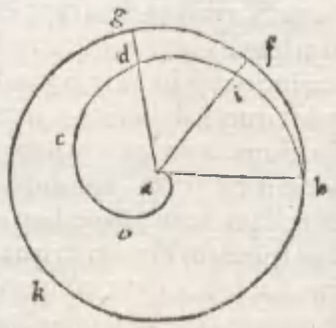
SI ad ſpiralem lineam in una circumuolutione deſcriptam, quæcunq; fuerit illa circūuolutio, ab initio ſpiralis lineæ ducantur quotcunq; lineæ rectæ, quæ inter ſe angulos æquales efficiāt, ipſæ ſeſe æqualiter excedent. Eſto ſpiralis linea, ad quam a b, a c, a d, a e, a f lineæ rectæ ſint ductæ, quæ angulos inter ſe æquales faciant. Oſtendendum eſt, quod a b æqualiter exceditur ab a c, & a c ab a d, & reliquæ ſimiliter. In quo enim tempore linea circumuoluta ex a b proceſſit ad a c, in 12 eodem punctum ſecundũ lineam rectam latum exceſſum permeauit, quo c a excedit a b. in quo uero ex a c in a d, in eadem permeauit exceſſum quo a d ſuperat ipſam a c. in tempore uero æquali linea circumuoluta ex a b in a c procedit, & ex a c in a d, cũ anguli ſint æquales. In tempore igitur æquali punctum ſecundũ lineam rectam latum permeat exceſſum, quo a c excedit a b, & exceſſũ quo a d excedit a c. æquali ergo exceſſu a c ſuperat ipſam a b, & a d ipſam a c. & reliquæ ſimiliter iſtis oſtendentur.



13 SI linea recta contingat lineam ſpiralem, in uno ſolum puncto eam continget. Eſto ſpiralis linea, in qua a b c d: eſto eius initium a punctum: initium uero circumductionis, ſit a d linea recta. Et cõtingat lineam ſpiralem linea e f. Dico quod in uno ſolo pũcto eam contingit. quod ſi fieri poteſt, contingat eam in duobus punctis g c, & iungantur a c, a g, & angulus contentus ſub c a, a g in duo ęqua diuidatur. punctum autem in quo linea diuidens dictum angulum incidit in lineam ſpiralem, ſit h. Aequaliter itaque a g excedit a h, & a h ipſam a c, cum æquales angulos inter ſe cõtineãt. quare a g, a c ſunt ſimul ad a h duplæ. Sed eius lineæ quæ diuidit angulum c a g, in duo æqua, ſunt lineæ a c, a g plus quàm duplæ. Manifeſtum igitur, quod punctum in quo a h incidit in lineam c g, eſt inter punctum a, & pũctum h in linea a h. Igitur e f ſecabit lineam ſpiralem, cũ aliquod punctum in c g linea collocatum ſit intra lineam ſpiralem. Suppoſitum uero fuerat, quod eam contingeret. In uno igitur puncto e f continget lineam ſpiralem.

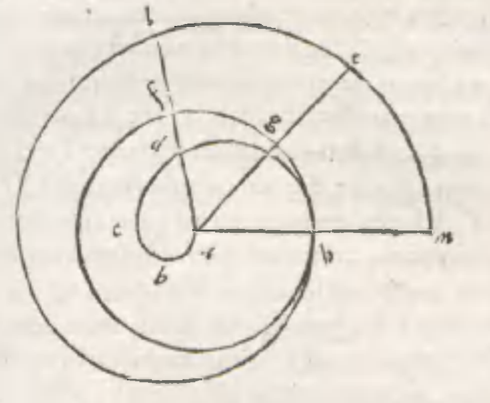


14 SI ad lineam ſpiralem in prima reuolutione deſcriptam incidant duæ lineæ rectæ, à puncto quod eſt lineę ſpiralis initium actæ: deinde extra producantur, uſque ad circuli primi circumferentiam, eandem habebunt proportionem inter ſe illæ quæ in lineam ſpiralem inciderunt, quam partes circumferẽtiæ circuli, quæ inter terminum lineæ ſpiralis, & extrema linearum quæ ad circumferentiam productæ fuerunt, ſumendo partes circumferentiæ ab termino lineæ ſpiralis ſecundum circumuolutionem. Eſto linea ſpiralis a b c d e h in prima reuolutione deſcripta, initium eius eſto punctum a: et initium reuolutionis eſto linea a h recta. & circulus h k g, eſto primus. incidant itaq; à puncto a duæ rectæ a c, a d lineæ, ad lineam ſpiralem: & producantur ad circumferentiam circuli, quam attingant in punctis f g. Oſtendendum eſt, quod a e habet ad ipſam a d eam proportionem, quam h k f circumferentiæ pars, ad h k g partem. In circumductu enim lineæ a h manifeſtum eſt, pũctum h permeaſſe circumferentiã h k g æqua uelocitate, qua punctũ a per lineam rectam latũ permeauit lineã a d: & item punctum h per circumferentiam latum æquo tempore permeauit h k f cir-



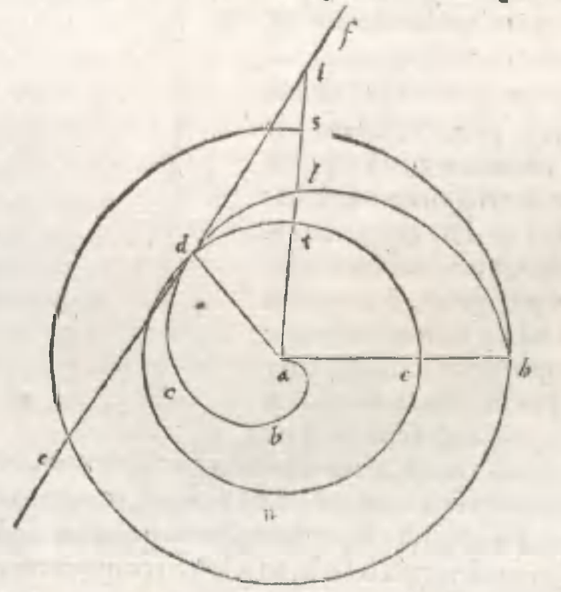
circumferentiam, quo punctum a lineam a c rectam. Manifeſtum eſt igitur, quod a e eandem ad ipſam a d habebit proportionem, quam h k f circũferentia ad h k g circumferentiã. Hoc aũt ſuperius eſt oſtenſum. Similiter uero demonſtrabitur, ſi altera incidentiũ linearũ in terminũ lineæ ſpiralis inciderit. nam idem continget.

SI in lineã ſpiralem in ſecũda reuolutione deſcriptã, incidãt rectæ ab initio ſpi- 15
ralis lineæ eductæ, eandem habebunt inter ſe lineæ rectę proportionẽ, quã dictæ circumferentiæ ſimul cũ tota circũferentia circuli ſumptæ. Eſto linea ſpiralis, in qua a b c d h, quę ſit in prima reuolutione deſcripta. itẽ h l m, in ſecũda. & incidant in eam duæ rectæ a e, a l. Oſtendendũ eſt quod eandem habet a l ad a e proportionẽ, quã h k f circũferẽtia ſimul cũ tota circuli circũferentia ad h k g, cũ tota circuli circumferẽtia. In quãto enim tẽpore pũctum a per lineã rectã latũ permeat a l lineã, et h punctũ in eodẽ per circũferẽtiam latũ totã circuli circũferẽtiam permeat, et iuſuper h k f. Et item dum a punctũ permeat a e, et h punctũ permeat totã circũferẽtiam, & inſuper h k g, cũ utrũq; punctũ æque uelociter ſibi ipſi ferat. Manifeſtũ eſt igitur, quod eãdem habebit a l ad a e proportionẽ, quã h k f cũ tota circuli circũferentia, ad h k g circũferẽtiam, cũ tota eadẽ circuli circũferentia. Eodẽ aũt modo oſtendet, & ſi in lineã ſpiralem in tertia reuolutione deſcriptã lineæ rectæ inciderint, eãdem habebũt inter ſe proportionem, quã dictæ circũferentiæ cũ tota circuli circũferentia bis ſumpta utriſq;. Similiter aũt & quæ in alias lineas ſpirales inciderint, oſtendent quod eandẽ habeant proportionẽ, quã dictæ circũferentiæ cum tota circumferẽtia circuli, ſecundũ numerũ uno minorẽ, q̃ ſint reuolutiones. et utraq; linea incidẽs in terminos ipſius lineę ſpiralis inciderit, idẽ eueniet.



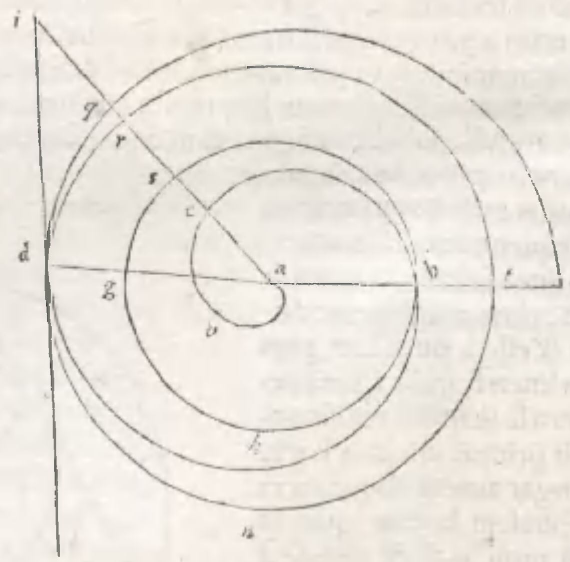
SI lineam ſpiralem in prima reuolutione deſcriptam recta linea contingat, & à 16
puncto contactus ducatur linea recta ad punctum quod eſt principium lineę ſpiralis: anguli, quos contingens cum ducta facit, erũt inæquales: & ille quidem qui fuerit in præcedentiũ parte, obtuſus exiſtet: qui uero in parte ſequentium, erit acutus.

Eſto linea ſpiralis, in qua a b c d h in prima reuolutione deſcripta. & eſto a punctum, principium lineæ ſpiralis. Linea uero recta a h ſit initiũ reuolutionis. Sit primus circulus h g k. Contingat autem aliqua recta linea ſpiralem lineam, quæ ſit e d f, in puncto d, & ab ipſo d ducatur ad a linea d a. Oſtendẽdum eſt, quod d f cum d a obtuſum angulum facit. Deſcribatur d t n circulus, poſito a cẽtro ſecundum interuallum ipſius d a. Neceſſe eſt itaq; eam huius circuli circumferentiam, quæ eſt in parte præcedentium, inſra lineam ſpiralem cadere.



dere. quæ uero in parte, sequentium extra. Quia linea recta ab a ad lineam spiralem in parte præcedentium ducta, est maior a d linea. quæ uero ab ipso a in parte sequentium ducta fuerit, ipsa a d minor existet. Quod autem angulus contentus sub a d f, non sit acutus, patet, cum sit maior angulo semicirculi. Quod autē non sit rectus, est sic ostendēdum. Esto si fieri potest, sit rectus. Igitur e d f contingit circulum d t n. Iam potest ab a puncto duci linea recta ad cōtingentem, ut eius pars quæ inter circumferentiam & contingentem deprehenditur, ad semidiametrum minorem habeat proportionem, quàm habeat circumferentia inter contactum & lineam ductam deprehensa, ad circumferētiam datam. Ducatur itaq;, ut dictū est, a t. Secat autem ipsa lineam spiralem, esto in puncto l, & circumferentia circuli d t n in puncto r. & linea a r i recta, ad lineam a r minorem habeat proportionē, quàm d r ad d t n circumferentiam. Tota igitur a i ad a r minorem habet proportionem, quàm r d n t circumferentia, ad d n t circumferentiam: hoc est quàm habet s g k h circumferentia ad g k h circumferentiam. Quam uero habet s g k h circumferentia, ad ipsam g k h circumferentiam, hāc habet a l recta ad a d rectā. hoc etiam iam ostensum fuit. Minorem igitur proportionem habet a i ad a r, quàm l a ad ipsam a d. Quod quidem esse non potest. nam r a est æqualis ipsi a d. Non est igitur angulus a d f rectus. Et ostensum est, eum non esse acutum. Quare obtusus existet. reliquus igitur est acutus. Similiter ostendetur, si contingens contigerit in termino lineæ spiralis. nam idem eueniet.

17 SI lineam spiralem in secunda reuolutione descriptam, linea recta continget, illud idem eueniet. Contingat itaq; linea recta e f, lineā spiralem in secūda reuolutione descriptam, in puncto d: et cetera similiter superiorib. disponātur. Similiter circumferentiæ r n d circuli pars illa, quæ erit in parte præcedentium, cadet intra lineam spiralem: quæ uero in parte sequentium, cadet extrà. Angulus igitur a d f non est acutus, neq; rectus, sed obtusus: quod sic demonstratur. Esto enim si fieri potest, sit rectus. linea igitur e f continget circulum r n d. Esto in puncto d. Ducatur item a i ad contingentem, & secet lineam quidem spiralem in puncto q, circumferentiam uero circuli r n d in puncto r. Habeat autem r i ad a r minorem proportionem, quàm d r circumferentia ad totā circuli r n d circumferentiam, et ad d n t circumferentiam. Ostensum enim est, hoc esse posse. & iam tota i a ad a r minorem habet proportionē, quàm r d n t circumferētia cum tota circuli circumferētia, ad d n t

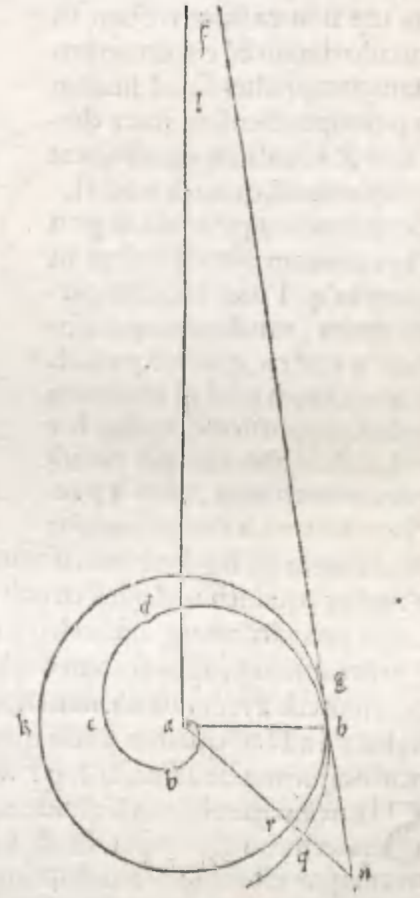


circumferentiā, cum tota d n t circūferentia. Sed quam proportionē habet r d n t circumferētia, cum tota d n t r circuli circumferentia, ad d n t circumferentiam cū tota d n t circuli circumferentia: hanc habet s g k h circumferentia, cum tota circuli circumferentia h s g k, ad g k h circumferentiam, cum tota circuli h s g k circumferentia. Quam autem proportionem habent circumferentiæ postremò dictæ, eam habet q a linea recta, ad ipsam a d rectā. Hoc enim ostensum fuit. Minorem igitur

igitur proportionem habet i a ad a r, quàm a q ad ipsam a d: quod quidem esse nō potest. nam r a est æqualis ipsi a d. maior uero est i a, quàm a q. quare constat, angulum a d f obtusum esse, reliquum uero acutum. Hæc eadem euenient, si contingens in termino lineæ spiralis ipsam contingere ponatur: & eadem ratione demōstrabitur, ubi lineam spiralem quacunq; reuolutione descriptam, linea recta contigerit, etiam in termino ipsius lineæ spiralis angulos inæquales fieri, cum linea ducta à puncto quod est initium lineæ spiralis ad punctum contactus: & eum qui in parte præcedentium fuerit, obtusum esse: qui uero in parte sequentium, acutum.

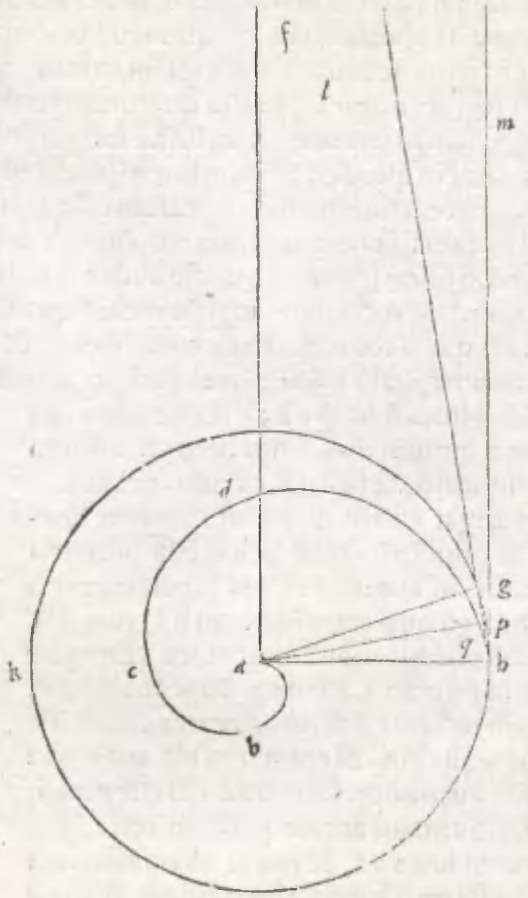
SI lineam spiralem in prima reuolutione descriptā linea recta contigerit in ter- 18
mino lineæ spiralis, à puncto autem quod est initium lineæ spiralis, ducatur linea quædam recta stans angulis rectis super lineam, quæ initium fuit reuolutionis: illa ducta coincidet lineæ contingenti, & eius pars quæ intra contingentem, & initium spiralis lineæ deprehenditur, æqualis erit circumferentiæ primi circuli.

Esto linea spiralis a b c d h, esto autem pūctum a initium eius, linea uero a h initium reuolutionis, & sit h g k circulus primus. Contingat autem quædam spiralem lineam in puncto h, quæ sit h f, & à puncto a ducatur ad angulos rectos super lineam h a, linea a f, quæ coincidet cum h f, cum f h, h a contineant angulum acutum. coincidat itaq; in puncto f. Est itaq; demōstrandum, lineam rectam f a circumferentiæ circuli h k g esse æqualem. Si enim non est, aut erit ea maior, aut minor. Esto primū, si esse potest, maior. Sumatur autem quædam recta, quæ sit minor linea a f, & maior circumferentia h k g. est iam h k g circulus quidam, & in circulo linea recta minor diametro, quę est g h: & proportio linea h a ad a l maior est proportione ea quam habet dimidia h g ad lineam ab ipso a ad ipsam h g perpendiculariter ductam, quoniam & eam habet quam h a ad a f. Potest igitur à puncto a educi ad eductam a n, ita ut n r, quæ media intercipit inter h n eductam, & circumferentiā ad ipsam h r rectam, eam habeat proportionem, quā h a ad a l. Habebit igitur n r ad r a, eam quā habet h r recta ad a l. ipsa uero h r ad a l minorem proportionem habet, quàm h r circumferentia ad k h g circuli circumferentiā. nam h r rectā minor est circumferentia h r,



& linea a l recta maior est circumferentia circuli. Minorem igitur proportionem habebit n r ad r a, quàm h r circumferentia ad h k g circuli circumferentiam. Tota igitur n a ad a r habet minorem proportionem, quàm k r circumferentia cum tota circuli circumferentia ad h k g circuli circumferentiam. Quam autem proportionem habet h r circumferentia cum tota circuli h g k circumferentia, ad h k g circuli circumferentiam, hanc habet q a ad h a. Hoc enim ostensum est. Minorem igitur proportionem habebit n a ad a r, quàm q a ad h a. quod quidem esse non potest. Nam n a maior est ipsa q a, & a r est æqualis h a. non est igitur a f circumferentia circuli h k g maior. Esto uero, si fieri potest, minor f a circūferentia circuli

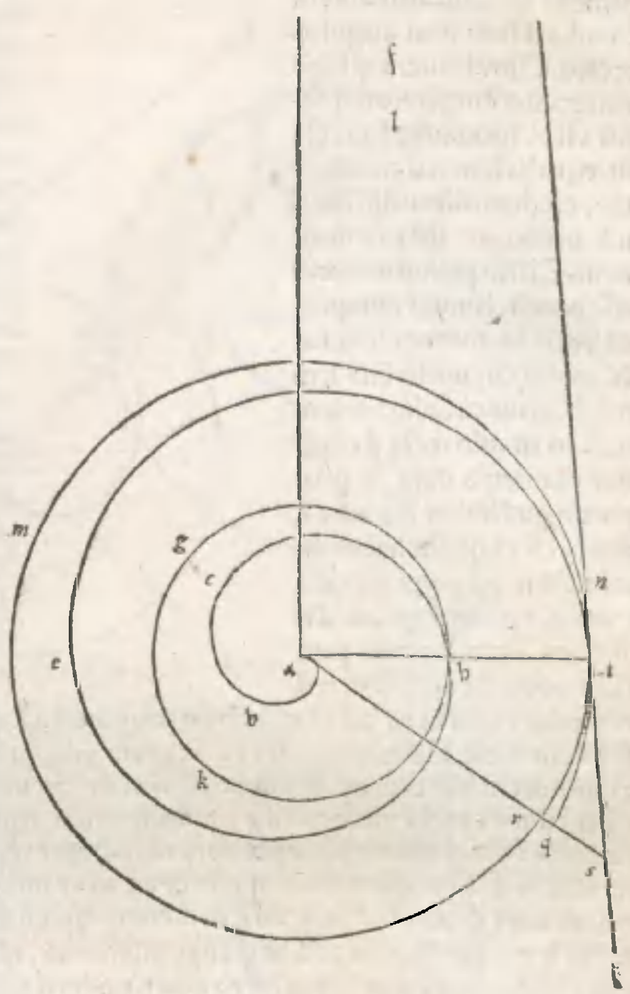
circuli h k g. Sumatur item quædam linea a l recta, quæ sit maior a f, & minor circumferentia circuli h k g. Et ducatur à puncto h recta h m, equedistans ipsi a f. Rursus est circulus h k g, & in ipso linea recta h g minor diametro, & itē alia quæ contingit circulū in pūcto h. et proportio quam habet h a ad a l, est minor ea quā habet dimidia g a ad lineā ab a ad se ductam perpendiculariter. Quoniā uero & minor est ea quā habet h a ad a f, potest ab a duci a p ad cōtingentem, ita ut r n linea inter rectam in circulo datam & circumferentiam compræhensa, ad lineam h p compræhensam inter ductam & cōtactum eam habeat proportionē, quam h a ad a l. Secet autem a p circulū in puncto r, lineam uero spiralem in puncto q. Tunc habebit permutatim, eandem proportionem n r ad r a, quam h p ad a l. Linea uero h p ad a l maiorem habet proportionē, quàm h r circumferentia, ad h g k circuli circumferentiam. nam h p recta, maior est h r circūferentia:



& a l minor est h g k circuli circumferentia. maiorem ergo habet proportionem n r ad a r, quàm h r ad g h k circuli circumferentiam. quare & r a ad a n maiorem habet proportionem, quàm h g k circuli circumferentia, ad h k r circumferentiā. Quam autem proportionem h g k circuli circumferentia ad h k r circumferentiā, eam habet h a recta ad a q. nam hoc est ostensum. Maiorem ergo proportionem habet r a ad a n, quàm h a ad a q. quod quidem esse non potest. Non est igitur minor, neque maior a f recta, h g k circuli circumferentia. igitur est eidem æqualis.

20 SI lineam spiralem in secunda reuolutione descriptam aliqua linea recta in illius termino contingat, & ab initio lineæ spiralis ducatur aliqua recta super lineam quæ est initium reuolutionis constituta ad angulos rectos: illa coincidet cū contingente, & linea recta quæ media erit inter contingentem, & initium lineæ spiralis, dupla esse probatur circumferentiæ circuli secundi. Esto itaq; a b c h linea spiralis in prima reuolutione descripta, et h e t in secūda, & h k g circulus primus, & t m n secundus. Sit autem t f quædam linea contingens lineam spiralem in pūcto t, & f a ducta ad angulos rectos super t a. Coincidet autem ipsa lineæ t f, cum sit ostensum angulum a t f esse acutum. Ostendēdum itaq; est, a f rectam duplam esse circumferentiæ circuli t m n. Nam si non est ei dupla, aut plus aut minus erit, quàm dupla eiusdem. Esto prius si potest esse, plus quàm dupla, & sumatur a l recta minor a f recta, & maior quàm dupla circumferentiæ circuli t m n. Est iam circulus quidam t m n, & in circulo linea data t n minor diametro: & quam habet t a ad a l maior est proportione quam habet dimidia t n, ad perpendicularem ab a centro

centro ad ipsam ductam. Potest igitur ab a educi a s ad t n extra actam, ita ut media inter t n extra actam, & circumferentiam quæ sit r s, habeat ad t r eam proportionem, quam t a ad a l. Secet autem a s circulum in puncto r. Et lineam spiralem in puncto q. Et permutatim, cādem habebit proportionē r s ad t a, quam t r ad a l. Sed ipsa t r ad a l minorem proportiōem habet, q̄ t r circūferentia ad duplam circumferentiæ circuli t m n. nam t r linea recta, minor est t r circūferētia. Recta uero a l maior est, q̄ dupla circūferentiæ circuli t m n. Minorē ergo habet proportionem r s ad a r, q̄ t r circūferētia ad duplā circumferētiæ circuli t m n. Tota igitur s a ad a r minorem habet proportionem, quàm t r circumferentia, cum circumferentia circuli t m n bis sumpta, ad circumferentiam circuli t m n bis sumptā. Quam autem proportionem habent dictæ circūferentiæ, eam habet q a ad a t. hoc enim ostensum est. Minorem ergo proportionem habebit a s ad a r, quàm q a ad t a. quod esse non potest. nō

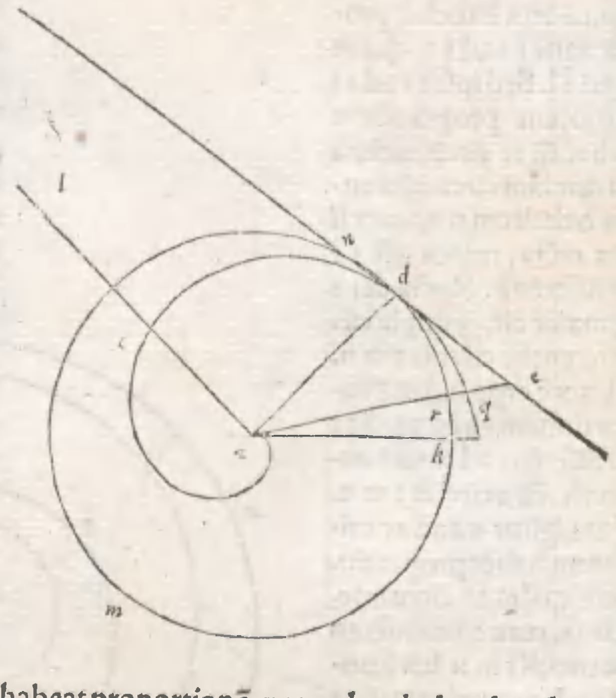


est igitur a f plus quàm dupla circumferentiæ circuli t m n. Similiter autem ostendetur, quod neq; minor, quàm dupla illius esse potest. Quare constat duplam esse. Ostendendum quoq;, si lineam spiralem in quacunque reuolutione descriptā, recta quædam contigerit in termino illius, & ab initio lineæ spiralis ducatur super lineam quæ est reuolutionis initium, linea recta ad angulos rectos, ipsa coincidet contingenti, & multiplex est circumferentiæ circuli secundum reuolutionem numeri nominati eodem numero, & ipsa multiplex nominata.

SI lineam spiralem in prima reuolutione descriptam linea recta contingat, non in termino ipsius, & à puncto cōtactus ad initium lineę spiralis recta ducatur, & initio lineæ spiralis posito centro describatur circulus secundum interuallum lineæ ductæ, ab initio autem lineæ spiralis quædam recta ducatur super lineam reuolutionis initium ad angulos rectos constituta, ipsa cum contingente concurret. Et linea inter huiusmodi concursum & initium lineæ spiralis media, æqualis est circumferentiæ circuli descripti, quæ inter punctum contactus & sectionis pūctum compræhenditur, in quo puncto circulus descriptus secat lineam initium reuolutionis, cum in præcedentium parte circumferentia sumatur à pūcto quod situm est in reuolutionis initio. Esto linea spiralis, in qua a b c d in prima reuo- 21

 lutione

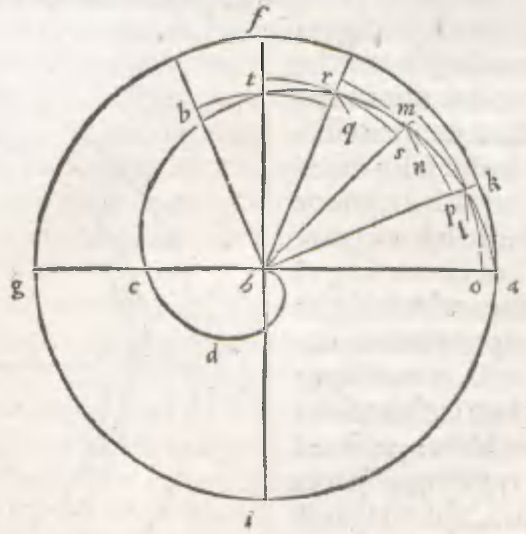
lutione deſcripta, & contingat eam aliqua recta e d f, in puncto d. ab ipſo uero d ad initium lineæ ſpiralis ducatur linea d a, & ſuper centro a deſcribatur circulus ſecundum interuallum a d, qui ſit d m n. Secet autem hic initium reuolutionis in puncto k. Ducatur autem f a ad a d ſecūdum angulos rectos. Quod autem ipſa cōcurret cū cōtingēte, manifeſtū eſt. Quod uero f a recta ſit æqualis k m n d circūferētiæ, eſt demōſtrandū. Nā ſi nō, uel maior, uel ea minor exiſtet. Eſto primū maior, ſi eſſe poteſt. Sumat aūt quædā recta l a, minor recta f a, & maior circumferētia k m n d. Rurſus circulus eſt k m n, & in circulo recta d n minor diametro data, & proportio quā habet d a ad a l, maior eſt ea quam habet dimidia d n, ad perpendicularem à cētro ſuper ipſam d n ductam. Poteſt igitur à puncto a educi a e ad ipſam n d extra ductā, ita ut e r ad d r eā habeat proportionē, quam d a ad a l. nā hoc fieri poſſe oſtēſum eſt. Habebit igitur e r ad a r eam proportionē, quam d r ad a l. & d r ad a l minorem habet proportionem, quàm d r circumferentia ad k m d circumferētiam, cum d r recta minor ſit d r circumferentia, ipſa uero a l ſit maior k m d circūferentia. Minorem ergo proportionem habet e r recta ad r a, quàm d r circumferētia ad k m d circumferentiam. quare & a e ad a r minorem habebit proportionem, quàm k m r circumferentia, ad k m d circumferentiam. Quam aūt proportionem habet k m r circūferētia ad k m d circumferentiā, eā habet q a ad ipſam a d. quare minorem proportionē habebit e a ad a r, quàm q a ad ipſam d a, quod eſſe non poteſt. Non erit igitur f a maior circumferentia k m d. Similiter autem eis quæ antea dicta ſunt oſtendetur, quod neq; minor eſt illa, quare æqualem illi eſſe neceſſe eſt. Eodem autem modo oſtendetur, & ſi lineam ſpiralem in ſecunda reuolutione deſcriptam recta contingat, non in termino illius, & cætera ut prius diſponantur, quod linea recta media inter contingentem, & initium lineæ ſpiralis, æqualis eſt toti circuli deſcripti circumferentiæ, & inſuper circumferentiæ inter dicta puncta depræhenſæ, ipſa iā dicta circūferentia ſimiliter ſumpta. Item ſi lineam ſpiralem in quacunq; reuolutione deſcriptam aliqua recta contigerit, non in termino ipſius, & cętera diſponantur, ut ſuprà, quod recta intermedia inter dicta puncta multiplex exiſtit circumferentiæ circuli deſcripti ſecundum numerum uno minorem, eo ſecundum quē reuolutio facta fuerit, & dicta inſuper media inter dicta pūcta æqualis eſt dictæ circumferentiæ ſimiliter ſumptæ.



22 SI ſpacium à linea ſpirali in prima reuolutione deſcripta, & à linea recta initio reuolutionis primæ comprænhenſum ſumatur, poteſt figura quædam plana circa ipſum deſcribi, & altera intra, quæ figuræ ex fruſtis ſimilibus ſint compoſitę, & ita ut id quo circumſcripta inſcriptam exceſſerit, quocunq; dato ſpacio minus exiſtat. Eſto linea ſpiralis in prima reuolutione deſcripta a b c d. Eſto initium lineæ ſpiralis punctum h, & initium reuolutionis h a. Primus autem circulus

fgia,

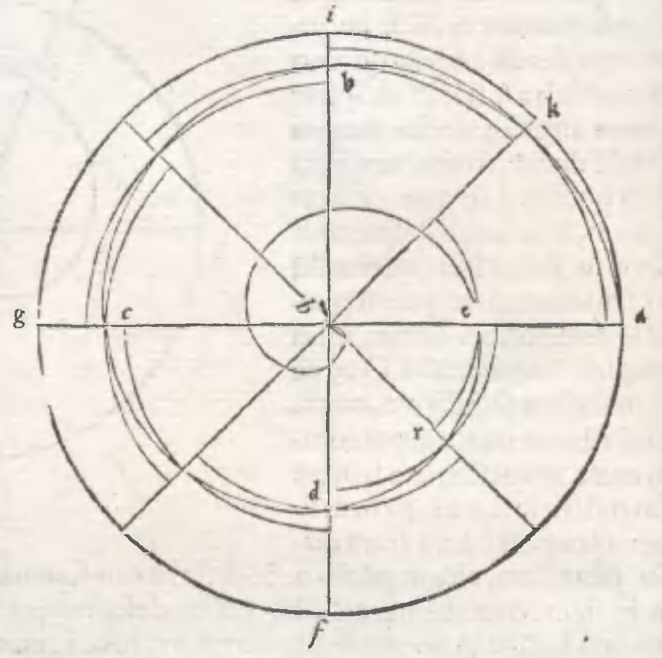
f g i a, & a g, f i diametri ipſius inter ſe altera alteri perpendicularis. Diuiſo itaq; angulo recto per æqualia, & fruſto ſpacij angulum rectum continentis, & hac diuiſione in reliquis retēta, deueniemus tandem ad reſiduū quoddā, quod minus erit dato ſpacio. & ſit illud fruſtum reſiduum factum a h k, minus dato ſpacio. Diuiſi ſunt itaque anguli quatuor recti in angulos æquales illi angulo qui continetur ſub a h, h k. & rectę partientes angulos uerſus lineam ſpiralē ductæ, ſecant eam. Eſto itaq; pūctum l, in quo h k ſecat ſpiram, & centro h deſcribatur circulus ſecundum interuallū h l. Eius itaq; pars quæ in præcedētium partem fertur, intra ſpiralem lineam cadet. Quę uero in partem ſequētium, extrà. Deſcribatur itaq; eius circumferentia, ut incidat in a h in pūcto o, & ſit ipſa o m. Et item linea, quæ poſt h k ad ſpirā ducta, ſecat illam, eſto in pūcto n. & dicta circumferentia incidat in illam in puncto m. Et item centro h interuallo h n poſito, deſcribatur circulus. Huius quoq; circūferentia incidet in lineam ſequentem h m, quæ à centro ducta incidit in ſpiram. Et ſimiliter in alijs omnibus quæ ſecant lineam ſpiralem, & faciunt angulos ſecūdum unamquanq;, deſcribantur circuli in centro h, eorum circumferentiæ ſecūdum unamquamq; incident & in præcedentem & in ſequentem. Et circūferentiæ in præcedentium parte intra cadent, & in parte ſequentium extra lineam ſpiralem. Iam igitur circa ſpacium ſumptum, eſt circumſcripta quædam figura: & alia inſcripta eidem, quæ ſunt ex fruſtis ſimilibus compoſitæ, & circumſcripta addit ſuper inſcriptam dato ſpacio minus. Quod oſtendetur. nam fruſtum h l o eſt æquale fruſto h l m, & h n p æquatur h n r, & h q s ipſi h q t. Eſt etiam unumquodq; eorum fruſtorum, quæ in figura inſcripta continentur, æquale illi fruſto in figura circumſcripta contento, quod commune latus cum illo habuerit. Conſtat igitur, omnia fruſta omnibus fruſtis æqualia eſſe. Figura igitur ſumpto ſpacio inſcripta, eſt æqualis figuræ circumſcriptæ eidem, dempto a h k fruſto. nam hoc ſolum eorum quæ in figura circumſcripta exiſtunt, relictum eſt. Cōſtat igitur, circumſcriptam figuram inſcripta maiorem eſſe fruſto h k a: quod quidem eſt propoſito ſpacio minus. Ex hoc itaq; manifeſtum eſt, quod circa dictum ſpacium poteſt circumſcribi figura qualis dicta eſt, & altera inſcribi dicto ſpacio, ita quod circumſcripta dicto ſpacio ſuperaddat minus quocunq; ſpacio dato, & inſcripta diminuat ab eodem quocunq; dato ſpacio minus. Et ipſum ſpacium figuram inſcriptam excedat, ſimiliter quocunq; ſpacio dato minus.



SI ſumatur ſpacium comprænhenſum à linea ſpirali in ſecunda reuolutione deſcripta, & à recta quæ eſt ſecūda in reuolutionis initio: poteſt ipſi ſpacio quædam plana figura circumſcribi, & alia inſcribi, quæ ex fruſtis ſimilibus ſint cōpoſitæ, ita ut id quo circumſcripta excedit inſcriptam, quocunq; dato ſpacio minus ſit. Eſto linea ſpiralis, in qua a b c d e in ſecunda reuolutione deſcripta: & eſto pūctum h initium lineæ ſpiralis, & a h initium reuolutionis, & e a ſit recta ſecunda in reuolutionis initio, & a f g eſto circulus ſecundus, a g, f i diametri ipſius quæ 23

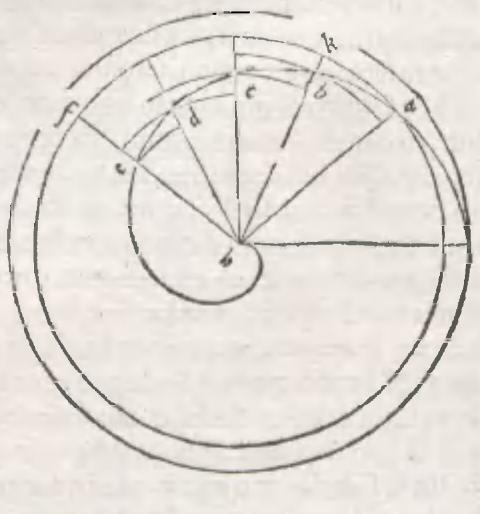
 ſe-

ſeſe ad angulos rectos ſecent. Et item diuiſis per æqualia angulis rectis, & fruſtis quæ continent angulos rectos ſimiliter, & pariter diuiſis, & hac diuiſione perducta, tandem deueniemus ad aliquod reſiduum, quod erit minus quocunqꝫ ſpacio dato. Et ſit illud fruſtum h k a minus dato ſpacio. Diuiſis angulis rectis in æquales angulos ei angulo, qui continetur ſub k h a, & cæteris diſpoſitis ut ſupra, erit id quo figura circumſcripta excedet inſcriptam minus ſpacio dato. nam exceſſus quo fruſtū h k a excedit fruſtū h e r, minor eſt fruſto h k a. Quare conſtat, circumſcriptā figuram addere ſuper inſcriptam minus dato ſpacio, et eam ſuper ſpacium in ſpira ſumptum addere poſſe minus quocūque ſpacio dato. Et ipſum ſpaciū ſumptum addere ſuper inſcriptam minus quocunque ſpacio dato, & hæc fieri poſſe.



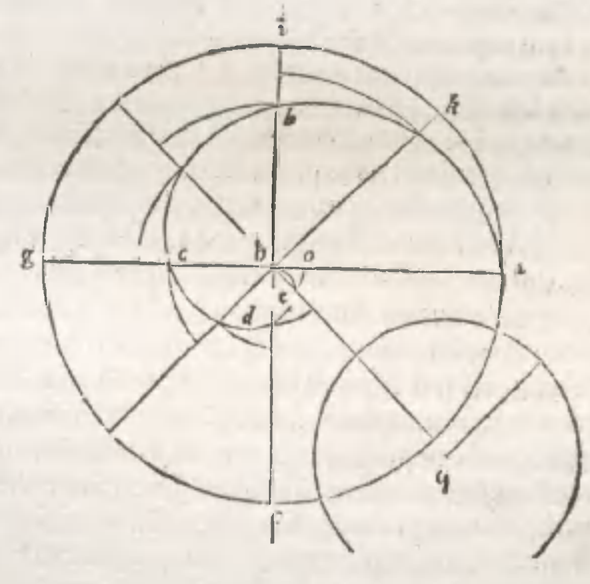
Eodem autem modo conſtat fieri poſſe, ut ſumpto ſpacio à linea ſpirali in quacunque reuolutione deſcripta compræhenſo, & à recta reuolutionis initio ſecundum reuolutionis numerū dicta circa ipſum ſpacium quædam figura plana circumſcribatur, & altera inſcribatur eidem, ut dictum eſt, ita ut id quo circumſcripta ſumptum ſpacium excedat, minus ſit quocunqꝫ ſpacio dato. Et item id quo ſpacium ſumptum excedat inſcriptam ſibi figuram, ſit minus quocunqꝫ ſpacio dato.

24 SI ſumatur ſpacium compræhenſum à ſpirali linea, quæ ſit minor ea quæ in una reuolutione deſcribitur, quæ que non habeat terminum lineæ ſpiralis initium, & compræhenſum à rectis ductis ab initio lineę ſpiralis ad terminos dictæ ſpiralis ſpacium compræhendentis. Poteſt ipſi ſpacio plana quædam figura circūſcribi, ex fruſtis ſimilib. compoſita: & alia inſcribi eidem, ita ut circumſcripta excedat inſcriptam minus, quàm ſit quodcunqꝫ ſpacium datum. Eſto linea ſpiralis a b c d e, eius termini a e: ſit lineæ ſpiralis initium h, & iūgantur a h, e f. deſcribatur quoque circulus centro h, interuallo h a, & incidat in h e in puncto f. Angulo itaqꝫ ad h poſito, & fruſto a h f ſimul in æqua diuiſo, et diuiſione tali producta donec reſiduum mi-



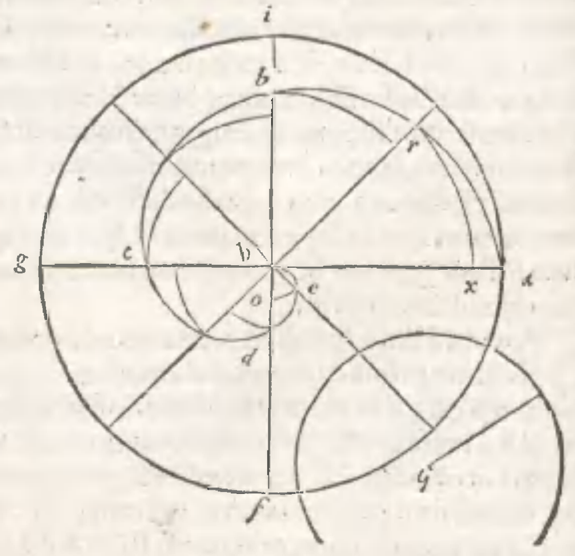
minus exiſtat dató ſpacio, eſt ut fruſtum h a k minus ſit ſpacio propoſito. Similiter iam his quæ ſuprà ſunt demonſtrata, deſcripti ſint circuli per puncta lineā ſpiralem ſecantia tranſeuntes, ſecundum lineas rectas, quæ faciunt ad h angulos æquales. & ductæ ita ſint, ut & in parte ſequentium, & in parte præcedentium incurrant in circumferentias circulorum, quæqꝫ ſuo loco. Erit iam ipſi ſpacio quod à linea ſpirali a b c d e, & à rectis h a, h e continetur, figura quædam circumſcripta plana, ex fruſtis ſimilibus compoſita: & alia eidem inſcripta, & exceſſus quo figura circumſcripta ſuperat inſcriptam, minor eſt ſpacio propoſito. nam fruſtū h a k eſt minus dato ſpacio. Ex hoc manifeſtum eſt, quod circa dictum ſpacium poteſt circumſcribi figura plana, qualis dicta eſt, ita ut circumſcripta figura dictum ſpacium minori ſpacio ſuperet, quàm ſit ſpacium quodcunque propoſitum. Et ſpacium ipſum figuram ſibi inſcriptam minori ſpacio ſimiliter ſuperet, quàm ſit ſpacium quodcunqꝫ datum.

SPacium à linea ſpirali in prima reuolutione deſcripta, & à recta in reuolutio- 25
nis initio prima compręhenſum, eſt tertia pars circuli primi. Eſto linea ſpiralis in qua a b c d e h in prima reuolutione deſcripta, & h punctum initiū lineæ ſpiralis, & h a recta prima in reuolutionis initio. & a f g i ſit circulus primus, cuius tertia pars ſit circulus q. Oſtendendū eſt, quod prædictum ſpacium æquale eſt circulo q. nam ſi non, uel maius erit, uel minus eo. Eſto primum, ſi eſſe poteſt, minus eo. Circa ſpacium itaqꝫ contentum ſub a b c d e h linea ſpirali, & ſub recta h a deſcribi poteſt figura quædam plana ex fruſtis ſimilibus compoſita, ita ut id quo circumſcripta figura ſuperat ipſum ſpacium, ſit minus eo quo circulus q ſuperat ſpacium dictum. Circumſcribatur itaqꝫ, & eſto fruſtorū ex quibus componitur dicta maximum h a k, minimum uero h e o. Manifeſtū igitur, quod figura circumſcripta minor eſt circulo q. Eductæ autem ſunt lineæ rectæ ab h facientes angulos æquales, & incidētes in circumferentiam circuli. Quædam uero intra cadunt, in lineam ſpiralem incidentes, quæ ſeſe æquali exceſſu ſuperant: quarū maior quidem eſt h a, minor uero h e, & minima ęqualis exceſſui. Sunt autē & aliæ lineæ ab h ad circūferentiam circuli procedentes, multitudine quidem prædictis æquales, magnitudine uero unaquæqꝫ æqualis maximæ prædictarum, & ab omnibus ſimilia fruſta compræhenſa ſunt, & ab his quæ ſeſe æquali exceſſu ſuperant, & ab his quæ ſunt inter ſe & maximę illarum æquales. Fruſta igitur quæ cōtinētur, ab his quæ inter ſe ſunt & maximæ illarum æquales, ſunt minus quàm tripla fruſtorum quæ continentur ab illis quæ ſeſe æqualiter excedunt. Oſtenſum namqꝫ hoc fuit. Sunt autem fruſta ab his compræhēſa, quæ inter ſe ſunt & maximæ aliarum æquales, circulo a f g i æqualia. Fruſta uero contenta ab illis quæ ſeſe æqualiter excedunt, æqualia ſunt figuræ circumſcriptæ. circulus ergo a f g i minor eſt qꝫ triplus figuræ circūſcriptæ, Ipſe uero eſt triplus circuli q. Circulus ergo q minor exiſtet figura cir-



 cum-

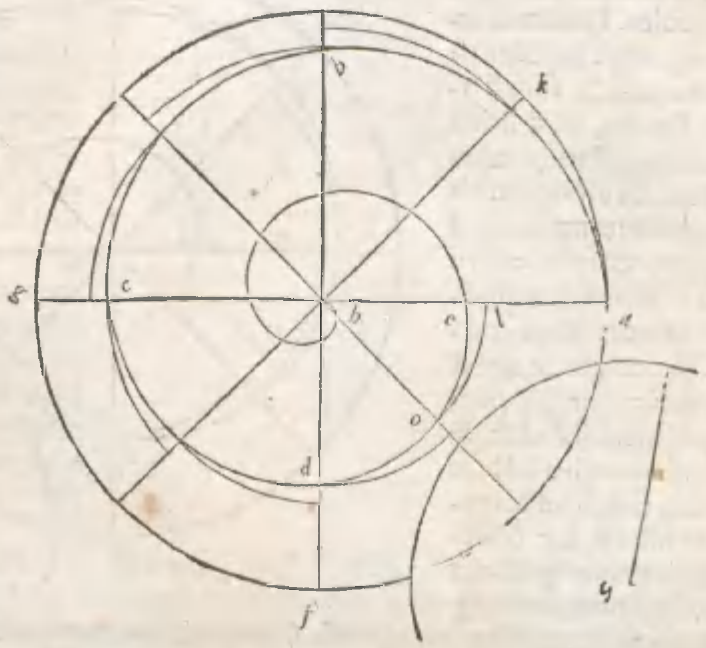
cumſcripta: quod quidem uerum non eſt, ſed maior exiſtit illa. Non eſt igitur ſpacium comprænſum à linea ſpirali a b c d e h, & linea recta h a, minor circulo ɥ. Neq; utiq; maior. Eſto itaq; maior, ſi eſſe poteſt. Item ſpacio comprænſo à linea ſpirali a b c d e h, & recta h a poteſt inſcribi figura, ita ut dictū ſpacium minus addat ſuper figuram inſcriptā, quàm ſit id quodcunque ſpacium dictum addit ſuper circulum ɥ. Inſcribatur itaq;. Et eſto fruſtorum ex quibus inſcripta componitur, maximū h r x. minimum uero, o h e. Conſtat iam, figuram inſcriptam circulo ɥ eſſe maiorem. lineę quæ angulos ad h faciebant æquales eductæ, in circuli circumferentiam inciderunt. Rurſus quædam rectæ ſunt ſeſe æqualiter excedentes, ab h ad ſpiram procedentes, quarum maxima eſt h a, minima uero h e, & minima æquatur exceſſui. Sunt



item aliæ lineæ ab h puncto ad circuli circumferentiam eductæ, multitudine quidem æquales prædictis, magnitudine uero unaquæq; æqualis maximæ illarum: & ab omnibus deſcribuntur fruſta ſimilia, & ab illis quæ inter ſe & maximæ aliarum ſunt æquales, & ab illis quæ ſeſe æqualiter excedūt. Fruſta igitur ab illis quæ ſunt maximæ aliarum æquales, deſcripta exiſtunt plus quàm tripla fruſtorū quæ à lineis ſeſe æqualiter excedentibus continentur, dempto illo quod à maxima contentum eſt. Hoc enim demonſtratum fuit. Fruſta uero à lineis maximæ æqualib. contenta, circulo a f g i æqualia ſunt. quæ uero à lineis æqualiter ſeſe excedentib. comprænduntur, dempto eo quod à maxima æquantur, figuræ inſcriptæ. Circulus igitur a f g i eſt plus quàm triplus inſcriptæ figuræ. idem uero triplus eſt circuli ɥ. Quare circulus ɥ maior eſt inſcripta figura. Sed fuerat poſitus minor. Spacium igitur comprenſum à ſpira a b c d e h, & à recta a h, neq; minus circulo ɥ, neque maius exiſtit. Igitur neceſſe eſt eſſe eidem æquale, quod erat demonſtrandū.

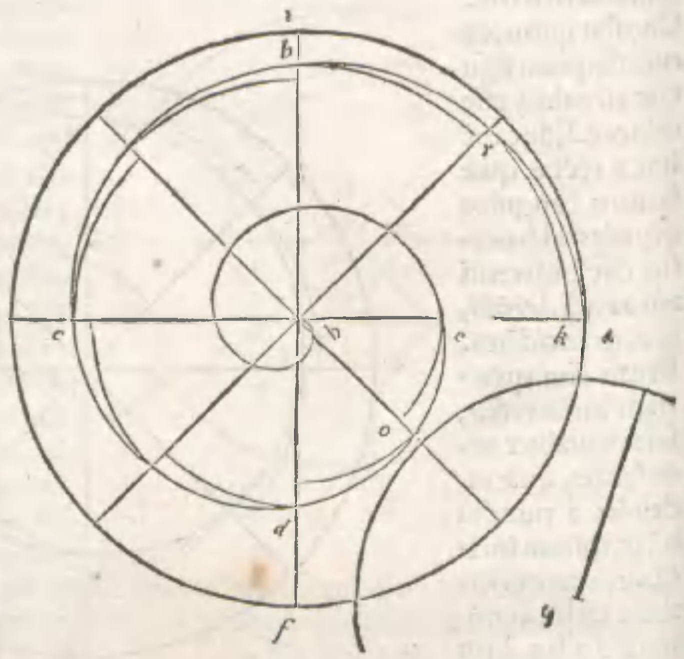
26 SPacium quod à ſpirali linea in ſecunda reuolutione deſcripta, & à ſecunda linea recta reuolutionis initio producta cōtinetur, habet ad circulum ſecundū eam proportionem, quam ſeptem ad duodecim, quæ eadem eſt ei quam habent utraq; ſimul, contentum ſub ſemidiametro circuli ſecundi, & ſemidiametro circuli primi, & tertia pars quadrati lineæ illius qua ſemidiametros ſecundi circuli excedit ſemidiametrum primi circuli, ad quadratum ſemidiametri circuli ſecundi. Eſto linea ſpiralis, in qua a b c d e, in ſecūda reuolutione deſcripta. Eſto h pūctum lineæ ſpiralis initium, recta uero h e in reuolutionis initio prima. recta autem a e, in reuolutionis initio ſecunda: circulus a f g i ſecundus. ſint autem a g, f i diametri eius, altera alteri ſit perpendicularis. Oſtendendum eſt itaq;, ſpacium contentum à linea ſpirali a b c d e, & à recta a e ad circulum a f g i, habere eam proportionem, quam ſeptem habent ad duodecim. Eſto circulus quidam ɥ, cuius ſemidiametrus poteſtate ſit æqualis ei quod continet ſub a h, h e, & tertiæ parti quadrati lineæ a e. habebit iam circulus ɥ ad circulum a f g i, ſicut ſeptem ad duodecim. Quoniam ſemidiametrus eius ad ſemidiametrum a f g i circuli eam habet proportionem poteſtate. Sed circulus ɥ oſtendetur æqualis eſſe ſpacio contento à linea ſpirali, & à recta a e. nam ſi non ſit, uel itaq; maior erit, uel minor eo. Eſto itaq; primum maior,

ior, ſi eſſe poteſt. Circa ſpacium itaq; deſcribi poteſt quædam plana figura, ex fruſtis ſimilibus compoſita, ita ut figura circumſcripta ſuper ſpacium addat minus, quàm ſit ſpacium quo ɥ circulus excedit dictum ſpacium. Eſto circumſcripta, & ſit h a k fruſtum maximum eorū ex quibus figura circumſcripta componitur, minimū uero h o d. Conſtat igitur, circumſcriptam figuram circulo ɥ eſſe minorē. Educant lineæ rectæ quæ faciunt angulos æquales ad h uerſus circumferentiam circuli ſecūdi, in eam incidētes. Erunt iam quædam lineæ rectæ, ſeſe æqualiter excedentes, quæ uidelicet à puncto h, in ſpiram incidunt, quarum maxima eſt h a, minima uero h e. Erūt etiam aliæ lineæ à puncto h, ad circumferentiā



circuli a f g i eductæ, multitudine quidē una pauciores illis: magnitudine uero & inter ſe, & maximæ illarum æquales, & confecta ſunt fruſta ſimilia, & ab eis quæ ſunt inter ſe & maximæ illarum æquales, & ab eis quæ ſeſe æqualiter excedunt: à minima autem non eſt confectum aliquod. Fruſta igitur, ab eis quæ ſunt æquales maximæ illarum confecta, habent ad fruſta confecta à lineis ſeſe æqualiter excedentibus, dempto eo quod à minima, minorem proportionem, quàm quadratum h a maximæ ad utraq; ſimul hæc, ad contentū ſub h a, h e, & tertiam partem quadrati a e. Hoc enim oſtenſum eſt. Circulus autem a f g i æquatur fruſtis, quæ à lineis inter ſe & maximæ illarum æqualibus confecta ſunt. Fruſtis autem confectis à lineis ſeſe æqualiter excedentibus, æquatur figura circumſcripta. Minorem igitur proportionem habet circulus a f g i, ad figuram circumſcriptam, quàm quadratum ad hæc utraq; ſimul, ad contentum ſub a h, h e, & tertiam partem quadrati a e. Quam autem proportionem habet quadratum a h, ad cōtentum ſub a h, h e, & tertiam partem quadrati a e: hanc habet circulus a f g i, ad circulum ɥ. Minorem ergo proportionem habet a f g i circulus ad figuram circumſcriptam, quàm ad circulum ɥ. Quare colligitur, circulum ɥ minorem eſſe figura circumſcripta. quod eſt cōtrarium ei quod poſitum fuerat. Circulus igitur ɥ ſpacio à linea ſpirali a b c d e, & recta a e contento, maior eſſe non poteſt. Verum neque minor. Eſto namq;, ſi eſſe poteſt. Rurſus in ſpacio à linea ſpirali a b c d e, & recta a e contento, poteſt quædam figura plana inſcribi, ex fruſtis ſimilibus compoſita, ita ut ſpacium à linea ſpirali a b c d e, & recta a e contentum, addat ſupra figuram inſcriptam minus eo quo idem ſpacium excedit circulum ɥ. Eſto igitur inſcripta, & ſit h k r fruſtum maximum eorum ex quibus componitur inſcripta figura. Minimum uero, ſit h e o. Conſtat igitur figuram inſcriptam circulo ɥ eſſe maiorē. Educātur lineæ rectæ, quæ faciunt angulos æquales ad h, uerſus circumferentiā cir-

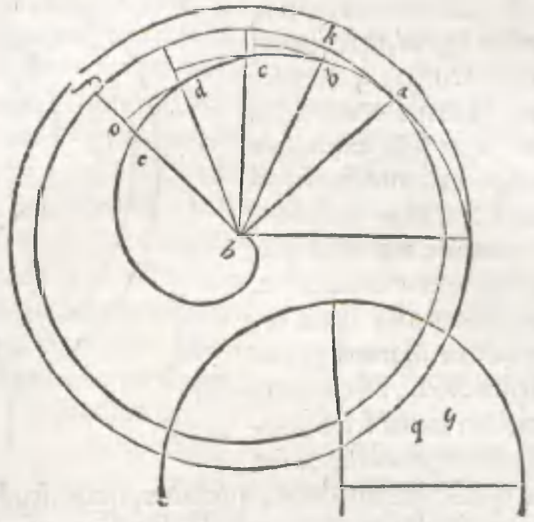
circuli a f g i, in quam incidant. Rurſus erunt lineæ quædam æqualiter ſeſe excedentes, quæ à puncto h in ſpiralem incidunt, quarum maxima h a, minima uero h e. Erunt item aliæ lineæ à puncto h ductæ in circumferentiam circuli incidẽtes, multitudine quidẽ una pauciores illis, magnitudine uero & inter ſe & maximæ illarũ æquales. Et à lineis ſeſe ęqualiter excedentibus confecta ſunt fruſta ſimilia, & à lineis maximæ illarum æqualibus. Fruſta igitur ab æqualibus maximæ illarum confecta, ad fruſta à lineis ſeſe æqualiter excedentibus confecta, dempto eo quod à maxima maiorẽ proportionem habebit, quàm quadratum h a ad hæc utraq; ſimul, ad cõtentum ſub a h, h e, & tertiam partem quadrati a e. Fruſtis autem quę



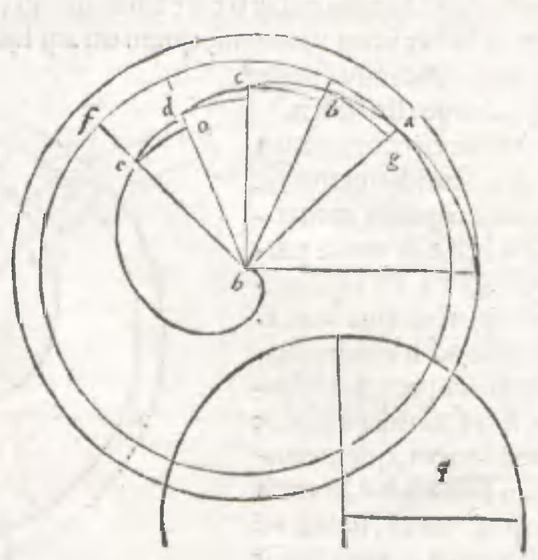
à lineis ſeſe æqualiter excedentib. ſunt confecta, dempto eo quod à maxima æquatur figura inſcripta ſpacio: fruſtis uero alijs circulus æquatur. Quare ſequitur circulum a f g i maiorem habere proportionem ad figuram inſcriptam, quàm quadratum h a ad hæc utraq; ſimul, ad contentum ſub a h, h e, & tertiam partem quadrati a e, hoc eſt circulus a f g i ad circulum ϛ. Vnde colligitur, circulum ϛ figura inſcripta eſſe maiorem. Quod poſitioni contrariũ eſt. Neq; igitur circulus ϛ ſpacio à linea ſpirali a b c d e, & recta a h contento minor eſſe poteſt. igitur illi æqualem eſſe neceſſe eſt. Eodem autem modo oſtendetur ſpaciũ à linea ſpirali in quacunq; reuolutione deſcripta, & à recta contentum, quæ ſecundum numerum reuolutioni eundem, nominetur ad circulum ab eodem numero denominatum, eã habere proportionem quam utraq; ſimul iſta, cõtentum ſub ſemidiametro circuli à numero reuolutionis dicti, et ſub ſemidiametro circuli dicti à numero qui ſit unitate minor numero reuolutionis, et tertia pars quadrati ab ea linea producti, qua ſemidiametros maioris circuli ex prædictis excedit ſemidiametrum minoris circuli prædictorum, ad quadratum ſemidiametri maioris circuli prædictorum.

27 SPacium quod continetur à linea ſpirali, quę ſit minor ea quam una reuolutio deſcribit, quæq; non habeat terminum initiũ lineæ ſpiralis, ſed lineas rectas à terminis ſuis ad lineæ ſpiralis initium ductas, habet ad fruſtum quod eam quæ ex centro habeat æqualem maiori earum quæ à terminis ad lineæ ſpiralis initium ductæ ſint: circumferentiam uero eam quæ inter dictas lineas media intercipitur in parte lineæ ſpiralis, eam proportionem quam hæc utraq; ſimul, cõtentum ſub lineis quæ à terminis ad lineæ ſpiralis initium ductæ ſunt, & tertia pars quadrati eius lineæ qua maior dictarum linearum minorem excedit, ad quadratum maioris earum quæ à terminis ad lineæ ſpiralis initium iunctæ fuerunt. Eſto linea ſpiralis in qua a b c d e, minor ea quam una reuolutio deſcriberet: eius ſint termini a e. Eſto autem lineæ ſpiralis initium pũctum h, et centro h, interuallo autem h a, cir-

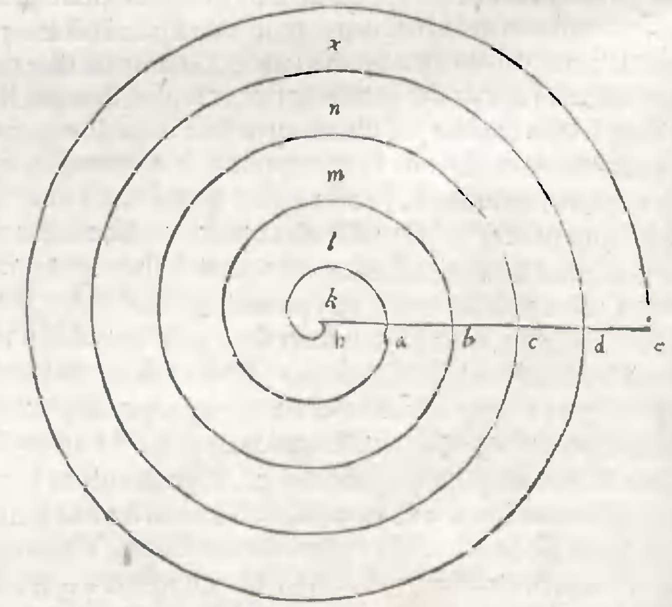
circulus deſcribatur, & concurrat eius circumferentia h e in puncto f. Oſtendendum eſt, quod ſpacium ab a b c d e linea ſpirali, & ab a h, h e contentum ad fruſtũ a h f, eam habet proportionem, quam utraq; ſimul iſta, contentum ſub a h, h e, & tertia pars quadrati e f lineę ad quadratum lineæ h a. Eſto itaque circulus in quo ϛ q. cuius ſemidiametros ſit in potẽtia æqualis contento ſub a h, h e, & tertiæ parti quadrati e f. Et ſit angulus ad centrum eius æqualis angulo ad h conſtituto. Fruſtum itaque ϛ q, ad fruſtum h a f eandem habet proportionem, quam contentum ſub a h, h e, et tertia pars quadrati e f, habet ad quadratum h a. nam iſtorũ ſemidiametri hanc proportionem potentia inter ſe habent. Oſtendendum iam eſt, fruſtum ϛ q, æquale eſ-



ſe ſpacio contento ſub a b c d e linea ſpirali, & ſub a h, h e rectis. nam ſi non, uel maius erit, uel minus. Sit itaque primò maius, ſi eſſe poteſt. Spacio igitur poteſt figura quędam plana circũſcribi ex fruſtis ſimilibus cõpoſita, ita ut ipſa addat ſuper ſpacium minus eo quo ϛ q fruſtum excedit ipſum ſpacium dictum. eſto circumſcripta, & ſit fruſtorum ex quibus componitur dicta figura maius quidem h a r, minus uero h o d. Manifeſtũ eſt, his poſitis figuram circũſcriptam minorem haberi fruſto ϛ q. Iam actæ ſunt lineæ quæ faciunt angulos æquales ad h, uerſus circumferentiam fruſti h a f, in quam incidunt. Erunt iam quædam lineæ rectæ ſeſe æqualiter excedentes, quæ ab h in ſpiralem incurrunt, quarum maxima quidem h a, minima uero h e. erunt item aliæ lineæ rectæ numero quidem una pauciores illis, magnitudine autem inter ſe & maximæ illarum æquales, quæ à pũcto h ad fruſti a h f circumferentiam ipſi occurrunt, dempta h f. & ab omnibus confecta ſunt fruſta ſimilia, & ab his quæ ſeſe æqualiter excedunt, & ab his quæ inter ſe & maximæ illarum ſunt æquales. & earum quæ ſeſe æqualiter excedunt, ab h e, nil confectum eſt. Fruſta igitur quæ à lineis inter ſeſe æqualibus & maximæ illarum confecta ſunt, ad fruſta confecta à lineis ſeſe æqualiter excedentibus, dempto quod a minima fruſto, minorem habent proportionem, quàm quadratum h a ad hæc utraq; ſimul, ad contentum ſub h a, h e, & tertiam partem quadrati e f. Fruſtis autem quæ à lineis inter ſe, et maximæ aliarum æqualibus conſtant, æquatur fruſtum h a f. Illis uero quæ à lineis ſeſe æqualiter excedentibus ſunt, circũſcripta figura eſt æqualis. Minorem ergo proportionem habet h a f fruſtum ad figuram circumſcriptam, quàm quadratum h a ad utraq; ſimul, ad contentum ſub h a, h e, & tertiam partem quadrati e f. Quam autem proportionem habet ad dicta quadratum lineæ h a, eam habet fruſtum h a f ad fruſtum ϛ q. Quare fruſtum ϛ q, minus eſſe concluditur figura circumſcripta. Verum poſitum fuerat maius eſſe, & demonſtratum ex poſitione. Non eſt igitur ϛ q fruſtum maius ſpacio cõtento ſub a b c d e linea ſpirali, & h a, h e. Neq; utique minus eſſe poteſt. ponatur nãque minus, ſi eſſe poteſt, & reliqua eadem diſponantur. Rurſus ſpacio poteſt figura quædam plana inſcribi, ex ſimilibus fruſtis compoſita, ita ut dictũ ſpaciũ ſu pra figurã inſcriptã minus addat,eo quo ipſum ſpacium excedit ɥ q fruſtum. inſcribatur itaque: & fruſtorum ex quibus inſcripta figura conſtituitur, eſto maius h b c, minus uero o h e. Conſtat igitur,inſcriptam figuram fruſto ɥ q eſſe maiorem. Rurſus erunt quædam lineæ ſeſe æqualiter excedentes à puncto h, ad lineam ſpiralem accedentes: quarum maxima quidem h a,minima uero h e. Eunt quoq; aliæ inter ſe, & maximæ illarum ęquales à puncto h, ad circumferentiam fruſti h a f productæ,excepta h a,quæ numero quidẽ illis ſunt una pauciores, magnitudine uero inter ſe & maximæ aliarũ æquales. & ab unaquaque fruſta ſimilia conſcripta ſunt: à maxima uero earũ quæ ſeſe ęqualiter excedunt, nullum conſcriptum eſt. Fruſta igitur à lineis æqualibus inter ſe, & maximę aliarum confecta,ad fruſta à lineis ſeſe ęqualiter excedentibus contenta,dempto eo quod à maxima,maiorem habent proportionem,quàm quadratum h a,ad contentum ſub h a,h e, & tertiam partem quadrati e f. Quare & fruſtum h a f ad figuram inſcriptam, maiorem habebit proportionem, quàm ad ɥ q fruſtum. Vnde ſequitur ɥ q fruſtum maius eſſe figura inſcripta. At uero poſitũ fuerat, minus eſſe. Non poteſt igitur fruſtum ɥ q minus eſſe ſpacio à ſpirali linea, & rectis h a,h e comprehenſo. quare eidem æquale eſſe neceſſe eſt.



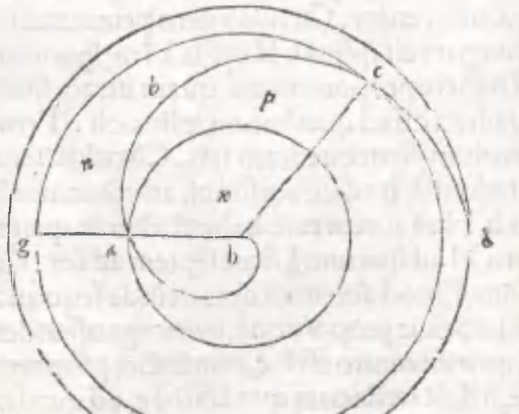
28 EOrum quæ continentur à lineis ſpiralibus, & rectis quæ in reuolutionibus reputãtur ſpaciorum, id quidem quod tertium datur, eſt duplum ſecundi, quartum eſt eius triplum, quintum eſt quadruplum: & ſic deinceps ſecundum numeros creſcentes, ſemper ſequens ſpaciũ eſt multiplex ſecũdi, primũ autem ſpacium ſexta pars ſecundi eſſe demonſtratur. Eſto linea ſpiralis propoſita, & in prima, & in ſecunda, & in cæteris deinceps deſcripta reuolutionibus quotcunq;. Eſto pũctum h lineæ ſpiralis initium, & recta h e initium reuolutionis. Primum uero ſpacium ſit k, ſecundum l, tertium m, quartum n. Oſtendendum eſt itaque ſpacium k, ſextam



tam partem eſſe ſpacij ſe ſequentis, & ſpacium m duplum eſſe ipſius l, ipſum n triplum ipſius l. Et eorum quæ ſequuntur, ſemper id quod deinceps ſumitur multiplex ipſius l ſecundum numeros ſe ſequentes. Quod autem k ſit ſexta pars ipſius l, ſic oſtẽditur: quoniam l ſpacium eã habet proportionem ad circulum, ſecũdum quam habent ſeptem ad duodecim. Secundus uero circulus ad primũ, ſicut 12 ad 3. conſtat enim. Circulus uero primus ad ſpacium k, ſicut tria ad unum. k igitur ſexta pars eſt ipſius l. Rurſus k l m ſpacium ad circulum tertium, eam oſtenſum eſt habere proportionem, quam utraq; ſimul, cõtentum ſub c h, h b, et tertia pars quadrati c b ad quadratum ipſius c h. Tertius uero circulus habet ſe ad ſecũdum circulum, ſicut quadratũ h b. Circulus item ſecundus habet ad k l ſpacium, ſicut quadratũ h b ad utraq; ſimul, ad cõtentum ſub h b, h a, & tertiam partem quadrati a b. Hæc autem eam habent inter ſe, quam decem & nouem ad ſeptem. Spaciũ uero k l ad ſpacium l, ſicut ſeptem ad ſex. Cõſtat igitur ſpacium m, ipſius l eſſe duplum. Quod autem ea quæ deinde ſequuntur, ſecundum numeros deinde ſequẽtes habeant proportionẽ, deinceps oſtendetur. Nam k l m n x, ad circulum cuius ea quæ ex centro eſt h e, eam habet proportionẽ quam utraq; ſimul, contentũ ſub h e, h d, & tertia pars quadrati d e, ad quadratum h e. Circulus uero, cuius quæ ex centro eſt h e, ad circulum cuius quæ ex cẽtro eſt h d, eam habet proportionẽ, quã quadratum h e, ad quadratum h d. Circulus autem cuius quæ ex centro eſt h d, ad ſpacium k l m n, eam habet proportionem, quam quadratum h d, ad utraque ſimul iſta, ad id quod continetur ſub h d, h c, & tertiam partem quadrati d c. Spaciũ igitur k l m n x, ad ſpacium k l m n, eam habet quam contentum ſub h e, h d, & tertia pars quadrati d e, ad contentum ſub h d, h c, & tertiam partem quadrati c d. Diuidendo, & ſpacium x ad ſpacium k l m n, eam habet quam exceſſus contenti ſub e h, h d, cum tertia parte quadrati e d, ad contentum ſub d h, h c, & tertiam partem quadrati e d, ad contentum ſub d h, h c: & tertiam partem quadrati d c. utraq; uero illa ſimul excedunt iſta ſimul utraq;, eo quo contentum ſub e h, h d, excedit contentum ſub d h, h c. Excedunt autem eo quod ſub d h, e c. Spacium igitur x ad ſpacium k l m n, eam habet quam contentum ſub h d, c e, ad contentũ ſub d h, h c, & tertiã partẽ quadrati c d. Per hæc aũt eadem oſtẽdetur, quod ſpaciũ n ad ſpaciũ k l m, eam habet, quã cõtentum ſub h c, b d, ad utraq; ſimul iſta, ad contentũ ſub c h, h b, & tertiam partem quadrati c b. Spacium ergo n, ad ſpacium k l m n, eam habet quam contentum ſub h c, b d. itemq; quod ſub b h, h c, & tertia pars quadrati c b, ad contentum ſub h c, b d. Conſtat enim diuidendo, & conuerſim. Hæc autem æquantur cõtento ſub d h, h c, & tertiæ parti quadrati c d. Quoniam igitur ſpacium x, ad ſpacium k l m n, eam habet quam contentum ſub h d, c e ad utraq; ſimul iſta, ad contentum ſub h d, h c, & tertiam partem quadrati c d. Spacium uero k l m n, ad ſpacium n, eam quam utraq; ſimul iſta contentum ſub d h, h c & tertia pars quadrati c d, ad contentum ſub h c, d b. Habet igitur ſpacium x, ad ſpacium n, eam quam contentum ſub h d, c e, ad contentum ſub h c, d b. Contentum autem ſub h d, c e, ad cõtentum ſub h c, d b, eam habet quam h d ad h c, cum c e ſit ipſi b d ęqualis. Conſtat itaq;, quod ſpacium x ad ſpacium n, eam habet quã h d ad h c. Similiter oſtendetur, ſpacium n ad ſpacium m, eam habere proportionem quam habet h c ad h b, & m ad l, ſicut b h ad h a. Lineæ uero e h, d h, c h, b h, a h, habent proportionem, quam numeri deinceps continenter ſumpti.

SI in linea ſpirali quacũq; reuolutione deſcripta, duo pũcta ſumant, quæ non 29
ſint eius termini, & ab iſtis ducant lineæ rectæ ad initiũ lineæ ſpiralis, & cẽtro ſpiræ initio, interuallis uero ipſis lineis quæ ad initiũ ſpiræ à pũctis ductæ ſint, circuli deſcribantur: ſpacium comprænenſum, ab ea maioris circuli circumferentia quæ media inter lineas rectas, & ſpiram inter eaſdem lineas comprænenſam, & à linea extrà ducta capitur, eã habet proportionẽ ad ſpaciũ compræhẽſum à circũferen

ferentia minoris circuli, & ab eadem spira & à linea recta, quæ earũ terminos iungit, quãq; ex centro circuli maioris cum tertijs duab. excessus eius quo ea quæ ex centro maioris circuli excedit eam quæ ex centro minoris ad eam quæ ex centro maioris, cum una eiusdem excessus tertia parte. Esto linea spiralis, in qua a b c d in una reuolutione descripta. & sumantur in ea duo puncta a c. Esto punctũ h initium spiræ. & ab a & c ducatur ad h lineę. & cẽtro h, interuallis h a, h c, circuli describantur.



Ostendendum quod spacium x ad spacium p, eam habet proportionem, quam utraq; simul a h, et duæ tertiæ g a, ad utramq; simul, ad a h, & unam tertiã ipsius g a. nam spaciũ n p, ad frustũ g c h, ostẽsum est eam habere proportionem, quam habet contentum sub g h, h a, & tertia pars quadrati a g, ad quadratum h g. ipsum ergo x, ad n p eam habet, quam contentum sub h a, a g, & duæ tertiæ quadrati a g ad utraq; simul, ad contentum sub a h, h g, & tertiam partem quadrati g a. Et quoniam spacium n p, ad frustum n p x, eam habet quam utraq; simul, contentũ sub h a, h g, & tertia pars quadrati g a, ad quadratum h g. Frustum aũt n p x, ad hustum n, eam habet quã quadratũ h g ad quadratũ h a. Spacium quoq; n p, ad ipsum n, eam habebit quam utraq; simul, contentum sub h a, h g, & tertia pars quadrati g a, ad quadratum h a. Igitur n p ad p, eam habet quam utraq; simul, contentum sub g h, h a, & tertia pars quadrati g a, ad utraq; simul, ad contentum sub g a, h a, & tertiam partem quadrati g a. Quoniam spacium x ad n p eam habet, quam utraque simul, contentum sub h a, a g, & duæ tertiæ quadrati g a, ad utraque simul, ad contentum sub g h, h a, & tertiam partem quadrati g a. Spacium autem n p ad p, eam habet quam utraq; simul, contentum sub g h h a, & tertia pars quadrati g a, ad utraq; simul, ad contentum sub g a, a h, & tertiam partem quadrati g a. Habebit quoq; x ad p, eam quam habent utraque simul, cõtentum sub h a, g a, & duæ tertiæ quadrati g a, ad utraq; simul, ad contentum sub h a, g a, & tertiã partem quadrati g a. Ista uero utraq; simul, contentum sub h a, g a, & duæ tertiæ quadrati g a, ad utraq; simul, ad contentum sub h a, g a, & tertiam partem quadrati g a, eam habent quam utraque simul, ipsa h a, & duæ tertiæ ipsius g a, ad utraq; simul, ad ipsam h a, & tertiam partem ipsius g a. Constat igitur, spacium x ad spacium n, eam habere proportionẽ, quam utraq; simul, ipsa h a, & duæ tertiæ ipsius g a, ad ipsam h a, & tertiam ipsius g a, utraq; simul sumpta.

FINIT ARCHIMEDIS TRACTATUS de Lineis spiralibus.

AR-

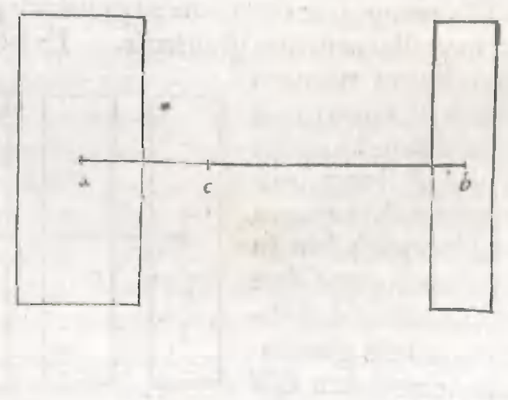
ARCHIMEDIS PLANORVM AEQVEPONDERANTIVM INVENTA, VEL CENTRA GRAUITATIS PLANORUM.

PETIMVS grauia æqualia, æquali distantia posita, inter se æqualiter ponderare. Grauia item ęqualia, distantia inæquali suspensa, non æqualiter ponderare: sed id quod in longiori distantia pendet, ad graue deferri. Item, si grauibus secundũ quandam distantiam æqueponderantibus, alteri eorum adijciatur aliquod graue, tunc ea non æqualiter ponderare, sed illud ad graue deferri, cui quod graue fuerit adiectum. Similiter etiam si ab altero eorum auferatur graue, tunc non æqualiter ponderare, sed id à quo nil sit ablatum, ad graue deferri. Figuris planis similibus & æqualibus inter se coaptatis, centra quoq; grauitatis earum erunt inter se coaptata. Si uero figuræ similes fuerint, non autem æquales, centra grauitatis earum erunt similiter posita. Dicimus puncta similiter posita esse ad similes figuras, à quibus lineæ rectæ, secundum angulos æquales ductæ, ad latera inuicem correspondentia æquales angulos efficiant. Item si magnitudines quædam in quibusdam distantijs positæ æqualiter ponderent, & quæcunq; eis æquales in eisdem distantijs positæ æqualiter ponderabunt. Cuiuscunq; figuræ cuius circum limbus fuerit, in eandem partem connexus, centrum grauitatis intra figuram esse oportet. Suppositis his, sequitur:

1 GRauia, quæ in distantijs æqualibus posita æqualiter ponderent, æqualia esse. Si enim essent inæqualia, auferreturq; à maiori excessus, reliqua non æqualiter ponderarent: cum ab altero æqueponderantiũ aliquid fuerit ablatum. Quare grauia in distantijs æqualibus æqueponderantia, æqualia esse necesse est.

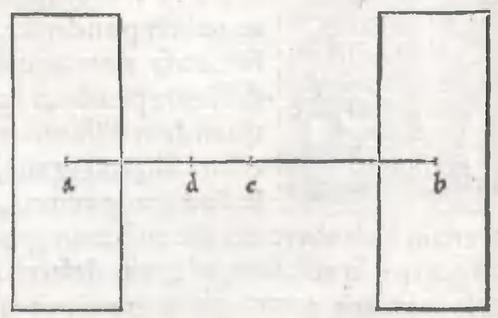
2 GRauia in distantijs æqualib. posita, si fuerint inæqualia, non æqueponderabunt, sed maius eorũ inclinabitur. Ablato enim excessu, æqueponderabũt: cum æqualia in distantijs posita æqualibus æqueponderent. Eo autem quod ablatum fuerit adiecto, iam in maius inclinabitur, cum alteri equeponderantium sit aliquid adiectum.

3 SI grauia inæqualia in distantijs inæqualibus suspensa, æqualiter ponderent: maius in minori, minus in maiori distantia suspendetur. Esto grauia inæqualia a b, & sit a maius, b minus: & æqueponderent ab a c, c b distãtijs. Ostendendum est, quod a c minor est c b. nam si non, ablato excessu quo a excedit b, cum iam ab altero ęqueponderantium sit ablatum aliquid, inclinabitur ad b: quod non uerum est. nam a c si esset æqualis b c, æquepõderarent. nam æqualia in distantijs ęqualibus. Si autem a c maior esset b c, inclinaretur ad a. nam æqualia in distãtijs inæqualib. nõ æqueponderãt. Sed quod in maiori distãtia est, inclinatur. ac iam propter hæc a c minorẽ esse b c necesse est. Manifestũ aũt, quod grauia quæ in di-



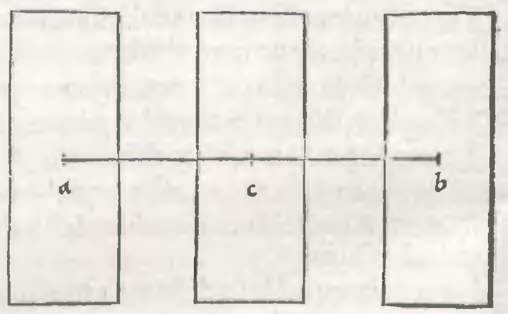
ſtantijs inæqualibus æqueponderāt, inæqualia ſunt. & eorū maius eſt illud quod in minori diſtantia pendet.

4 SI duæ magnitudines æquales non idem centrum grauitatis habuerint, magnitudinis ex utraque compoſitæ cētrum grauitatis eſt medium lineæ rectæ, quæ dictarum magnitudinum centra grauitatis coniungit. Eſto itaq; ipſius a centrū grauitatis ipſum a, et ipſius b ipſum b. Et ſit ducta linea a b, quæ diuidatur in duo æqualia in puncto c. Dico quod utrarumq; compoſitarum cētrum grauitatis eſt ipſum c. nam ſi non, eſto utrarumq; a b magnitudinum compoſitarum centrum grauitatis d, ſi eſſe poteſt. Quod autem eſt in linea a b, prædemonſtratum eſt. Quoniam igitur d eſt centrum grauitatis magnitudinis, compoſitæ ex a & b, apprehenſo d pūcto æqueponderabūt magnitudines

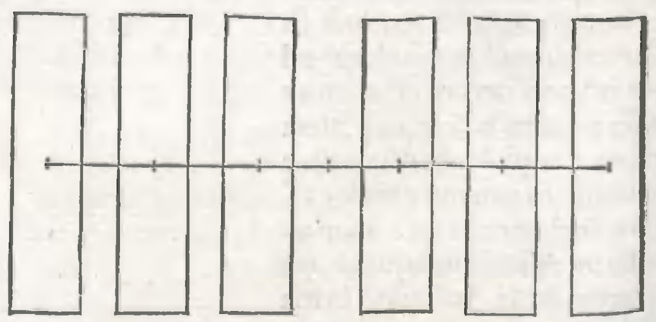


Igitur a b æqueponderabunt in a d, d b diſtantijs, quod eſſe non poteſt. nā æqualia in diſtantijs inæqualibus non æqueponderant. quare manifeſtum eſt, ipſum c centrum grauitatis eſſe magnitudinis ex ipſo a & ipſo b compoſitæ.

5 SI autem trium magnitudinum centra grauitatis in una linea fuerint poſita, & magnitudines æqualem inter ſe grauitatem habuerint, & lineæ rectæ inter cētra ductæ æquales extiterint: magnitudinis ex dictis magnitudinibus compoſitæ centrum grauitatis punctum illud erit, quod idem eſt mediæ magnitudinis centrum grauitatis. Eſto tres magnitudines a b c, centra uero grauitatis earum ſint a b c, pūcta in una recta linea poſita. Sint quoq; a b c ęquales: & lineæ a c, c b rectæ æquales. Dico centrum grauitatis magnitudinis illius, quæ ex omnibus illis magnitudinib. compoſita fuerit, eſt punctum c. Quoniam itaq; a b, magnitudines æqualē habent grauitatem, centrum grauitatis earum erit punctum c. Quoniam a c, c b, rectæ æquales ſunt: eſt etiam

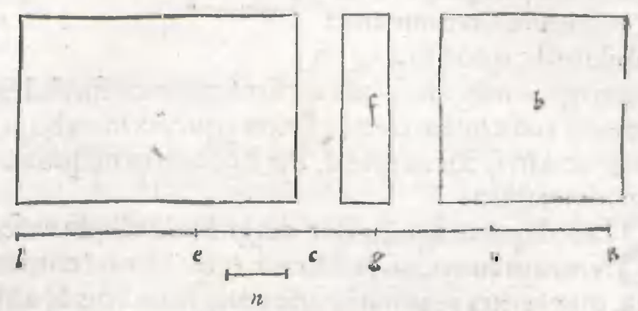


ipſius c centrum grauitatis c punctum. Conſtat quod magnitudinis quoq; ex omnibus illis compoſitæ centrum erit grauitatis punctum, quod eſt magnitudinis mediæ inter illas centrum grauitatis. Ex hoc manifeſtum eſt, quod quotcunq; magnitudinum numero imparium, ſi centra grauitatis, in eadem linea ſint conſtituta, & ſi magnitudines ceteræ ab ea quæ earum media exiſtit, hincinde æqualiter queque duæ correſpondentes deſtiterint, habuerintq; grauitatem inter ſe æqualem, & lineæ rectæ inter earum cētra mediæ fuerint inter ſe æquales, eius magnitudinis quę ex illis omnibus compoſita



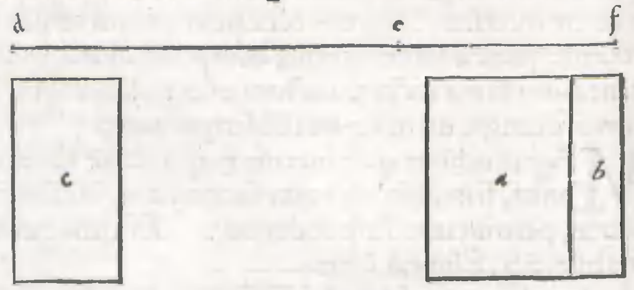
poſita fuerit, centrum grauitatis erit punctum, quod magnitudinis mediæ centrū grauitatis exiſtit. Quod ſi pares numero fuerint magnitudines, & centra earum grauitatis in eadem linea recta poſita fuerint, & earum mediæ grauitate æquali inter ſe conſtiterint, & lineæ rectæ inter earum centra mediæ inter ſe æquales fuerint, eius quæ ex illis omnibus componetur magnitudinis centrum grauitatis erit medium lineæ rectæ punctum, eius uidelicet quæ centra grauitatis magnitudinum coniungit, uti in figura ſubſcripta patet.

MAgnitudines quæ fuerint in grauitate commenſurabiles, æqueponderabunt, ſi in diſtantijs quæ ſecundum grauitatum proportionem fuerint cōſtitutæ, permutatim ſuſpendantur. 6 Eſto magnitudines in grauitate commenſurabiles a b. Eſto e d item quædam diſtantia, & ſicut a ad b, ita d c ad c e. Oſtendendum itaq;, quod magnitudinis ex utriſq; a & b compoſitę centrum grauitatis eſt c punctum. Quoniam itaq; eſt ſicut a ad b, ita d c ad c e. ipſum uero a eſt ipſi b commēſurabile. ipſa ergo d c eſt ipſi c e commenſurabilis, recta ſcilicet rectæ. quare e c, c d erit quædam communis menſura quæ ſit n, & ponatur ipſi e c æqualis utraq; iſtarum d g, d k. Ipſi aūt d c eſto e l æqualis. Et quoniā d g æquatur c e, & d c æquatur c g. quare & l e æquatur ipſi e g. Igitur l g dupla eſt ipſius d c, & ipſa g k ipſius c e. Quare n utraq; l g, g k menſurabit, cum earum medietates metiatur. Et quoniam eſt ſicut a ad b, ita d c ad c e. Sicut autem d c ad c e, ſic l g ad g k. nam utraq; utriuſque dupla exiſtit. Igitur ſicut a ad b, ſic l g ad g k. Quotuplex autem eſt l g ipſius n, eo ſit numero multiplex ipſa a ipſius f. Erit ergo ſicut l g ad n, ſic a ad f. Eſt autem ſicut k g ad l g, ita b ad a. ab æqua igitur eſt, ſicut k g ad n, ſic b ad f. æque multiplex eſt igitur k g ipſius n, ſicut b ipſius f. Oſtenſum uero eſt, & ipſum a quoq; ipſius f multiplex eſſe. quare ipſū f, erit ipſorum a & b communis menſura. Diuiſa igitur l g in partes æquales ipſi n, & a in partes æquales ipſi f: partes ipſius l g, quæ ipſi n in magnitudine æquantur, tot erunt numero, quot ſunt partes ipſius a, ipſi f in magnitudine æquales. Quare ſi unicuiq; partium l g apponatur, magnitudo æqualis ipſi f cētrum grauitatis habens in medio portionis, & omnis magnitudines æquantur ipſi a, & magnitudinis ex omnibus compoſitæ centrum grauitatis erit ipſum e. nam omnes numero pares ſunt propterea, quod ipſa l e æquatur ipſi e g. Similiter autem oſtendetur, & ſi unicuiq; portionum k g apponatur magnitudo æqualis ipſi f, centrum grauitatis habens in medio portionis, & omnis magnitudines æquales erunt ipſi b, & magnitudinis ex omnibus illis compoſitę centrum grauitatis erit ipſum d. Eſt igitur a quidem impoſitum ad ipſum e, & ipſum b ad ipſum d. Sunt itaque iam magnitudines inter ſe æquales in lineam rectam poſitę, quarum centra grauitatis æqualiter inter ſe diſtant compoſitę, & numero pares. Conſtat igitur, quod compoſitę ex omnibus magnitudinibus centrum grauitatis eſt diuiſio in duo ęqua lineę rectæ, in qua centra magnitudinum mediarum ſunt poſita. Cū igitur l e ſit æqualis c d, & ipſa e c ipſi d k: tota igitur l c æquatur ipſi c k. Quare magnitudinis ex omnibus compoſitæ centrū grauitatis eſt c punctum. Poſito igitur ipſo a ad ipſum e, & ipſo b ad ipſum d, ęqueponderabūt ſecundum c punctum.



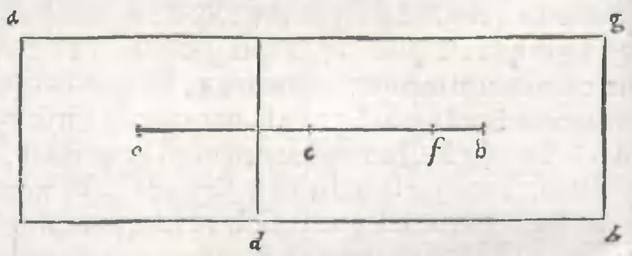
SI magnitudines incommenſurabiles fuerint, ſimiliter ęqueponderabunt, ſi in 7 diſtantijs ſuſpendantur, quę proportionem inter ſe magnitudinum mutuam ha-

habuerint. Sunto a b c magnitudines incommensurabiles, distantię uero d e, e f. Habeat autem a b ad ipsum c eam proportionem, quam distantia e d ad e f. Dico quod magnitudinis compositæ ex a b c, centrum grauitatis est punctum e, nam si non, ęqueponderabit a b positum ad f., ipsi c posito ad ipsum d, uel maius est a b ipso c, ita ut ęqueponderet ipsi c, uel non. Esto maius, & auferat ab ipso a b, minus excessu quo a b excedit c, ita ut æquepõderet: & residuum sit commensurabile ipsi c, quod sit a.



Quoniam igitur magnitudines a c sunt commensurabiles, & minorem habet proportionem a ad c quàm d e ad e f, non ęqueponderabunt a & c in distantijs d e, e f, posito ipso a in f, & c in ipso d. Per hęc eadem neque sic maius existit, quàm ut ęqueponderet ipsi a.

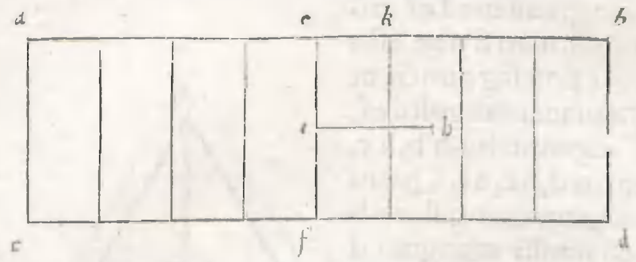
8 SI ab aliqua magnitudine magnitudo aliqua auferatur, quæ non habeat idem centrum cum tota, residuæ magnitudinis centrum grauitatis existit in linea recta, quæ centra grauitatis totius magnitudinis & ablatæ coniungat, & in ea illius parte in qua linea ipsa à centro totius magnitudinis educitur extra, atq; in eo puncto quo ipsa sic terminatur, ut ipsa iam educta ad eam quæ iungit centra prędicta eam habeat proportionem, quam magnitudinis ablatæ grauitas ad grauitatem residuæ. Esto magnitudinis alicuius centrum grauitatis c, ipsa uero sit a b. & auferatur ab ipsa a b magnitudo a d, cuius centrum grauitatis sit e. ducta uero e c, & extra ducta intercipiatur c f, quæ eam proportionẽ habeat ad e c, quam habet grauitas magnitudinis a d ad grauitatem magnitudinis d g.



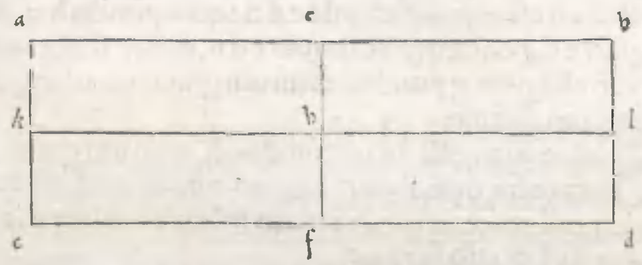
Ostẽdendum quod magnitudinis d g centrum grauitatis est f punctum. Nam si non, esto si fieri potest, h punctum. Quoniam igitur a d magnitudinis centrum grauitatis est e, ipsius uero d g est punctum h, magnitudinis ex utraque compositæ centrum grauitatis erit in linea e h, ita diuisa ut partes mutuam inter se magnitudinum proportionẽ habeant. Quare non erit c punctum secundum proportionalem sectionem, ei quæ dicta est. quare c non est centrum grauitatis eius magnitudinis, quæ ex a d, d g cõposita est: hoc est ipsius a b. positum uero fuerat, ipsum c esse dictum centrum. nõ erit igitur h punctum centrum grauitatis d g magnitudinis.

9 CViuslibet figuræ æquedistantiũ laterum cẽtrum grauitatis est in linea recta, quæ coniungit latera opposita ipsius figuræ æquedistantium laterum, diuisæ in duo æqua, quæ latera in diuisione figuræ secta fuerint. Esto figura æquedistantium laterum a b c d, in diuisione uero in duo æqua ipsius a b c d, esto e f. Dico a b c d centrum grauitatis esse in linea e f. nam si non, esto si esse potest punctum h, & ducatur h i æquedistans ipsi a b. Linea uero e b continuæ in duo æqua diuisa erit, tandem quædam intercepta minor h i. Et diuidatur utraq; e b, e a in lineas æquales e k, & à punctis diuisionum æquedistantes ipsi e f. Diuidetur itaq; tota figura in figuras æquedistantium laterum æquales, & similes ipsi k f. Figuris itaq; æquedistantium laterum similibus, & æqualibus ipsi k f, inuicem coaptatis,

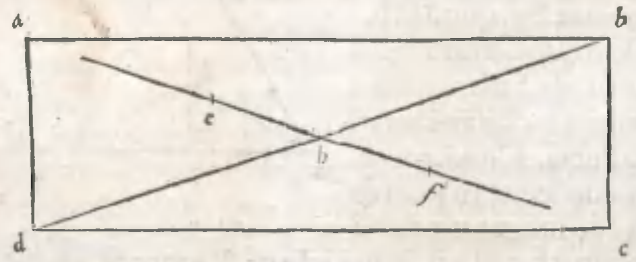
tis, & centra quoq; grauitatis earum erunt inuicem cõaptata. Erunt iam magnitudines quædam æquedistantiũ laterũ æquales ipsi k f, numero pares, & centrũ grauitatis earũ in eadem linea posita, & media æqualia, & omnia quæ utrinq; ipsis medijs assistunt, & ipsa æqualia sunt. & lineæ inter centra medię sunt ęquales. Magnitudinis ergo ex omnibus compositæ centrũ grauitatis est in linea recta, quæ iungit centra grauitatis spaciorum eorũ quæ in medio sunt. nõ est autem. nam h est extra figuras medias. Constat ergo, centrum grauitatis figuræ a b c d æquedistantium laterum esse, in e f linea recta.



CViuslibet figuræ ęquedistantium laterum centrum grauitatis est punctum, in quo diametri coincidunt. Esto figura æquedistantium laterum a b c d, & in ipsa sit linea e f, diuidens in duo æqua a b c d lineas. & item k, l diuidens a c, b d. Est iam figuræ a b c d ęquedistantium laterum centrum grauitatis in linea e f. Ostensum namq; est hoc, et eadem ratione est in linea k l. Igitur punctum h est cẽtrum grauitatis. in puncto autem h diametri figuræ æquedistantium laterum cõcurrent, ut prius demonstratum fuit. 10

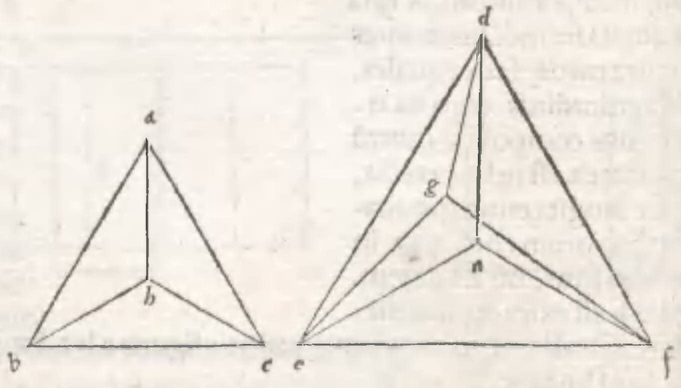


Contingit autem & aliter hoc idem demonstrare. Esto figura æquedistantium laterum a b c d. eius diametros d b. trianguli ergo a b d, b d c erũt inter se similes & æquales. quare ipsis coaptatis, & eorum centra grauitatis inter se coincident. Esto iam trianguli a b d, centrum grauitatis e pũctum, & † ducatur e h, & protrahatur donec assumatur h f æqualis e h. Coaptato itaq; a b d triãgulo ad triangulum b d c, & latere a b ad latus d c. accommodato uero latere a d ad latus b c, coaptabitur quoq; e h linea recta ad h f rectam, & e punctum in f cadet, sed et in centrum grauitatis trianguli b d c. Quoniam igitur trianguli a b d centrum grauitatis est e punctum, trianguli uero b d c est f, manifestum est, quod magnitudinis ex utrisq; compositæ centrum grauitatis est punctum medium lineæ e f rectæ, quod quidem est h punctum.

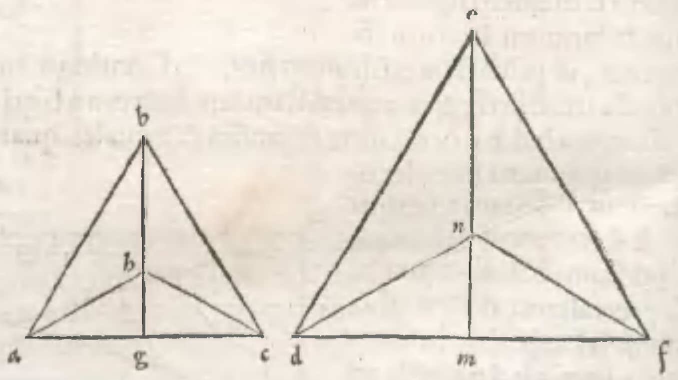


† Intellige diametrum b d diuisam esse per medium in h puncto.

SI duo trianguli fuerint inter se similes, & duo in ipsis puncta similiter ad triangulos se habentia in positione, & punctũ unum eius in quo est, triãguli sit centrum grauitatis: reliquum quoq; punctum eius in quo est, trianguli centrum grauitatis existet. Puncta uero dicimus similiter se habere in positione ad similes figuras, à quib. lineæ rectæ ab angulis ęqualibus eductæ, ad latera inter se correspõdentia angulos æquales efficiant. Esto duo trianguli a b c, d e f. & esto sicut a c ad 11 d f, sic a b ad d e, & b c ad e f. & sint in dictis triangulis puncta similiter posita, quæ sint h, n, similiter se in positione habentia ad triangulos a b c, d e f. & sit h centrum grauitatis a b c trianguli. Dico quod n est centrum grauitatis d e f trianguli. nam si non, esto si esse potest g punctum grauitatis trianguli d e f, & iũgantur h a, h b, h c. item n d, n e, n f. Quoniam igitur triangulus a b c est similis triangulo d e f, & centra grauitatis sunt h g puncta: similium uero figurarum centra grauitatis similiter posita sunt, ita ut æquales angulos efficiant ad latera eiusdem rationis unũquodque ad unumquodq;. Angulus igitur g d e, erit æqualis angulo h a b. Sed angulus h a b est æqualis angulo e d n: quia puncta h n, similiter posita sunt. Angulus igitur e d g erit æqualis angulo e d n, maior scilicet minori: quod esse non potest. Non est igitur g punctus centrum grauitatis trianguli d e f. quare punctum n erit centrum dictum.

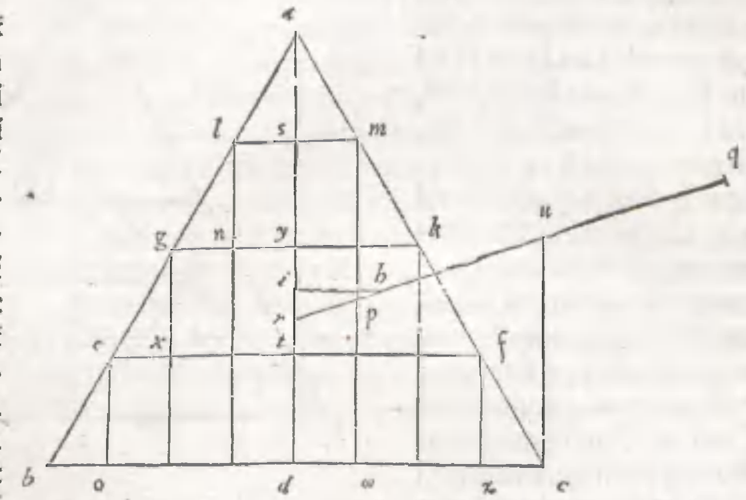


12 SI duo trianguli fuerint similes, & centrum grauitatis alterius eorum fuerit in linea recta, quæ ab uno angulo eius ad mediam basem ducatur: alterius quoq; trianguli erit centrum grauitatis in linea similiter in eo ducta. Sunto trianguli duo a b c, d e f. & esto sicut a c ad d f, ita a b ad d e, & b c ad f e. et a c diuisa in duo ęqua in puncto g, iungatur b g. Et esto centrum grauitatis triãguli a b c, in linea b g, quod sit h. Dico quod centrum grauitatis d e f trianguli erit in linea recta, similiter in eo ducta. Diuidatur d f in duo æqua in puncto m. & iungatur e m, & fiat sicut b g ad b h, sic m e ad e n: & iungant̃ a h, h c, d n, n f. Cum igitur ipsius c a dimidia est a g, & ipsius d f dimidia est d m: est sicut b a ad e d, ita a g ad d m. & latera circa æquales angulos existentia, sunt proportionalia. Angulus igitur a g b est æqualis angulo d m e. & est sicut a g ad d m, sic b g ad e m. Est autẽ & sicut b g ad b h, sic m e ad e n: & per æquam ergo, sicut a b ad d e, sic b h ad e n. Et circa angulos æquales latera proportionalia consistunt. Erit igitur angulus b a h, æqualis angulo e d n. Quare angulus h a c reliquus erit ęqualis angulo e f n. et angulus h c g, æqualis angulo n f m. Ostensum est autem, quod angulus a b h est æqualis angulo d e m. quare & angulus h b c reliquus, erit æqualis angulo n e f. Et omnino eadem ratione puncta h n, ad latera proportionalia similiter posita sunt, & angulos æquales faciunt. Cum igitur h n puncta similiter posita sint, & h est centrum grauitatis trianguli a b c, erit n quoq; centrum grauitatis trianguli d e f.



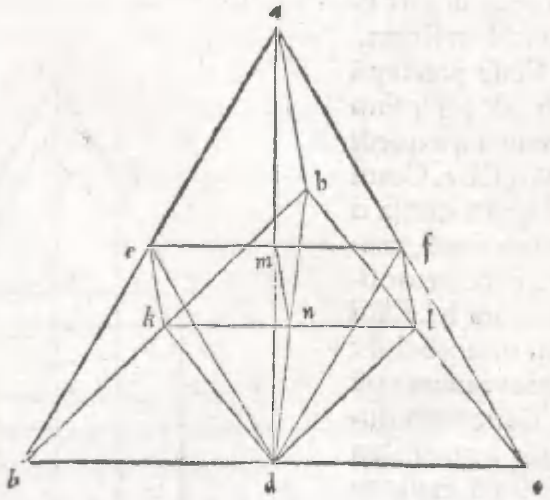
Cuius-

CVIuscunq; trianguli centrum grauitatis existit in linea recta, quæ ab angulo ad dimidiam basem ducta fuerit. 13 Esto triangulus a b c, & in ipso a d ducta ad dimidiam basem. Est itaq; ostendendum, quod in linea a d centrum grauitatis triãguli a b c existit. Nam si non, esto si esse potest pũctũ h, & per ipsum ducatur h i, æquedistans ipsi b c. Continuè igitur diuisa d c in duo æqua, tandem relinquetur linea minor h i. Diuidatur utraq; b d, d c in duo ęqua: et à pũctis sectionum ducantur æquedistantes ipsi a d, et iũgantur e f, g k, l m. Erũt iam ipsæ æquedistãtes ipsi b c. Iam figuræ æquedistantium laterum m n, centrum grauitatis est in s y. Ipsius aũt k x in y t, & ipsius f o, in t d. Magnitudinis ergo ex omnibus compositæ centrum grauitatis est in linea s d recta, quod sit r. Et iungatur h r, & educatur & protrahatur, & ducatur c u æquedistans ipsi a d. triangulus autem a d c, ad omnis triangulos a m, m k, k f, f c, lineis descriptos similes ipsi a d c, eam habet proportionẽ, quam habet c a ad a m. Quia a m, m k, k f, f c æquales sunt. Quoniam autem & triãgulus a d b, ad omnis triangulos à lineis a l, l g, g e, e b descriptos, similes sibi, eã habet proportionem, quã b a ad a l. Triangulus igitur a b c, ad omnis dictos triangulos, eam habet, quã c a ad a m. Sed c a ad a m maiorem proportionem habet, q̃ u r ad r h. nam proportio c a ad a m eadem est ei quam habet tota u r ad r p. quia trianguli similes existunt. & triangulus quoq; a b c, ad dictos triangulos maiorem habet proportionem, quàm u r ad r h. Fiat igitur, ut sicut figuræ æquedistantium laterum se habent ad triangulos, sic q h ad h r. Quoniam igitur aliqua magnitudo existit a b c, cuius centrum grauitatis est h: & aufertur ab ea magnitudo cõposita ex m n, k x, f o figuris æquedistantium laterum: & ablatæ magnitudinis centrum grauitatis est r punctum. reliquæ igitur magnitudinis, quæ ex triangulis circumrelictis cõponitur, cẽtrum grauitatis in linea r h habetur, quæ educta & protracta est ad h r: eamq; habet proportionem ad illam, quam magnitudo ablata ad reliquam. Punctum ergo q centrum est grauitatis magnitudinis compositæ ex omnibus circumrelictis, quod esse non potest. nam linea recta à puncto q æquedistãter ipsi a d ducta in plano, in eadem ipsius parte: hoc est in altera ipsius parte, centra omnia habentur. Manifestum est igitur propositum. Aliter idem. Esto triangulus a b c, & ducatur a d linea ad dimidiam basem. Dico itaq;, quod in linea a d centrũ grauitatis trianguli a b c habetur. Nam si non, esto h, si esse potest: & iungantur h a, h b, h c, & e d, d f, f e, ad medias b a, a c. Ducantur ipsi a h æquedistantes e k, f l: & iungantur k l, l d, d k. item m n æquedistans ipsi a h. Quoniam itaq; triangulus a b c similis est triangulo d f c, cum b a sit æquedistans ipsi f d, & trianguli a b c cẽtrum grauitatis est punctum: & f d c trianguli quoq; centrum grauitatis est punctum l. nam h l puncta sunt similiter posita in utroq; triangulo, cum ad latera eiusdem rationis æquos angulos efficiant, constat enim istud. Eadem autem ratione

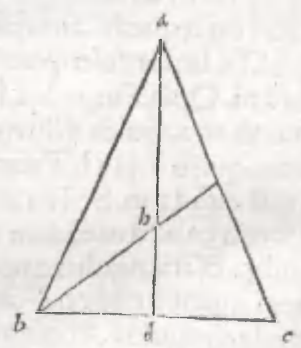


&tri-

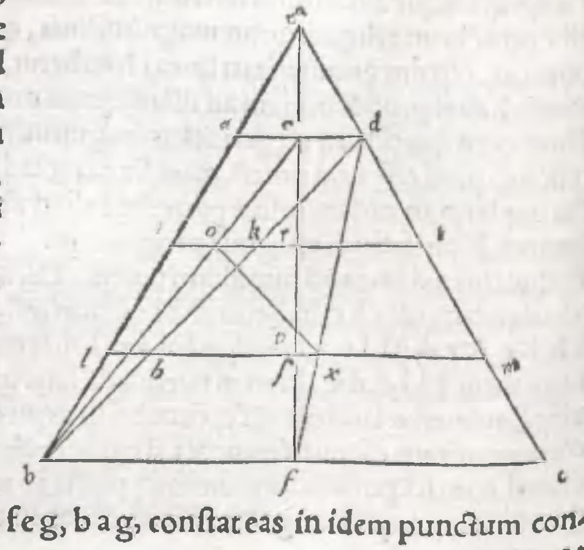
& trianguli e b d centrum grauitatis est k punctum. quare magnitudinis ex ambabus b e d, d f c triãgulis compositæ centrum grauitatis habetur in medio lineæ k l. cum triãguli e b d, f d c, sint æquales. Et ipsius k l, medium est n: cum sit sicut b e ad e a, ita b k ad h k. Sicut autem c f ad f a, sic c l ad l h. Si autẽ hoc sic se habet, erit b c ipsi k l æquedistans. Et iuncta est d h. erit igitur sicut b d ad d c, sic k n ad n l. Quare magnitudinis ex utrisq; dictis triangulis compositæ centrum grauitatis est n. est quoq; figuræ æquedistantium laterum a e d f, centrum grauitatis pũctum m. Quare magnitudinis ex omnibus compositæ centrum grauitatis habetur in linea m n. Est autem trianguli a b c centrum grauitatis h punctum. Igitur m n protracta per punctum h transibit, quod esse non potest. Centrum igitur grauitatis trianguli a b c, non extra lineam a d usquam habetur. in ea igitur necesse est ipsum haberi. Quare constat propositum.



14 CViuscunque trianguli cẽtrum grauitatis est punctum in quo lineæ rectæ ab angulis ad dimidias bases ductę concurrũt. Esto triangulus a b c, & ducatur a d linea ad mediam b c, & linea b e ad mediã a c. Si iam centrum grauitatis trianguli a b c habetur in utraq; a d b e, sicut demonstratum fuit, erit utique punctum h centrum grauitatis trianguli a b c.



15 CViuscunq; mensalis figuræ, quæ duo latera habeat æquedistantia inter se, centrum grauitatis habetur in linea recta, quæ iungit laterum æquedistantium sectorum in duo æqua puncta diuisionis, atq; in eo ipsius dictæ lineæ loco, ubi ipsa sic diuisa sit, ut pars eius terminata ad minus laterum ęquedistantium in duo æqua sectorum ad reliquam partem eam habeat proportionẽ, quam habet utraque simul, duplũ maioris æquedistantium cum minore, ad duplum minoris cum maiore. Esto mensalis figura a b c d, quæ habeat a d, b c æquedistantes. & e f iungat puncta diuisionis ipsarũ a d, b c, quæ in duo æqua diuisæ sunt. Quod itaq; in linea e f, sit centrum grauitatis mensæ, manifestum est. nam si protrahantur c d g, f e g, b a g, constat eas in idem punctum concurrere:

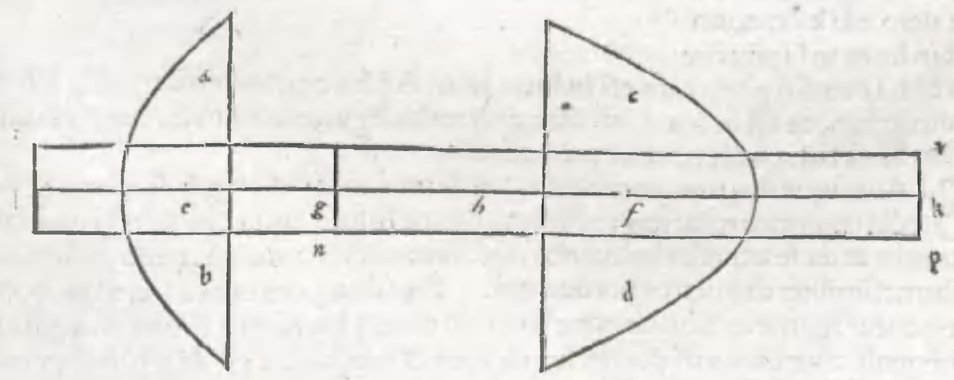


curere: eritq; trianguli b g c centrũ grauitatis in ipsa g f, & similiter trianguli a g d cẽtrum grauitatis in ipsa e g. & reliquæ igitur mensæ a b c d, erit in ipsa e f. Ducta uero b d diuidatur in tria æqualia in punctis k h: & per ea puncta ducãtur æquedistantes ipsi b c lineæ l h m, n k t. & iungantur d f, b e, o x. Erit igitur centrum grauitatis triãguli d b c, in linea h m, cum h b sit tertia pars b d, & per h ducta est h m æquedistans ipsi basi. Est autem centrũ grauitatis trianguli d b c, in linea d f. Quare x erit centrum grauitatis dicti trianguli. Eadem autem ratione erit o punctum centrum grauitatis trianguli a b d. Magnitudinis ergo ex utrisq; triangulis a b d, b d c compositæ, centrum grauitatis erit in linea recta o x. Quæ quidem magnitudo mensalis cum sit, erit eius centrũ grauitatis in linea e f. Quare mensalis a b c d, centrũ grauitatis erit punctũ p. Habet autem triangulus b d c ad triãgulum a b d eam proportionẽ, quam o p ad p x. Sed sicut triangulus b d c ad triangulũ a b d, sic b c ad ipsam a d. Est autẽ sicut o p ad p x, ita R p ad p s. Igitur sicut b c ad ipsam a d, sic R p ad ipsam p s. Quare sicut duæ b c, cum a d ad duas a d, cum b c: sic duæ R p cum p s, ad duas p s cum R p. Verum duæ R p cum p s, est utraq; simul e R, R p, hoc est p e: duæ uero p s cum p R utraque simul, est p s s, hoc est p f. Ostensa ergo sunt ea quæ proposita fuerant.

FINIT PRIMVS ARCHIMEDIS LIBER de Aequeponderantibus.

ARCHIMEDIS DE HIS QVAE AEQVEPONDERANT LIBER *secundus*.

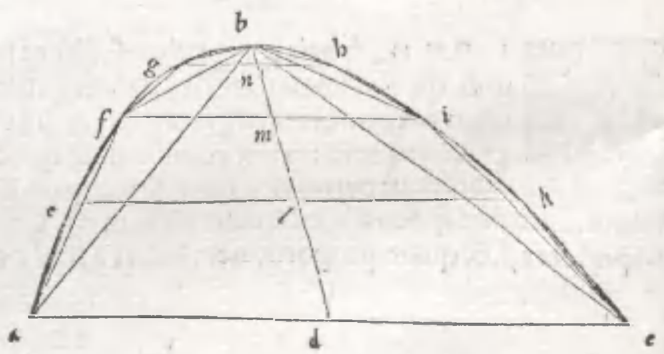
SI DVO spacia compræhensa à linea recta & sectione coni rectãguli, quæ ad lineam rectam datam possimus applicare, non habeãt idem centrum, centrũ grauitatis eorum erit in linea quę iungit cẽtra grauitatis eorũ: eritq; punctũ illud quod dictam lineam rectam sic diuidet, ut partes eius inter se mutuam habeant proportionem spaciorum. Esto duo spacia a b, c d, qualia dictum est. Cẽtra autem grauitatis eorum sint puncta e, f. & quam proportionem habet a b ad c d, eam habeat f h ad h e. Ostendendum est, quod magnitudinis ex utrisque a b, c d spacijs compositæ, centrũ



uitatis eſt punctum h. Sit autem ipſi e h harum utraq; æqualis f g, f k. ipſi autem f h, hoc eſt g e, ſit e l æqualis. erit igitur & l h ipſi k h æqualis. Et eſt ſicut l g ad g k, ſic a b ad c d. nam utraq; utriuſq; dupla eſt. Protendatur autem in parte pūcti a linea æquediſtans ipſi l g, ita ut fiat ſpacium m n ipſi lineæ l g utrinq; adiectū, æquale ipſi a b. erit iam ipſius m n centrum grauitatis punctum e. Compleatur itaque n x. Habebit igitur m n ad n x eam proportionem, quam l g ad g k. habet autem & a b ad c d eam, quam l g ad g k. Igitur ſicut a b ad c d, ſic m n ad n x. & permutatim. At uero a b æquatur ipſi m n, ergo c d æquatur ipſi n x. Et centrum grauitatis eius eſt f punctum. Et quoniam l h eſt æqualis ipſi h k, & tota l k latera oppoſita diuidit in duo æqua totius p m, centrum grauitatis erit punctum h. Sed m p eſt æquale utrique ſimul m n, n x. Quare & compoſiti ex utriſque a b, c d centrū grauitatis erit h punctum.

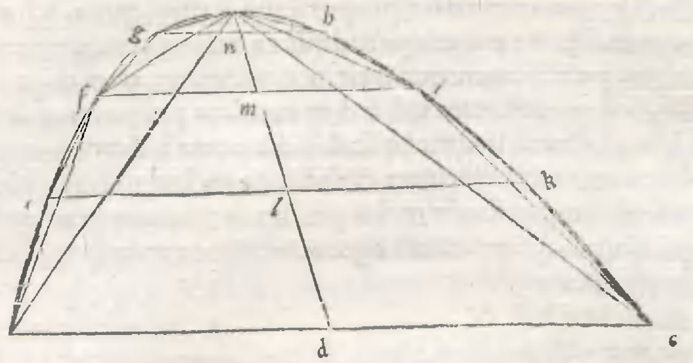
Si intra portionem à recta & coni rectanguli ſectione compræhenſam triangulus inſcribatur, qui baſem habeat cum portione eādem, & altitudinem ipſi æqualem, & item in reſiduis portionibus trianguli inſcribantur eaſdem cum portionibus baſes & altitudines æquales habentes, atq; item & hoc idem in reſiduis portionibus fiat: & huiuſmodi triangulorum inſcriptio continuetur figura, quæ hoc modo in ſectione deſcribitur, perſpectè inſcribi dicatur. Manifeſtum eſt autem, quod figuræ hoc modo inſcriptæ lineæ quæ iungent angulos eos qui uertici portionis proximi exiſtunt & eos qui deinceps ſequentur æquediſtabunt baſi ipſius portionis, & in duo æqua diuidentur à diametro portionis, & diametrum ipſæ diuident in proportiones à numeris ab unitate continenter imparibus dictas, ea parte quæ ipſi uertici coniuncta erit pro uno computata. hoc autem in ordinibus eſt oſtendendum.

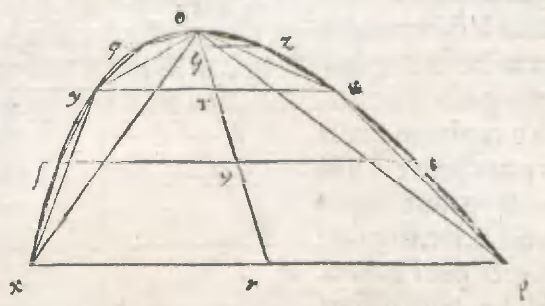
2 SI autem in portione quæ à recta & rectanguli coni ſectione comprædeditur, rectilinea figura inſcribatur, perſpectè centrum grauitatis figuræ inſcriptæ erit in diametro portionis. Eſto a b c portio qualis dicitur, & inſcribatur ei perſpectè figura rectilinea a e f g b h i k c. Oſtendēdum eſt, centrum grauitatis rectilineæ figuræ eſſe in b d. Quoniā enim menſulæ a e k c centrū grauitatis eſt in l d, menſulæ uero e f i k centrum eſt in linea m l. ipſius uero f g h i menſulæ centrum eſt in linea m n. Ad hæc quoque trianguli g b h centrum grauitatis eſt in b n. Conſtat quod totius figuræ rectilineæ centrū grauitatis eſt in linea b d. quare conſtat propoſitum.



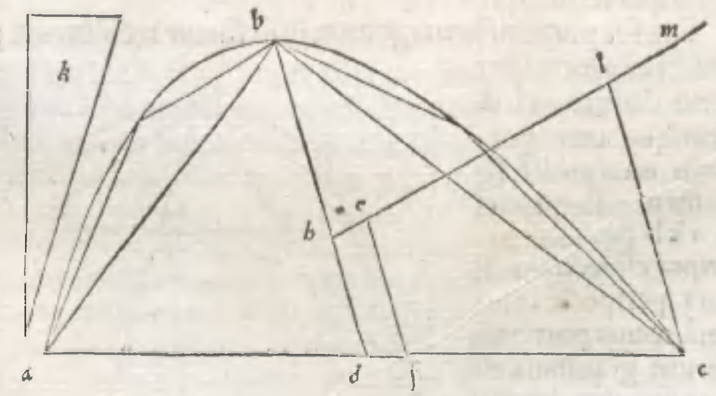
3 SI in utraque duarum portionum ſimilium à coni rectanguli ſectione, & linea recta compræhenſarum rectilineæ figuræ inſcribantur, perſpectè quæ latera numero inter ſe æqualia habuerint, rectilinearum figurarum centra grauitatis ſecabunt ſimiliter diametros portionum. Sint duæ portiones a b c, x o p, & eis inſcribantur figuræ rectilineæ notæ ſecundū omnia latera quæ ſint in utraq; numero æquali. Sint diametri portionum b d, o r. & iungantur e k, f i, g h. & ſ t, y u, q z. Quoniam igitur & b d diuiditur à lineis æquediſtātibus in proportiones à numeris imparibus, continenter ab uno diſpoſitis nominatas: & p o ſimiliter, & diuiſiones earum ſunt numero æquales inter ſe: conſtat quod partes diametrorum eiſdem

dem proportionibus habebuntur, & lineæ æquediſtantes eaſdem proportiones ſeruabunt, & menſularum ipſius quidem a e k c, & ipſius x ſ t p, centra grauitatis erunt in d l, 9 r lineis rectis ſimiliter poſita, cum eandē habeāt proportionem a c, e k, quam p x ad ſ t. Rurſus autem & menſularum e f i k, ſ y u t, centra grauitatis diuident ſimiliter lineas l m, 9 T. Sūt autem & triangulorum g b h, q o z centra grauitatis in lineis b n, o ɥ ſimiliter poſita. Habent autem eandem proportionem menſulæ & trianguli. Cōſtat igitur, quod totius figuræ rectilineæ in portione a b c inſcriptæ, centrum grauitatis ſimiliter diuidit b d diametrum, ſicut figuræ in x o p portione inſcriptæ centrum grauitatis in o r, quod demonſtrari oportuit.



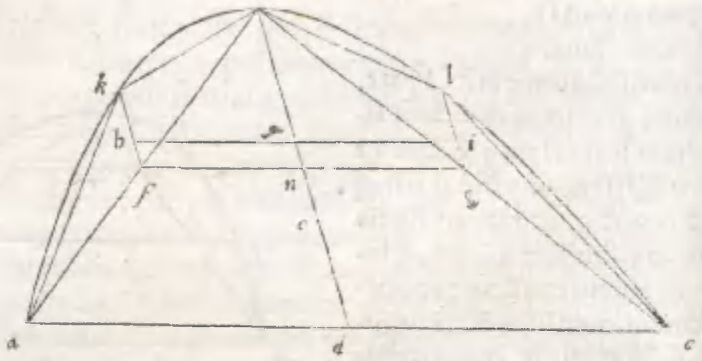


CViuſcunq; portionis à linea recta & ſectione rectanguli coni compræhenſæ, centrum grauitatis in diametro portionis exiſtit. Eſto portio, ut dicitur, a b c: eius diametros, b d. Oſtendendum eſt, dictæ portionis cētrum grauitatis eſſe in b d. Nam ſi non, eſto ipſum e, & per ipſum ducatur e f, ipſi b d æquediſtans, & inſcribatur portioni triangulus a b c eandem baſim habens, & altitudinem cū portione eandem. & quam habet c f ad d f, hanc habeat triangulus a b c, ad ſpacium k. Inſcribatur iā in portione rectilinea figura perſpectè, ita ut quæ relinquētur portiōes, ſint minores ipſo k. figuræ inſcriptæ centrum grauitatis eſt in b d. Sit h, & iungatur h e, et producatur, & ducatur c l æquediſtans ipſi b d. Conſtat autem, quod maiorē proportionem habet inſcripta portioni figura ad eas quæ relictæ ſunt portiones, quàm a b c triangulus ad ſpacium k, qui eam habet quam c f ad d f. Figura igitur inſcripta, ad portiones relictas maiorem habet proportionem, quàm c f ad f d, hoc eſt e l ad e h. Habeat itaque m e ad e h, eā proportionem, quam rectilinea figura ad portiones. Quoniam igitur e eſt centrū totius 4



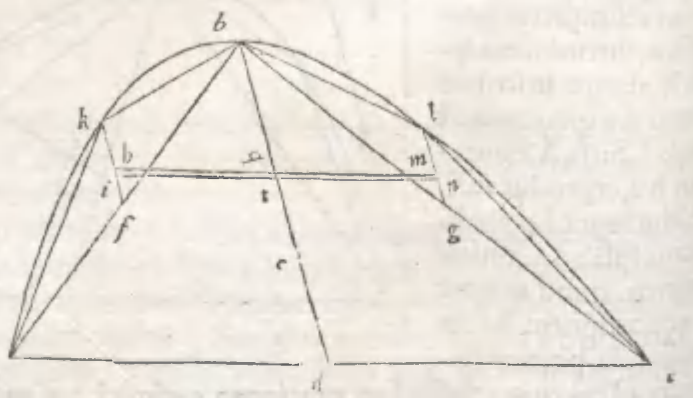
totius portionis: figuræ uero inscriptæ portioni centrum est h: constat quod magnitudinis compositæ ex reliquis portionibus, centrum grauitatis est in parte h e producta, quæ eam ad h e proportionē habet, quam figura inscripta ad reliquas portiones. Quare erit magnitudinis ex reliquis portionibus compositæ centrum grauitatis punctum m: quod est inconueniens. nam ei quæ per m punctum ducitur lineæ æquedistanter ipsi b d, in eandem partem erunt omnis reliquæ portiones. Manifestum est igitur, quod in diametro b d centrum existit grauitatis.

5 SI in portione à recta linea & sectione rectanguli coni cōtenta, figura rectilinea inscribatur perspecte totius portionis centrum grauitatis erit uertici portionis propinquius, quàm centrū figuræ rectilineæ inscriptæ portioni. Esto a b c portio qualis dicitur, cuius diametros b d, & inscribatur eidem triāgulus primum perspecte, & note a b c, et diuidatur b d in puncto e, ita ut b e sit dupla e d. erit igitur trianguli a b c centrum grauitatis punctum e. Diuidatur iā in duo æqua utraq; a b, b c, in punctis f g: & per f g ducātur f k, l g, ęquedistantes ipsi b d. Est igitur



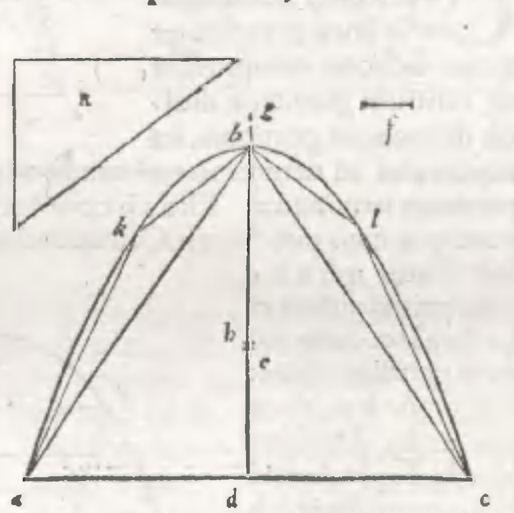
portionis a k b centrum grauitatis in linea f k. portionis uero b c l, centrum grauitatis in g l linea. Sint autem ea h i, & iungantur h i: & quoniam h f g est figura laterum æquedistantium, & g i est æqualis ipsi f h: est igitur f g æqualis h i. Quare magnitudinis ex utrisque compositæ ex a k b, & b l c portionibus, centrum grauitatis est in media h i: cum portiones quidem sint æquales, hoc est punctum q. quoniam autem trianguli a b c centrum grauitatis est e, magnitudinis uero ex utrisq; a k b, b l c compositæ centrum est q: constat quod portionis totius a b c centrum grauitatis est in linea q e: id est inter puncta q e. quare centrum grauitatis totius portionis erit uertici ipsius portionis propinquius, quàm centrum trianguli in ipsa perspecte inscripti.

Rursus portioni pentagonum inscribatur rectilineum perspecte, quod sit a k b l c. Et esto totius portionis diametros b d, utriusque uero portionis utraque k f, l g diametros. Et quoniā in a k b portione inscripta est rectilinea figura perspecte, siue note, totius portionis cētrum grauitatis est propinquius uertici ipsius portiōis, quàm cētrum rectilineæ inscriptæ. Esto itaque ipsius portionis centrum grauitatis h, trianguli uero l. Rursus esto portionis b l c centrum grauitatis m, trianguli uero n. Est autem magnitudinis



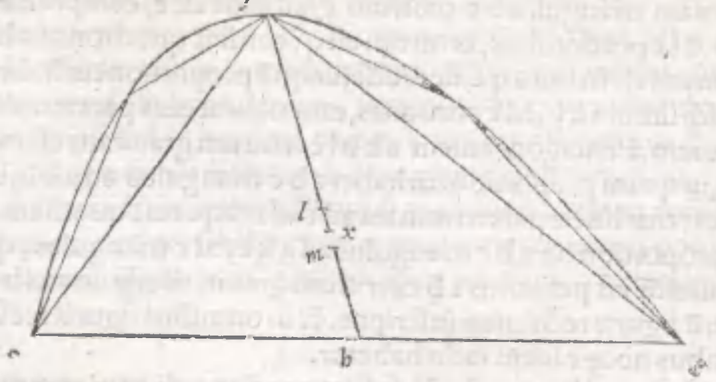
dinis ex utrisque a k b, b l c portionibus compositæ, centrum grauitatis q: magnitudinis autem ex utrisque a k b, b l c triangulis compositæ, centrum est T. Rursus quoniam trianguli a b c centrum grauitatis est e, compositæ autem ex utrisque a k b, b l c portionibus, centrum est q: constat quod totius a b c portionis cētrum grauitatis est in linea q e, sic diuisa, ut quā proportionem habet a b c triangulus ad utrasq; simul a k b, b l c portiones, eam habeat eius pars terminata ad q, ad partem minorem. Pentagoni autem a k b l c centrum grauitatis est in linea recta e t, sic diuisa, ut quam proportionem habet a b c triangulus ad a k b, b l c triangulos, eam habeat eius lineæ pars terminata ad t ad reliquam. quoniam igitur maiorem habet proportionem a b c triangulus ad a k b, b l c triangulos, quàm ad portiones, manifestū est portionis a b c centrum grauitatis esse uertici b propinquius, quàm centrū figuræ rectilineæ inscriptæ. & in omnibus figuris rectilineis inscriptis portionibus notæ eadem ratio habetur.

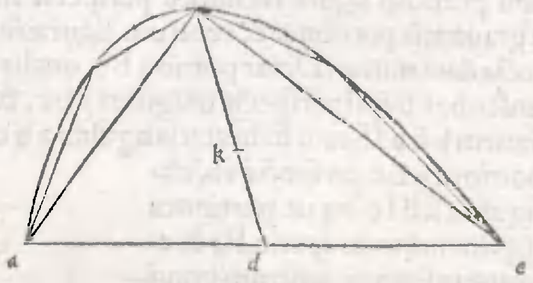
PORtione à linea recta & sectione rectanguli coni comprænhensa data, potest 6 ipsi portioni figura rectilinea perspecte ita inscribi, ut linea quæ inter centrum grauitatis portionis & centrum figuræ inscriptæ capitur, sit quacunque linea recta data minor. Detur portio a b c, qualis dicitur, cuius cētrum grauitatis sit h, & inscribatur ipsi perspecte triāgulus a b c, & sit data linea f: & quā habet proportionem b h ad f, eam habeat triangulus a b c ad spacium R, inscribatur etiam ipsi portioni a b c perspecte rectilinea figura a k b l c, ita ut portiones residuę sint minores spacio R: & esto figuræ inscriptæ centrum grauitatis e. Dico iam lineam h e minorem esse linea f data. Nam si non, uel æqualis, uel maior erit. Quoniā itaque a k b l c figura rectilinea ad residuas portiones maiorem proportionem habet, quàm a b c triangulus ad R, hoc est quàm h b ad f: habet autem h b ad f nō minorem proportionem, quàm ad h e, cū nō sit minor f: multo magis ergo figura a k b l c rectilinea ad reliquas portiones maiorem proportionem habebit, quàm b h ad h e. Quare si faciamus, ut sicuti a k b l c figura inscripta ad residuas portiones habet, sic alia quæcunq; linea ad h e: cum iam portionis a b c centrum grauitatis sit h, protracta e h, & assumpta aliqua recta eam ad e h proportionem habēte, quam figura a k b l c rectilinea ad residuas portiones, erit ipsa maior h b: habeat igitur g h ad h e talem proportionem. erit igitur g centrum grauitatis magnitudinis ex portionibus residuis compositæ: quod quidem esse non potest. nam est, quæ per g ducta ęquedistanter ipsi a c in eandem partem portioni. Constat igitur, lineam h e minorem esse linea f. quod fuerat demonstrandum.



DVarum portionum similium, quæ linea recta & coni rectanguli sectione 7 comprænhenduntur, centra grauitatis in eandem proportionem diametros earum diuidunt. Sint duæ portiones, quales dicitur a b c, e f g, quarum diametri b d, f h: & esto portionis a b c, centrum grauitatis k punctum: ipsius ueto e f g, sit centrum grauitatis l. Ostendendum quod in eandem proportionem diuidunt ipsas diametros centra k l. Nam si non, esto sicut k b ad k d, sic f m ad h m, & inscribatur ipsi e f g portioni figura rectilinea notæ, ita ut linea inter centrum portionis, & centrum figuræ inscriptæ capta, sit minor l m. & esto figuræ

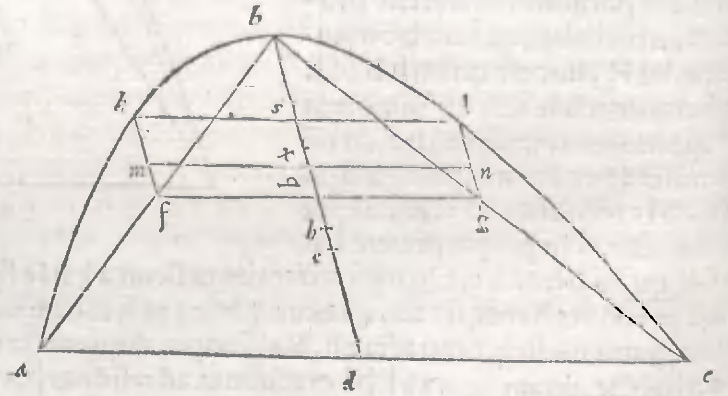
guræ inscriptæ centrum grauitatis x punctum. Inscribatur quoque ipsi a b c portioni figura rectilinea similis figuræ ipsi e f g portioni inscriptæ, hoc est similiter notæ, cuius centrum grauitatis uerticí portionis erit propinquius, quam centrum portionis: quod quidem esse nõ test. Constat igitur, b k ad k d eam, quam f i ad i h, habere proportionem.





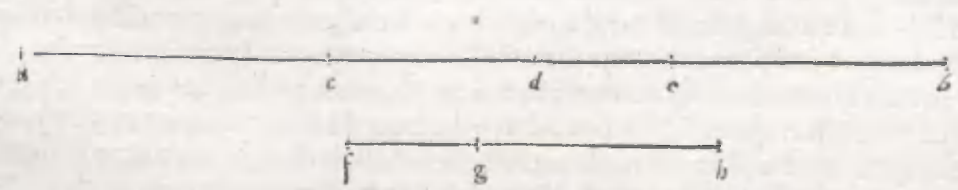
8 CViuscunque portionis à recta linea & rectanguli coni sectione compræhensæ, centrum grauitatis diuidit diametrum portionis, ita ut pars eius ad uerticem terminata, sit ad partem eam sesquialtera, quæ ad basim portionis terminatur. Esto a b c portio qualis dicitur: eius diametros esto b d, cẽtrum grauitatis punctum h. Ostendendum est, quod b h ad h d est sesquialtera.

Inscribatur ipsi a b c portioni triãgulus per specte a b c, cuius centrum grauitatis esto e: & utraque b a, b c in duo æqua diuidatur punctis f g, & ducant k f, l g ęquedistanter b d: Erũt igit k f l g diametri portionũ a k b, b l c. Sit itaque portionis a k b centrũ grauitatis m: ipsius uero b l c punctum n. Et iungantur f g, m n, k l. magnitudinis ergo ex utraque portione compositæ centrum grauitatis est q. Et quoniam est sicut b h ad h d, sic k m ad m f, & componendo, & permutatim sicut b d ad k f, ita h d ad m f. Sed b d ad k f, quadrupla est. hoc enim in fine ostenditur, ubi est signũ : igitur h d est quadrupla m f. Quare residua b h, ad residuam k m quadrupla est: hoc est ipsius s q. reliquarum ergo utraque simul, hoc est b s, q h tripla est ad s q. esto b s tripla s x: & q h ergo erit tripla x q. Et quoniam b d est quadrupla ipsius b s, hoc enim demonstratum est: & b s est tripla s x: igitur b x est tertia pars ipsius b d. Est autem & e d pars tertia ipsius b d, cum punctum e sit centrum grauitatis trianguli a b c: & reliqua igitur x e erit tertia pars b d. Quoniam uero totius portionis centrum grauitatis est h punctum: magnitudinis autem ex utrisque a k b, b l c portionibus compositæ cẽtrum grauitatis est punctum q: trianguli a b c centrum est e: est quoque sicut triãguli



guli a b c ad residuas portiones, sic q h ad h e. Triplus uero est triangulus a b c ad residuas portiones, cum tota portio sit ad triangulum a b c sesquitertia: igitur q h est ad h e tripla. Ostensum autem est q h triplam esse q x. Igitur x e quincupla est ipsius e h: hoc est d e ad h e. nam illæ sunt æquales. quare d h sexcupla est ipsius h e, & est b d tripla ipsius d e. igitur b h ipsius h d sesquialteram esse necesse est.

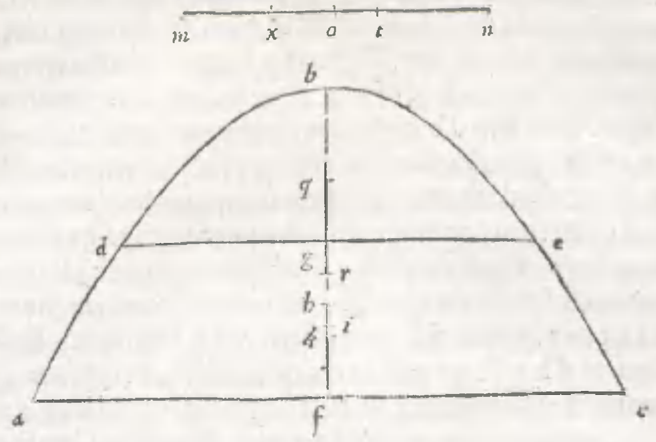
SI quatuor lineæ fuerint in proportionalitate cõtinua proportionales, & quam proportionem habuerit minima earum ad excessum quo maxima minimam superat, eam habeat quædam linea sumpta ad tres quintas eius excessus quo maxima proportionalium tertiam superat: quam uero habuerit linea sumpta æqualis simul istis, duplæ maximæ proportionalium, & quadruplæ secundæ, & sextuplæ tertiæ, & triplæ quartæ, ad lineam sumptam istis simul æqualem, quincuplæ maximæ, & item decuplæ secundę & tertiæ, & quincuplæ quartæ, eam habeat linea quædam sumpta ad excessum quo maxima proportionalium excedit tertiam: lineæ sumptæ utręque simul erũt duæ quintæ illius lineæ quæ maxima est proportionalium linearum. 9 Sint quatuor lineæ proportionales a b, b c, b d, b e: & quam proportionem habet b e ad e a, eam habeat f g ad tres quintas ipsius a d. Quam uero habet linea æqualis istis simul duplæ a b, quadruplæ b c, sexcuplæ b d, triplæ b e, ad lineam æqualem simul istis, quincuplæ a b, decuplę c b, & b d, &



quincuplæ b e, eam habeat proportionem g h ad ipsam a d. Ostendendum est, quod f h est duæ quintæ ipsius a b. Quoniam enim a b, b c, d b, b e sunt proportionales: erunt etiam a c, c d, d e in eadem proportione. et utraque simul a b, b c ad ipsam b d, eam habet proportionem, quam a d ad d e: & similiter utraque simul c b, b d ad e b, & omnes ad omnes. Eam ergo habet proportionem a d linea ad d e, quam linea æqualis istis simul, dupla a b, tripla c b, & b d, ad lineam æqualem istis simul, duplæ b d, & e b. Quam autem proportionem habet linea æqualis istis simul, duplæ a b, & quadruplæ b c, & quadruplæ b d, & duplæ b c, ad lineam istis simul æqualem, duplæ d b, & ipsi b e, eam habebit d a ad aliquam minorem ipsa d e. Sit illa d o, & utræque ad primas eandem habebunt proportionem: habebit itaque o a ad ipsam a d, eam quam linea æqualis istis simul duplæ a b, quadruplæ b c, sexcuplæ d b, & triplæ b e, ad compositam ex dupla utriusque simul a b, b e, & quadruplæ utriusque simul c b, b d. Habet autem & a d linea ad g h, eam quam quincupla utriusq; simul a b, b e cum decupla utriusque simul c b, b d, ad compositam ex dupla a b, & quadrupla c b, & sexta b d, & tertia e b. Dissimiliter autem proportionibus ordinatis: id est in proportionalitate perturbata. per æquam ergo eam habet proportionem a o ad g h, quam composita ex quincupla utriusque simul a b, b e, & decupla c b, b d, ad compositam ex dupla utriusque simul a b, b e, & quadrupla utriusque simul c b, b d. Verum composita ex quincupla utriusque simul a b, b e, & decupla utriusque simul c b, b d, ad cõpositam ex dupla utriusque simul a b, b e, & quadrupla utriusque simul c b, b d, eam habet proportionem quam quinque ad duo. Igitur o a ad g h eam habet proportionem, quam quinque ad duo. Rursus quoniam o a ad d a eam habet proportionẽ, quam e b, cum dupla b d ad æqualem lineæ compositæ ex dupla utriusque simul, a b, b e, cum quadrupla utriusq; simul c b, b d. Est autem & sicut d a ad d e, sic cō-posita ex dupla a b, tripla b c, & ipsa b d, ad æqualem ipsi e b, cū dupla b d: dissimi liter igitur proportionibus ordinatis & sectis, id est perturbata proportionalitate per æquam sicut o d ad d e, sic dupla a b, cum tripla b c, & ipsa b d, ad compositam ex dupla utriusq; simul a b, b e, & quadrupla utriusq; simul c b, b d. quare & sicut o e ad e d, sic c b cum tripla b d, & dupla e b, ad duplam utriusque simul a b, b e, & quadruplam utriusq; simul c b, b d. Est autem & sicut d e ad e b, sic a c ad c b, & c d ad d b. quare secundum compositionem tripla c d, ad triplam d b, sicut dupla d e ad duplam c b. & ideo composita ex a c, & tripla c d, & dupla d e, ad compositam ex c b, & tripla d b, & dupla e b. Dissimiliter rursus proportionibus ordinatis, id est, in perturbata proportionalitate per æquam, eandem habebit proportionem o e ad e b, quam a c cum tripla c d, & dupla d e, ad duplam utriusq; simul a b, b e, cum quadrupla utriusq; simul c b, b d. Tota igitur o b ad e b, eam habet proportionem, quam tripla a b, cum sexcupla c b: & tripla d b, ad duplam utriusq; simul a b, b e, cum quarta utriusq; simul c b, b d. Et quia e d, d c, c a in eadem sunt proportione, & utraque simul, unaquæq; c b, b d, d b, b c, c b, b a, erit sicut e d ad d a, sic utraque simul e b, b d ad utramq; simul d b, b c, cum composita ex c b, b a. Igitur componendo sicut e a ad d a, sic utraque simul e b, b d, cum utraq; simul a b, b c, & utraq; simul c b, b d: quæ est utraque simul e b, b a, cum dupla utriusq; simul d b, b c, ad utramq; simul b d, d a, cum dupla b c. Quare & dupla ad duplam eandem habebunt proportionem: hoc est, sicut e a ad d a, sic dupla utriusq; simul e b, b a, cum quarta utriusque simul c b, b d, ad duplam utriusque simul a b, b d, cum quadrupla b c. quare & sicut e a ad tres quintas d a, sic composita ex dupla utriusque simul e b, b a, & quadrupla utriusq; simul c b, b d, ad tres quintas compositæ ex dupla utriusq; simul a b, b d, & quadrupla c b. Verum sicut e a ad tres quintas a d, sic e b ad f g. Sicut igitur e b ad f g, sic dupla utriusq; simul a b, b e, cum quadrupla utriusq; simul d b, b c, ad tres quintas compositæ ex dupla utriusq; simul a b, b d, cum quadrupla c b. Ostensum est autem, sicut o b ad e b, sic tripla utriusque simul a b, b d cum sexcupla c b, ad duplam utriusq; simul a b, b e, cum quarta utriusq; simul c b, b d. per æquam igitur sicut o b ad f g, sic composita ex tripla utriusq; simul a b, b d, & sexcupla c b, ad tres quintas compositæ ex dupla utriusq; simul a b, b d, & quadrupla c b. Verum composita ex tripla utriusque simul a b, b d, & sexcupla c b, ad compositam ex dupla utriusq; simul a b, b d, & quadrupla c b, proportionem habet quam tria ad duo. & ad tres quintas eiusdem, proportionem habet quam quinq; ad duo. Ostensum est autem, quod o a ad g h proportionem habet, quam quinq; ad duo. Tota igitur a b ad totam f h proportionē habet, quam quinq; ad duo. Quod si hoc uerum est, necesse quoq; est f h duas quintas ipsius a b esse. Quod fuerat demonstrandum.

10 CVIuslibet frusti à sectione rectanguli coni ablati, centrum grauitatis est in linea recta, quæ frusti existit diametros: qua in quinq; partes æquas diuisa, cētrum in quinta eius media existit, atq; in eo eius puncto quo ipsa quinta sic diuiditur, ut portio eius propinquior minori basi frusti ad reliquam eius portionem eam habeat proportionem, quam habet solidum, cuius basis sit quadratum lineæ illius quæ frusti basis maior extiterit. Altitudo uero istis utrisq; simul æqualis, lineæ quæ dupla sit minoris basis frusti, & basi maiori eiusdem, ad solidum quod basim habeat quadratum basis minoris frusti, altitudinem uero istis utrisq; simul æqualem lineæ quæ dupla sit maioris basis, & basi minori. Sint in sectione rectanguli coni duæ lineæ rectæ a c, d e: diametros a b c portionis esto b f. Constat quod a c, d e sunt æquedistantes ei lineæ, quæ per punctum b ducta, contingit ipsam sectionem: & diuisa e f in quinque partes æquas, esto quinta media h k. & h i ad i k eam habeat proportionem, quam solidum, quod basim habeat quadratum a f, altitudinem

titudinem uero æqualem istis utrisq; simul, duplæ d g, & ipsi a f, ad solidum cuius basis existat quadratum f g, altitudo uero æqualis istis utrisq; simul duplæ a f, & ipsi d g. Ostendēdum est, quod frusti a d c e, centrū grauitatis est punctum i. Esto itaq; m n æqualis ipsi f b, & n o æqualis b g: & sumatur ipsarum m n, n o media proportionalis m x, & quarta proportionalis n t. & sit sicut t m ad t n, ita f h ad quandam ab ipso i, quocunque proueniat in frusto punctum. Nihil enim refert siue inter f g, siue inter b g pūcta proueniat: quæ sit i r. Et quoniā in rectanguli coni sectione diametros portionis est f b, ipsa f b uel est principalis ipsius sectionis, uel ei diametro æquedistat. lineæ uero a f, d g in eam intentæ, sunt ductæ, cum sint æquedistantes ei lineæ quæ à puncto b ducta sectionem contingit. Si autem hoc fuerit, erit sicut a f ad d g potentia, sic f b ad b g longitudine: hoc est m n ad n x potentia. Sicut ergo a f ad d g potentia, sic m n ad n x potentia. Quare & longitudine sunt in eadem proportione. Sicut ergo cubus lineæ a f, ad cubum lineæ d g, sic cubus ipsius m n ad cubum n x. Verum sicut cubus a f ad cubum d g, sic portio b a c ad portionem d b e. Sicut autem cubus m n ad cubum n x, sic m n ad n t. Quare & diuidendo erit, sicut frusti a d, c e ad portionem d b e, sic m t ad t n: hoc est tres quintæ f g ad i r. Et quoniam solidum basim habens quadratū a f, altitudinē uero compositam ex dupla d g, & ex a f ad cubum a f, eam habet proportionem quam dupla d g, cum a f ad a f. Quare & sicut dupla n x, cum n m ad n m. Est autem sicut cubus a f ad cubum d g, sic m n ad n t. Sicut autem cubus d g ad solidum, basim habens quadratum d g, altitudinem uero compositam ex dupla a f, cum d g: sic d g ad compositam ex dupla a f & d g. Quare & sicut t n ad compositam ex dupla o n et t n. Sunt igitur quatuor magnitudines: solidum, quod basim habet quadratum a f, altitudinem uero compositam ex dupla d g & a f: & cubus a f, & cubus d g: & solidum basim habens quadratum d g, altitudinem uero compositam ex dupla a f, & d g, quæ quatuor magnitudinibus sunt proportionales, duabus simul sumptis compositæ ex dupla n x & m n, & alij magnitudini ipsi m n, & alij deinceps n t, & postremò compositæ ex dupla n o & t n. Per æquam igitur fiet, sicut solidum basim habēs quadratū a f, & altitudinem compositam ex dupla d g, & a f, ad solidum quod basim habeat quadratum d g, altitudinem uero compositam ex dupla a f: & d g eam habeat proportionem, quam composita ex dupla n x, & m n, ad compositam ex dupla n o, & n t. Verum sicut solidum dictum, ad solidum dictum, sic h i ad i k. Sicut ergo h i ad i k, sic composita ad compositam. Quare & componendo antecedentibus sequentia, erit igitur sicut f g ad i k, sic quincupla utriusque simul m n, n t, & decupla utriusque simul n x, n o, ad duplam n o & t n. Et sicut f g ad f k, quæ est duæ quintæ illius: sic quintupla utriusque simul m n, n t, & decupla utriusque simul n x, n o, ad duplam utriusque simul m n, n t, & quadruplam utriusq; simul n x, x o. Erit igitur sicut f g ad f i, sic quincupla utriusq; simul m n: n t, et decupla utriusq; simul x n, n o, ad cōpositā ex



dupla m n, & quadrupla n x, & sexcupla o n, & tripla n t. Quoniā igitur sunt quatuor lineæ rectæ consequenter proportionales, m n, n x, o n, n t: & est sicut n t ad t m, sic quædam sumpta, hoc est r i, ad tres quintas f g, hoc est m o. Sicut autem cō posita ex dupla m n, & quadrupla n x, & sexcupla o n, et tripla n t, ad compositam ex quincupla utriusque simul m n, n t, & decupla utriusꝗ simul x n, n o, sic altera quædam sumpta, hoc est i f ad f g, hoc est ad m o: erit per ea quæ prædicta sunt r f, duæ quintæ m n, hoc est f b. Quare centrum grauitatis portionis a b c erit r punctum. Esto iam d b e portionis centrum grauitatis q punctum. Frusti itaque a d c e, centrū grauitatis erit in linea q r recta, terminans lineam a b r eductam, quæ eādem habet ad illam proportionem, quam frustum ad residuam portionem. Est autem punctum i, centrum ipsum: quoniam ipsius f b tres quintæ est ipsa b r: ipsius uero b g tres quintæ est b q. Reliquæ ergo, hoc est g f, tres quintæ est q r. Quoniā igitur est sicut a d e c frustum ad b d e portionem, sic m t ad n t. Sicut autem m t ad n t, sic tres quintæ g f, quæ est q r, ad r i. Erit igitur & sicut frustum a d c e, ad portionem d b e, sic q r ad lineam quæ est inter centrum grauitatis a b c portionis, & centrum grauitatis frusti. Sed cētrum grauitatis a b c portionis, est r punctum, et centrum grauitatis portionis d b e est q. Constat igitur, frusti a d e c, punctum i esse centrum grauitatis.

FINIVNT INVENTA ARCHIMEDIS DE HIS quæ æquali pondere aptantur.

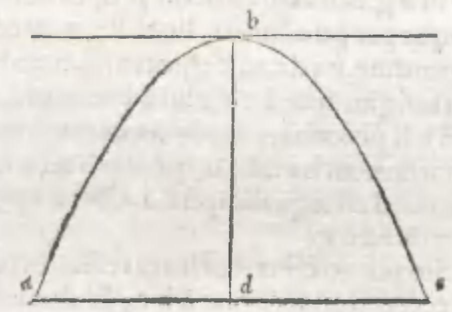
ARCHIMEDIS QVADRATVRA PARABOLAE, ID EST PORTIONIS CONTENTÆ À LINEA RECTA & SECTIONE RECTANGULI CONI.

ARCHIMEDES DOSITHEO RECTÈ AGERE.

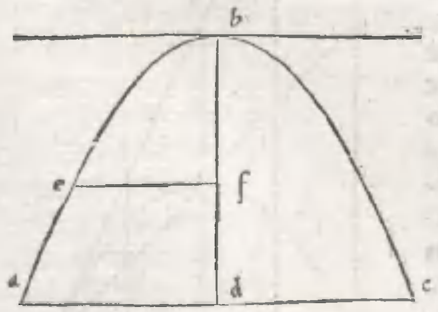
CVM audissem Cononem mortuum esse, qui nobis adhuc in amicitia residebat: tecꝫ hominem Cononis antea admodum familiarem extitisse, & in Geometria maximè uersatum, eius quidem uita priuati desiderio, & dolore maximo affecti sumus, cum esset homo, cum mei amantissimus, tū in speculationibus ingenio admirali, ac propè diuino. Tibi uero, ueluti antea Cononi scribere consueueramus sępissimè, præconati sumus inter cætera Geometricæ facultatis theoremata, hoc unum conscriptum mittere: quod cum antea tentatum esset à nullo, nuper à nobis inspectum, & depræhensum est: primò quidem Mechanica ratione perquisitū, postea uero Geometrica quoꝗ demonstratum. Eorum enim qui antehac Geometriæ operam dederunt, nōnulli id inuestigare, & memoriæ mandare studuerūt, circulo dato, uel circuli portione quacunꝗ, spacium rectilineum æquale illi posse inueniri. Itē spacium à coni totius rectanguli sectione compræhensum, & linea recta, ad quadrati formam & mensuram reducere conati sunt, sumentes non facilè concessibilia fundamenta ipsis, sanè cum hæc ipsa à quamplurimis non inuenta sint. Illud etiā diuul-

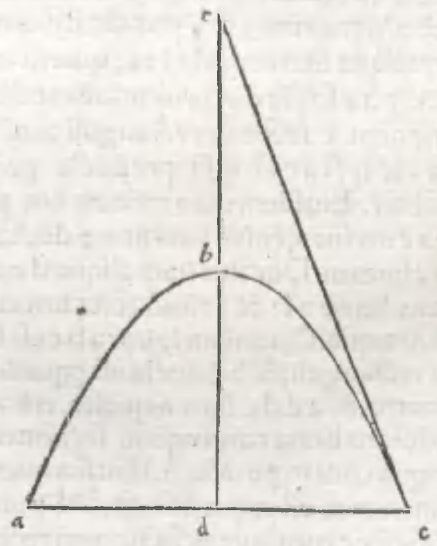
gatum, portionem à rectanguli coni sectione contentam ueterū neminem ingressum quadrare comperimus, quod nuper à nobis inuentum est. Hoc enim demonstratur, portionem omnem à recta linea & coni rectanguli sectione compræhensam, trianguli illius esse sesquitertiam, qui quidem triangulus basim habeat & altitudinem cum portione eandem. Hoc fundamento ad eius demonstrationem sumpto, spaciorum inæqualium excessus quibus minus à maiore superatur, sibi ipsis totiens coaceruari posse, ut quodcunꝗ spacium propositum quod sit finitum superent. Superiores quoque Geometræ hoc fundamento usi sunt: & circulos habere inter se proportionem diametrorum duplicatam, hoc demonstrauerunt, illo fundamento muniti. Item sphæras inter se proportionem suarum diametrorum habere triplicatam. Amplius, omnem pyramidem tertiam esse partem eius prismatis, quod eandem pyramidi basim & altitudinem æqualem habuerit. Item, omnem conum tertiam esse partem eius cylindri, qui basim cono eandem, & æqualem habuerit altitudinem. Similiter eodem fundamento prouecti, illa scripserunt, cum id accidat, eorum quæ prędicta sunt theorematum unumquodꝗ nihil minus sibi fidei comparare, quàm ea quæcunque sine eo fundamento sunt demonstrata. Nuper autem his quæ à nobis exposita sunt, in similem huius fundamenti fidem adductis, describentes igitur eius demonstrationes mittimus: primum quidem quo pacto per Mechanicas rationes inspecta fuerunt, deinde Geometricis argumentis demonstrata. Præmittuntur autem initio ea Conica elementa, quibus ad eorum demonstrationes maximè indigemus. Vale.

SI coni rectāguli sectio sit, in qua a b c, et linea b d recta sit, aut æquedistans diametro, aut ipsa diametros, & a c sit æquedistans lineæ contingenti in puncto b sectionē rectanguli coni: æqualis erit a d ipsi d c. Quod si a d est ipsi d c æqualis, æquedistantes erunt a c, & contingens sectionem coni in puncto b. 1



SI coni rectanguli sectio sit a b c, sitꝗ b d æquedistans diametro, aut ipsa diametros: linea uero a d c ęquedistans lineæ coni sectionem in puncto b contingenti: & linea e c sectionem coni in puncto c cōtingat: erunt b d, & b e æquales. 2

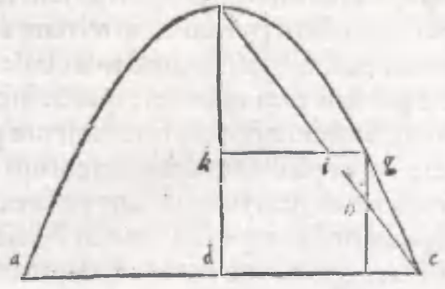


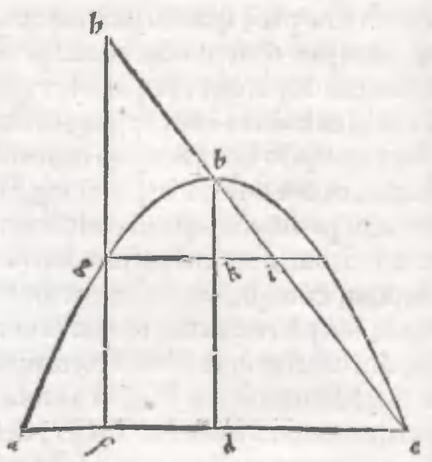


SI sectio rectanguli coni sit a b c, & b d, æquedistans diametro, aut ipsa diametros: & ducantur quædam æquedistantes illi, quæ in puncto b contingit se- 3
ctionem

ctionem, quæ sint a d, e f. Erit sicut b d ad b f longitudine, ita a d linea ad e f potentia. Hæc autem demonstrata sunt in Conicis elementis.

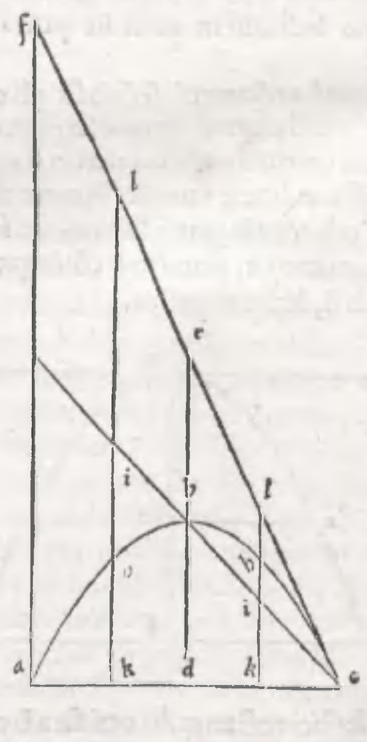
4 ESto portio compræhensa à coni rectanguli sectione, & linea recta a b c, & linea b d. à medio a c ducatur æquedistans diametro, aut ipsa diametros: & sit b c linea iūcta, et protracta. si iam ducatur alia quædam æquedistās ipsi b d, quæ sit f h, diuidens lineas rectas c b, a c: ducatur item alia æquedistans ipsi a c, secans lineam b d,





quæ sit k g: eandem habebit proportionem f h ad h g, quam d a ad d f. Ducta est namque per punctum i, linea k g æquedistans ipsi a c. Est igitur sicut b d ad b k longitudine, ita d c ad k g potentia. nam hoc demōstratum est. Erit igitur sicut b c ad b i longitudine, ita d c ad d f potentia. Aequales sunt enim d f, k g. & ideo sicut b c ad b h potentia: proportionales igitur sunt b c, b h, b i lineæ. Quare eam habet proportionem b c ad b h, quam c h ad h i. Est igitur, sicut c d ad d f, ita f h ad h g. Verum c d est æqualis ipsi d a. Cōstat igitur, d a eam ad d f habere proportionem, quam f h ad h g.

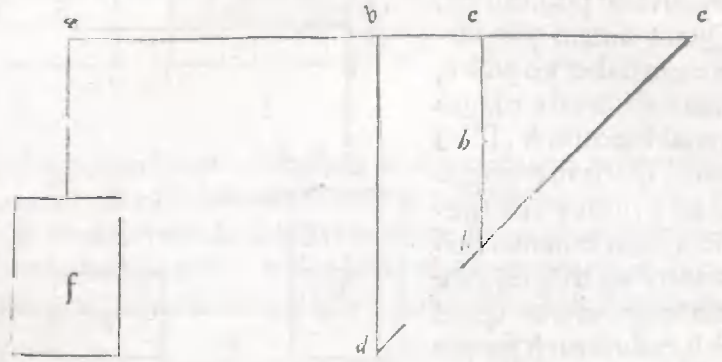
5 ESto portio cōtenta à linea recta, & coni rectanguli sectione a b c, & ducatur à puncto a, linea a f, æquedistans diametro. à puncto c ducatur contingens sectionem coni, cōcurrens cum a f, in puncto f. Si iam ducatur aliqua in triangulo f a c, quæ sit æquedistās ipsi a f: ipsa ducta secundū eandē proportionem à sectione rectanguli coni secabitur, & ipsa a c ab ipsa producta proportionaliter. Eiusdem uero rationis erit pars lineæ a c uersus a, cuius pars lineæ ductæ uersus a c lineam. Ducatur itaq; aliqua d e, æquedistans lineæ a f: & primò secet lineam a c in duo æqua. Quoniam igitur a b c est sectio coni rectanguli, & b d ducta est ęquedistans diametro, & a d d c sunt æquales, erit a c æquedistans lineæ contingenti sectionem rectanguli coni in puncto b. Rursus quoniam d e diametro est æquedistans, & à puncto c ducta est c e contingens sectionem rectanguli coni in puncto c, & linea a c æquedistans lineæ contingenti sectionem coni, erit e b æqualis b d, Quare eandem habet proportionem d a ad d c, quam d b ad b e. Siqui



dem

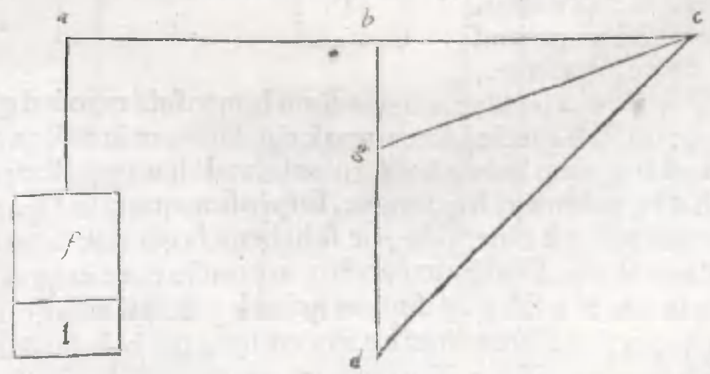
dē igitur linea ducta, per æqualia diuidat lineā a c, ostensum est. Sin nō per æqua diuidat, ducat̄ alia quędā k l, æquedistans ipsi a f. Ostendendū quod eandē habet proportionē a k ad k c, quam k h ad h l. Cū igitur b d, sit æqualis ipsi b e, æqualis erit & i l ipsi k i. Eandē ergo proportionē habet k i ad i l, quā d c ad d a. Habet aūt & k i ad i h, eam quā d a ad d k. nam hoc est prius ostēsum in præmissa. Quare eā habet k h ad h l, quam a k ad k c proportionem. Demōstratū est igitur propositū.

INtelligatur autem hoc primum, quod est in inspectione propositum, sitq; conspectum ad horizontem erectum, & lineæ a b: deinde pars quidem uersus d intelligatur infrà, pars autem uersus aliud suprà. Triangulus autem b d c sit rectangulus, habēs rectum angulum ad c, & b c latus ęquale dimidio libræ: ut sit linea a b lineæ b c æqualis. Suspendatur autē triangulus ex punctis b c, item suspendatur aliud spacium f ex altera parte libræ in puncto a. & spacium f suspensum in puncto a, æqueponderet ipsi triangulo b c d, sic 6



posito ut nunc est collocatum. Dico tunc f spacium trianguli b c d tertiam partem esse. Quoniam igitur suppositum est, libram æqueponderare, a c linea ipsi libræ assimilatur. Terminantur autem lineæ ad angulos rectos ex ipsa a c ductæ in plano, erecto super horizontē: & erūt perpendiculares super horizōtem. Diuidatur iam linea b c in puncto e, ita ut c e dupla sit ipsius e b: & ducatur k e æquedistans ipsi d b, & hæc in duo æqua diuidatur in puncto h. trianguli itaq; b a c centrum grauitatis est punctum h. nam hoc est ostensum in Mechanicis. Si igitur trianguli b d c suspensio, quæ est ad b c, soluatur, & ipse suspendatur ad punctum e, manet triangulus ut nunc se habet. Vnumquodq; enim suspensorū ex quo puncto constitutum manet, ita ut secundum lineam perpendicularem sit punctum suspensibilis, & centrum grauitatis suspensi. nam hoc quoque ostensum est. Quoniam igitur triangulus b d c eandem habet constitutionem ad libram, æqueponderabit similiter ipsi spacium f. Quoniam autem æqueponderat̄ f spacium suspensum in puncto a, & triangulus b d c in puncto e, constat quod mutuam inter se habent proportionem longitudinū: & est sicut a b ad b e, ita triangulus b d c ad spaciū f. sed a b tripla est ipsius b e, igitur triangulus b d c spacij f triplus existit. Manifestū quoq; est, quod si triangulus b d c spacij f triplus extiterit, ambo similiter cōstituta æqueponderabunt.

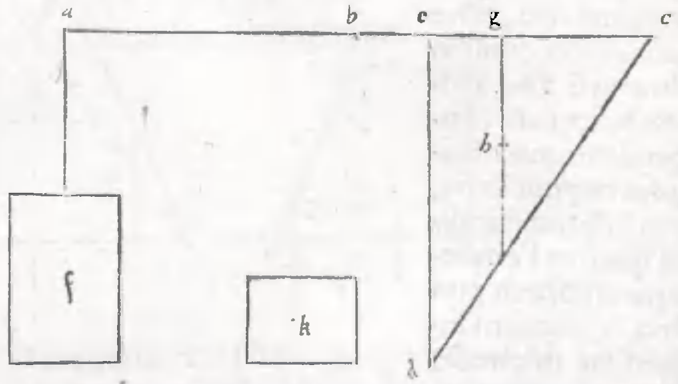
7 ESto itē libra linea a c, medium aūt eius sit b, & suspēdatur secūdum b triangulus c d g: triangulus uero c d g sit triangulus ambligoni-



t us,

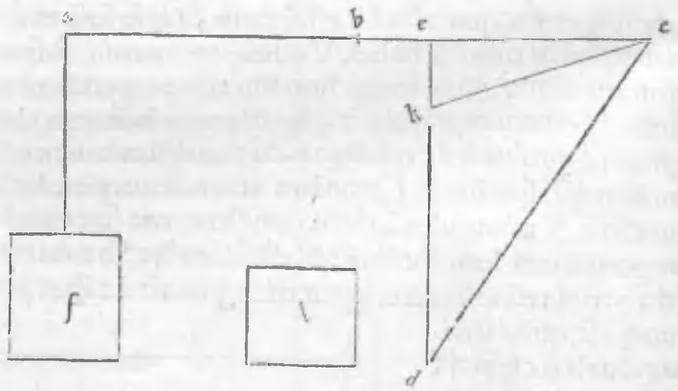
us, qui baſim habeat lineā d g, altitudinē uero ęqualem dimidiæ libræ, & ſuſpendat d c g triāgulus ex b c pūctis. ſpaciū uero f ſuſpenſum ad a, æqueponderās eſto ipſi c d g triangulo, ſic ſe habenti uti nunc poſitū eſt. Similiter oſtēdetur ſpacium f eſſe tertiam partem trianguli c d g. ſuſpendatur autem & quoddam aliud ſpaciū ex a, quod ſit tertia pars trianguli b c g. triangulus itaq; b d c æqueponderabit ſpacio f l. Cum itaq; b c g triangulus æqueponderet ipſi l, & b c d ipſi f l, & trianguli b c d tertia pars eſt f l, manifeſtum eſt triangulum c d g ſpacij f triplum haberi.

8 ESto libra a c, medium eius b: & ſuſpendatur ſecundū b triangulus c d e rectangulus, qui rectū angulum habeat ad e, & ſuſpendatur ex libra ſecundum c e, & ſpacium f ſuſpendatur ex a, & æqueponderato ipſi c d e triangulo, ſic ſe habente ſicut nūc poſitum eſt.



Quam autem proportionem habet a b ad b e, eam habeat c d e triāgulus ad ſpacium k. Dico iam, f ſpacium triangulo c d e minus eſſe, ſpacio autem k maius. Sumatur itaq; triāguli c d e centrū grauitatis quod ſit h, et ducatur h g ęque diſtans d e. Quoniam igitur triangulus c d e æqueponderat ſpacio f, eandem proportionem habet ſpacium c d e ad ſpacium f, quam a b ad b g. Quare f minus eſt c d e. & quoniam c d e triangulus ad ſpacium f, eam proportionem habet, quam b a ad b g: ad k uero eam quam b a ad b e: conſtat triāgulum c d e maiorem proportionē habere ad k, quàm ad f quare f ſpacium ipſo k maius exiſtit.

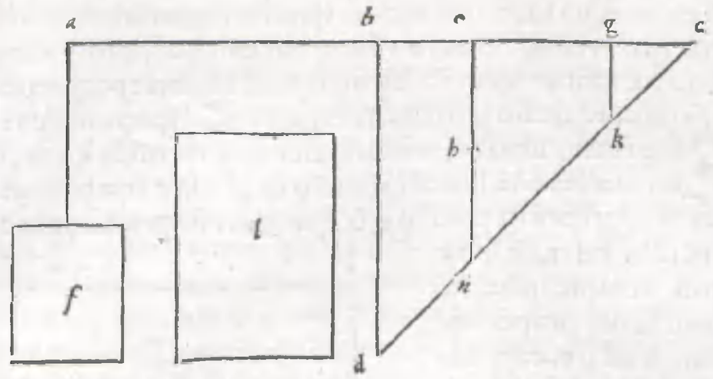
9 ESto item libra a c, & medium eius b, & c d k triangulus ambligonius, qui baſim habeat d k, altitudinem uero e c, & ſuſpendatur ex libra in punctis c e. Spaciū uero f ſuſpendatur, & æqueponderato d e k triangulo, ſic ſe habēti ſicuti nūc iacet.



Quam aūt proportionem habet a b ad b e, eam habeat c d k triangulus ad ſpacium l. Dico iam ſpacium f, ipſo l maius eſſe, et ipſo d c k minus. Hoc ſimiliter præmiſſo demonſtrabitur.

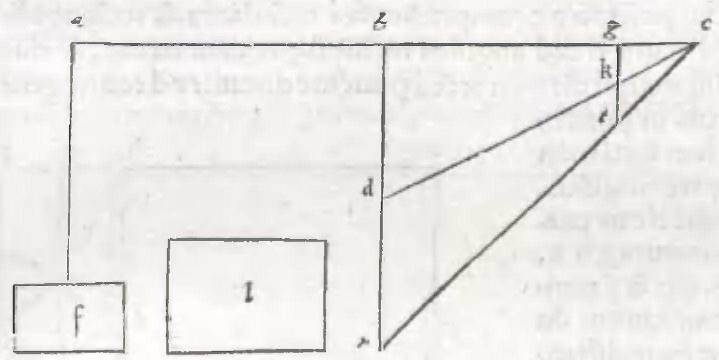
10 ESto item a b c libra, eius medium b, menſula uero b d g k habeat angulos ad puncta b g rectos, latus uero k d inclinatum in c: & quam habet proportionē b a ad b g, eam habeat b d k g menſula ad l ſpacium. Suſpenſa autem ſic menſula b d k g ex libra in b g punctis, ſuſpenſum quoq; ſit f ſpacium in a, & æqueponderato ipſi b d k g menſulæ, ſic ſe habenti ſicut nunc iacet: dico iam f ſpacium ipſo l minus eſſe. Diuidatur itaq; b g, in puncto e, ita ut quam proportionem habet dupla d b, & ipſa k g ad duplam ipſius k g, & ipſam b d, eam habeat e g ad b e: & ducta per punctum e, linea e n æquediſtans ipſi b d, diuidatur in duo æqua in pūcto h. iam menſulæ b d k g centrum grauitatis eſt h. nam hoc oſtenſum eſt in Mechanicis.

chanicis. Si igitur b d k g in e ſuſpendatur, à punctis autem b g ſoluatur, manet eandem habens conſiſtentiam, per eandē quæ in ſuperioribus rationem, & æqueponderabit ſpacio f.



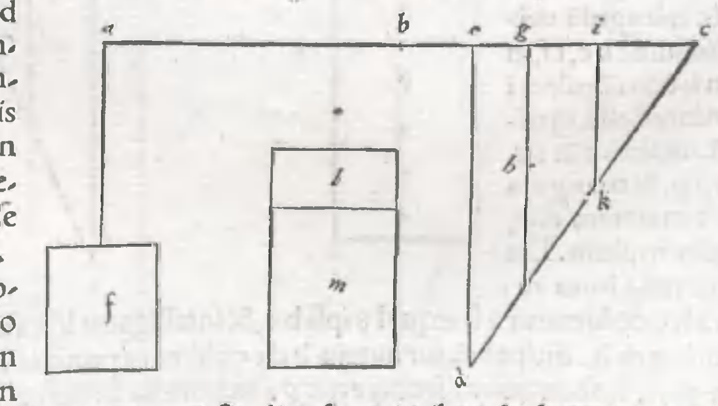
Quoniam igitur mēſula b d k g in e ſuſpēſa ęqueponderat ſpacio f in a ſuſpenſo, erit ſicut b a ad b e, ita menſula b d k g ad ſpacium f. Maiorem igitur proportiōem habet menſula b d k g ad ſpacium f, quàm ad ſpacium l, cum a b habeat ad b e maiorem proportionem, quàm ad b g. Quare ſequitur f ſpacium eſſe ipſo l ſpacio minus.

ESto item a b c libra, & medium eius b, & b d t r menſula ſit quæ habeat latera k d, t r uerſus c inclinata: latera uero d r, k t ſuper b c perpendicularia, & d r cadat in b. Quam autem proportionem habet a b ad b g, eam habeat k d t r menſula ad l ſpaciū: mēſula uero k d r t ſuſpendatur ex libra in punctis b g, & ſpacium f in puncto a, et æqueponderato ſpacium f mēſulæ k d t r, ſic ſe habenti uti nūc iacet. 11



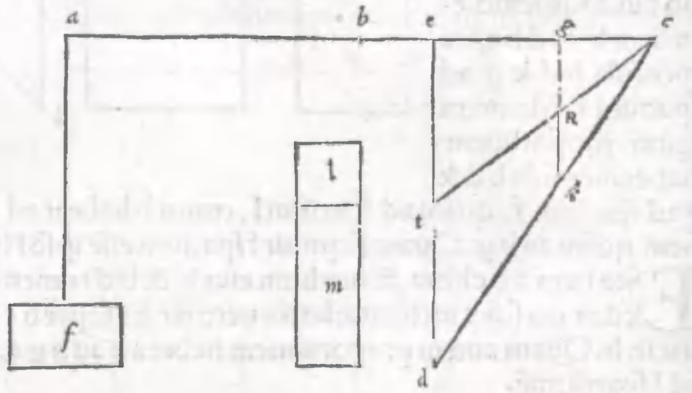
Similiter iam ſuperiorib. oſtendetur, ſpacium f ſpacio l minus eſſe.

ESto item libra a b c, medium eius b, & menſula d e k g ſit, quæ angulos ad e g puncta rectos habeat: lineas uero k d, e g uerſus c inclinatas. et quam proportionem habet a b ad b g, eam habeat d e k g menſula ad m. Quā autem habet a b ad b e, eam habeat d e k g menſula ad l. menſula uero d e k g ſuſpenſa ſit in libra ex punctis e g: ſpaciū uero f ſuſpendatur ex a, æqueponderans ipſi menſulæ, ſic ſe habenti uti nunc iacet. 12

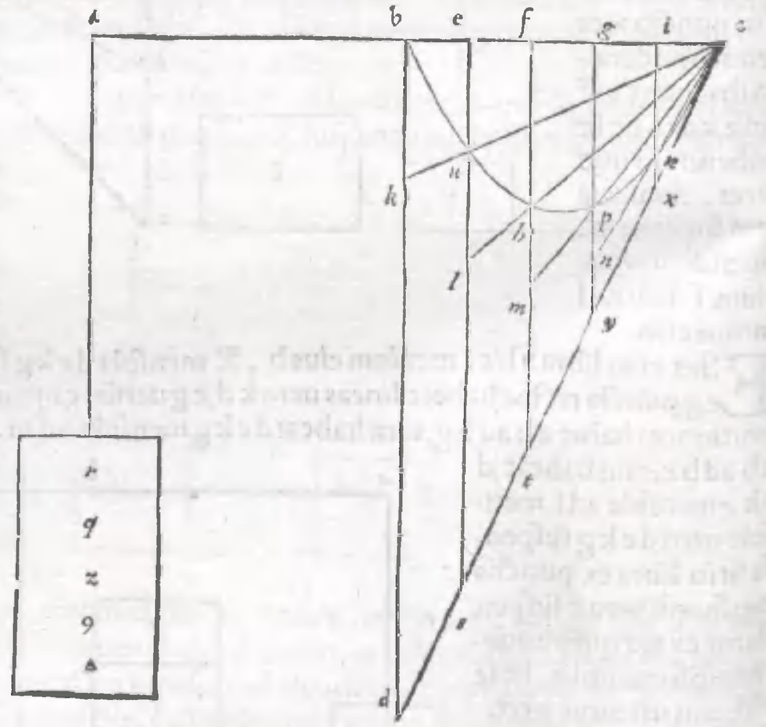


Dico iam ſpacium f ipſo l maius eſſe, ipſo uero m minus. Sumam enim centrum grauitatis menſulæ d e k g, quod ſit h. Sumetur autem ſimiliter ſuperioribus: & ducatur h i ęque distans ipsi d e. Si igitur mensula ex libra suspendatur in puncto i, & soluatur à punctis e g, manet eandem habens consistentiam, & æqueponderabit ipsi l spacio eadem qua superius ratione: quoniam mensula suspensa in puncto i, ęquepõderat spacio f suspenso in a. eãdem habebit proportionẽ mensula ad spaciũ f, quã a b ad b i. Cõstat igitur d e k g maiorẽ ad l habere proportionem, quàm ad f: ad m uero minorẽ quàm ad f. Quare f spaciũ ipso l spacio maius est, ipso uero m minus.

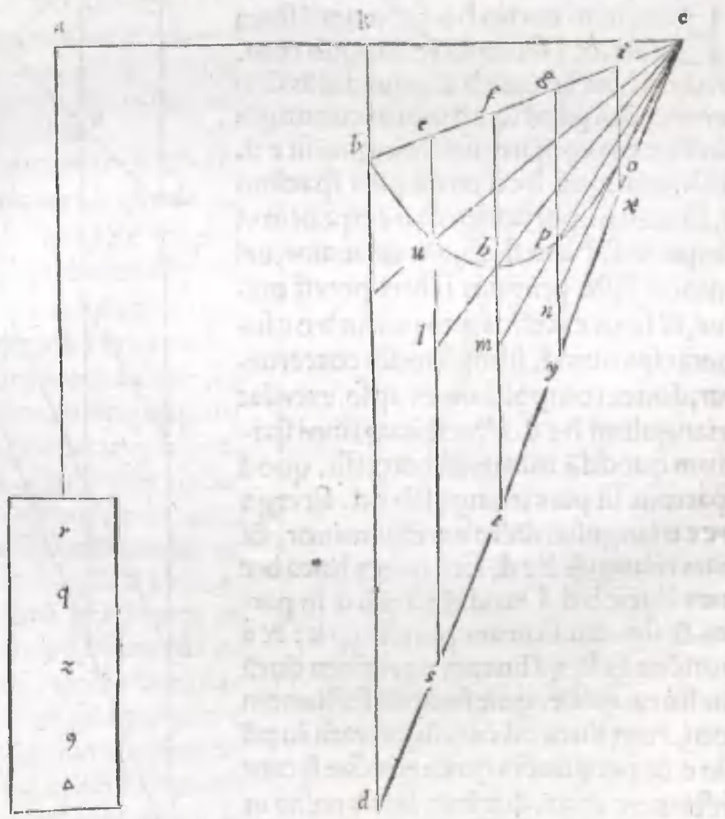
13 ESto rursus libra a c, medium eius b, & mensula k d t r, ita ut latera eius k d t r sint uersus c inclinata: ipsa uero d t, k r sint ad a b perpendicularia. Suspensa autem sit ex libra in puncto e, & spacium f suspendatur in a, & æquepõderato ipsi mẽsulæ k d t r, sic se habenti, ut nunc habet. & quam habet proportionem a b ad b e, eam habeat d t k r, ad spacium l. Quã uero habet a b ad b g, eam habeat mensula ad spacium m. Similiter, ut suprà proximè ostẽdetur, f spaciũ ipso l spacio esse maius, ipso m uero minus.



14 ESto portio b o c compræhensa à recta linea, & rectanguli coni sectione. Esto primum b c ad angulos rectos super diametrum, & ducatur à puncto b æquedistans ipsi diametro: & à puncto c ducatur c d contingens sectionem rectanguli coni in puncto c. erit iam b c d triangulus rectangulus. Diuidatũ b c in partes quotcunq;, b e, e f, f g, g i: & à punctis diuisionum ducantur æquedistantes diametro e s, f t, g y, i x. à punctis autem, quibus ipsę secant sectionem coni, educãtur & iungantẽ ad c. Dico itẽ, b d c triangulũ mẽsulis quidẽ k e, l f, m g, n i, & triãgulo x i c minorẽ esse, q̃ triplũ. mẽsulis aũt f u, g h, i p, & triangulo i o c maiorem esse, quàm triplum. Ducatur itaq; linea recta a b c, & sumatur a b æqualis ipsi b c, & intelligatur libra a c, cuius medium b, et pendeat ex b. Suspendatur autem b d c ex libra in punctis b c: ex altera autem libræ parte suspendantur spacia r q z 9 Δ in puncto a: & spacium r æqueponderet mensulæ d e, sic se habenti ut nunc iacet: spacium uero q mensulæ f s: spacium z mensulæ

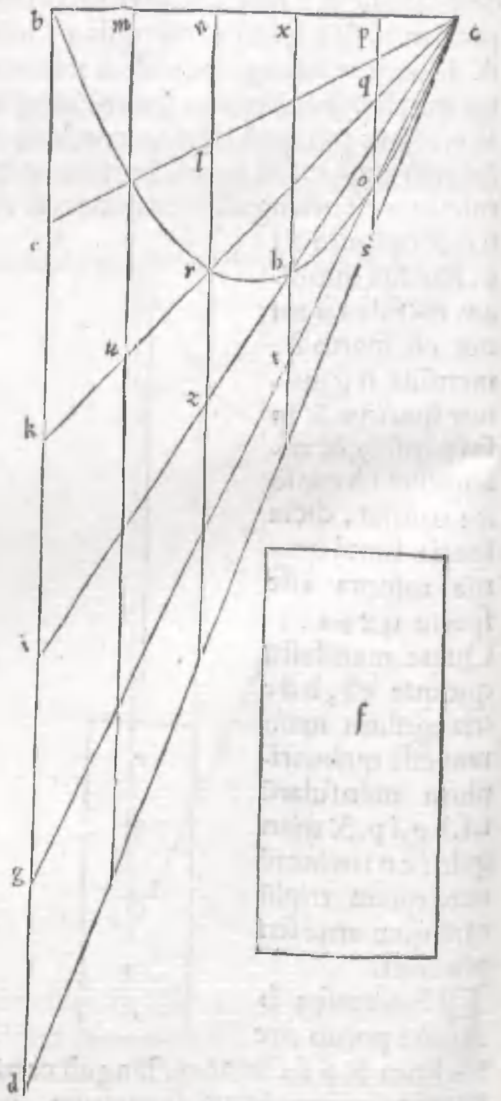


mensulæ t g: ipsum 9 mensulæ x i: ipsum uero Δ triangulo c i x: æqueponderabit iam totũ toti. Quare triangulus b d c, triplus erit spacio r q z 9 Δ. Et quoniã est portio b c o, quæ compræhenditur à recta & sectione rectanguli coni, & à puncto b, ducta est b d æquedistans diametro: & à puncto c ducta c d, contingens sectionẽ coni in puncto c: ducta quoq; alia æquedistãs diametro f e, eandem habebit proportionem b c ad b e, quam s e ad e u. Quare b a ad b e, eam habet quam mensula d e ad k e. Similiter ostenditur, a b ad b f eam habere proportionem, quam s f mensula ad l f, ad b g autem eam quam t g ad m g. ad lineam uero b i, eam quam y i ad n i. Quoniam igitur mensula d e habet angulos ad puncta b e rectos, latera uero uersus c inclinata: æqueponderat autem ipsi quoddam spacium r, suspensum ex libra in puncto a, mensula sic manẽte uti nunc posita est: & est sicut b a ad b e, sic mẽsula d e ad spacium k e. [sicut autem b a ad b f, ita mensula d e ad spacium q. Spacium igitur q spacio r maius est. nam hoc ostẽsum est.] quare spacium k e maius est spacio r. nam hoc ostensum est. Rursus mensula f s, quæ angulos ad f e puncta rectos habet, & latus s t inclinatum uersus c, & æqueponderat ei spacium q ex libra suspensum in puncto a, mensula sic manente uti nunc iacet: & est sicut b a ad b e, sic f s mensula ad f u. Sicut autem a b ad b f, ita f s mensula ad l f. Quare q spacium mensula l f minus existit, ipsa uero f u maius. Hoc enim ostẽsum est. Eadem ratione & z spacium, mensula quidem m g minus: ipsa uero h g maius esse probatur. & 9 spacium mensula n i minus, ipsa uero p i maius. Similiter autem & d spacium triangulo quidem x i c minus, ipso uero c i o maius. Quoniam igitur mensula k e est maior spacio r, & ipsa l f maior ipso q, & m g ipso r: & n i ipso 9, & x i c triangulus ipso Δ: constat quod omnia simul dicta spacia maiora sunt spacio r q z 9 Δ. Est autem spacium r q z 9 Δ tertia pars trianguli b c d. Quare manifestum est, trianguluũ b c d minorem esse quàm triplum mensularum k e, l f, m g, n i, & triãgulo x i c. Rursus quoniam mẽsula f u minor est spacio q, mensula h g minor spacio z, & ipsa i p ipso 9, & triangulus i o c ipso Δ: constat, dicta spacia simul omnia minora esse spacio q z 9 Δ. Quare manifestũ quoque est, b d c triangulum maiorem esse quàm triplum mensularũ u f, h g, i p, & triangulo i c o: minorẽ uero quàm triplũ earũ quæ ante scriptæ sunt.



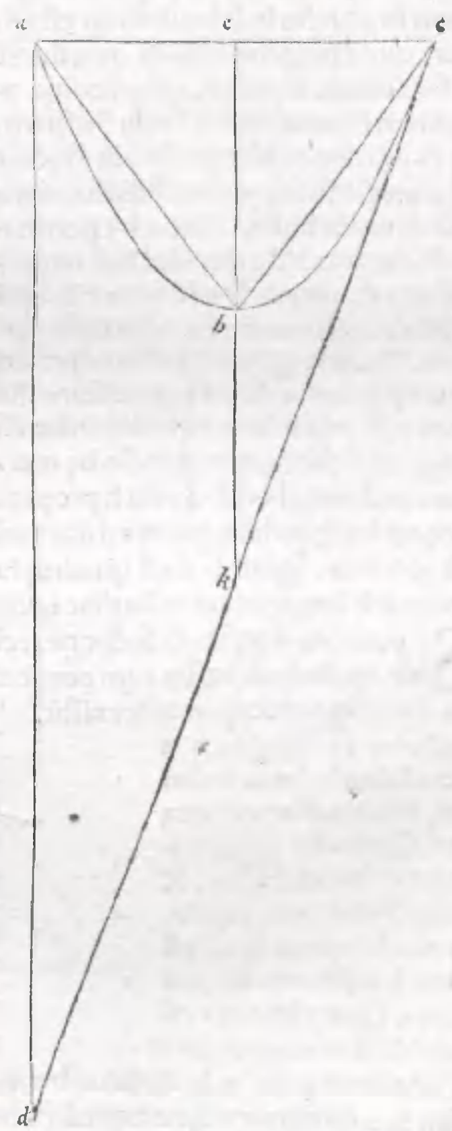
15 ESto rursus b o c portio à recta linea & à sectione rectanguli coni compræhensa, & b c linea non sit ad angulos rectos super diametrum, necesse iam est lineam à puncto b du-

ctam, æquedistantem diametro uersus portionem facere angulum obtusum in parte uersus b, aut uersus c, & intra sectionis portionem, aut extra. Esto itaque quod faciat angulum extra obtusum uersus b, & ducatur b d æquedistans diametro à puncto b: & à puncto c ducatur c d contingens sectionem in puncto c, & diuidatur b c in partes æquas quotcunq; b e, e f, f g, g i, i c. à punctis uero e f g i ducantur e s, f t, g y, i x diametro æquedistantes, & à punctis quibus ipsæ secant sectionem coni iungantur lineæ ad c, & extrahantur. Dico iam & nunc triangulum b d c esse mensulis ξ u, l f, m g, n i, & triangulo c i x esse minorem quàm triplum: mensulis uero f u, g h, i p, & triangulo c o i maiorem esse quàm triplum. Extrahatur d b in alteram partem, & à puncto c ducatur ad ipsam c k perpendicularis: & protendatur, donec sumatur a k æqualis ipsi c k. Intelligatur rursus libra a c, cuius medium k, & pendeat libra ex k puncto: & c k d triangulus suspēdatur ex media libra in pũctis k c, sic se habens ut nũc iacet. Ex altera parte libræ suspēdantur in puncto a, spacia r q z 9 Δ: & r quidē mensulæ d e æqueponderet, sic manenti uti nunc posita est: & spacium q mensulæ f s, spacium z mensulæ t g: & ipsũ 9 ipsi y i. & ipsum Δ ipsi c i x triangulo, æqueponderabit quoq; totum toti. Quare triangulus d b c triplus existit spatio r q z 9 Δ. similiter superiori proximo ostendetur, mēsulam e z spacio r esse maiorem, & mensulam l f maiorem spacio q, & f u minorem: & mensulam m g maiorem spacio z, ipsam uero g h minorem. & n i maiorem spacio 9, & ipsam p i minorē. & x i c triangulum spacio Δ maiorem, ipsum c i o minorem eodem. Quare constat propositum.



16 ESto item portio b o c cōtenta à linea recta, & à sectione rectanguli coni, et ducat per b linea b d æquedistās diametro, & à puncto c ducatur contingēs sectionem coni in puncto c, quæ sit c d. Esto trianguli b c d tertia pars spacium f. Dico iam, portionem b o c æqualem esse spacio f. Nam si nō, erit uel maior, uel minor. Esto primum si fieri potest maior, & sit ut excessus quo portio b o c superat spacium f, sibijpsi totiēs coaceruetur, donec compositum ex ipso excedat triangulum b c d. Potest itaq; sumi spacium quoddã minus illo excessu, quod spacium sit pars trianguli b c d. sit ergo b e c triangulus dicto excessu minor, & pars trianguli b c d. Erit quoq; linea b e pars lineæ b d. Diuidat itaq; b d in partes. & sint diuisionum puncta g i k: & à punctis g i k, ad lineam c e rectam ducãtur lineæ rectæ, quæ secabũt sectionem coni, cum linea c d contingat eam in pũcto c. & per puncta quibus rectæ secant sectionem coni, ducãtur lineæ rectæ m u, n r, x h, p s æquedistantes diametro. erunt eædem æquedistantes quoque ipsi

b d. Quoniã igitur triangulus b e c est minor excessu, quo portio b o c excedit spacium f. Constat utraq; simul, spacium f, et triangulum b e c, minora esse portione: & triãgulo b c e æquales sunt mensulæ illæ per quas sectio coni permeat, quę sunt m e, u l, h r, h o cum triangulo c o s. nam mensula m e est communis: m l autem est æqualis u l, & l x æqualis ipsi h r, & q x æqualis ipsi h o, & triangulus c q p æqualis triangulo c o s. Spacium igitur f minus est mensulis m l, x r, p h, cũ triangulo p o c: & est triangulus b c d triplus spacij f. Quare b c d minor est, quàm triplus mensularum m l, r x, h p cum triangulo p o c, quod quidem esse non potest. nam ostensus est maior esse, quàm triplus. non est igitur portio maior spacio f. Dico item eam neq; esse minorem illo. Esto enim, si esse potest, minor. Rursus excessus quo spacium f superat portionem b o c, ipse sibijpsi totiēs coaceruetur, donec superet triangulum b c d. Potest itaq; spaciũ aliquod sumi quod sit minus excessu, quodque sit pars trianguli b c d, & reliqua eadem disponantur ut prius. Quoniam igit triangulus b c e minor est excessu quo spacium f superat portionem b o c, triangulus b e c, & portio b o c, utraq; simul sunt minora spacio f. Est autem & ipsum f spacium minus quadrilateris e m, u n, z x, p t, & triangulo c p s. nam b c d triangulus spacij f est triplus: spaciorum autem prædictorum minor, quàm triplus, ut in pręmisso est ostensum. Igitur triangulus b c e, & portio b o c, simul sunt minora quadrilateris e m, u n, z x, p t, & triangulo c p s. Quare portione inde ablata, quę communis est, triangulus b c e minor erit ipsis spacijs comprætensis, quod esse non potest. nam ostensum est, triangulum b c e mensulis e m, u l, h r, h o, & triangulo c o s esse æqualem, quæ simul sunt maiora dictis spacijs comprætensis. Non est igitur portio b o c minor spacio f: & ostensum est eo maiorem esse nō posse. Portio ergo spacio erit æqualis.

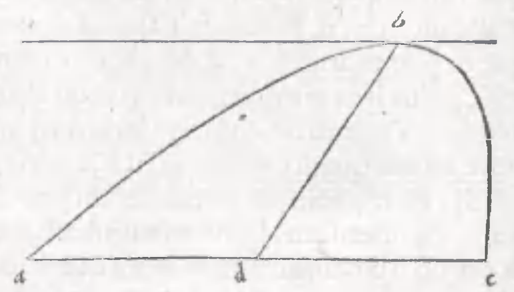


17 HOc autem demōstrato, manifestũ est, portionē à recta linea et à sectione rectanguli coni comprætensam, esse sesquitertiam triangulo, qui habeat basim cũ portione eandem, & altitudinem eidem æqualem. Esto portio comprehensa à linea recta, & sectione rectanguli coni: uertex eius esto punctum h, & inscribatur ei triangulus b h c, qui basim habeat cum portione eandem, & altitudinem æqualem. Quoniam igitur punctum h est uertex portionis, linea recta à puncto h ducta æquedistans diametro in duo æqua diuidit lineam b c, & b c est æquedistans lineæ cōtingenti portionem in puncto h. Ducatur autem e h diametro æquedistans: ducatur item à puncto b æquedistans diametro quæ sit b d, & à puncto c ducatur contingens sectionem in puncto c, quæ sit c d. Quoniam igitur e h k linea est diametro æquedistans, & c d contingens sectionem in puncto c, & linea b e c est æquedistans lineæ contingenti sectionem in pũ-

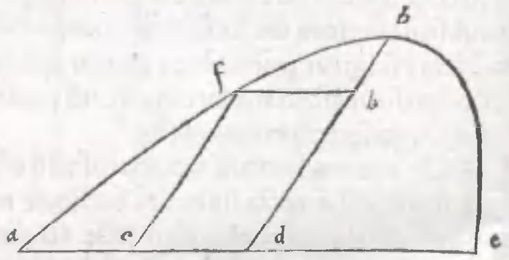
ćto h, erit triangulus b c d quadruplus triangulo b h c. Cum igitur triãgulus b c d ſit quadruplus triangulo b h c, & triplus portioni, manifeſtum eſt portionẽ b h c triangulo b h c ſeſquitertiam eſſe.

Earum portionum quæ continentur à curua, & à recta linea, baſim uoco ipſam rectam: altitudinem uero maximam perpendicularem, quę à curua linea ad baſim portionis aptata ſit: uerticem autem, punctum illud à quo perpendicularis maxima ad baſim ducitur.

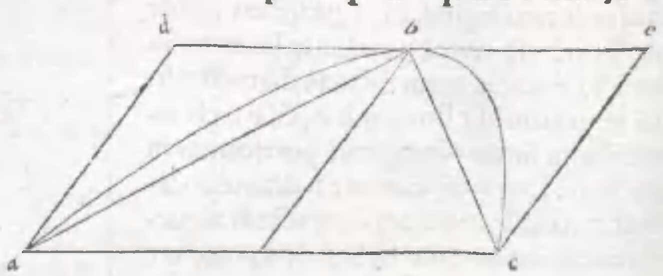
18 SI in portione quæ compræhenſa ſit à linea recta, & à coni rectanguli ſectione, à media baſi ducatur recta diametro æquediſtans, punctum illud in quo dicta æquediſtans diametro ſecat coni ſectionem, eſt uertex ſectionis. Eſto a b c portio compræhenſa à linea recta, & à ſectione rectanguli coni, & à medio a c ducat̃ d b diametro æquediſtans. Quoniã igitur in rectanguli coni ſectione ducta eſt b d diametro æquediſtans, erit a d æqualis ipſi d c. Conſtat a c ęque diſtãtem eſſe lineæ contingenti ſectionem in puncto b. Manifeſtum eſt igitur, quod perpendicularis quæ ducet̃ à ſectione ad lineã a c, erit maxima omnium illa quę à puncto ducta fuerit. Punctum igitur b portionis uertex exiſtit.



19 IN portione à linea recta, & à rectanguli coni cõpræhenſa ſectione linea ducta à media baſe, æquediſtãs diametro, eſt ſeſquitertia lineæ ductæ ſimiliter à dimidia dimidiæ baſis. Eſto a b c portio contenta à recta, & à ſectione coni rectanguli: & ducatur b d à dimidia baſi æquediſtans diametro, & e f ducatur à dimidia a d: ducatur item f h æquediſtãs ipſi a c. Quoniã igitur in ſectione rectanguli coni ducta eſt b d ęquediſtans diametro, & a d f h ſunt æquediſtantes cõtingenti ſectionem in puncto b, conſtat eandem habere b d ad b h proportionem longitudine, quam a d linea ad f h potentia. Igitur b d eſt quadrupla ipſius b h longitudine. Conſtat igitur b d ipſius e f eſſe ſeſquitertiã longitudine.

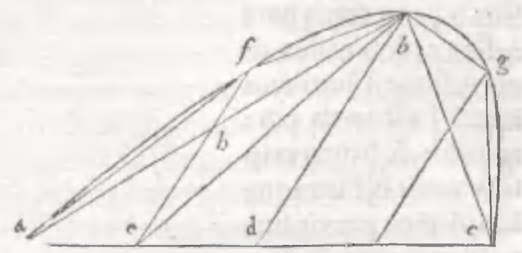


20 SI portioni à recta, & ſectione rectanguli coni contentæ triangulus inſcribatur, qui habeat baſim cum portione eandem, & altitudinem eandem, triangulus dimidio portionis maior exiſtit. Eſto itaq; a b c portio qualis dicitur, & inſcribatur ei triangulus a b c, eãdem habens baſim toti, & altitudinem æqualem. Quoniam igitur triangulus habet baſim, & altitudinem cum portione eandem, neceſſe eſt pũctum b uerticem eſſe portionis. Quare linea a c eſt æquediſtans contingenti ſectionem in puncto b. ducatur b e, per punctum b æquediſtans ipſi a c. & à punctis a & c, ducantur a d, c e æquediſtantes diametro. cadent iam ipſæ extra portionem. Quoniam igitur triangulus a b c eſt dimidium figuræ a d e c æquediſtantium

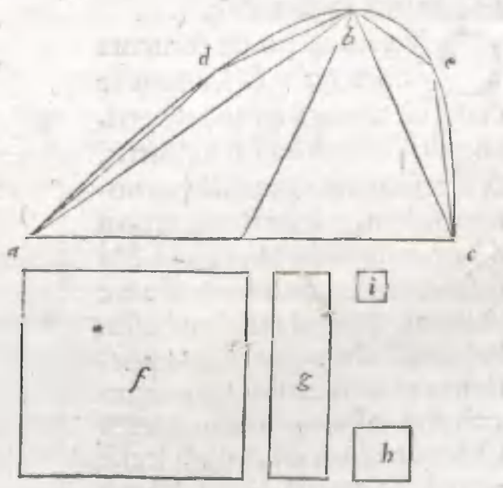


um laterum, conſtat ipſum plus quàm dimidium eſſe portionis. Hoc demonſtrato manifeſtum eſt, poſſe figuram multorum angulorũ inſcribi portioni, ita ut portiones reſiduæ ſint quocunq; ſpacio dato minores. nã continue plus dimidio ablato ex hoc conſtabit, quod diminuentes hoc modo tandem faciemus portiones reſiduas quocunq; ſpacio propoſito minores.

SI in portione à recta, & à ſectione rectanguli coni contenta, triangulus inſcri- 21
batur, eandem baſim cum portione, & eandem altitudinẽ habens: item in portionibus reſiduis alij trianguli inſcribantur, eandem & baſim & altitudinem cum portionibus habentes: utriuſq; trianguli in reſiduis portionibus inſcripti, octuplus eſt triangulus ille qui in tota portione deſcriptus exiſtit. Eſto a b c portio qualis dicitur, & diuidatur a c puncto d, & ducatur b d diametro æquediſtans. punctum ergo b erit uertex portionis, & triangulus a b c eandem baſim habet cum portione, et altitudinẽ eandem. Diuidatur item in duo ęqua a d puncto e, & ducatur e f ęquediſtãs diametro: diuidatur autem a b puncto h. pũctum igitur f, erit uertex portionis a f b: & triangulus a f b, eandem & baſim & altitudinem cum portione a f b habebit. Oſtendendum eſt, triangulum a b c, octuplum eſſe trianguli a f b. Eſt itaq; b d ſeſquitertia lineæ f e, & dupla ipſius e h. Quare e h, dupla eſt ipſius h f. Quare a e h triãgulus, duplus eſt a f h: & ideo æqualis triangulo a f b: & triangulus a b d quadruplus eſt triangulo a h c, igitur & trianguli a f b. Quare totus triangulus a b c, erit trianguli a f b octuplus. Similiter oſtendetur octuplus eſſe triangulo in b g c portione deſcripti.

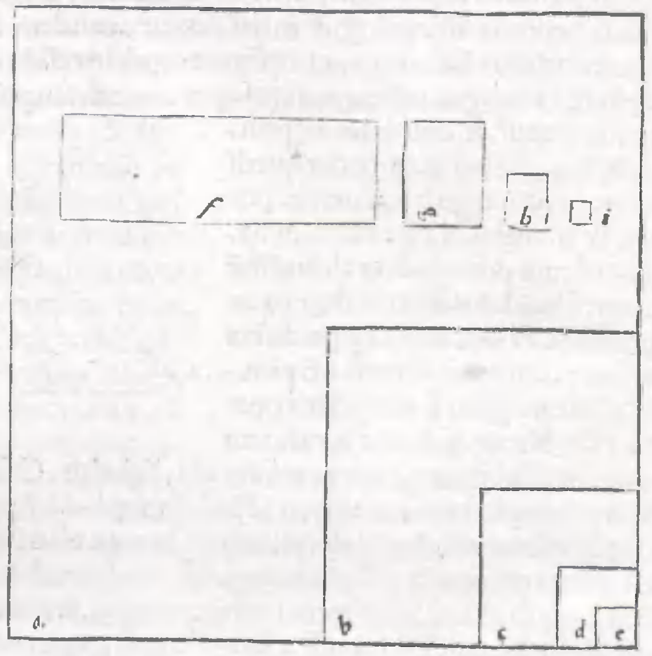


SI ſit portio à recta & à ſectione rectanguli coni comprębenſa, & ſpacia quotcũ 22
que ponantur conſequenter in quadrupla proportione: ſit autem horum ſpaciorum maximum æquale triangulo, qui baſim habeat, & altitudinem cum portione eandem: ſpacia hæc ſimul omnia ſunt ipſa portione minora. Eſto itaq; portio a b e c, à recta & ſectione rectanguli coni compræhenſa. Sunto itẽ ſpacia quotcunq; numero continenter poſita, f g h i: & ſit præcedens quadruplũ ſequentis. Eſto autem eorum maximũ f, & eſto f æquale triangulo habenti baſim, & altitudinem cum portione eandem. Dico a d b e c portionem, ſpacijs f g h i, ſimul omnib. eſſe maiorem. Eſto totius quidem portionis uertex b, & reſiduarum portionum uertices d, e. Quoniam igitur triangulus a b c, eſt octuplus utriuſq; trianguli a b d, b e c: Conſtat quod utriuſq; ſimul quadruplus exiſtit. Et quoniam a b c triangulus æqualis eſt ſpacio f, eadem ratione & trianguli a d b, b e c ſunt ſimul æquales ſpacio g. Similiter oſtendetur, triangulos deinceps reliquis portionibus inſcriptos, eãdem baſim & altitudinem cum portionibus habẽtes, æquales eſſe ſpacio h, & triangulos portionibus deinde reſiduis inſcriptos æquales eſſe ſpacio i. Spa

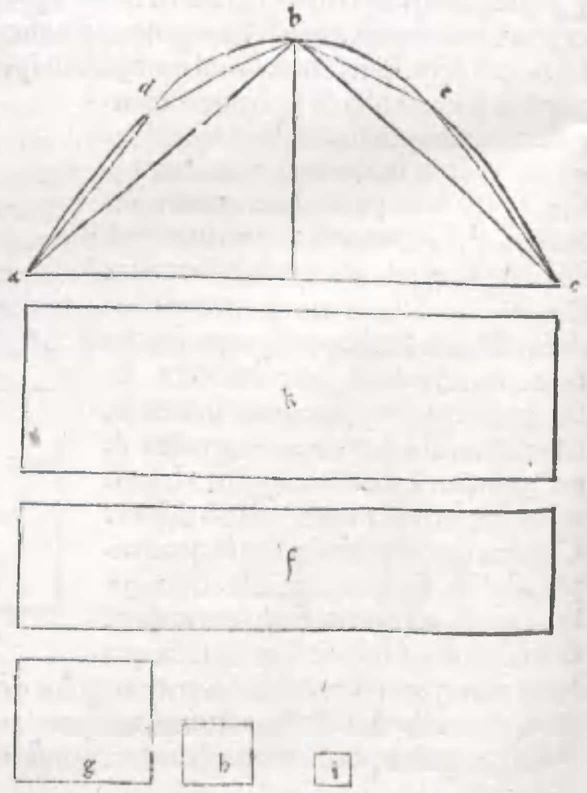


cia igitur propoſita ſimul omnia, ſunt æqualia figuræ cuidam multorum angulorum portioni inſcriptæ. Quare ipſa portione conſtat eſſe minora.

23 SI magnitudines quotcunq; conſequenter in proportione quadrupla diſponãtur, hæ magnitudines ſimul omnes cum tertia parte minimæ illarum, ſunt ſeſquitertiæ magnitudini illarum maximæ. Sunto itaq; quotcunq; magnitudines continenter poſitæ, unaquæq; præcedens, quadrupla proximæ ſequentis a b c d e: & ſit earum maxima a. Sit autē f tertia pars ipſius b, et g tertia pars ipſius c, & h ipſius d, et i ipſius e. Quoniam igitur f eſt tertia pars ipſius b, & b quarta ipſius a, erit b f utraque ſimul tertia pars ipſius a. & eadem ratiōe c g, tertia ipſius b, et h d ipſius c, & i e ipſius d: & iam ſimul omnia b c d e f g h i, tertia pars cōpoſitæ ex omnibus ſimul a b c d e. Sunt autem f g h tertia pars ipſarum b c d. Quare & residuū b c d e i, erit reſidui, hoc eſt ipſius a tertia pars. Conſtat igitur ea ſimul omnia a b c d e, cū ipſo i tertia ipſius e, eſſe ipſius a ſeſquitertia: quare, &c.



24 QVæcunq; portio contenta à linea recta, & ſectione rectanguli coni, eſt ſeſquitertia trianguli illius qui baſim habuerit, & altitudinem cum ipſa portione eandem. Eſto itaq; portio a d b e c compræhenſa à recta, & à ſectione rectanguli coni: & a b c ſit triangulus qui eandem baſim habeat, & altitudinem cum portione eandem: ipſius uero trianguli eſto k ſpacium ſeſquitertiū. Oſtendendum eſt, ipſum k eſſe æquale portioni a d b e c. Nam ſi non, erit aut maius, aut minus eadē. Eſto prius, ſi eſſe poteſt, portio a d b e c maior ipſo k ſpacio: inſcribam iam triangulos a d b, & b e c, uti ſupradictum fuit. Et



item in reſiduis portionibus inſcribam alios triangulos eandem baſim, & altitudinem cum portionibus eandem habentes: & ſimiliter in reſiduis portionibus inſcribam duos triangulos, baſim & altitudinem cum portionibus eandem habentes, donec reſiduæ portiones ſint tandem minores exceſſu, quo portio a d b e c excedit ſpacium k. Quare figura multiangula ipſi portioni inſcripta, maior erit ſpacio k, quod eſſe non poteſt. Cum ſint quædam ſpacia in proportione quadrupla diſpoſita, quorum primum eſt triãgulus a b c, quadruplus triãgulis a d b, & b e c: deinde ipſi trianguli ſunt quadrupli triangulis, qui in portionibus ſequentibus ſunt deſcripti, & reliqui identidem. Quare conſtat omnia ſimul triangulorū ſpacia minus quàm ſeſquitertia eſſe triangulo a b c, maximi eorum: & poſitum eſt, k ſpacium eſſe ſeſquitertiū eidē maximo. Non erit igitur portio a d b e c maior k ſpacio. Eſto item ſi eſſe poteſt, minor eodem. Ponatur autem triangulus a b c æqualis ſpacio f, & ſit g quarta pars ipſius f, et ſit h quarta pars ipſius g: & cōtinuæ ſemper ponantur conſequenter ita, donec ultimum ſumptum ſit minus exceſſu quo ſpacium k excedit portionem, & ſit ipſum minus i ſpacium. ſunt iam f g h i ſpacia ſimul cum tertia parte ipſius i, ſeſquitertia ipſius f. Eſt autem & k ſpacium ſeſquitertium ipſius f. quare ſpacium k erit æquale ſpacijs f g h i ſimul, cum tertia parte i. Cum igitur ſpacium k excedit ſpacia f g h i minori quantitate quàm ſit i, portionem uero excedit maiori quàm ſit idem i, colligitur ſpacia f g h i ſimul maiora eſſe portione: quod eſſe non poteſt. Oſtenſum namq; eſt, quod ſi ſint ſpacia quotcunq; in quadrupla proportione conſequenter poſita, & maximum eorum æquale fuerit triangulo portioni inſcripto, ſpacia illa ſimul omnia eſſe minora portione. Non eſt igitur a d b e c portio minor ſpacio k. Oſtenſum quoq; eſt, eam non poſſe ipſo eſſe maiorem. Quare eidem æqualem eſſe neceſſe eſt. At uero ſpaciū k ſeſquitertium exiſtit trianguli a b c, portio igitur a d b e c, eiuſdem trianguli a b c ſequitertia exiſtet.

FINIVNT ARCHIMEDIS INVENTA DE QVAdratura Parabolæ, hoc eſt portionis contentæ à linea recta, & ſectione rectanguli coni.

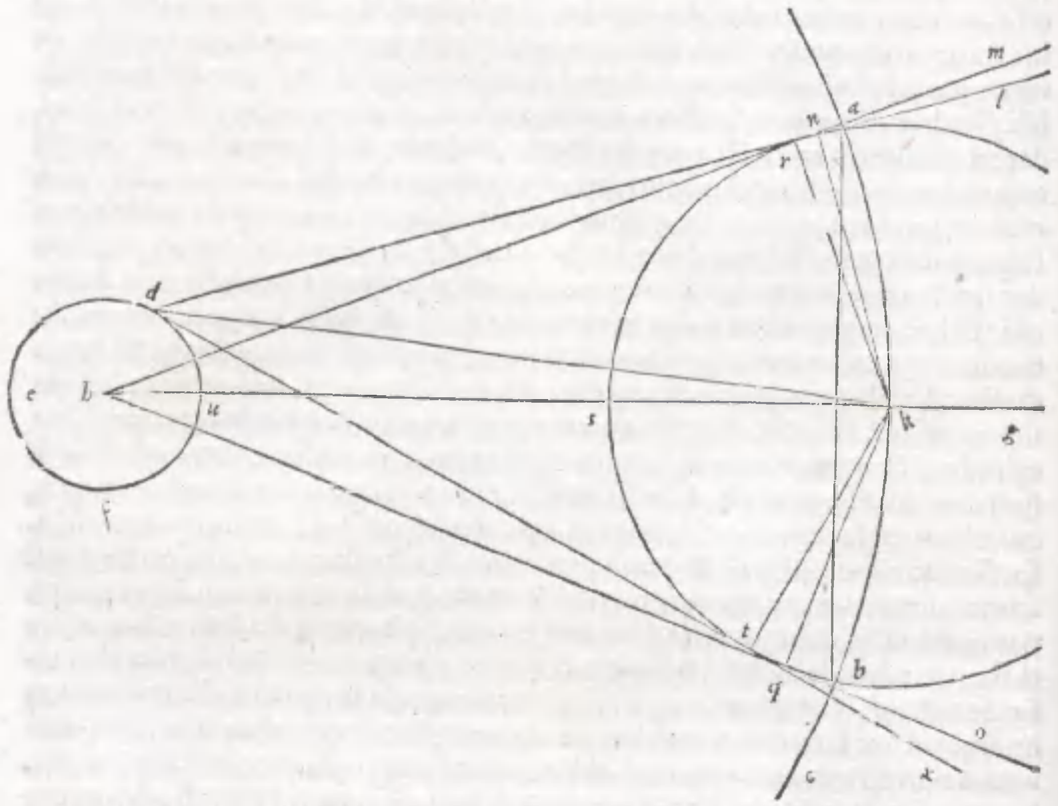
ARCHIMEDIS TRACTATVS
DE ARENAE NVMERO.

EXISTIMANT quidam, rex Gelon, arenam eſſe multitudine infinitam. Ego autem dico, non eam ſolum quæ circa Syracuſas, & circa reliquã Siciliam exiſtit, uerumetiã illam quę in uniuerſa habitabili ſimul et inhabitabili regione ubiq; cōtinetur, certo quodam numero comprehenſam eſſe. Nonnulli uero infinitam eam minime opinantur: nullum autem tantum excogitari poſſe numerū credūt, quē illius multitudo nō ſuperet. Igitur qui hac opinione ducuntur, ſi eiuſmodi cumulum arenæ concepiſſent, qualis eſſet ſi uniuerſe terræ tumor repleto mari, & omnibus canalibus uſque ad cuiuſq; altiſſimi montis uerticem arena collectus haberetur, huius quoq; tanti alter præterea multiplex excogitaretur, eos minimè dubiū eſt ſenſuros fore, huiuſmodi cumuli multitudinem nullo prorſus numero poſſe contineri. Ego autem hoc declarare experiar demonſtrationibus Geometricis, quib. te aſſenſurū minimè dubitarim, quod ex illis qui

à nobis expreſſi, & in his quæ ad Zeuxippũ ſcripſimus, expoſiti ſunt numeri, nõ
nulli excellunt non ſolum arenę magnitudinem quæ fuerit tumori terræ ęqualis,
quæ quidem terra uti diximus ubiq; repleta fuiſſet: uerum quæ toti mundo par-
haberetur. Non autem te fugit, quod mundus à quàm plurimis Aſtrologis appel
letur ſphæra, cuius centrum eſt centrum terræ: quæ uero ex centro linea æqua eſt
lineæ rectæ quæ à centro ſolis ad centrum terræ ſit ducta. Hæc itaq; quæ apud A-
ſtrologos conſcripta inueniuntur, refutãs & cõmutans Ariſtarchus Samius ſup-
poſitionibus quibuſdam, ſcripta quædam tradidit, in quibus id perſpicitur, ex
his quæ illic ſuppoſita ſunt, euenire mundum, dicto nuper mundo eſſe multipli-
cem. Nam apud eum ſupponitur ſtellas, quæ non errant, & ſolem immobilẽ per-
manere, terram uero circa ſolem ferri in circuli circumferẽtia, qui eſt in medio cur-
ſu ſitus. Sphæram uero ſtellarum fixarum circa idem centrum cum ſole ſitam eſſe:
ea uero magnitudine haberi, ut circulus circa quem poſitum eſt terram ferri, eam
habeat proportionem ad ſtellarum fixarum diſtãtiam, quam habet centrum ſphę-
ræ ad circumferentiam. Hoc utiq; conſtat, eſſe non poſſe. Nam cum ſphæræ cen-
trum nullam habeat magnitudinem, non utiq; ullam habere poſſe ad ſuperficiẽ
ſphæræ proportionem, eſt opinandum. Oſtendendum eſt autem, Ariſtarchum
hoc intellexiſſe & ſenſiſſe. Quoniam itaq; opinantur terram ueluti circa centrum
mundi conſtitutam quam proportionem habet terra ad mundum à nobis dictũ,
eam habere ſphæram in qua circulus exiſtit, in cuius circumferentia ſupponitur,
terram ferri ad ſphæram ſtellarum fixarum. Nam demonſtrationes eorum quæ
apparent, id quod ſic ſuppoſitum eſt accõmodat, & maxime apparet magnitudo
ſphęræ, in qua ponit terram moueri, æqualiter ſupponi ei qui à nobis dicitur mũ
dus. Dicimus utiq;, ſi fieret ſphęra ex arena, quæ tanta eſſet quantam Ariſtarchus
ſphæram ſtellarum fixarum ſupponit eſſe, etiã ſic quaſdam haberi, & oſtendi poſ
ſe ex his quæ in principijs habentur numerorum denominationibus, quæ hanc
ipſam arenam multitudine ſuperarent, quæ magnitudinem dictæ ſphæræ habe-
ret æqualem his quæ dicam ſuppoſitis. Primum quidem ambitum terræ eſſe ue-
luti ter mille milia ſtadiorum, uel etiam maiorem, cum tu quoq; illis aſſentias, qui
experientia oſtenderunt eum eſſe trecentorum milium ſtadiorum. Ego autem ex
uberans, & ponens terræ magnitudinẽ decuplã eius quam ſuperiores poſuerũt,
& opinati ſunt, ambitum eius pono eſſe ter mille milia ſtadiorum. Poſt hoc, dia-
metrum terræ maiorem eſſe diametro lunæ, & diametrum ſolis maiorem eſſe dia
metro terræ, ſimiliter eadem ſumens quæ plurimi ſuperiorum Aſtrologorum po
ſuerunt. Poſt hoc, diametrum ſolis eſſe triceſies diametrum lunæ, & magis. & à
prioribus aſtrologis, ab Eudoxo quidem uti nonuplum, Phidia uero uti duodecu
plum: ab Ariſtarcho, qui demõſtrare conatus eſt diametrum ſolis diametro lunæ
maiorem eſſe, quàm octo et decies ipſam: minorem uero quàm uigeſies eandem.
Ego autem & hunc excedens, ut ſuppoſitum cum oſtenſum fuerit ſit minime am
biguum, ſuppono diametrum lunæ ueluti trigeſies tantum quantum nunc poni
tur, uel etiam maiorem. Ad hæc quoq; diametrum ſolis maiorem eſſe latere figu-
ræ mille angulorum, inſcriptæ maximo circulo mundi. Hoc autem ſuppono, cũ
Ariſtarchus dicat ſolem uideri eſſe uigeſimãſeptimam partẽ circuli zodiaci. Ipſe
enim hoc modo perſcrutatus, conatus eſt inſtrumentis depræhendere angulum
cui ſol aptatur, qui uerticem habeat in oculo. Simile uero non facile eſt ſumere,
cum neq; uiſus, neq; manus, neq; inſtrumenta, per quæ experiri oportet, ſatis ha-
beant fidei ad declarandum id quod certum eſt. De his autem in pręſentiarũ non
expedit diſceptare: alioquin cum hæc ſæpe ſuum errorem declarent. Sufficit au-
tem mihi ad propoſitum demonſtrandum, angulum ſumere, qui maior ſit angu-
lo illo cui ſol accommodatur, qui uerticem habeat in uiſu. Et item alterum ſumere
angulum, qui non ſit minor eo cui ſol accommodatur, quiq; uerticem habeat in
eam

eam partem in quam uiſus. Poſita igitur longa regula ſuper planum erectum, in
loco unde ſol oriri debet, & ſol aſpici poſſit, deinde cylindro per tornum facto, &
longo poſito ſuper canonem erecte illico poſt ortum ſolis, deinde procedente ip-
ſo uerſus horizontem & poſſit contra ſolem inſpicere, uertatur canon in ſolem, et
uiſus conſtitutus ſit in extremo regulæ, & cylindrus in medio poſitus ſolis & ui-
ſus, ita ut occultetur ſol uiſui, ſeparans autem cylindrum à uiſu donec incipiat ex
utraq; parte cylindri ſolis extremũ quid & minimũ lymbi inſpicere: cõſtituatur il-
lic cylindrus. Siquidem ſimiliter contingit uiſum ab uno puncto inſpicere, & ui-
dere ductis lineis rectis ab extremo regulæ, ubi uiſus in inſpiciendo fuerat conſti
tutus quæ contingant cylindrum, angulus, compræhenſus à lineis ductis maior
eſt uno quodã ex his angulis, quibus ſol accõmodatur, qui uerticem habeat in ui
ſu propterea, quod ſol utriq; ex cylindro uidetur. Quoniã uero uiſus nõ à pũcto ui-
det, ſed à magnitudine quadã, ſumatur magnitudo quædã uolubilis non minor
uiſu, & hac magnitudine poſita in extremo regulę ubi uiſus fuerat cõſtitutus, du
cantur lineæ rectæ contingentes magnitudinẽ & cylindrũ: angulus itaq; à lineis
ductis cõpræhenſus minor eſt angulo cui ſol accõmodatur, qui uerticem habeat
uerſus uiſum. Magnitudo uero quæ nõ ſit minor uiſu, hoc modo reperitur. Duo
cylindruli ſumantur leues, terſi, æque craſſi inter ſe, unus albus, alter non: & ſic di
ſponãtur ad uiſum, ut albus à uiſu remotior ſit: nõ albus iuxta uiſum proximus,
ita ut attingat faciem. Siquidem igitur cylindruli leuiſſimi & terſiſſimi fuerint, a-
ſpectu proximus uiſui ab ipſo uiſu præteritur, & albus conſpicitur: ſiquidem ipſi
admodum terſi, et qui iuxta eſt fuerit omnino leuior. ſin autem non ſupra modũ,
partes quædã uidebũtur cylindruli albi, ex utraq; parte cylindruli ad uiſum admo
ti. Sumptis deinde his ipſis cylindris, & poſitis, ita ut craſſitudine alterius alter ui-
ſui occultetur, & ampliori loco. Tanta igitur magnitudo, quanta eſt craſſitudo cy
lindrulorũ hoc facientium maxime quodam modo eſt non minor uiſu. Angulus
autem non eſt minor angulo cui ſol accommodatur, qui uerticem habet in uiſu,
Sic ergo ſumatur, & remoto per regulam ab ipſo uiſu, ita ut à cylindro ſol occulte
tur totus, & ducantur lineæ rectæ ab extremo regulæ, ubi uiſus eſt conſtitutus, cõ
tingentes cylindrum, angulus ab ipſis ductis compræhenſus non eſt minor an-
gulo cui ſol accommodatur, qui uerticem habet in uiſu. Iſtis angulis ſic ſumptis,
dimetiatur angulus rectus, & fiat puncto & aculeo, ut angulo recto in centum &
ſexagintaquatuor partes diuiſo, unus angulus qui ſit minor quàm una pars illa-
rum: & ipſe angulus minor factus ſit recto angulo diuiſo in ducentas partes,
maior una illarum partium. Conſtat igitur, quod angulus cui ſol accommoda-
tur, qui uerticem habet in uiſu minor eſt, quàm una pars recti diuiſi in centum
quatuor & ſexaginta partes: minor autẽ angulo ſolis dicto eſt maior, quàm una
pars anguli recti diuiſi in ducentas partes. Conſtat item quod angulus cui ſol ac-
cõmodatur, qui uerticem habet in uiſu, minor eſt quàm una pars anguli recti di-
uiſi in centum quatuor & ſexaginta partes, maior autem quàm una pars recti di-
uiſi in ducentas partes. Iſtis autem ſic conceſſis, ex quibus ſequitur ſolis diametrũ
latere figuræ maiorem eſſe, quæ figura mille angulis conſtet, atq; inſcripta ſit cir-
culo qui in mundo maximus habetur. Intelligatur planum per centrum terræ e-
ductum, & per centrum uiſus minimo ſolis, uel fere illico cum ſol ſuper horizon-
tem ſteterit. Diuidat autem planum eductum mundum ſecũdum circulum a b c,
terram uero ſecundum d e f, & ſolem ſecundum ſ g circulum. ſit autem centrum
terræ h, & ſolis centrum k, & centrum uiſus d. Et ducantur lineæ rectæ contingen
tes circulũ ſ g à puncto d, quæ ſint d l, d x, & contingant in punctis n & t. & à pun
cto h ducantur h m, h o cõtingentes eundem in pũctis q & r. Circulum uero a b c
diuidant lineæ h m, h o, in punctis a & b. Eſt itaq; o k maior quàm d k, cum ſol po
natur ſuper horizontem eſſe. Quare angulus contentus lineis d l, d x, maior exi-
u 3 ſtet

ſtet angulo contento lineis h n, h o. Angulus autem contentus lineis d l, d x, maior eſt quàm ducenteſima pars anguli recti, minor uero quàm una pars anguli recti diuiſi in centum quatuor & ſexaginta partes. Huic autem angulo æqualis eſt an-



gulus cui ſol accommodatur, qui uerticem habet in uiſu. Quare angulus contentus lineis h m, h o, minor eſt quàm una pars anguli recti, diuiſi in centum quatuor & ſexaginta partes: linea uero a b recta, minor eſt quàm linea quæ ſubtēditur uni portioni circumſerentiæ circuli a b n, diuiſę in ſexcentas ſex & quinquaginta partes. ambitus uero dictæ figuræ multorum angulorum, ad ſemidiametrum circuli a b c, minorem habet proportionem, quàm quatuor & quadraginta ad ſeptem: propterea quod cuiuſcunque figuræ multorum angulorum circulo inſcriptæ, ambitus habet ad ſemidiametrum proportionem minorem, quàm quatuor & quadraginta ad ſeptem. Noſti enim à nobis demonſtratum eſſe, cuiuſcunq; circuli circumferentiam maiorem eſſe, quàm triplam ſeſquioctauam diametri: minorem uero, quàm triplam ſeſquiſeptimam eiuſdem. Minorem uero habet proportionem b h ad h k, quàm undecim ad mille centum octo & quadraginta. Quare linea b a minor eſt, quàm centeſima pars lineæ h k. Ipſi uero b a æquatur diametros circuli e g. quoniam eius dimidia u a eſt æqualis k r, cum h k ſit æqualis ipſi h a, cum ſint perpendiculares ductæ ab eiſdem angulis iunctæ. Cōſtat igitur, diametrum circuli a b c minorem eſſe quàm centeſimam partē lineæ h k. & e h y angulus minor eſt diametro circuli a b g, cum d e f circulus ſit minor circulo e g. Minores igitur utræq; erunt h y, k ſ lineæ, ꝙ centeſima pars lineæ h k. Quare h k ad y ſ minorem habet proportionem, quàm centum ad nouem & nonaginta. Et quoniam linea h k y minor eſt quàm h r, & linea ſ y minor linea d c: minorem igitur proportionem habebit h r ad d e, quàm centum ad nouem & nonaginta. Cū uero h k r, d k t trianguli ſint rectanguli, latera k r. k t æqualia erūt: lineæ uero h r, d t inæquales: & angulus maior contentus lineis d t, d k, ad angulum contentum lineis

lineis h r, h k, maiorem habet proportionem, quàm h k ad d k: minorem uero, ꝙ h r ad d t. Si enim ſint duo trianguli rectanguli, & altera duorum laterum cōtinentia angulum rectum ſint æqualia, altera uero inequalia, maior angulus ex his qui erunt apud latera inæqualia, ad minorem habet maiorem proportionem, quàm maior linea ſubtenſa angulo recto ad minorem ſubtentū: & habet minorē, quàm maior linea earum quæ circa angulos rectos ſunt ad minorem. Quare angulus cōtentus lineis d l, d x, ad angulum contentum lineis h n, h m, minorē habet proportionem, quàm h r ad d t: quæ minorem habet proportionem, quàm centū ad nouem & nonaginta. Quare angulus contentus d l, d x lineis, ad angulum contentū lineis h m, h o, minorē proportionem habet quàm centum ad nouem & nonaginta. Et quoniam angulus contentus lineis d l, d x, eſt maior quàm ducenteſima pars recti, erit & angulus contentus lineis h m, h o maior quàm nouem & nonaginta partes anguli recti diuiſi in uigintimilia partiū. Quare maior eſt quàm una pars anguli recti diuiſi in ducentas partes & tertia. Igitur b a maior eſt, quàm ſubtenta uni portioni circumferentiæ circuli a b c, diuiſæ in partes quadringētas duodecim: ipſi uero a b æqualis eſt ſolis diametros. Conſtat igitur, diametrum ſolis maiorem eſſe latere figuræ, quæ ſit mille angulis conſtituta.

Iſtis ſuppoſitis demonſtratur & iſta, uidelicet diametrum mundi minorem eſſe diametro terræ, quàm decies milies. Item diametrū mundi minorem eſſe, quàm decies miles decem milia centies ſtadiorum. Quoniam igitur ſuppoſitum eſt, diametrum ſolis minorem eſſe diametro lunæ, quàm triceſies, & diametrū terræ maiorem eſſe diametro lunæ: conſtat diametrū ſolis minorem eſſe diametro terræ, ꝙ triceſies. Rurſus autem, quoniam oſtenſum eſt, diametrum ſolis maiorem eſſe latere figuræ quæ mille angulis conſtet, maximo mundi circulo inſcriptæ: conſtat ambitum dictę mille angulorum figuræ diametrum ſolis minus quàm milies cōtinere. Solis autem diametros diametrum terræ minus quàm triceſies continet. Quare ambitus figuræ mille angulorum, diametrum terræ minus quàm triceſies milies continebit. Diametro uero mundi maior eſt quàm triplus. Nam oſtenſum eſt, diametrum cuiuſcunq; circuli minorem eſſe tertia parte ambitus cuiuſcunq; figuræ multorum angulorum circulo inſcriptæ, quæ plus quàm ſex lateribus conſtet: cum hexagono inſcripto in circulo, diametros circuli eſt tertia pars ambitus ipſius hexagoni, erit ut diametros mundi diametrū terræ contineat minus decies milies. Quod aūt diametros mundi minor ſit decies milies decem milibus centies ſtadiorum, hinc cōſtat. Quoniam enim ſupponitur, ambitum terræ maiorem eſſe quàm trecentorum decem milium ſtadiorum, & ambitus terræ maior eſt diametro quàm tripla, propterea quod cuiuſcunq; circuli circumferentia eſt plus quàm tripla diametro, conſtat diametrū terræ minorem eſſe quàm centies decē milia ſtadiorum. Quoniam autem diametros mundi diametrum terræ minus continet, quàm decies milies: conſtat diametrum mundi minorem eſſe quàm decies decem milia centies ſtadiorum. Circa diſtantiam igitur magnitudinū hæc ſuppono. Verum de arena iſta ponantur. Si fuerit aliqua magnitudo ex arena compoſita, quę non ſit papauere maior, eius arenæ numerū nō maiorem decem milib. eſſe: & diametrum papaueris eſſe non minorem quadrageſima parte digiti. Suppono autē hoc cōſiderans hoc modo: poſita in regula terſa & leui fuerūt papauera in eadem linea recta conſtituta, aptata inter ſe, & trigintaquinq; papauera plus loci occupabant quàm digiti lōgitudo exiſtat. Minorem itaq; diametrū papaueris ponens ſtatuo, ut ſit pars quadrageſima digiti, & nō minor: uolens etiā per hęc nō ambigue, indubitatiſſime demonſtrare propoſitū. Hæc aūt ſunt quæ ſuppono. At uero utile eſſe arbitror, denominationes numerorū enumerare, ut in his qui cōpoſiti ſunt à me in libro quē ad Zeuxippū ſcripſi, nō curēt qui hic legēt, propterea quod nil hic præter ea quæ in eo libro dicta ſunt, additū habetur. Cōtingit aūt nomina nu-

merorum à nobis tradita in decē milib. collecta, & ſuprà decem milia perfectè, et
ſatis intelligimus numerū miliū decem referentes eū in reliquos ſuperiores. Sun-
to itaque qui à nobis dicti ſunt numeri in milies decem milia primi nominati. ho-
rum itaqꝫ qui primi dicūtur decies milies decem milia, uocetur unitas eorum qui
ſecundi ſunt, & numerorum ſecundorum unitates, & unitatum decem, & cente-
ni & milleni & decies milies erunt unitatum, quæ dicuntur decies milies decē mi-
lia: & itē decies milies decem milia ſecūdorum numerorū, uocetur unitas tertiorū
numerorum, et numerentur tertiorum numerorum unitates, & unitatum deceni
& centeni, & milleni, & decies milleni, erunt decies milies decem milium unitatū
dictarum. Eodem autem modo & tertiorum numerorum decies milies decē mi-
lia uocentur unitates quartorum numerorum: & decies milies decem milia quar-
torum numerorū ſimiliter uocentᷓ unitates quintorū numerorū: et hoc modo pro
cedentes numeri huiuſmodi nomina habentes, erunt decies milies denorum mi-
lium decies milies decem milia. Sufficiūt quidem, & ex tantis hi numeri cognoſcū
tur. Licet autē & in plus producere. Sunto igitᷓ hi qui nuper dicti ſunt numeri pri
mæ periodi uocati. Vltimus aūt numerus periodi unitas uocetur ſecundæ perio-
di primorum numerorum, & rurſus decies milies decem milia ſecundę periodi ſe
cundorū numerorū: ſimiliter et horū ultimus unitas uocetur ſecūdę periodi tertio
rum numerorum: & ſic ſemper numeri procedentes nomina habeāt ſecūdæ pe-
riodi, erunt decies milies decem milia denorum milium decem milia decies mili-
es. Rurſus ultimus ſecūdæ periodi numerus decies milies decem milia uocetur u-
nitas tertiæ periodi primorum numerorum decies milies decem milium. Et hoc
modo procedentib. erūt decies milies denorū milium decies milies dena milia de
cies milies decem milia. Iſtis hoc modo denominatis, erūt numeri ab unitate pro-
portionales effecti. qui uero iuxta unitatē ad decē procedūt, hi octo primi cū uni-
tate primorū decies milies decē miliū uocatorū erūt primi. Octo autem qui poſt
eos ſequūtur, numeri uocentur ſecundorū, & aliꝫ eodē modo iſtis erunt ſynony-
morū uocati: & erūt diſtantiæ octoni decies milies denū miliū. Octauus enim nu
merus eſt milies dena milia, ꝗ ſecūdi octoni erit primus: quoniā decuplus eſt eius
qui eū præcedit, decies milies decē milia erit ſecundorū numerorū. hic aūt eſt uni-
tas tertiarū myriadū. Conſtat igitᷓ plures eſſe octoni, ut dictū eſt. Cōfert aūt et hoc
cognoſcere, ſi ſint numeri ab unitate proportionales, & quidā ex eadē proportio-
nalitate ſeſe multiplicauerint, ꝗ producetᷓ, erit ex eadē proportionalitate, tantū di
ſtās à maiore multiplicantiū, quantū minor multiplicantiū ab unitate diſceſſerit ſe
cundū proportionalitatis rationē, & productus idē ab unitate in ordine propor-
tionis diſtabit uno minus ex numero illo qui ſit collectus ex duobus numeris, di-
ctos multiplicātes in ordine proportionis denominātibus. Eſto itaqꝫ quotcūqꝫ nu
meri ab unitate proportionales a b c d e f g h i k l: ſit a unitas, & d multiplicet h, &
proueniat q. Sumatᷓ aūt in ea proportionalitate ex eo ordine unus, qui tātos in ea
proportione inter ſe & h habeat, quāti ſunt inter d & unitatem. & hic ſit l. Oſten-
dendū eſt, quod q eſt ęqualis ipſi l. Cum igitᷓ ſint proportionales, & totidē d diſtat
ab unitate ſicut l ab ipſo h, eandē proportionē habet d ad unitatē, quā l ad ipſum
h. Verū d eſt multiplex unitatis ſecundū ſeipſum d. igitur l erit multiplex ipſius h
ſecundū ipſum d. Quare l eſt æqualis ipſi q. Cōſtat igitᷓ, productū eſſe ex eius pro
portionalitatis ordine unū, & à maiore multiplicantiū tātis diſtabit, quātis minor
ab unitate diſcedit. Conſtat quoqꝫ eum in ordine proportionis tantis ab unitate
diſtare uno minus, quātus eſt numerus ex numeris ordinis multiplicātium col-
lectus. nā a b c d e f g h tanti ſunt, quantis h diſtat ab unitate. ſed i k l uno paucio
res, quàm quibus d diſtat ab unitate. Cum h ergo tanti erunt.

Iſtis ita diſpoſitis, quibuſdā ſuppoſitis, quibuſdā demōſtratis, id quod propo-
ſitū eſt demonſtrabitur. Quoniā itaqꝫ ſupponitur, diametrū papaueris nō eſſe mi
norem

norem quadrageſima parte digiti, conſtat ſphæram quæ diametrum digito æqua
lem habeat, maiorem eſſe regione quā occupat papauer, ſexageſies quater milies.
nam ipſa eſt ſecundum dictum numerum multiplex eius ſphęræ, quæ habeat dia
metrum quadrageſimam partem digiti. Nam oſtēſum eſt, quod ſphæra habet ad
ſphæram proportionem diametro ſuæ ad diametrum alterius triplicatam. Quo-
niam aūt ſuppoſitū eſt, numerū arenæ ad magnitudinem papaueris nō maiorem
eſſe decem milibus, conſtat ſi arenæ ſphæra multiplicetur ad magnitudinem ſphę
ræ quæ diametrum digito æqualem habeat, nō maior erit arenæ numerus quàm
decies milies ipſe ſexageſies quater mille. Hic enim numerus eſt unitates ſex ſe-
cundorum numerorum, & primorum myriades quatuor milia. Minor eſt igitur,
quàm decem myriades ſecundorū numerorū. Sphęra uero quæ centum digitorū
diametrū habuerit, ſphæræ quæ diametrum digitalem habuerit, multiplex eſt ad
hæc centum myriadibus, quia habet ad aliam ſphæram proportionem ſuæ dia-
metri ad diametrū illius triplicatam. Si igitur ex arena fiat ſphæra, quæ habeat dia
metrū centum digitorū, cōſtat quod minor erit arenæ numerus, ꝙ numerus ex de
cē unitatib. ſecūdorū numerorū, in centū myriades ductis collectus. Quoniā aūt
numerus decem unitatū ſecundorū numerorū decimus eſt in ordine proportio-
nis ab unitate, in decuplis quoqꝫ centū eſt proportionalis, centū uero myriadū nu
merus ſeptimus eſt ab unitate in eodē proportionis ordine, cōſtat quod factus in-
de ſextus erit ex eodē proportionis ordine ſextusdecimus ab unitate. Nam oſten
ſum eſt, productū uno paucioribus ab unitate diſtare, quàm ſint illi qui ex utroqꝫ
multiplicantiū numero collecto notātur. Ipſorū uero ſexdecim octo primi ſimul
cū unitate primorū uocati ſunt, reliqui uero poſt iſtos octo ſecundorū, & eorū ul-
timus eſt mille myriades ſecundorū numerū. Cōſtat igitur multitudinem arenæ,
quæ habeat magnitudinē æqualē ſphæræ, cuius ſit diametros centū digitorū, mi-
norē eſſe quàm mille myriades ſecundorū numerorū. Rurſus ſphæra quæ diame
trum decem miliū digitorū habuerit, multiplex eſt ſphæræ habentis diametrum
centum digitorū myriadib. centū. Si igitur fiat ſphæra ex arena tantā habens ma-
gnitudinē, quantā habet ſphæra cuius diametros eſt decem miliū digitorū, cōſtat
numerū arenæ inde prouenientem eſſe minorem quàm mille myridas ſecundorū
numerorū multiplicatæ in centum myriades: quoniam mille myriades ſecundo-
rum numerorum eſt ſextusdecimus ab unitate numerus in ordine proportionis,
& centū myriades eſt ſeptimus ab unitate in eodem eiuſdē proportionis ordine.
Conſtat igitur, quod numerus inde factus erit uigeſimusſecundus ab unitate in
eodem proportionis eiuſdem ordine. Iſtorum uero duorū et uigintiprimi octo cū
unitate primorū uocati ſunt: octo ſecūdi poſt illos ſecundorū, reliqui uero ſex ter-
tiorum uocabuntur, & eorū ultimus eſt decem myriades tertiorū numerorū. Con
ſtat igitur arenæ multitudinē habentis magnitudinē æqualem ſphæræ, cuius dia-
metros eſt decem milium digitorū, minorē eſſe quàm decem myriades tertiorum
numerorum. & quoniā ſphæra, cuius diametros æqualis ſtadio, eſt minor ſphæ-
ra, quæ habeat diametrum decem milium digitorū: conſtat arenæ multitudinem
habentis magnitudinem æqualem ſphęræ cuius diametros eſt æqualis ſtadio, mi
norem eſſe quàm decem myriades tertiorū numerorū. Rurſus ſphęra quæ diame
trum habet centum ſtadiorum, multiplex eſt ſphæræ habentis diametrum unius
ſtadiꝫ centum myriadibus. Si igitur fiat ſphæra ex arena, quæ tantam habeat ma-
gnitudinē quantā habeat ſphæra cuius diametros eſt centum ſtadiorum: conſtat
eius arenæ numerum minorem eſſe numero qui fit multiplicatis decem myriadi-
bus tertiorum numerorum per centū myriadas. Et quoniam tertiorum numero-
rum decem myriades uigeſimus ſecundus eſt ab unitate in uno proportionis or-
dine, centum uero myriades ſeptimus eſt ex eodem eiuſdem proportionis ordine:
conſtat collectum inde numerum fore uigeſimumoctauum ab unitate in eodem
eiuſdem

eiuſdem proportionis ordine. Horū aūt uigintiocto numerorum, primi octo cum unitate primorum uocati ſunt, ſecundi octo poſt illos ſecundorum, tertij octo tertiorum, & reliqui quatuor quartorum uocabuntur, & eorum ultimus eſt mille unitates quartorum numerorum. Manifeſtum eſt igitur, arenæ multitudinem, cuius magnitudo fuerit æqualis, ſphæræ habenti diametrum centum ſtadiorum, minorē eſſe quàm mille unitates quartorū numerorum. Rurſus ſphæra habens diametrum decem milium ſtadiorum, multiplex eſt ſphęræ habentis diametrū centū ſtadiorum centum myriadibus. Si igitur fiat ex arena ſphæra, habens tantam magnitudinem, quantam habet ſphæra cuius diametros eſt decem milium ſtadiorū, conſtat huius arenæ multitudinem fore minorem numero producto ex mille unitatibus quartorum numerorum per centum myriadas multiplicatis. Quoniam enim quartorum numerorum mille unitas eſt uigeſimusoctauus ab unitate in eodem eiuſdem proportionis ordine: conſtat productum inde numerū fore in eodem eius proportionis ordine triceſimūquartum: horum uero quatuor & triginta numerorum primi octo cum unitate primorum uocati ſunt, ſecundi octo poſt illos ſecundorum, tertij octo tertiorum, & quarti octo quartorum, & reliqui duo erunt quintorum: quorum ultimus erit decem unitates quintorum numerorum. Conſtat igitur arenæ multitudinem habentis magnitudinem æqualem ſphæræ, cuius diametros eſt decem milium ſtadiorum, minorem fore, quàm decem unitates quintorum numerorum. Rurſus ſphæra quæ habeat diametrum centum myriadibus ſtadiorum æqualem, multiplex eſt ſphæræ habentis diametrum decē milium ſtadiorum. Si igitur fiat ex arena ſphæra, habens tantam magnitudinē, quātam habet ſphæra cuius diametros eſt centum myriadum ſtadiorum, conſtat numerū arenæ iſtius minorem fore eo numero, qui producitur ex decem unitatibus quintorum numerorum, per centum myriadas multiplicatis. nam quia decem unitates quintorum numerorum eſt triceſimusquartus proportionalis ab unitate, & centum myriades eſt ſeptimus ab unitate in eodem eiuſdem proportionis ordine, conſtat numerū inde productū, ex eodem eiuſdem proportionis fore quadrageſimum ab unitate: horum uero quadraginta primi octo cum unitate primorū uocati ſunt, ſecundi poſt illos octo ſecundorum, tertij octo tertiorum, quarti octo quartorum, & quinti octo quintorum numerorum, & eorum ultimus eſt mille unitates quintorum numerorum. Conſtat igitur multitudinem arenæ, cuius magnitudo ſuerit æqualis ſphęræ habenti diametrum centum myriadas ſtadiorum, minorē eſſe quàm mille unitates quintorum numerorum. Sphæra uero quæ diametrum habeat decies mille myriadas ſtadiorum, multiplex eſt ſphæræ, cuius diametros eſt centum myriades ſtadiorum centum myriadibus. Si aūt fiat ſphæra ex arena, tantam habens magnitudinem, quātam habet ſphæra cuius diametros eſt decies mille myriades ſtadiorum, manifeſtum eſt, quod eius arenæ multitudo minor erit numero qui producetur ex mille unitatib. quintorum numerorum, multiplicatis per centum myriadas. Nam cum mille unitates quintorum numerorum ſit quadrageſimus ab unitate proportionalis, & centum myriades ſit ſeptimus ab unitate in eodem eiuſdem proportionis ordine, manifeſtū eſt, numerū inde productum fore quadrageſimūſextum ab unitate proportionalem: horū ſex & quadraginta numerorum, octo primi cum unitate primorum uocati ſunt, octo ſecūdi poſt illos ſecundorū, octo poſt ſecundos tertiorum, octo poſt tertios quartorum, octo poſt quartos quintorum, reliqui poſt quintos ſextorum ſunt uocati, & eorū ultimus eſt decem myriades ſextorum numerorum. Conſtat igitur arenæ multitudinem, quæ magnitudinem habeat æqualem ſphæræ, diametrum habenti decem milium myriadum ſtadiorum, minorē eſſe ꝙ decem myriades ſextorū numerorū. Sphæra uero, quæ diametrū habeat ſtadiorū centū myriadas myriadū, multiplex eſt ſphæræ habenti diametrū decē miliū myriadū ſtadiorū centū myriadibus. Si igi-

igitur fiat ſphæra ex arena, quæ magnitudinem habeat tantam, quantam habet ſphæra cuius diametros eſt centum myriades myriadum ſtadiorum: conſtat huius arenæ numerum minorē fore numero producto ex decē myriadib. ſextorū numerorum, per cētum myriadas multiplicatis. Nam quoniā decē myriades ſextorum numerorum, quadrageſimusſextus eſt ab unitate proportionalis, & centū myriades ſeptimus in eodem eiuſdem proportionis ordine ab unitate, conſtat numerum inde productum fore quinquageſimum ſecundum, ab unitate in eodem eiuſdem proportionis ordine. Horum aūt duorum & quinquaginta octo, primi cum unitate primorum uocati ſunt, octo ſecundi poſt primos ſecundorum, octo deinde tertij tertiorum, octo quarti quartorum, octo quinti quintorum, octo ſexti ſextorum. reliqui uero quatuor, ſeptimorum uocabuntur: quorum ultimus eſt mille unitates ſeptimorum numerorum. Conſtat igitur arenę dictæ multitudinē, quæ habeat magnitudinem æqualem ſphæræ habenti diametrum centum myriadas myriadum ſtadiorum, minorē eſſe ꝙ mille unitates ſeptimorū numerorum. Cum itaq; oſtenſum ſit, diametrum mundi minorem eſſe centum myriadib. myriadum, conſtat multitudinē arenæ habentis magnitudinem æqualem mundo, minorem eſſe mille unitatibus ſeptimorum numerorum. quod quidem propoſitum fuerat. Quemadmodum autem probatum eſt, arenæ multitudinē, quæ fuerit æqualis mūdi, illi qui à plurimis Aſtrologis poſitus eſt, minorē eſſe mille unitatibus ſeptimorū numerorum: ſimiliter oſtēdetur, multitudinē arenę magnitudinē habentis æqualem ſphæræ tātæ, quantā Ariſtarchus ſupponit eſſe ſphærā ſtellarum ſixarum, eſſe minorem ꝙ mille myriades octauorū numerorū. Quoniā enim ſupponit, terrā habere proportionē illā ad mūdū à nobis dictū, quā habet dictus mūdus ad ſphærā ſtellarū fixarū, quā Ariſtarchus ſupponit: & diametri ſphęrarū eādem habent inter ſe proportionē: & oſtenſum eſt diametrū mundi minorē eſſe diametro terræ, ꝙ decies milies: conſtat diametrū ſphęræ ſtellarū fixarum minorē eſſe, ꝙ decies milies diametrū mūdi. Quoniā uero ſphæræ habēt inter ſe proportionem diametrorum ſuarū triplicatā, manifeſtum eſt ſphæram ſtellarum fixarū quā Ariſtarchus ponit, minorē eſſe ꝙ decies milies decē milia mundos. Oſtēſum uero eſt multitudinē arenę, habētis magnitudinē æqualem mūdo, minorē eſſe, ꝙ mille unitates ſeptimorū numerorum. Manifeſtum eſt igit̄, quod ſi fiat ſphæra ex arena, tantā habens magnitudinē, quantā habere ponit Ariſtarchus ſphęrā ſtellarum fixarū, huius arenæ numerus minor erit eo numero qui producitur ex mille unitatib. ſeptimorum numerorū, multiplicatis per decē milia decies milies myriadas. Nam quoniam mille unitates ſeptimorum numerorū eſt quinquageſimus ſecundus ab unitate proportionalis, & decem milia decies milies myriades eſt tertiusdecimus ab unitate; proportionalis in eodē eiuſdem proportionis ordine ſumptus, conſtat productum inde numerum fore ſexageſimūquartū ab unitate, proportionalem ex eodem eiuſdem proportionis ordine: iſte uero eſt octauorū octauus, & quinq; myriades octauorū numerorū. Cōſtat itaq; quod multitudo arenę magnitudinē habentis æqualem ſphæræ ſtellarum fixarū, quam Ariſtarchus ponit, minor eſt ꝙ mille myriades octauorū numerorū. Hæc aūt rex Gelon, ꝙ plurimis quidē qui in diſciplinis uerſati non ſunt, non admodū creditū iri arbitror: illis uero qui diſciplinis imbuti ſunt, & circa diſtātias & magnitudines terræ, & ſolis, & lunæ, totiusq; mundi ſanam inſtitutionē acceperunt, credibilia prorſus propter demonſtrationem uidebuntur. Quare nonnullos exiſtimarim ad hæc inſpicienda nullo pacto poſſe accommodari.

FINIT ARCHIMEDIS RATIO
de Arenæ dimenſione.

ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΑΣΚΑ
ΛΩΝΙΤΟΥ ΕΙΣ ΤΑ ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΠΕΡΙ ΣΦΑΙΡΑΣ
καὶ κυλίνδρου, καὶ τὰ ἄλλα, ὑπομνήματα.

EVTOCII ASCALONITAE IN AR-
CHIMEDIS LIBROS DE SPHAERA ET
cylindro, atque alios quosdam, Commentaria, nunc primum &
Graece & Latine in lucem edita.

Cum Caes. Maiest. gratia & priuilegio,
ad quinquennium.

BASILEAE,
Ioannes Heruagius excudi fecit.
An. MDXLIIII.

MAGNIFICO DOMINO SEVERINO *BONERO A BALITZ, IN CAMIENETZ* AC OGRODZENETZ HÆREDI, CASTELLANO BYERENSI, *Burgrauio Zuppario, ac magno Procuratori Cracouienſi, &c. Domino & patrono ſuo obſeruandiſſimo, Thomas Venatorius ſeſe commendat.*

OMnes, qui ad ſummos honeſtarum artium gradus uſq; aſcendere ſtudent, ordinis cum primis rationem ut habeant, contendunt: quòd nimirũ contempta ordinis ratione, omnia paſsim confundi ſit neceſſe. Non minus autem in literarum ſtudijs, quàm in alijs rebus uniuerſis, ipſa parens rerum, ordinẽ eſſe uoluit, Natura. Vt enim à ſummo tecto domum ædificare qui cœperit, neglecta fundamenti ratione, fruſtra & oleum, quod autem, & operam inſumit: ſic qui ueræ philoſophiæ campos ſpacioſiſsimos ingreſſi, unius duntaxat agri floribus contenti, pedes ſiſtunt, nec ipſam ſegetem ac meſſem integrè legerint, aut ſaltem apis in morem deguſtauerint, doctos inter uerè quomodo recenſeri poſſint, non equidẽ uideo. Sed ad hæc gradatim, ſuſpenſiſq; interim pedibus concedendum eſſe, iampridem à maioribus noſtris accepimus. Neque temere ſibi quiſquam docendi prouinciã uſurpet hac in parte, quòd periculo non caret doctor. Non rarò enim arrogantia comitatur doctorem, ſæpe etiam ſui complacẽtia, Græcis φιλαυτία uocata. Quæ duo, maxime ubi doctoris animum occuparint, ipſum ſtatim non tam periculo uanæ gloriæ, quàm ludibrio uulgi exponere conſueuerunt. Diſcipulus etſi abiectus uideatur mundo, ipſum tamẽ quia humilitas animi commẽdat Deo, ſecurè & extra periculum ambulat. Et quidem hæc omnia, ut ordinis decorum, ſiue ut Græci loquuntur, τὸ καλὸν καὶ τὸ πρέπον, à noſtris ſtudijs minime cupiam excludi, ſed potius conſtantiſsimè ſeruandam eſſe nobis moderationem illam in decoro ordinis, quæ & ipſa à Græcis ob id uocatur συνταξία. Et recte profectò hæc ita eſſe à doctis cenſentur. In elementis enim, ubi ordinis ratio ſibi minus conſtare contigerit, ſequi uidemus in aëre fulmina, in terra commotiones, in mari inundationes: deniq; contempto ordine, experimur in urbibus & familijs ſeditiones, in corporibus ægritudines: & ut uno uerbo compræhendam multa, in animabus noſtris regnabunt peccata. Cum tanta ſit in rerum omnium natura, illa ordinis obſeruatio, in rectis ſtudijs abſoluendis cur ordinis ratio à nobis conturbaretur? Conturbaretur autẽ, ſi ſecus quàm à fundamentis ad ſumma contenderemus. Neq; enim ſacrum illum omniũ diſciplinarum circulũ abſoluerit unquã, qui minutas aliqui faſtidiẽs, ſummas tantum aſſequi conatur artes. Ad ſumma cõtemplanda, niſi per gradus quosdam, non admittitur animus. Sensisse hoc idem Plato uidetur, cum uestibulo Scholæ suæ inscriberet, Ἀγεωμέτρητος οὐδεὶς εἰσίτω. Qua utiq; sentẽtia significare uoluit, inutiles esse ad percipiendas liberales disciplinas, qui nulla Musices præsertim, & Geometriæ principia posuissent. nempe quòd hæ disciplinæ, imagines rerũ, quæ humanis saltem studijs capi possunt, oculis mundi subijcere & possint & ualeant. Ipsa certè γεωμετρία mentem nostram, suo ordine quàm longissimè tandem à rebus caducis abducit, ut iam non in terra infernè, sed cœlo potius supernè, inhærere cupiat, ac rebus ipsis delectari, quæ ut summè bona sunt, ita nullam unquam permutationem admittũt. Quid quod magna pars Sacræ scripturæ obscura nobis erit, nisi Geometrica proportione expendat ea pius lector. Templi Hierosolymitani fabrica, nonne maxima cura & diligentia traditur? quæ omnia, nisi Geometrica proportione seruata, imparati & inculti uulgi cognitionem remorentur oportet. Præter alia, quanto studio præcipit diuinus sermo, de construendis columnis? adeò ut omnia Geometrica ratione constarent, stylobastagmata, bases quoq;, & spiræ: scapus deinde, ac plinthus ipsa qualis esse deberent, cum ipsis cymacijs, fascijs, scotijs, strijs, canaliculis, epistilijs, quæ omnia quàm longa & lata, quàm alta & profunda essent, per Geometricas rationes spiritus diuinus sapientissimè commonstrauit: quæ res animum hominis non tantum in admirationem, sed etiam in cognitionem Opificis rerum, inducere equidem euidentissimè queant. Claruit in hisce disciplinis apud Syracusas olim Archimedes, qui nescias an doctior, an patriæ salutis fuerit amantior. Is quia scripserat quædam, quæ acutiora cum essent, quàm ut rudes statim capere possent, Eutocius Ascalonita, homo sua tempestate ut doctus, ita ingenio fœcũdus et fuit, & habitus est ab omnibus, ut iam nõ immerito de eo dixerit quidam, εὐτύκιος ἔσχεν ὄνομα αὐτῷ. Verè enim est fœcũdus in omnibus illis explanãdis, in quibus obscurior alioqui uideri poterat Archimedes. Eius scripta uiri, nunquam antehac in lucẽ edita, sub tui nominis potissimũ tutela publicare placuit: cũ quòd dignus tu quidem es, cuius uirtuti hæc quoq; laus accedat, ut nominis tui fama, per se profectò clarissima, accessione tanti scriptoris longè reddatur clarior: tũ quòd mei erga te, atq; adeò erga familiã tuã uniuersam, synceri palàm argumẽtũ extaret amoris. Habes rationẽ huius facti mei. Soleo enim nõ infrequẽter admirari, in magnis rebus obeundis prudentiã tuam, in periculis propulsandis animi fortitudinẽ, fidem in promissis, industriã & ingenij acrimoniã in consilijs, in conficiundis autẽ negocijs celeritatẽ. Quæ cum uerè excellẽtes sint in uno homine, uirtutes, nisi à doctissimo quopiã, pro dignitate explicari nõ possunt: eas in præsentia attigisse saltẽ, mihi uisum est satis. Itaque uiue diu fœlix, æuo superante Sibyllas, annisq; annosum Nestora uince. Vale. ex Norimberga, ad Calend. Ianuarij, Anno Salutis nostræ M D X L I I I I.

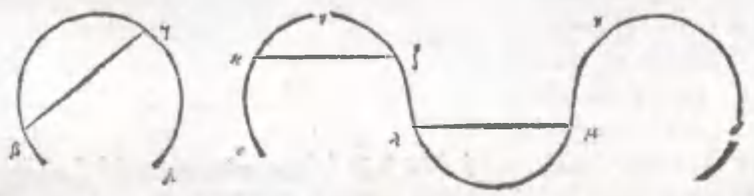
ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΑΣΚΑΛΩΝΙΤΟΥ ΥΠΟΜΝΗΜΑ, ΕΙΣ ΤΟ ΠΡΩΤΟΝ ΤΩΝ ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου.

Εἰς τὰ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου ἀρχιμήδους οὐδένα τῶν πρὸ ἡμῶν ἀξίαν εὑρὼν σύνταξιν καταβεβλημένον. καὶ κατανοήσας μὴ δὲ δυμάρειαν τῶν θεωρημάτων τοῦτο παροραθῆναι, ἐπισάστως γὰρ ἀκριβοῦς, ὡς ἴστε, καὶ δυσεπιβόλου δεῖται φαντασίας, ὠρέχθην κατ᾽ ἐμὴν δύναμιν σαφῶς ἐκθέσθαι τὰ ἐν αὐτοῖς † θεωρήματα, προαχθεὶς μᾶλλον εἰς τοῦτο τῷ μηδένα πω δοκεῖ θεῖναι εἰς ταύτην τὴν ὑπόθεσιν, ἢ διὰ τὴν δυσκολίαν ὀκνήσας, καὶ ἅμα τὸ σωκρατικὸν λογισάμενος, ὡς τοῦ θεοῦ συλλαμβάνοντος πάνυ εἰκὸς καὶ ἐπὶ τέλους ἡμᾶς τῆς σπουδῆς ἐλθεῖν. ἐκ τριῶν δὲ διανοηθείς, ὡς εἴ τι καὶ παράλογος διὰ νεότητα φθέγξομαι τοῦτο ὑπὸ σῆς περί τε τὴν ἄλλην φιλοσοφίαν ἐπιστημονικῆς θεωρίας, καὶ διαφερόντως περὶ τὰ μαθήματα ἐπανορθώσεως τεύξεται, ἀνέθηκα σοι κράτιστε φιλοσόφων ἀμμώνιε. πρέπον δ᾽ ἂν σοι τῇ ἐμῇ σπουδῇ συνάρασθαι. καὶ εἰ μὲν ἀνεπιμίαιον δόξῃ τὸ γράμμα, αὐτόθεν μὴ δὲ εἰς ἄλλον ἐλθεῖν συγχωρήσῃς. εἰ δὲ τοῦ σκοποῦ μὴ πάντη διαμαρτάνον, δήλωσον ἣν ἔχεις περὶ αὐτοῦ γνώμην, ὡς εἴγε τῇ ὑμετέρᾳ κρίσει βεβαιωθῇ, πειράσομαι καὶ ἄλλο τυχὸν τῶν ἀρχιμηδείων συντάξεων ἑρμηνεῦσαι.

† δυσθεώρητα

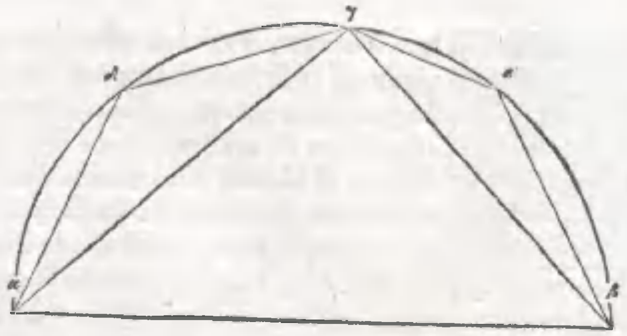
ΕΙΣ ΤΟΥΣ ΟΡΟΥΣ.

Προειπὼν τὰ μέλλοντα ἐκτίθεσθαι ὑπ᾽ αὐτοῦ θεωρήματα, τὸ σύνηθες πᾶσι γεωμέτραις ἐν τῇ ἐκθέσει τηρῶν τάς τε ὀνομασίας αἷς αὐτὸς κατ᾽ ἐξουσίαν ἐχρήσατο, καὶ τοὺς ὅρους τῶν ὑποθέσεων, καὶ αὐτὰς τὰς ὑποθέσεις διὰ τῆς ἀρχῆς τοῦ συγγράμματος διασαφῆσαι βούλεται. καὶ φησὶν πρῶτον εἶναί τινας ἐν ἐπιπέδῳ καμπύλας γραμμάς, αἳ πρὸς τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰ πέρατα αὐτῶν εὐθειῶν ἢ πᾶσαι ἐπὶ τὰ αὐτά εἰσιν, ἢ οὐδὲν ἔχουσιν ἐπὶ τὰ ἕτερα. σαφὲς δ᾽ ἂν εἴη τὸ λεγόμενον, εἰ γνωσόμεθα τίνας καλεῖ τὰς ἐν ἐπιπέδῳ καμπύλας γραμμάς. ἰστέον οὖν ὅτι καμπύλας γραμμὰς καλεῖ οὐχ ἁπλῶς τὰς κυκλικάς, ἢ κωνικάς, ἢ ἄκλασον ἐχούσας τὴν συνέχειαν, ἀλλὰ πᾶσαν ἐν ἐπιπέδῳ γραμμὴν παρὰ τὴν εὐθεῖαν, καμπύλην ὀνομάζει. μίαν δὲ γραμμὴν ἐν ἐπιπέδῳ τὴν ὁποσοῦν συναπτομένην, ὥστε κἂν ἐξ εὐθειῶν σύγκειται * τῇ α β γ δ. ἀλλ᾽ ἐπειδὴ ὡς καὶ ἀνωτέρω εἴρηται, καμπύλας γραμμὰς οὐ τὰς περιφερεῖς μόνον καλεῖ, ἀλλὰ καὶ τὰς ἐξ εὐθειῶν συγκειμένας, ἐκ δὲ τούτων ἣν ἡ ἐπιλογὴ τῶν ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλων, ἐνδεχόμενον ἂν εἴη λαβεῖν ἐπί τινος ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλης γραμμῆς δύο τυχόντα σημεῖα, ὥστε τὴν ἐπ᾽ αὐτὰ ἐπιζευγνυμένην εὐθεῖαν, ἐπὶ μὲν ἕτερα μὲν μέρη πίπτειν τῆς γραμμῆς, ἐπ᾽ αὐτῆς ἐφαρμόζειν.

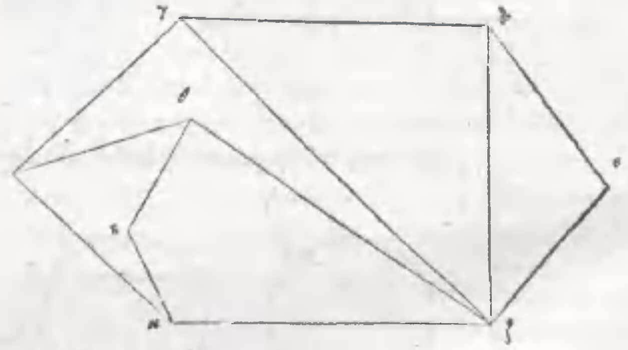


διό φησιν ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλην καλεῖν γραμμήν, ἐν ᾗ αἱ διὰ δύο ὁποιωνοῦν σημείων ἀγόμεναι εὐθεῖαι, ἤτοι πᾶσαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη πίπτουσι τῆς γραμμῆς, ἢ τινὲς μὲν ἐπὶ τὰ αὐτά, τινὲς δὲ κατ᾽ αὐτῆς. ἐπὶ τὰ ἕτερα δὲ μέρη οὐδὲ μία. τὰ δὲ αὐτὰ ἔξεστιν ἐπινοεῖν καὶ ἐπὶ ἐπιφανειῶν.

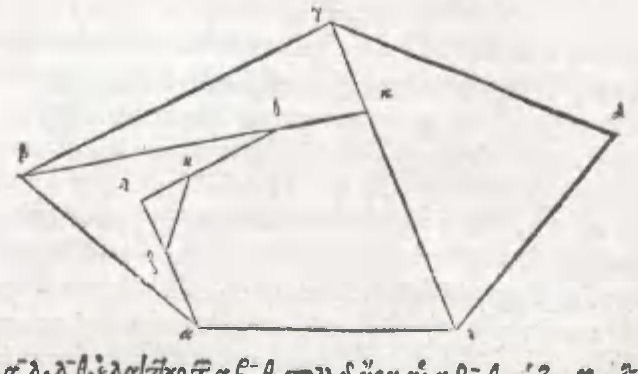
Εἶτα ἑξῆς ὀνομάζει τομέα στερεόν, καὶ ῥόμβον στερεόν, σαφῶς ἐμφανίζων τὴν ἔννοιαν τῶν ὀνομάτων. μετὰ δὲ ταῦτα αἰτήματα τινὰ λαμβάνειν ἀξιοῖ, χρησιμεύοντα αὐτῷ εἰς τὰς ἑξῆς ἀποδείξεις, καὶ ὄντα μὲν καθ᾽ αὑτὰ τῇ αἰσθήσει ὡμολογημένα, οὐδὲν δὲ ἧττον δυνατὰ καὶ ἀποδειχθῆναι ἔκ τε τῶν κοινῶν ἐννοιῶν, καὶ ἐκ τῶν δεδειγμένων ἐν τοῖς στοιχείοις. ἔστι δὲ πρῶτον αἰτημάτων τὸ τοιόνδε, πασῶν τῶν ταῦτα πέρατα ἐχουσῶν γραμμῶν ἐλαχίστην εἶναι τὴν εὐθεῖαν. ἔστω γὰρ ἐν ἐπιπέδῳ εὐθεῖα μέν τις πεπερασμένη ἡ α β, ἑτέρα δέ τις γραμμὴ ἡ α γ β. τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσα τὰ α, β. φησὶ δὴ δεδόσθαι αὐτῷ τὴν α β ἐλάττονα εἶναι τῆς α γ β. λέγω οὖν, ὅτι τοῦτο ἀληθὲς ᾐτήσατο. εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς α γ β, τυχὸν σημεῖον τὸ γ. καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ α γ, γ β. φανερὸν δή, ὅτι αἱ α γ, γ β τῆς α β μείζους εἰσί, πάλιν δὴ εἰλήφθωσαν ἐπὶ τῶν α γ β γραμμῶν ἄλλα τυχόντα σημεῖα τὰ δ, ε. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αδ, δγ, γε, εβ. ὁμοίως δὴ καὶ ἐνταῦθα δῆλον, ὅτι δύο μὲν αἱ αδ, δγ τῆς αγ μείζους εἰσί. δύο δὲ αἱ γε, εβ τῆς γβ. ὥστε αἱ αδ, δγ, γε, εβ πολλῷ μείζους εἰσὶ τῆς αβ. ὁμοίως δὴ κἂν ἄλλα σημεῖα λαβόντες μεταξὺ τῶν εἰλημμένων ἐπιζεύξωμεν ἐπὶ τὰ νῦν ληφθέντα, εὐθείας εὑρήσομεν αὐτὰς ἔτι μείζους τῆς αβ. καὶ τοῦτο συνεχῶς ποιοῦντες τὰς μᾶλλον συνεγγιζούσας τῇ αγβ γραμμῇ, εὐθείας ἔτι μείζους εὑρήσομεν. ὥστε ἐκ τούτου συμφανὲς εἶναι, αὐτὴν τὴν γραμμὴν μείζονα εἶναι τῆς αβ, δυνατοῦ ὄντος κατὰ πᾶν αὐτῆς σημεῖον ἐπιζεύξαντας εὐθείας λαβεῖν ἐξ εὐθειῶν συγκειμένην τὴν οἷον αὐτὴν οὖσαν γραμμήν, μείζονα δεικνυμένην διὰ τῶν αὐτῶν τῆς αβ. οὐ γὰρ ἄτοπον ἐν ταῖς τῶν ὁμολογουμένων ἀποδείξεσι καὶ τοιαύτας ἐννοίας προλαβεῖν.



Μετὰ δὲ τοῦτο φησί, λαμβάνειν καὶ τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν γραμμῶν ἐκείνας ἀνίσους εἶναι, τὰς ἤδη τὰ αὐτὰ κοίλας οὔσας, κατὰ τὸν ἀνωτέρω εἰρημένον τρόπον. οὐ μόνον δὲ ἤρκεσεν εἰς τὸ ἀνίσους εἶναι τὸ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλας εἶναι, ἀλλὰ καὶ ὅταν ἡ ἑτέρα τὴν ἑτέραν, ἢ ὅλην περιλαμβάνῃ, ἢ μέρος μὲν περιλαμβάνῃ, μέρος δὲ καὶ κοινὸν ἔχει, καὶ μείζονα εἶναι τὴν περιλαμβάνουσαν τῆς περιλαμβανομένης. νενοήσθωσαν γὰρ πρὸς τὸ καὶ τοῦτο κατάδηλον γενέσθαι, ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμαὶ αἱ αβγδεζ, καὶ αηθζ, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι τὰ α ζ. καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι. καὶ ἔτι περιλαμβανομένη ὅλη ἡ αηθζ ὑπὸ τῆς αβγδεζ γραμμῆς, καὶ τῆς τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσης αὐταῖς, τῆς αζ εὐθείας. φημὶ δὴ ὅτι καὶ ἄνισοί εἰσιν αἱ προκείμεναι γραμμαί. καὶ μείζων ἡ περιλαμβάνουσα. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ βθ, γζ, δζ. ἐπεὶ οὖν ἐὰν νοηθῇ ἐπιζευγνυμένη ἡ θα, ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τοῦ αβθ ἐντὸς συνισταμέναι εἰσὶ αἱ αη, ηθ. καὶ ἐλάττους εἰσὶ αἱ αη, ηθ τῶν αβ, βθ. κοινὴ προσκείσθω ἡ θζ. αἱ ἄρα αη, ηθ, θζ ἐλάττους εἰσὶ τῶν αβ, βθ, θζ. ἀλλ᾽ αἱ βθ, θζ ἐλάττους εἰσὶ τῶν βγ, γζ. ἐντὸς γὰρ πάλιν ἐπὶ μιᾶς τῆς βζ συνιστάμεναι εἰσί. πολλῷ ἄρα αἱ αβ, βγ, γζ τῶν αη, ηθ, θζ μείζους εἰσίν. ἀλλὰ τῆς γζ μείζονες αἱ γδ, δζ. τῆς δὲ δζ αἱ δε, εζ. ἔτι πολλῷ ἄρα αἱ αβγ, δεζ μείζους εἰσὶ τῶν αηθζ.



Σαφηνείας δὲ χάριν ὑποκείσθωσαν καὶ ἕτεραι γραμμαὶ ὁμοίως ταῖς προειρημέναις, ὡς αἱ αβγδε, αζηθκε. λέγω ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ περιλαμβάνουσα. νενοήσθωσαν γὰρ ἐκβεβλημέναι αἱ αζ, ηθ, ἐπὶ τὸ λ. ἐπεὶ οὖν πάλιν δύο αἱ ζλ, λη μείζους εἰσὶ τῆς ζη, κοιναὶ προσκείσθωσαν αἱ αζ, ηθ. αἱ ἄρα αλ, λθ μείζους εἰσὶ τῶν αζ, ζη, ηθ. ἀλλ᾽ αἱ αλ, λθ ἐλάττους τῶν αβ, βθ. πολλῷ ἄρα αἱ αβ, βθ μείζους τῶν αζ, ζη, ηθ.



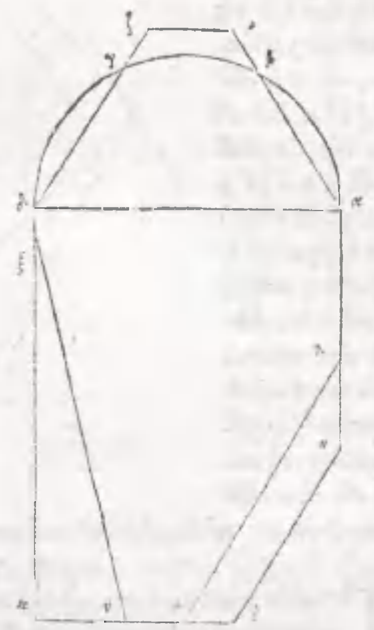
κοινὴ

κοινὴ προσκείσθω ἡ θκ. μείζους ἄρα αἱ αβθκ τῶν αζηθκ. ἀλλ᾽ αἱ βθκ ἐλάττους τῶν βγκ. πολλῷ ἄρα μείζους αἱ αβγκ τῶν αζηθκ. κοινὴ προσκείσθω ἡ κε. αἱ ἄρα αβγκε μείζους τῶν αζηθκε. ἀλλ᾽ αἱ γκε ἐλάττους τῶν γδε, πολλῷ ἄρα αἱ αβγδε μείζους εἰσὶ τῶν αζηθκε.

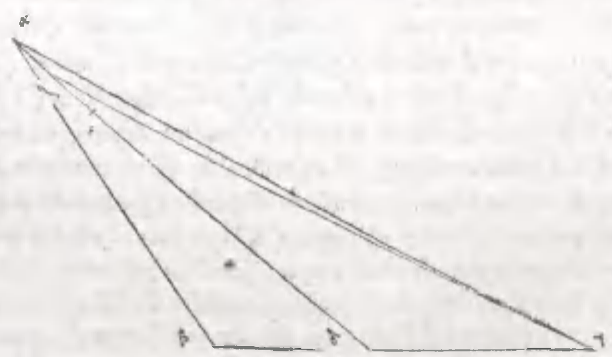
Κἂν περιφέρειαι δὲ ὦσιν, ἤτοι αἱ περιλαμβάνουσαι, ἢ αἱ περιλαμβανόμεναι, ἢ καὶ ἀμφότεραι, τὸ αὐτὸ ἔνεστι νοεῖν. συνεχῶν γὰρ σημείων ἐπ᾽ αὐτῶν λαμβανομένων, καὶ ἤδη αὐτὰ ἐπιζευγνυμένων εὐθειῶν, ληφθήσονται γραμμαὶ ἐξ εὐθειῶν συγκείμεναι, ἐφ᾽ ὧν ἁρμόσει ἡ προειρημένη ἀπόδειξις τῶν ἐξ εὐθειῶν συγκειμένων, οἷον αἱ τῶν γινομένων τῶν προτεθεισῶν, διὰ τὸ καὶ πᾶσαν γραμμὴν κατὰ συνέχειαν σημείων τὴν ὕπαρξιν ἔχουσαν † νοεῖσθω. ὅτι δὲ εἰκότως τὴν ἀνισότητα τῶν γραμμῶν οὐ μόνον τῷ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλας εἶναι ἐχαρακτήρισεν, ἀλλὰ καὶ † ἔθηκεν τὸ καὶ δεῖν περιλαμβάνεσθαι τὴν ἑτέραν ὑπὸ τῆς ἑτέρας, καὶ τῆς τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσης εὐθείας. τούτου γὰρ μὴ ὄντος, οὐδὲ τὸ ἀνίσους εἶναι τὰς γραμμὰς, πάντη ἀληθὲς ὑπῆρχεν, ὡς ἔστι κατανοῆσαι ἐκ τῶν ὑποκειμένων καταγραφῶν. ἡ γὰρ αβγδ γραμμή, καὶ ἡ αεζδ, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι εἰσί, καὶ ἄδηλον ὁποτέρα αὐτῶν μείζων ἐστί. δυνατὸν γὰρ καὶ ἴσας εἶναι. δυνατὸν δὲ καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλην ἑτέραν νοεῖν, καὶ τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσας ἀμφοτέρας, κατ᾽ ἐναντίαν δὲ θέσιν ἀλλήλαις κειμένας, ὡς ὁποτέρα τῶν εἰρημένων τῇ αηθκδ. καὶ οὕτως γὰρ ἄδηλος, ἥτε ἰσότης καὶ ἀνισότης αὐτῶν. διὸ καλῶς πρόκειται, τὸ δεῖν ὅλην τὴν ἑτέραν ὑπὸ τῆς ἑτέρας περιλαμβάνεσθαι, καὶ τῆς τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσης εὐθείας. ἢ τινὰ μὲν περιλαμβάνεσθαι, τινὰ δὲ καὶ κοινὰ ἔχειν, ὡς ἐπὶ τῶν αηθκδ, καὶ αλμξδ. ἐπὶ γὰρ τούτων τινὰ μὲν περιλαμβάνεται, τινὰ δὲ κοινά ἐστι, ὡς τὰ αλ, μν.

† νοεῖσθαι

† ἐπέθηκεν



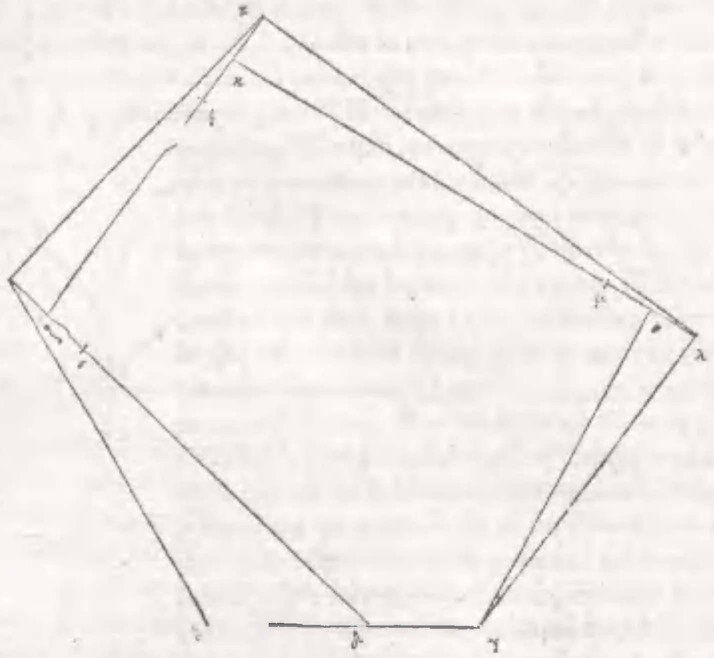
Δεόντως δὲ πάνυ κἀκεῖνο πρὸς κρίσιν τῆς ἀνισότητος παρελήφθη, τὸ δεῖν τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχειν τὰς γραμμάς. τούτου γὰρ μὴ ὄντος, οὐδ᾽ ἂν περιλαμβάνοιντο ὑπ᾽ ἀλλήλων, οὐδὲ οὕτως ἄνισοι εἰσί, ἀλλ᾽ ἐνίοτε ἴσαι. ἢ καὶ ἡ περιλαμβανομένη μείζων. ὅπερ ἵνα σαφῶς γένηται, νενοήσθωσαν ἐν ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι αἱ αβγ, ἀμβλεῖαν τὴν πρὸς τῷ β γωνίαν περιέχουσαι, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς βγ τυχὸν σημεῖον τὸ δ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αδ, αγ. ἐπεὶ οὖν μείζων ἐστὶν ἡ αδ τῆς αβ, κείσθω τῇ αβ ἴση ἡ δε. καὶ τετμήσθω ἡ αε δίχα κατὰ τὸ ζ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ζγ. ἐπεὶ οὖν δύο αἱ αζγ τῆς αγ μείζους εἰσί, ἴση δὲ ἡ αζ τῇ ζε. καὶ αἱ εζγ ἄρα τῆς αγ μείζους εἰσί, κοιναὶ προσκείσθωσαν αἱ αβ, δε. αἱ ἄρα δζγ τῶν βαγ μείζους εἰσίν. ὥστε μιᾶς γραμμῆς νοουμένης τῆς βαγ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλης. ἑτέρας δὲ τῆς δζγ περιλαμβανομένης ὑπὸ τῆς ἑτέρας, μὴ ἐχούσης δὲ τὰ αὐτὰ πέρατα, οὐ μόνον ὅτι οὐ μείζων ἡ περιλαμβάνουσα, ἀλλὰ καὶ ἐλάττων ἐδείχθη.



Καὶ ἤδη γραμμῶν δὲ ἐκ πλειόνων εὐθειῶν συγκειμένων τὸ αὐτὸ τοῦτο ἔστι θεωρῆσαι. νενοήσθωσαν γὰρ ἐν ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι αἱ αβ, βγ, καὶ τυχὸν σημεῖον τὸ δ. καὶ ἐπεζευγμένη ἡ αδ. πάλιν δὴ κείσθω τῇ αβ ἴση ἡ δε. καὶ ἡ εα δίχα τετμήσθω τῷ ζ. καὶ τῇ αδ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ αη, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ζη. καὶ κείσθω τῇ αη ἴση ἡ ζθ. καὶ πάλιν δίχα τετμήσθω ἡ θκ κατὰ τὸ

κ,

κ, καὶ πρὸς ὀρθὰς τῇ ζη ἤχθω ἡ κλ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ κλ. καὶ πάλιν τῇ ηλ ἴση ἡ κμ. καὶ δίχα τετμήσθω ἡ μλ τῷ ν. καὶ πάλιν πρὸς ὀρθὰς τῇ κδ ἤχθω ἡ λγ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ νγ. φανερὸν οὖν διὰ τὰ προδεδειγμένα, ὅτι μείζων ἡ μὲν δζ τῶν αβ, ἡ δὲ ζκ τῆς αη, ἡ δὲ κν τῶν ηλ, ἡ δὲ νγ τῶν λγ. ὥστε καὶ ὅλη ἡ γραμμὴ ἡ δζκνγ μείζων τῶν αβηλγ. καλῶς ἄρα προσετέθη τὸ τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχειν τῶν ἀνίσων. τὰ αὐτὰ δὲ δυνατὸν ἐπινοοῦντα * αἱ λαμβανόμεναι ἐπιφάνειαι τὰ πέρατα ἔχουσιν ἐν ἐπιπέδοις.



ΕΙΣ ΤΟ Β ΘΕΩΡΗΜΑ.

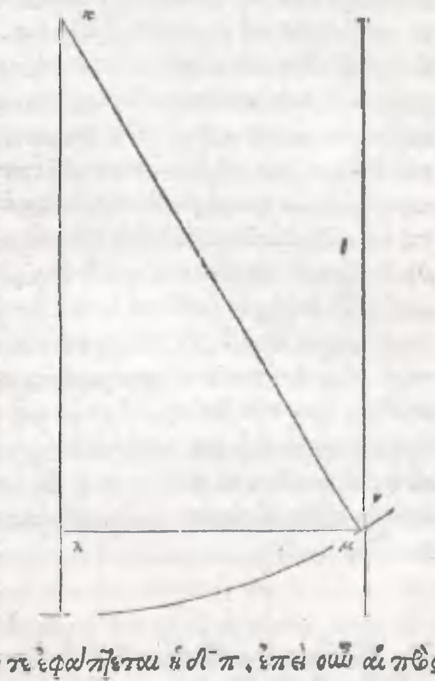
Τὸ δὴ αγ ἑαυτῷ ἐπισυντιθέμενον ὑπερέξει τῆς δ, ἤτοι ἀλλάσσει ὡς τὸ αβ, ἤτοι ἐπιμόριος, ἢ ἐπιμέρους τυγχάνοντος τοῦ δ. εἰ δὲ ἐστι τὸ αβ τοῦ δ, ἤτοι πολλαπλάσιον ἢ πολλαπλασιμόριον, ἢ καὶ πολλαπλασιεπιμερές, ἀφαιρεθέντος ἀπὸ τῆς αβ, ἴσου τῷ δ τῆς βγ, τὸ λοιπὸν τὸ γα ὑπερέξει τῆς δ. ὥστε μηκέτι πολλαπλασιάζεσθαι αὐτό, ἀλλὰ αὐτόθεν λαμβάνεσθαι τῷ αγ ἴσον ἀποτίθεσθαι τὸ αθ, καὶ τὴν αὐτὴν ἀπόδειξιν ἁρμόζειν. καὶ συνθέντι τὸ ζη πρὸς ζε ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ αβ πρὸς βγ. ὅτι γὰρ ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τρίτον πρὸς τέταρτον. καὶ συνθέντι ὁ αὐτὸς λόγος ἀκολουθεῖ. δειχθήσεται οὕτως. ἔστωσαν τέσσαρα μεγέθη τὰ αβ, βγ, δε, εζ. τὸ δὲ αβ πρὸς τὸ βγ μείζονα λόγον ἐχέτω, ἤπερ τὸ δε πρὸς τὸ εζ. λέγω ὅτι καὶ συνθέντι τὸ αγ πρὸς γβ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ δζ πρὸς τὸ ζε. γεγονέτω γὰρ ὡς τὸ γβ πρὸς τὸ βα, οὕτως τὸ ζε πρὸς τὸ ζθ. ἀνάπαλιν ἄρα ὡς τὸ αβ πρὸς τὸ βγ, οὕτως τὸ θζ πρὸς τὸ ζε. μείζονα δὲ λόγον ἔχει τὸ αβ πρὸς τὸ βγ, ἤπερ τὸ δε πρὸς εζ. καὶ τὸ ζθ ἄρα πρὸς ζε μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ δε πρὸς εζ. μείζον ἄρα ἐστὶ τὸ ζθ τῆς εδ. καὶ ὅλον τὸ θε τῆς δζ. καὶ διὰ τοῦτο τὸ θε πρὸς εζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ δζ πρὸς ζε. ἀλλ' ὡς τὸ θε πρὸς εζ, τὸ αγ πρὸς γβ. διὰ τὸ συνθέντι. καὶ τὸ αγ ἄρα πρὸς γβ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ δζ πρὸς εζ. ἀλλὰ δὴ τὸ αγ πρὸς γβ μείζονα λόγον ἐχέτω, ἤπερ τὸ δζ πρὸς ζε. λέγω ὅτι καὶ διελόντι τὸ αβ πρὸς βγ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ δε πρὸς εζ. πάλιν γὰρ ὁμοίως ἐὰν ποιήσωμεν, ὡς τὸ βγ πρὸς γα, οὕτως τὸ ζε, καὶ τὸ θε μεῖζον τῆς δζ, καὶ κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τῆς εζ, ἔσται μεῖζον τὸ θζ τῆς δε. καὶ διὰ τοῦτο τὸ θζ πρὸς ζε, τουτέστι τὸ αβ πρὸς βγ, διὰ τὸ διελόντι μείζονα λόγον ἕξει, ἤπερ τὸ δε πρὸς εζ. φανερὸν δὲ διὰ τῶν ὁμοίων, ὅτι κἂν τὸ αβ πρὸς τὸ βγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ δε πρὸς εζ, καὶ συνθέντι, καὶ πάλιν διελόντι ὁ αὐτὸς λόγος ἔσται. ἐκ δὲ τῶν αὐτῶν καὶ ὁ τῆς ἀναστρέψαντι λόγος ἐμφανής ἐστιν. ἐχέτω γὰρ τὸ αγ πρὸς βγ μείζονα λόγον, ἤπερ τὸ δζ πρὸς ζε. λέγω ὅτι καὶ ἀναστρέψαντι τὸ γα πρὸς αβ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ δζ πρὸς δε. ἐπεὶ γὰρ τὸ αγ πρὸς γβ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ δζ πρὸς ζε, καὶ διελόντι τὸ αβ πρὸς βγ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ δε πρὸς εζ,

ἀνά

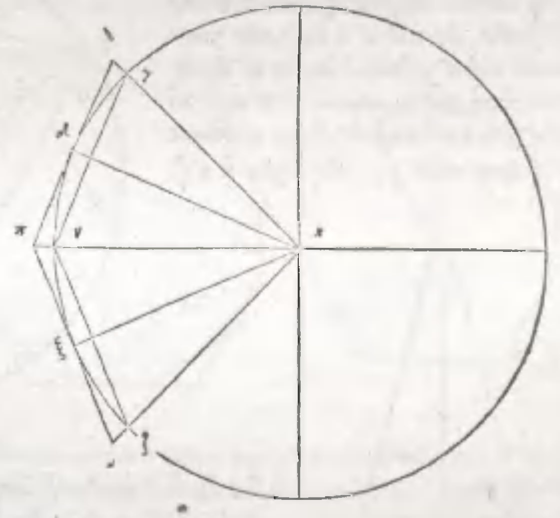
καὶ ἀνάπαλιν τὸ βγ πρὸς βα ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ζε πρὸς εδ, καὶ συνθέντι τὸ γα πρὸς αβ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ δζ πρὸς δε.

ΕΙΣ ΤΟ Γ.

Καὶ ἀπὸ τοῦ κ, τῇ θ ἴση κατήχθω ἡ κμ, δυνατὸν γάρ ἐστι. καὶ ἐκβληθείσης τῆς κλ ὡς ἐπὶ τὸ χ, καὶ τεθείσης τῆς θ ἴσης τῇ κχ. καὶ κέντρῳ τῷ κ, διαστήματι δὲ τὸ κχ κύκλου γραφέντος ὡς τοῦ χμν. ἔστι γὰρ ἡ κμ ἴση τῇ κχ, τουτέστι τῇ θ.



Η ἄρα νγ πολυγώνου ἐστὶν ἰσοπλεύρου καὶ ἀρτιοπλεύρου πλευρά. τῆς γὰρ μιᾶς ὀρθῆς οὔσης τεταρτημορίου βεβηκυίας, καὶ τῆς τομῆς κατὰ ἀρτίαν διαίρεσιν ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γινομένης, δῆλον ὅτι καὶ ἡ τοῦ τεταρτημορίου περιφέρεια εἰς ἀρτιάκις ἀρτίους τὸν ἀριθμὸν ἴσας διαιρεθήσεται περιφερείας. ὥστε καὶ ἡ ὑποτείνουσα εὐθεῖα μίαν τῶν περιφερειῶν, πολυγώνου ἐστὶν ἰσοπλεύρου καὶ ἀρτιοπλεύρου πλευρά. ὥστε καὶ ἡ οπ πολυγώνου ἐστὶν ἰσοπλεύρου πλευρά. ἐὰν γὰρ τῇ ὑπὸ ξην γωνίᾳ ἴσην ποιήσαντες τὴν ὑπὸ πηδ, ἀπὸ τοῦ π ἐπὶ τὸ δ ἐπιζεύξωμεν καὶ προσεκβάλωμεν ἄχρι τῆς ηθ ἴσην τῇ ὑπὸ πηδ, ἔσται ἴση ἡ πθ τῇ πο, ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου. ἐπεὶ γὰρ ἡ ξη ἴση ἐστὶ τῇ ηδ, κοινὴ δὲ ἡ ηπ καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι, καὶ βάσις ἄρα ἡ ξπ τῇ πδ ἴση ἐστί. καὶ ἡ ὑπὸ πξη ὀρθὴ οὖσα, τῇ ὑπὸ πδη. ὥστε ἐφάπτεται ἡ δπ. ἐπεὶ οὖν αἱ πρὸς τὸ δ ὀρθαί εἰσιν, εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ πηδ, δηθ ἴσαι, καὶ ἡ πρὸς ταῖς ἴσαις κοινὴ ἡ δη, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ πδ τῇ θδ. ἀλλ' ἡ ξπ τῇ πδ ἐδείχθη ἴση, καὶ ἡ θπ ἄρα τῇ πο ἐστὶν ἴση, καὶ πάσαις ταῖς ὁμοίως ἐφαπτομέναις. ὥστε ἡ θπ πολυγώνου ἐστὶν ἰσοπλεύρου καὶ ἀρτιοπλεύρου πλευρὰ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφομένου. ὅτι δὲ καὶ ὅμοιον τῷ ἐγγραφομένῳ αὐτόθεν δῆλον. ἴσης γὰρ οὔσης τῆς μὲν θη τῇ ηπ, τῆς δὲ γη τῇ ην, παράλληλος γάρ ἐστιν ἡ οπ τῇ γν, διὰ τὰ αὐτὰ καὶ ἡ πθ τῇ νκ. ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ γνκ τῇ ὑπὸ οπθ ἴση ἐστί. καὶ διὰ τοῦτο ὅμοιόν ἐστι τὸ περιγεγραμμένον τῷ ἐγγεγραμμένῳ.



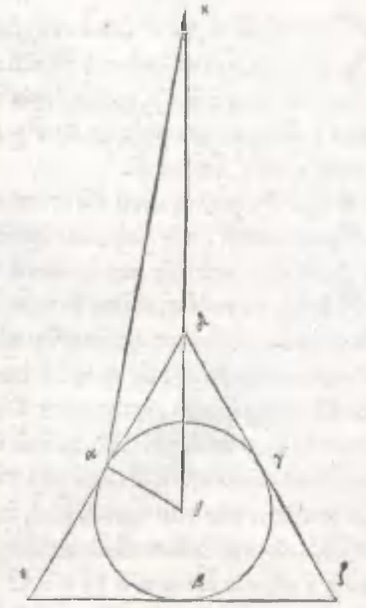
Η ἄρα μκ πρὸς κλ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γη πρὸς ητ. μείζονος γὰρ οὔσης τῆς πρὸς τὸ κ γωνίας τῆς ὑπὸ γητ, ἐὰν τῇ ὑπὸ γητ ἴσην συστησόμεθα τὴν ὑπὸ λκρ τοῦ ρ μεταξὺ τῶν λμ νοουμένου, τὸ λκρ τρίγωνον τῷ γητ ὅμοιόν ἐστιν, ὡς ἡ ρκ πρὸς κλ, οὕτως ἡ γη πρὸς ητ. ὥστε καὶ ἡ μκ πρὸς κλ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γη πρὸς ητ.

ΕΙΣ ΤΟ ς

Διὰ δὴ τοῦτο ἔλασσόν ἐστι τὸ περιγραφόμενον τοῦ συναμφοτέρου. ἐπεὶ γὰρ τὸ περιγραφόμενον πρὸς τὸ ἐγγραφόμενον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ συναμφότερον πρὸς τὸν κύκλον, πολλῷ ἄρα τὸ περιγραφόμενον πρὸς τὸν κύκλον. ὥστε τὸ περιγραφόμενον ἔλασσόν ἐστι τοῦ συναμφοτέρου. καὶ κοινοῦ ἀφαιρουμένου τοῦ κύκλου, λοιπὰ τὰ περιλείμματα ἐλάσσονα ἐστὶ τοῦ β χωρίου.

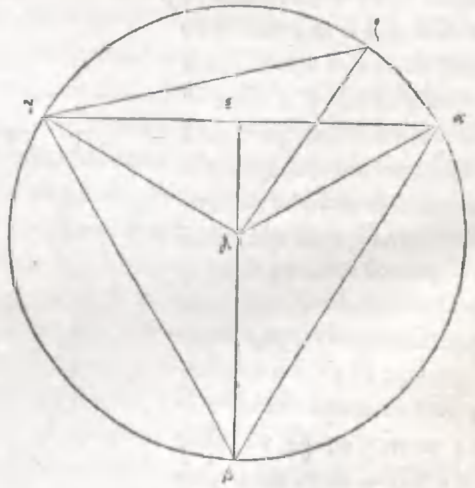
ΕΙΣ ΤΟ Η.

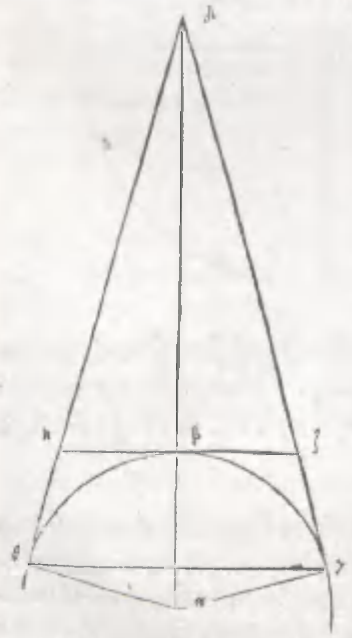
Αἱ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὰ α, β, γ ἐπιζευγνύμεναι κάθετοι εἰσὶν ἐπ᾽ αὐτάς. νενοήσθω γὰρ χωρὶς ὁ κῶνος. καὶ ἔστω κορυφὴ μὲν αὐτοῦ τὸ η, κέντρον δὲ τῆς βάσεως αὐτοῦ τὸ θ. καὶ ἀπὸ τοῦ θ ἐπὶ τὸ α ἐπεζεύχθω ἡ θα. ἀπὸ δὲ τοῦ η, ἡ ηα. λέγω ὅτι ἡ ηα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν δε. ἐπεὶ γὰρ ἡ ηθ κάθετός ἐστι πρὸς τὸ τοῦ κύκλου ἐπίπεδον, καὶ πάντα τὰ διὰ αὐτῆς ἐπίπεδα, ὥστε καὶ τὸ ηθα τρίγωνον ὀρθόν ἐστι πρὸς τὴν βάσιν, καὶ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων τῇ θα πρὸς ὀρθὰς ἦκται ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων ἡ δε. ἡ ἄρα δε τῷ ηθα ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν, ὥστε καὶ πρὸς τὴν ηα. ὁμοίως δὲ δειχθήσονται καὶ ἐπὶ τὰ γ, β ἐπιζευγνύμεναι ἀπὸ τῆς κορυφῆς κάθετοι οὖσαι ἐπὶ τὰς δζ, εζ. ἐπιστῆσαι δὲ χρή, ὅτι ἐπὶ μὲν τοῦ πρὸ τούτου καλῶς προέκειτο, τὸ δεῖν πάντως τὴν ἐγγραφομένην πυραμίδα ἰσόπλευρον ἔχειν τὴν βάσιν. οὐ καλῶς γὰρ αἱ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὰς τῆς βάσεως πλευρὰς ἴσαι ἠδύναντο εἶναι. ἐπὶ δὲ τοῦ προκειμένου οὐ προσέθηκεν τὸ εἶναι ἰσόπλευρον τὴν βάσιν, διὰ τὸ δύνασθαι, κἂν ὁποιαδήτις ᾖ, τὸ αὐτὸ ἀκολουθεῖν.



ΕΙΣ ΤΟ Θ.

Μείζονα ἄρα ἐστὶ τὰ αβδ, βδγ τρίγωνα, τοῦ αδγ τριγώνου. ἐπεὶ γὰρ στερεὰ γωνία ἐστὶν ἡ πρὸς τῷ δ, αἱ ὑπὸ αδβ, βδγ μείζους εἰσὶ τῆς ὑπὸ αδγ. καὶ ἐὰν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν διχοτομίαν τῆς βάσεως ἐπιζεύξωμεν, ὡς τὴν δε κάθετον γινομένην ἐπὶ τὴν αγ, ἔσται ἡ ὑπὸ αδβ μείζων τῆς ὑπὸ αδε. συνεστάτω οὖν τῇ ὑπὸ αδβ ἴση ἡ ὑπὸ αδζ. καὶ τεθείσης τῆς δζ ἴσης τῇ δγ, ἐπεζεύχθω ἡ αζ.





ἐπεὶ οὖν δύο δυσὶν ἴσαι, ἀλλὰ καὶ γωνία γωνίᾳ, καὶ τὸ αβδ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ αδζ τριγώνῳ, μείζονι ὄντι τοῦ αδε. καὶ τὸ αβδ ἄρα τρίγωνον τοῦ αδε μεῖζόν ἐστιν. ὁμοίως δὲ καὶ τὸ δβγ, τοῦ δεγ. δύο ἄρα τὰ αδβ, δβγ, τοῦ αδβ μείζονα ἐστίν.

ΕΙΣ ΤΟ Ι.

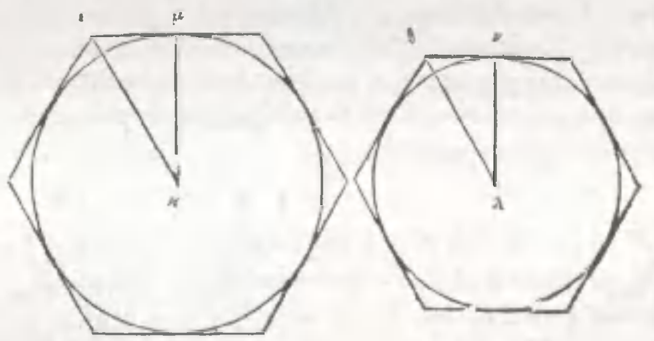
Ἤχθω γὰρ ἡ ηζ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου, καὶ παράλληλος οὖσα τῇ αγ, δίχα τμηθείσης τῆς αβγ περιφερείας κατὰ τὸ β. ὅτι γὰρ ἡ οὕτως ἀγομένη παράλληλός ἐστι τῇ αγ, δειχθήσεται ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ θ, ἐπιζευχθεισῶν τῶν θα, θδ, θγ. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ αδ τῇ δγ, καὶ κοινὴ ἡ δθ, δύο δυσὶν ἴσαι, ἀλλὰ καὶ βάσις ἡ αθ βάσει τῇ θγ, καὶ γωνία ἄρα γωνίᾳ ἐστὶν ἴση. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ηβδ, βδζ γωνίαι ὀρθαί.

θαι. ἀπὸ γὰρ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἁφὴν ἐπέζευκται ἡ θβ. ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ δηβ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ δζβ ἐστὶν ἴση. καὶ διὰ τοῦτο ἡ ηδ τῇ δζ ἴση ἐστίν. ὥστε παράλληλός ἐστιν ἡ ζη τῇ αγ.

Περιγραφέντων δὴ πολυγώνων περὶ τὸ τμῆμα, ὁμοίως δίχα τεμνομένων τῶν περιλειπομένων περιφερειῶν, καὶ ἀγομένων ἐφαπτομένων, λείψομέν τινα ἀποτμήματα ἐλάσσονα τοῦ θ χωρίου. ἐπὶ μὲν τῶν ἐγγραφομένων δέδεικται ἐν τῇ στοιχειώσει, ὅτι τὰ ἐγγραφόμενα τρίγωνα εἰς τμήματα μείζονά ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ τῶν καθ᾽ ἑαυτὰ τμημάτων. καὶ διὰ τοῦτο δυνατόν ἐστι, τέμνοντας τὰς περιφερείας δίχα καὶ ἐπιζευγνύντας εὐθείας, καταλείπειν τινὰ ἀποτμήματα ἐλάσσονα τοῦ δοθέντος χωρίου. ἐπὶ δὲ τῆς περιγραφῆς, οὐκέτι. τοῦτο δέδεικται ἐν τῇ στοιχειώσει. ἐπεὶ οὖν ἐν τῷ προκειμένῳ τοῦτό φησι, ὃ καὶ ἐστὶν αὐτὸ συλλογίσασθαι διὰ τοῦ ϛ θεωρήματος, δεικτέον ὅτι ἡ ἐφαπτομένη ἀφαιρεῖ τρίγωνον, μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ᾽ ἑαυτὸ περιλείμματος, οἷον ὡς ἐπὶ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς, ὅτι τὸ ηδζ τρίγωνον μεῖζόν ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ περιλείμματος τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τῶν αδ, δγ, καὶ τῆς αβγ περιφερείας. τῶν γὰρ αὐτῶν ἐπεζευγμένων, ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ δβζ, μείζων ἐστὶν ἡ δζ τῆς βζ. ἡ δὲ ζβ τῇ ζγ ἴση. ἐφάπτεται γὰρ ἑκατέρα αὐτῶν. καὶ ἡ δζ ἄρα τῆς ζγ μείζων, ὥστε καὶ τὸ δβζ τρίγωνον μεῖζόν ἐστι τοῦ βζγ τριγώνου. ὑπὸ γὰρ τὸ αὐτὸ ὕψος εἰσίν. πολλῷ ἄρα τοῦ βζγ περιλείμματος μεῖζόν ἐστι. διὰ τὰ αὐτὰ δή, καὶ τὸ δβη τοῦ βηα μεῖζον. ὅλον ἄρα τὸ δηζ μεῖζόν ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ αδγ περιλείμματος.

ΕΙΣ ΤΟ ΙΓ.

Νοείσθω δὴ εἰς τὸν β κύκλον περιγεγραμμένον, καὶ περὶ τὸν α κύκλον περιγεγραμμένον, ὅμοιον τῷ περὶ τὸν β περιγεγραμμένῳ. ὅπως μὲν οὖν ἐστιν εἰς τὸν δοθέντα κύκλον πολύγωνον ἐγγράψαι, ὅμοιον τῷ ἑτέρῳ ἐγγεγραμμένῳ, δῆλον. εἴρηται δὲ καὶ Πάππῳ εἰς τὸ ὑπόμνημα τῶν στοιχείων, περὶ τὸν δοθέντα κύκλον πολύγωνον περιγράψαι ὅμοιον τῷ περὶ ἕτερον κύκλον περιγεγραμμένῳ, οὐκ ἔτι ὁμοίως ἔχομεν εἰρημένον, ὅπερ νῦν λεκτέον. τῷ ἐν εἰς τὸν β κύκλον ἐγγεγραμμένῳ, ὅμοιον εἰς τὸν α ἐγγεγράφθω, καὶ περὶ αὐτὸν τὸν α ὅμοιον τῷ εἰς αὐτόν, ὡς ἐν τῷ γ θεωρήματι. καὶ ἔσται ὅμοιον καὶ τῷ περὶ τὸν β περιγεγραμμένῳ. καὶ ἐπεὶ ὅμοιά ἐστι τὰ εὐθύγραμμα τὰ περὶ τοὺς α, β κύκλους περιγεγραμμένα, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ὅνπερ καὶ αἱ ἐκ τῶν κέντρων δυνάμει. τὸ τοιοῦτον, ἐπὶ μὲν τῶν ἐγγεγραμμένων δέδεικται ἐν τῇ στοιχειώσει, ἐπὶ δὲ τῶν περιγεγραμμένων οὐκέτι. δειχθήσεται δὲ οὕτως. νενοήσθωσαν γὰρ χωρὶς τὰ περιγεγραμμένα καὶ ἐγγεγραμμένα εὐθύγραμμα. καὶ ἀπὸ τῶν κέντρων τῶν κύκλων ἐπεζευγμέναι αἱ κε, κμ, λθ, λν. φανερὸν δὴ ὅτι αἱ κε, λθ ἐκ τῶν κέντρων * τῶν περὶ τὰ περιγεγραμμένα πολύγωνα κύκλων. καὶ πρὸς ἀλλήλας * δυνάμει ὡς τὰ περιγεγραμμένα πολύγωνα. καὶ ἐπεὶ αἱ ὑπὸ κεμ, λθν ἡμίσειαι * τῶν ἐν τοῖς πολυγώνοις

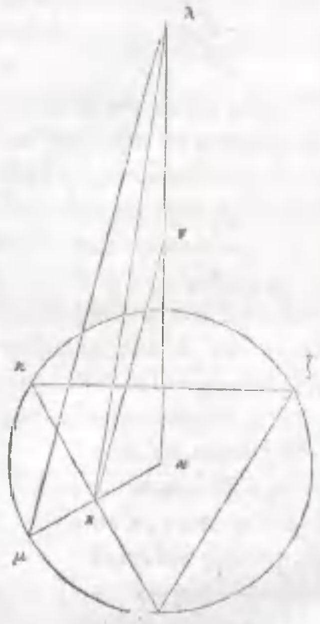


ὁμοίων ὄντων τῶν πολυγώνων, δῆλον ὅτι καὶ αὗται ἴσαι εἰσίν. ἀλλὰ καὶ αἱ πρὸς τοῖς μ, ν ὀρθαί. ἰσογώνια ἄρα τὰ κεμ, λθν τρίγωνα. καὶ ἔσται ὡς ἡ κε πρὸς λθ, ἡ κμ πρὸς λν. ὥστε καὶ τὰ ἀπ᾽ αὐτῶν, ἀλλ᾽ ὡς τὸ ἀπὸ κε πρὸς τὸ ἀπὸ θλ, οὕτως τὰ περιγεγραμμένα πρὸς ἄλληλα. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ κμ πρὸς τὸ ἀπὸ λν, οὕτως τὰ περιγεγραμμένα πρὸς ἄλληλα.

Τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει τὸ κτδ τρίγωνον πρὸς τὸ εὐθύγραμμον, τὸ περὶ τὸν β κύκλον, ὅνπερ τὸ κτδ τρίγωνον. ἐπεὶ γὰρ τὰ περὶ τοὺς α, β κύκλους εὐθύγραμμα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ ἐκ τῶν κέντρων δυνάμει, τουτέστιν ἡ τδ πρὸς ἡ δυνάμει, τουτέστιν ἡ τδ πρὸς ρζ μήκει, τουτέστιν ὡς τὸ κτδ τρίγωνον πρὸς τὸ ζρλ, ἴσον δὲ τὸ κτδ τῷ περὶ τὸν α κύκλον περιγεγραμμένῳ. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ κτδ πρὸς τὸ περὶ τὸν β κύκλον περιγεγραμμένον, οὕτως τὸ αὐτὸ κτδ τρίγωνον πρὸς τὸ ζρλ τρίγωνον. ἐναλλὰξ ἄρα ἐλάσσονα λόγον ἔχει τὸ πρίσμα πρὸς τὸν κύλινδρον, ἤπερ τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν β κύκλον πολύγωνον πρὸς τὸν β κύκλον, ὅπερ ἄτοπον, ἐὰν ποιήσωμεν ὡς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ πρίσματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου, οὕτως τὸ ἐγγεγραμ μένον εἰς τὸν β κύκλον πρὸς ἄλλο τι, ἔσται πρὸς ἔλασσον τοῦ β κύκλου, πρὸς ὃ μείζονα λόγον ἔχει τὸ ἐγγεγραμμένον, ἤπερ πρὸς τὸν κύκλον. τουτέστιν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος, πρὸς τὴν τοῦ κυλίνδρου ἐπιφάνειαν, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἐγγεγραμμένον πρὸς τὸν κύκλον. ἐδείχθη δὲ καὶ ἔλασσον, ὅπερ ἄτοπον.

ΕΙΣ ΤΟ ΙΔ.

Η δὲ γ πρὸς τὴν δ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ τὸ πολύγωνον τὸ ἐν τῷ α κύκλῳ ἐγγεγραμμένον, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὸν κῶνον. ἡ γὰρ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου κάθετος ἀγομένη ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου, πρὸς τὴν ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου κάθετον ἀγομένην ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου. νοείσθω γὰρ χωρὶς ἡ ἐν τῷ ῥητῷ καταγραφή, καὶ εἰς τὸν α κύκλον ἐγγεγραμμένον πολύγωνον τὸ ζ θ κ. καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου τοῦ α, ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου τὴν θ κ, κάθετος ἤχθω ἡ α η. φανερὸν δὴ ὅτι τὸ ὑπὸ τῆς περιμέτρου τοῦ πολυγώνου, καὶ τῆς α η διπλάσιόν ἐστι τοῦ πολυγώνου. νενοήσθω δὴ καὶ ἡ τοῦ κώνου κορυφὴ τὸ λ σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ λ ἐπὶ τὸ η ἐπεζευγμένη ἡ λ η κάθετος γίνεται, ἐπὶ τὴν θ κ, ὡς ἐδείχθη ἐν τῷ λήμματι τοῦ η θεωρήματος. ἐπεὶ οὖν ἰσόπλευρόν ἐστι τὸ ἐγγεγραμμένον πολύγωνον, ἔστι δὲ καὶ ἰσοσκελὴς ὁ κῶνος, αἱ ἀπὸ τοῦ λ ἐφ' ἑκάστην τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου ἀγόμεναι κάθετοι, ἴσαι εἰσὶ τῇ λ η. ἑκάστη γὰρ αὐτῶν δύναται τὸ ἀπὸ τοῦ ἄξονος καὶ τῆς ἴσης τῇ α η. διὰ δὲ τοῦτο καὶ τὸ ὑπὸ τῆς περιμέτρου τοῦ πολυγώνου καὶ τῆς λ η, διπλάσιόν ἐστι τῆς ἐπιφανείας τῆς πυραμίδος. τὸ γὰρ ὑφ' ἑκάστης πλευρᾶς, καὶ τῆς ἀπὸ τῆς κορυφῆς καθέτου ἐπ' αὐτὴν ἀγομένης ἴσης τῇ λ η, διπλάσιόν ἐστι τοῦ καθ' ἑαυτὴν τριγώνου. ὥστε ἐστὶν ὡς ἡ α η πρὸς η λ, τὸ πολύγωνον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος, κοινοῦ ὕψους τῆς περιμέτρου τοῦ πολυγώνου λαμβανομένου. ἀχθείσης δὴ τῆς η ν παρὰ τὴν μ λ, ἔσται ὡς ἡ α μ πρὸς μ λ, ἡ α η πρὸς η ν. ἡ δὲ α η πρὸς η ν μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὴν η λ. μείζων γὰρ ἡ λ η τῆς η ν. καὶ ἡ α μ ἄρα πρὸς μ λ, τουτέστιν ἡ γ πρὸς τὴν δ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ α η πρὸς η λ, τουτέστιν ἤπερ τὸ πολύγωνον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος.



ΕΙΣ ΤΟ Ις.

Καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν β α, α η, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν β δ ζ, καὶ τῷ ὑπὸ τῆς α δ, καὶ συναμφοτέρου τῆς δ ζ α η, διὰ τὸ παράλληλον εἶναι τὴν δ ζ τῇ α η. ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ δ ζ τῇ α η, ἔστιν ὡς ἡ β α πρὸς α η, ἡ β δ πρὸς δ ζ. καὶ διὰ τοῦτο τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων τῶν β α, δ ζ, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων τῶν β δ, α η. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν β α, δ ζ, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ β δ, δ ζ, καὶ τῷ ὑπὸ τῶν α δ, δ ζ. διὰ τὸ πρῶτον θεώρημα τοῦ β βιβλίου τῆς στοιχειώσεως. καὶ τὸ ὑπὸ τῶν β δ, α η ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ β δ, δ ζ καὶ τῷ ὑπὸ α δ, δ ζ. κοινὸν προκείσθω τὸ ὑπὸ δ α, α η, ὅπερ ὅλον τὸ ὑπὸ β α, α η, ἴσον ὅλῳ τῷ ὑπὸ β δ, δ ζ. καὶ τῷ ὑπὸ α δ, δ ζ. καὶ ἔτι τῷ ὑπὸ α δ, α η.

ΕΙΣ ΤΟ ΚΓ.

Τὸ δὲ πλῆθος τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου μετρείσθω ὑπὸ τετράδος. ὑπὸ τετράδος βούλεται μετρεῖσθαι τὰς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου διὰ τὸ τοῦ κύκλου κινουμένου περὶ τὴν α γ διάμετρον. πάσας τὰς πλευρὰς ὑπὸ κωνικῶν φέρεσθαι ἐπιφανειῶν χρησίμου ἐσομένου αὐτῷ ἐν τοῖς ἑξῆς τοῦ τοιούτου, μὴ γὰρ ὑπὸ τετράδος μετρουμένων τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου, καὶ ἀρτιοπλεύρου ὄντος, οὐ πάσας δυνατὸν κατὰ κωνικῶν φέρεσθαι ἐπιφανειῶν, ὡς κατανοῆσαι ἔνεστιν ἐπὶ τῶν τοῦ ἑξαγώνου πλευρῶν. δύο γὰρ τὰς ἀπεναντίον αὐτοῦ παραλλήλους πλευρὰς κατὰ κυλινδρικῆς φέρεσθαι ἐπιφανείας συμβαίνει, ὅπερ ὡς εἴρηται οὐ χρήσιμον αὐτῷ πρὸς τὰ ἑξῆς.

ΕΙΣ ΤΟ ΚΘ.

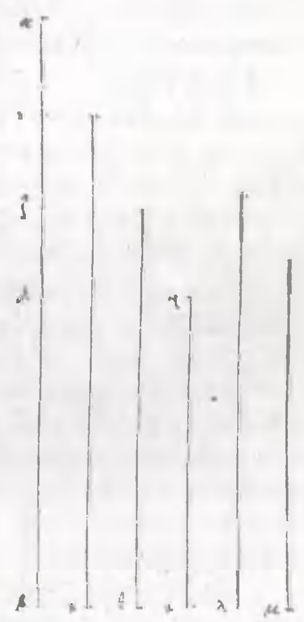
Η δὲ κ θ, ἴση ἐστὶ τῇ διαμέτρῳ τοῦ α β γ δ κύκλου. ἐὰν γὰρ ἀπὸ τοῦ χ ἐπιζεύξαμεν ἐπὶ τὸ σημεῖον καθ' ὃ ἐφάπτεται ἡ κ ξ τοῦ α β γ δ κύκλου νοούμενον τὸ μ. ὁμοίως δὲ καὶ τὴν χ κ, ἐπεὶ ἴση ὄντι ἡ χ κ τῇ χ ζ. εἰσὶ δὲ καὶ ὀρθαὶ αἱ πρὸς τὸ μ. ἴση γὰρ καὶ ἡ κ μ τῇ μ ζ. ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ζ χ τῇ χ θ ἴση. παράλληλος ἄρα ἡ χ μ τῇ κ θ. καὶ διὰ τοῦτο ἔσται ὡς ἡ θ ζ πρὸς ζ χ, οὕτως ἡ κ θ πρὸς χ μ. διπλῆ δὲ ἡ θ ζ τῆς χ ζ. διπλῆ ἄρα καὶ ἡ κ θ τῆς χ μ ἐκ τοῦ κέντρου οὔσης τοῦ α β γ δ κύκλου.

ΕΙΣ ΤΟ Λ.

Ἔχει δὲ καὶ ἡ διάμετρος τοῦ μ κύκλου πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ ν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ε λ πρὸς α κ. ἐὰν γὰρ ἐπιζευχθῶσιν αἱ η λ, γ κ, ὀρθῶν γωνιῶν τῶν πρὸς τοῖς κ, λ. καὶ παραλλήλου τῆς α κ τῇ λ ε. ἰσογώνιον γὰρ τὸ η λ ε τρίγωνον, τῷ γ κ α τριγώνῳ. καὶ διὰ τοῦτο ἐστὶν ὡς ἡ η λ πρὸς λ ε, οὕτως ἡ γ κ πρὸς κ α. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ η λ πρὸς λ ε, οὕτως πᾶσαι αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς τοῦ περιγεγραμμένου γωνίας, πρὸς τὴν τοῦ περὶ τὸ περιγεγραμμένον κύκλου διάμετρον. ὡς δὲ ἡ γ κ πρὸς κ α, οὕτως πᾶσαι αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς τοῦ ἐγγεγραμμένου γωνίας πρὸς τὴν τοῦ α β γ δ κύκλου διάμετρον. ὡς ἄρα πᾶσαι, αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς τοῦ περιγεγραμμένου γωνίας, πρὸς τὴν τοῦ περὶ αὐτὸ κύκλου διάμετρον, οὕτως πᾶσαι αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς τοῦ ἐγγεγραμμένου γωνίας, πρὸς τὴν τοῦ α β γ δ κύκλου διάμετρον. ὡς δὲ ἡ διάμετρος πρὸς τὴν πλευράν, οὕτως ἡ διάμετρος πρὸς τὴν πλευράν. ἐπεὶ καὶ ὡς ἡ μ ε πρὸς ε λ, οὕτως ἡ μ α πρὸς α κ. καὶ δι' ἴσου ἄρα, ὡς πᾶσαι αἱ ἐπιζευγνύουσαι πρὸς τὴν ε λ, οὕτως πᾶσαι αἱ ἐπιζευγνύουσαι πρὸς τὴν α κ, ἀλλ' ὡς πᾶσαι πρὸς τὴν πλευρὰν τὴν ε λ, οὕτως τὸ ὑπὸ πασῶν καὶ τῆς ε λ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μ πρὸς τὸ ἀπὸ ε λ, τῆς ε λ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης. ὡς δὲ πᾶσαι πρὸς τὴν α κ, οὕτως τὸ ὑπὸ πασῶν καὶ τῆς α κ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ν, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς α κ. κοινοῦ ὕψους πάλιν λαμβανομένης τῆς α κ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μ πρὸς τὸ ἀπὸ ε λ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ν, πρὸς τὸ ἀπὸ α κ. καὶ ὡς ἄρα αὐτὴ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μ πρὸς τὴν ε λ, οὕτως ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ν πρὸς τὴν α κ. ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μ, πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ν, οὕτως ἡ ε λ πρὸς α κ. καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ διπλάσια, ὡς ἡ διάμετρος τοῦ μ πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ ν, ἡ ε λ πρὸς α κ.

ΕΙΣ ΤΟ ΛΒ.

Αἱ ε, θ εἰλημμέναι, ὥστε τῷ ἴσῳ ἀλλήλων ὑπερέχειν, τὴν κ τῆς ε, καὶ τὴν ε τῆς θ, καὶ τὴν θ τῆς η. τὸ πρόβλημά ἐστι, δύο δοθεισῶν εὐθειῶν δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν ἐν ἀριθμητικῇ ἀναλογίᾳ, ὅταν τὸν ὅτι τῷ ἴσῳ ἀλλήλων ὑπερέχειν. ποιεῖται δὲ αὐτὸ οὕτως. ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ α β, γ κ ἄνισοι. καὶ ἀφαιρεθείσης ἀπὸ τῆς α β ἴσης τῇ γ κ, τῆς β δ, ἡ λοιπὴ ἡ α δ τετμήσθω τριχῇ κατὰ τὰ ε, ζ. καὶ τῇ μὲν ε β ἴση κείσθω ἡ η, τῇ δὲ β ζ ἴση ἡ θ. ἔσονται δὴ αἱ θ, ε, η ποιοῦσαι τὸ πρόβλημα. λέγω δὴ ὅτι καὶ ἡ α β πρὸς τὴν γ κ μείζονα ἢ τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἔχει ἡ α β πρὸς τὴν η. γεγονέτω γὰρ ὡς ἡ α β πρὸς τὴν η, οὕτως ἡ η πρὸς ἄλλην τινὰ τὴν λ. καὶ ἐπεὶ ᾧ μέρει ἑαυτῆς ἡ α β ὑπερέχει τῆς η, τούτῳ καὶ ἡ η ἑαυτῆς ὑπερέχει τῆς λ. τὸ δὲ αὐτὸ μέρος τῆς α β μεῖζόν ἐστι τοῦ μέρους τῆς η. μείζονι ἄρα ὑπερέχει ἡ α β τῆς η, ἤπερ ἡ η τῆς λ. τῷ δὲ αὐτῷ ὑπερέχει ἡ α β τῆς η, καὶ ἡ η τῆς θ. μείζονι ἄρα ὑπερέχει ἡ η τῆς θ, ἤπερ ἡ η τῆς λ, ὥστε μείζων ἡ λ τῆς θ. ἐὰν δὴ πάλιν ποιήσωμεν ὡς τὴν η πρὸς τὴν λ, οὕτως τὴν λ πρὸς μ, πολλῷ μείζων ἔσται τῆς γ κ. καὶ ἐπεὶ τέσσαρες εὐθεῖαι αἱ α β, η, λ, μ, ἑξῆς ἀνάλογον εἰσὶν ἡ α β πρὸς τὴν μ, τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ α β πρὸς η. ὥστε ἡ α β πρὸς τὴν γ κ μείζονα ἢ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὴν η.



ΕΙΣ ΤΟ ΛΕ.

Ἀλλὰ τὸ ὑπὸ ε θ, ἐστὶ τῶν ε ζ, γ δ, κ α δέδεικται ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ε λ, κ θ. ἐν γὰρ τῷ δευτέρῳ καὶ εἰκοστῷ θεωρήματι δέδεικται, ὅτι αἱ ε ζ, γ δ, κ α, πρὸς τὴν θ κ τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσιν, ὃν ἡ λ ε πρὸς ε θ. ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων. τὸ δὲ ὑπὸ ε λ, κ θ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ἀπὸ θ α. καὶ γὰρ τὸ ὑπὸ λ θ, θ κ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ θ α. ὡς ἐστι δῆλον ἐπιζευγνυμένης τῆς α λ. καὶ διὰ τὸ ὁμοίους γινομένους τοὺς θ α κ τριγώνους τῷ θ α λ. ἔστι γὰρ ὡς ἡ λ θ πρὸς θ α, ἡ α θ πρὸς θ κ. καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς μέσης.

ΕΙΣ ΤΟ ΛΖ.

Ἕξει δὴ καὶ τὸ αὐτὸ κέντρον τῷ α β γ κύκλῳ. ἐὰν γὰρ ἀπὸ τοῦ δ ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι ἐπὶ τὰ θ, ε, λ ἴσαι ἔσονται, διὰ τὸ καὶ τὰς ἀπὸ τοῦ δ ἐπὶ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυμένας εὐθείας καθέτους εἶναι ἐπὶ τὰς ἐφαπτομένας. καὶ αὐτὰς δὲ τὰς ἐφαπτομένας δίχα τέμνεσθαι πρὸς τῇ ἁφῇ. ὅταν δὲ ἄρα, μείζων ἐστὶν ἡ ἐπιφάνεια τῆς ἐπιφανείας. ἐπεὶ γὰρ ἡ μ ζ ἐπὶ κωνικῆς ἐπιφανείας φέρεται κωλούρου ἐπιφανείας ποιήσεται, ᾗ ἴσος ἐστὶ κύκλος, οὗτος ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέσον λόγον ἔχει τῆς ζ μ, καὶ τῆς ἡμισείας συναμφοτέρου τῆς ζ η καὶ τῆς μ ν. ὁμοίως δὴ καὶ τῇ ὑπὸ τῆς μ α γινομένῃ κωλούρου κώνου ἐπιφανείᾳ, ἴσος ἐστὶ κύκλος, οὗτος ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέσον λόγον ἔχει τῆς μ α καὶ τῆς ἡμισείας συναμφοτέρου τῆς α β καὶ μ ν. καί ἐστιν ἡ μὲν ζ μ μείζων τῆς μ α, ἡ δὲ ζ η τῆς α β. μείζων ἄρα καὶ ἡ μέση τῆς μέσης, ὥστε καὶ ἡ ἐπιφάνεια τῆς ἐπιφανείας. ἡ ἄρα ὑπὸ ζ μ, ν ἐστὶ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ μ α, ν β ἐπιφανείας.

ΕΙΣ ΤΟ ΛΗ.

Ἡ ἄρα τοῦ σχήματος τοῦ κ ζ λ ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶ τοῦ κύκλου, καὶ τὰ ἑξῆς. ἀσαφέστερον δοκεῖ συνῆχθαι τὸ εἰρημένον. λέγοις δ' ἂν σαφῶς οὕτως. ἐπεὶ ὁ ν κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος, ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ν δύναται τὸ ὑπὸ μ θ, ζ η, τὸ δὲ ὑπὸ μ θ, ζ η, μεῖζον τοῦ ὑπὸ γ δ, δ ξ. ἡ μὲν γὰρ μ θ ἴση δέδεικται τῇ γ δ. ἡ δὲ ζ η μείζων τῆς δ ξ. ὁ ν ἄρα κύκλος μείζων ἐστὶ τοῦ κύκλου, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ γ δ, δ ξ. τὸ δὲ ὑπὸ γ δ, δ ξ, ἴσον τῷ ἀπὸ δ α. ὁ ἄρα ν κύκλος, τουτέστιν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου, μείζων ἐστὶ τοῦ κύκλου, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ δ α.

ΕΙΣ ΤΟ ΛΘ.

Ἀλλὰ τὰ εἰρημένα χωρία πρὸς ἄλληλά ἐστιν, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ε κ πλευρᾶς πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς α λ πλευρᾶς. ἐὰν γὰρ ἐπιζευχθῇ ἡ δ λ κ, παράλληλος ἔσται ἡ ε κ τῇ α λ, ἐστὶν ὡς ἡ ε κ πρὸς α λ, ὡς δὲ ἡ ε δ πρὸς δ α, ἡ ε ζ πρὸς α γ. καὶ ὡς ἄρα ἡ ε κ πρὸς α λ, ἡ ε ζ πρὸς α γ. καὶ ἡμίσεια τῆς ε ζ πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς α γ. ὁμοίως δὴ καὶ ἐπὶ πασῶν τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰς γωνίας τῶν πολυγώνων δειχθήσεται, ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον πρὸς ἀλλήλας, ὃν ἡ ε κ πρὸς α λ. καὶ ὡς ἄρα ἓν πρὸς ἕν, οὕτως ἅπαντα πρὸς ἅπαντα. ὡς ἄρα ἡ ε κ πρὸς α λ, οὕτως πᾶσαι αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς τοῦ περιγεγραμμένου γωνίας μετὰ τῆς ἡμισείας τῆς βάσεως τοῦ μείζονος τμήματος, πρὸς πάσας τὰς ἐπιζευγνυούσας μετὰ τῆς ἡμισείας τῆς βάσεως τοῦ ἐλάσσονος τμήματος. ὥστε καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ε κ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς α λ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῆς ε κ καὶ πασῶν, πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς α λ καὶ πασῶν. τὰ γὰρ ὅμοια εὐθύγραμμα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. καὶ τὸ μὲν τῆς ε κ πρὸς α λ λόγος διπλασίων ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς ε κ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς α λ. τῶν δὲ ἐπιζευγνυουσῶν τὰς τοῦ μείζονος, πρὸς τὰς ἐπιζευγνυούσας τὰς τοῦ ἐλάσσονος, διπλασίων ἐστὶν ὁ τοῦ ὑπὸ τῆς ε κ, καὶ πασῶν, πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς α λ καὶ πασῶν. ὅμοια γὰρ καὶ ταῦτα, διὰ τὸ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχειν.

Καὶ ἐστὶν ὡς ἡ ε κ πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας, οὕτως ἡ α λ πρὸς τὴν ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν α λ κάθετον ἠγμένην. ἐὰν γὰρ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἁφὴν ἐπιζευχθῇ εὐθεῖα, ἔσται ἡ ἐπιζευχθεῖσα κάθετος ἐπ' ἀμφοτέρας τὰς ε κ, α λ. καὶ ἔσται ὡς ἡ ε λ πρὸς δ α, τουτέστιν ἡ ε κ πρὸς α λ, ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας πρὸς τὴν ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν α λ κάθετον.

Ἐδείχθη δὲ ὡς ἡ ε κ πρὸς α λ, οὕτως ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μ κύκλου, πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ν κύκλου. ἐπεὶ δέδεικται ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον, οὕτως ὁ μ κύκλος πρὸς τὸν ν. τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ν.

ΕΙΣ ΤΟ Μ.

Ἑκάτερος γὰρ τῶν λόγων διπλάσιός ἐστι τοῦ ὃν ἔχει ἡ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου. ἐδείχθη γὰρ ἐν τῷ πρὸ τούτου, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου τοῦ ἴσου τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ περιγεγραμμένου, πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου τοῦ ἴσου τῇ ἐπιφανείᾳ

ἐπιφανείᾳ τοῦ ἐγγεγραμμένου, οὕτως ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου. οἱ δὲ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους ἐν διπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἐκ τῶν κέντρων. καὶ ἡ ἐπιφάνεια ἄρα πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευράν.

ΕΙΣ ΤΟ ΜΒ.

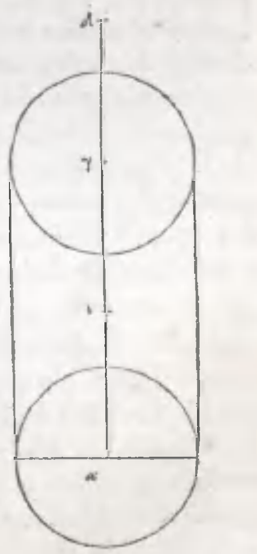
Τὸ ἄρα περιγεγραμμένον στερεὸν πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ὁ στερεὸς τομεὺς πρὸς τὸν θ κῶνον. εἰ γὰρ τὸ περιγεγραμμένον στερεὸν πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα ἢ τριπλασίονα λόγον ἔχει, τοῦ ὃν ἔχει ἡ β πρὸς ζ, ἡ δὲ δ πρὸς ε μείζονα ἢ τριπλασίονα, τὸ ἄρα περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ δ πρὸς ε. ἡ δὲ δ πρὸς ε ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ τομεὺς πρὸς τὸν κῶνον. καὶ τὸ περιγεγραμμένον ἄρα πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ τομεὺς πρὸς τὸν κῶνον.

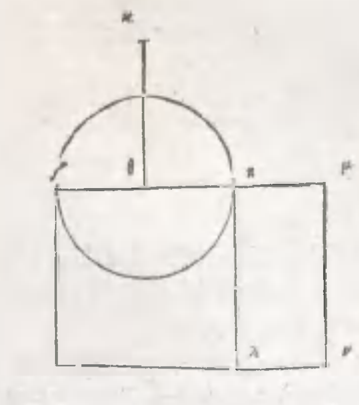
Εὐτοκίου ἀσκαλωνίτου ὑπόμνημα εἰς τὸ πρῶτον τῶν ἀρχιμήδους περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου ἐκδόσεως, παραναγνωσθείσης τῷ μιλησίῳ μηχανικῷ ἰσιδώρῳ ἡμετέρῳ διδασκάλῳ.

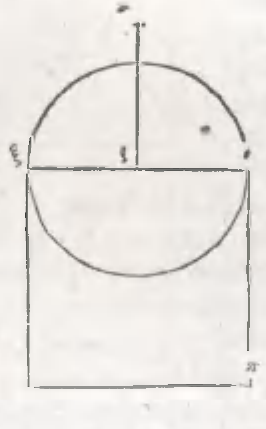
ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΑΣΚΑΛΩΝΙΤΟΥ

ΥΠΟΜΝΗΜΑ ΕΙΣ ΤΟ Β. ΠΕΡΙ ΣΦΑΙΡΑΣ καὶ κυλίνδρου.

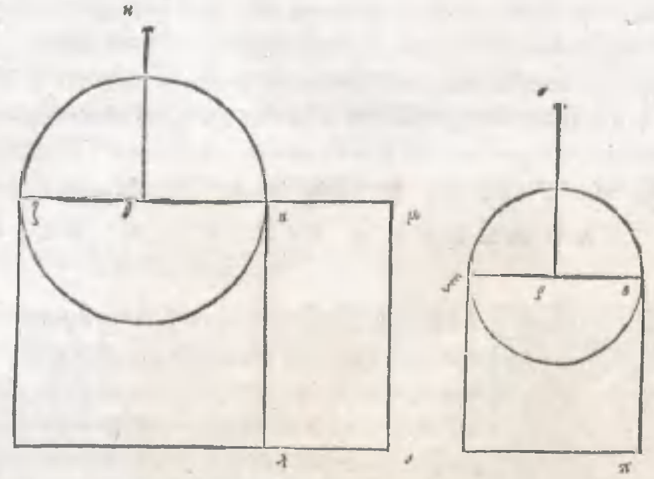
Σαφῶς ἡμῖν τῶν ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ θεωρημάτων γεγραμμένων, ἀκόλουθος καὶ ἡ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἐν τοῖς δευτέροις θεωρήμασι σπουδή. φησὶ δὲ πρῶτον ἐν τῷ α θεωρήματι. εἰλήφθω τοῦ δοθέντος κώνου, ἢ κυλίνδρου ἡμιόλιος κύλινδρος. τοῦτο δὲ διχῶς δυνατόν ἐστιν εἰπεῖν. ἤτοι τῆς βάσεως τῆς αὐτῆς σωζομένης ἐν ἀμφοτέροις, ἢ τοῦ ὕψους. καὶ ἵνα σαφέστερον γένηται τὸ λεγόμενον, νενοήσθω κῶνος, ἢ κύλινδρος, οὗ βάσις μὲν ὁ α κύκλος, ὕψος δὲ ἡ α γ. καὶ δέον ἔστω αὐτοῦ ἡμιόλιον κύλινδρον εὑρεῖν. ὑποκείσθω δὲ πρότερον ὁ α γ κύλινδρος, καὶ προσεκβεβλήσθω τὸ α γ ὕψος τοῦ κυλίνδρου, καὶ κείσθω τῆς α γ ἡμίσεια ἡ γ δ, ἡ ἄρα α δ ἡμιολία ἐστὶ τῆς α γ. ἐὰν δὴ νοήσωμεν κύλινδρον, βάσιν μὲν ἔχοντα τὸν α κύκλον, ὕψος δὲ τὴν α δ εὐθεῖαν, ἡμιόλιος ἔσται τοῦ προτεθέντος τοῦ α γ. οἱ γὰρ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι, πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, ὡς τὰ ὕψη. Εἰ δὲ κῶνος εἴη ὁ α γ, τμηθείσης τῆς α γ δίχα ὡς κατὰ τὸ ε. ἐὰν πάλιν νοηθῇ κύλινδρος βάσιν μὲν ἔχων τὸν α κύκλον, ὕψος δὲ τὴν α ε, ἔσται ἡμιόλιος τοῦ α γ. ὁ γὰρ κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὸν α κύκλον, ὕψος δὲ τὴν α γ εὐθεῖαν, τοῦ μὲν α γ κώνου τριπλάσιός ἐστι, τοῦ δὲ α ε κυλίνδρου διπλάσιος. ὥστε δῆλον, ὅτι καὶ ὁ α ε κύλινδρος ἡμιόλιός ἐστι τοῦ α γ κώνου. οὕτως μὲν οὖν τῆς αὐτῆς βάσεως σωζομένης, ἔν τε τῷ προτεθέντι,



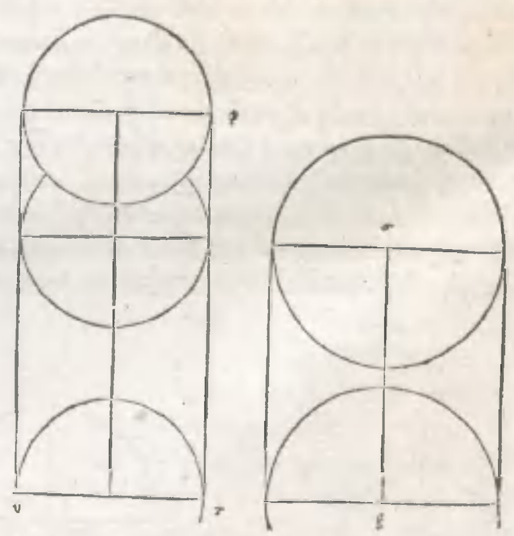




καὶ ἐν τῷ λαμβανομένῳ γενήσεται τὸ πρόβλημα. ἔνεστι δὲ καὶ τῆς βάσεως διαφόρου τυγχανούσης, τοῦ δὲ ἄξονος τοῦ αὐτοῦ μένοντος τὸ αὐτὸ ποιεῖν. ἔστω γὰρ πάλιν κῶνος ἢ κύλινδρος, οὗ βάσις ὁ ζ η κύκλος, ὕψος δὲ ἡ θ κ εὐθεῖα. οὗ δέον ἔστω ἡμιόλιον κύλινδρον εὑρεῖν, ὕψος ἔχοντα ἴσον τῇ θ κ. ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ζ η διαμέτρου τοῦ κύκλου τετράγωνον τὸ ζ λ, καὶ προσεκβληθείσης τῆς ζ η, κείσθω αὐτῆς ἡμίσεια ἡ η μ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ζ ν παραλληλογράμμου. τὸ ἄρα ζν ἡμιόλιόν ἐστι τοῦ ζλ, καὶ ἡ μζ τῆς ζκ. συνεστάτω δὴ τῷ ζν παραλληλογράμμῳ ἴσον τετράγωνον τὸ ξπ. καὶ περὶ διάμετρον μίαν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ τὴν ξο κύκλος περιγεγράφθω. ἔσται δὴ ὁ ξο ἡμιόλιος τοῦ ζη. οἱ γὰρ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα. καὶ ἐὰν πάλιν νοηθῇ κύλινδρος βάσιν μὲν ἔχων τὸν ξο κύκλον, ὕψος δὲ ἴσον τῇ θκ, ἔσται ἡμιόλιος τοῦ κυλίνδρου οὗ βάσις μὲν ὁ ζη κύκλος, ὕψος δὲ ἡ θκ. εἰ δὲ κῶνος εἴη, ὁμοίως τὰ αὐτὰ ποιήσαντες, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ζν παραλληλογράμμου ἴσον συστησάμενοι τετράγωνον, ὡς τὸ ξπ. καὶ περὶ τὴν πλευρὰν αὐτοῦ τὴν ξο κύκλον γράψαντες, νοήσομεν ἀπ' αὐτοῦ κυλίνδρον ὕψος ἔχοντα τὴν θκ. ἐσόμενον αὐτὸν ἡμιόλιον τοῦ προτεθέντος κώνου. ἐπεὶ γὰρ τὸ ζν παραλληλόγραμμον τοῦ ξπ τετραγώνου τριπλάσιον, τοῦ δὲ ζλ ἡμιόλιον, τὸ ζλ τοῦ ξπ ἔσται διπλάσιον. καὶ διὰ τοῦτο καὶ ὁ κύκλος τοῦ κύκλου διπλάσιος, καὶ ὁ κύλινδρος τοῦ κυλίνδρου. ἀλλ' ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὴν ζη κύκλον, ὕψος δὲ τὴν θκ, τριπλάσιός ἐστι τοῦ περὶ τὴν αὐτὴν βάσιν, καὶ ὕψος τὸ αὐτὸ κώνου. ὥστε καὶ ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὸν ξο κύκλον, ὕψος δὲ ἴσον τῇ θκ, ἡμιόλιός ἐστι τοῦ προκειμένου κώνου.



εἰ δέοι μήτε τὸν ἄξονα τὸν αὐτὸν εἶναι, μήτε τὴν βάσιν, γενήσεται τὸ πρόβλημα πάλιν διχῶς. ἢ γὰρ τὴν βάσιν ἕξει ἴσην τῇ δοθείσῃ, ἢ τὸν ἄξονα ὁ πορίζομενος κύλινδρος. ἔστω γὰρ πρότερον ἡ βάσις δεδομένη, ὡς ὁ ξο κύκλος. καὶ δέον ἔστω κύλινδρον εὑρεῖν ἡμιόλιον τοῦ δοθέντος κώνου, ἢ κυλίνδρου ἀπὸ βάσεως τῆς ξο, εἰλήφθω ὡς προείρηται τοῦ δοθέντος κώνου, ἢ κυλίνδρου ἡμιόλιος κύλινδρος, βάσιν ἔχων τὴν αὐτὴν τῷ προτεθέντι ὁ φυ. καὶ γεγονέτω ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ξο, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς τυ, οὕτως τὸ ὕψος τοῦ φυ πρὸς τὴν ρσ. ἔσται ἄρα ὁ κύλινδρος ὁ ἀπὸ τῆς ξο, βάσεως ὕψος ἔχων τὴν ρσ, ἴσος τῷ φυ. ἀντιπεπόνθασι γὰρ αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπίταγμα. εἰ δὲ μὴ ἡ βάσις ἡ δεδομένη, ἀλλὰ ὁ ἄξων τῷ αὐτῷ λόγῳ πορισθέντος τοῦ φυ, γενήσεται τὰ τῆς προτάσεως.



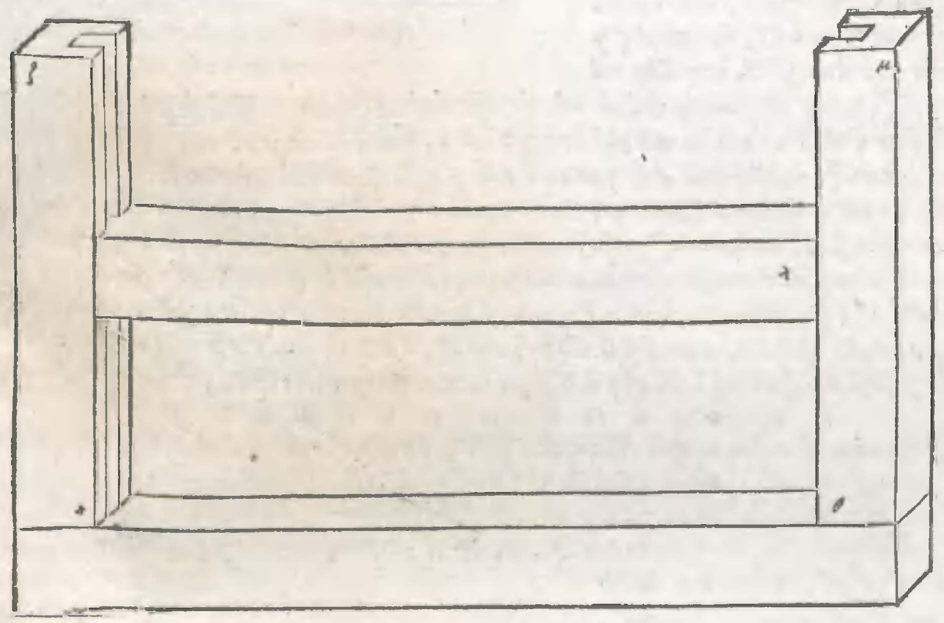
ΕΙΣ ΤΗΝ ΣΥΝΘΕΣΙΝ ΤΟΥ Α.

Τούτου ληφθέντος, ἐπεὶ δι' ἀναλύσεως αὐτοῦ προέβη τὰ τοῦ προβλήματος, λήξασης τῆς ἀναλύσεως εἰς τὸ δεῖν δύο δοθεισῶν δύο μέσας ἀνάλογον προσευρεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, φησὶν ἐν τῇ συνθέσει εὑρήσθωσαν. τὴν δὲ εὕρεσιν τούτων ἐπ' αὐτοῦ μὲν γεγραμμένην, οὐδὲ ὅλως εὑρίσκομεν. πολλῶν δὲ κλεινῶν ἀνδρῶν γραφαῖς ἐντυχήκαμεν, τὸ πρόβλημα τοῦτο ἐπαγγελλομέναις, ὧν τὴν Εὐδόξου τοῦ Κνιδίου παρῃτησάμεθα γράφειν. ἐπειδή φησι μὲν ἐν προοιμίοις διὰ καμπύλων γραμμῶν αὐτὴν ηὑρηκέναι. ἐν δὲ τῇ ἀποδείξει πρὸς τὸ μὴ κεχρῆσθαι καμπύλαις γραμμαῖς, ἀλλὰ καὶ διῃρημένην ἀναλογίαν εὑρὼν, ὡς συνεχεῖ χρῆται, ὅπερ ἦν ἄτοπον ὑπονοῆσαι, τί λέγω περὶ Εὐδόξου,

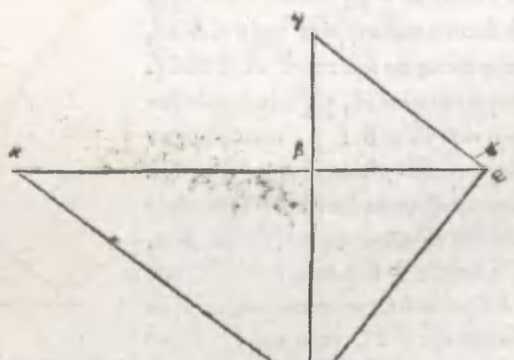
ἀλλὰ περὶ τῶν καὶ μετρίως περὶ γεωμετρίαν ἀνεστραμμένων. ἵνα δὲ ἡ τῶν εἰς ἡμᾶς ἐληλυθότων ἀνδρῶν ἔννοια ἐμφανὴς γένηται, ὁ ἑκάστου τῆς εὑρέσεως τρόπος καὶ ἐνταῦθα γραφήσεται.

ΩΣ ΠΛΑΤΩΝ.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ. ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ αβ, βγ, πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις. ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν. ἐκβεβλήσθωσαν ἐπ' εὐθείας ἐπὶ τὰ δ, ε, καὶ κατεσκευάσθω ὀρθὴ γωνία ἡ ὑπὸ ζηθ. καὶ ἐν ἑνὶ σκέλει οἷον τῷ ζη. κινείσθω κανὼν ὁ κλ ἐν σωλῆνί τινι ὄντι ἐν τῷ ζη, οὕτως ὥστε παράλληλον αὐτὸν διαμένειν τῷ ηθ. ἔσται δὲ τοῦτο, ἐὰν καὶ ἕτερον κανόνιον νοηθῇ συμφυὲς τῷ θη, παράλληλον δὲ τῷ ζη, ὡς τὸ θμ. σωλήνων γὰρ τῶν ἄνωθεν ἐπιφανειῶν τῶν ζη, θμ σωλῆσι πελεκινοειδέσι, καὶ τύλων συμφυῶν γενομένων τῷ κλ, εἰς τοὺς εἰρημένους σωλῆνας, ἔσται ἡ κίνησις τοῦ κλ παράλληλος ἀεὶ τῷ ηθ. τούτων οὖν κατεσκευασμένων, κείσθω τὸ ἐν σκέλος τῆς γωνίας

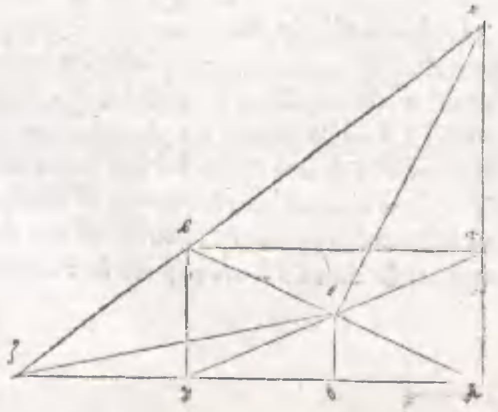


τυχὸν τὸ ηθ, ψαῦον τοῦ γ, καὶ μεταφερέσθω ἥτε γωνία καὶ ὁ κλ κανὼν ἐπὶ τοσοῦτον, ἄχρις ἂν οὗ τὸ μὲν η σημεῖον ἐπὶ τῆς βδ εὐθείας ᾖ, τοῦ ηθ σκέλους ψαύοντος τοῦ γ. ὁ δὲ κλ κανὼν κατὰ μὲν τὸ κ ψαύῃ τῆς βε εὐθείας, κατὰ δὲ τὸ λοιπὸν μέρος τοῦ α. ὥστε εἶναι ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς καταγραφῆς, τὴν μὲν ὀρθὴν γωνίαν θέσιν ἔχουσαν, ὡς τὴν ὑπὸ γδε. τὸν δὲ κλ κανόνα θέσιν ἔχειν, οἵαν ἔχει ἡ εα. τούτων γὰρ γενομένων ἔσται τὸ προκείμενον. ὀρθῶν γὰρ οὐσῶν τῶν πρὸς τοῖς δ, ε, ἐστὶν ὡς ἡ γβ πρὸς βδ, ἡ δβ πρὸς βε, καὶ ἡ εβ πρὸς βα.



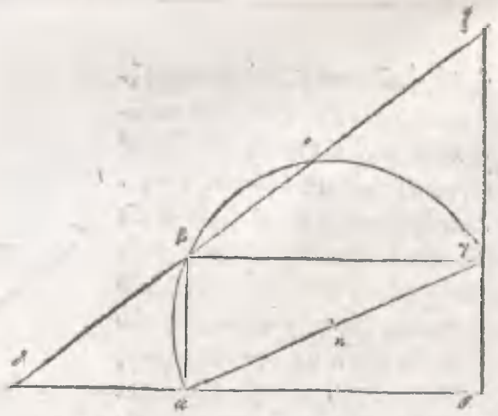
ΩΣ ΗΡΩΝ ΕΝ ΜΗΧΑΝΙΚΑΙΣ ΕΙΣΑΓΩΓΑΙΣ, καὶ ἐν τοῖς Βελοποιικοῖς.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ αβ, βγ. ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν. κείσθωσαν ὥστε ὀρθὴν γωνίαν περιέχειν τὴν πρὸς τῷ β, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ βδ παραλληλληλόγραμμον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αγ, βδ. φανερὸν δή, ὅτι ἴσαι οὖσαι δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας. ὁ γὰρ περὶ μίαν αὐτῶν γραφόμενος κύκλος ἥξει καὶ διὰ τῶν περάτων τῆς ἑτέρας, διὰ τὸ ὀρθογώνιον εἶναι τὸ παραλληλόγραμμον. ἐκβεβλήσθωσαν αἱ δγ, δα ἐπὶ τὰ ζ, η, καὶ νοείσθω κανόνιον ὡς τὸ ζβη, κινούμενον περί τινα τύλον, μένοντα πρὸς τῷ β, καὶ κινείσθω ἕως ἀποτέμοι ἴσας τὰς ἀπὸ τοῦ ε, τουτέστι τὰς εη, εζ. καὶ νοείσθω ἀποτεμόν, καὶ θέσιν ἔχον τὴν ζβη, ἴσων ὡς εἴρηται γινομένων τῶν εη, εζ. ἤχθω δὴ ἀπὸ τοῦ ε ἐπὶ τὴν γδ κάθετος ἡ εθ, δίχα δὴ τέμνει δῆλον ὅτι τὴν γδ. ἐπεὶ οὖν δίχα τέμνεται ἡ γδ κατὰ τὸ θ, καὶ πρόσκειται ἡ γζ, τὸ ὑπὸ δζγ μετὰ τοῦ ἀπὸ γθ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ θζ, κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ εθ. τὸ ἄρα ὑπὸ δζγ μετὰ τῶν ἀπὸ γθ, θε, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ ζθ, θε. καί ἐστι τοῖς μὲν ἀπὸ γθ, θε, ἴσον τὸ ἀπὸ γε. τοῖς δὲ ἀπὸ ζθ, θε, ἴσον τὸ ἀπὸ εζ. τὸ ἄρα ὑπὸ δζγ μετὰ τοῦ ἀπὸ γε, ἴσον τῷ ἀπὸ εζ. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ τὸ ὑπὸ δηα μετὰ τοῦ ἀπὸ αε, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ εη. καί ἐστιν ἴση ἡ μὲν αε τῇ εγ, ἡ δὲ ηε τῇ εζ. καὶ τὸ ὑπὸ δζγ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ δηα. ἐὰν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον ᾖ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσι. ἔστιν ἄρα ὡς ζδ πρὸς δη, οὕτως ἡ αη πρὸς γζ. ἀλλ' ὡς ἡ ζδ πρὸς δη, οὕτως ἡ ζγ πρὸς γβ, καὶ ἡ βα πρὸς αη. τριγώνου γὰρ τοῦ ζδη παρὰ μίαν μὲν τὴν δη, ἦκται ἡ γβ. παρὰ δὲ τὴν δζ ἡ αβ. ὡς ἄρα ἡ βα πρὸς αη, οὕτως ἡ αη πρὸς γζ, καὶ ἡ γζ πρὸς γβ. τῶν ἄρα αβ, βγ, μέσαι ἀνάλογόν εἰσιν αἱ αη, γζ. ὅπερ ἔδει εὑρεῖν.



ΩΣ ΦΙΛΩΝ Ο ΒΥΖΑΝΤΙΟΣ.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ αβ, βγ, ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν, κείσθωσαν, ὥστε ὀρθὴν γωνίαν περιέχειν τὴν πρὸς τῷ β. καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς αγ, γεγράφθω περὶ αὐτὴν ἡμικύκλιον τὸ αβεγ, καὶ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν, τῇ μὲν βα, ἡ αδ. τῇ δὲ βγ ἡ γζ. καὶ παρακείσθω κανὼν κινούμενος πρὸς τὸ β, τέμνων τὰς αδ, γζ. καὶ κεκινήσθω περὶ τὸ β, ἄχρις ἂν ἡ ἀπὸ τοῦ β ἐπὶ τὸ δ ἴση γένηται τῇ ἀπὸ τοῦ ε ἐπὶ τὸ ζ, τουτέστι τῇ μεταξὺ τῆς τε περιφερείας τοῦ κύκλου καὶ τῆς γζ. νενοήσθω οὖν ἔχον τὸ κανόνιον θέσιν οἵαν ἔχει ἡ δβεζ, ἴσης οὔσης ὡς εἴρηται τῆς δβ τῇ εζ. λέγω ὅτι αἱ αδ, γζ μέσαι ἀνάλογόν εἰσι τῶν αβ, βγ. νενοήσθωσαν γὰρ ἐκβεβλημέναι αἱ δα, ζγ, καὶ συμπίπτουσαι κατὰ τὸ θ. φανερὸν δὴ ὅτι παραλλήλων οὐσῶν τῶν βα, ζθ, ἡ πρὸς τὸ θ γωνία ὀρθή ἐστι. καὶ ὁ αεγ κύκλος ἀναπληρούμενος ἥξει καὶ διὰ τοῦ θ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ δβ τῇ εζ, καὶ τὸ ὑπὸ εδβ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ βζε. ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ εδβ, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ θδα. ἑκάτερον γὰρ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης ἀπὸ τοῦ δ. τὸ δὲ ὑπὸ βζε, ἴσον τῷ ὑπὸ θζγ. ἑκάτερον γὰρ ὁμοίως ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης ἀπὸ τοῦ ζ. ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ θδα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ θζγ. καὶ διὰ τοῦτο ἐστὶν ὡς ἡ δθ πρὸς θζ, οὕτως ἡ γζ πρὸς δα. ἀλλ' ὡς ἡ θδ πρὸς θζ, οὕτως ἥ τε βγ πρὸς γζ, καὶ ἡ δα πρὸς αβ. τριγώνου γὰρ τοῦ δθζ, παρὰ μὲν τὴν δθ, ἦκται ἡ βγ, παρὰ δὲ τὴν θζ ἡ βα. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βγ πρὸς ζγ, ἡ γζ πρὸς δα, ἡ δα πρὸς αβ, ὅπερ προέκειτο δεῖξαι.

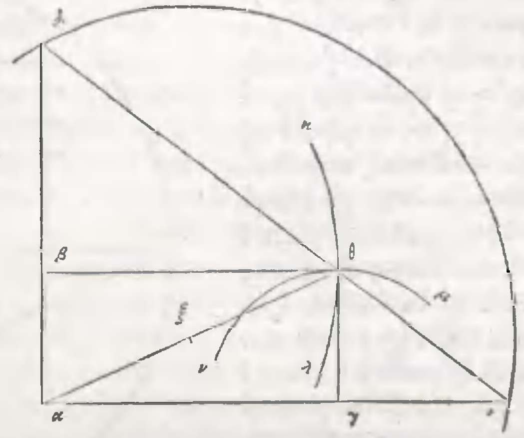


Ἰστέον

Ἰστέον δέ, ὅτι ἡ τοιαύτη κατασκευὴ σχεδὸν ἡ αὐτή ἐστι τῇ ὑπὸ Ἥρωνος κατασκευῆς, καὶ αἱ προσεκβαλλόμεναι πλευραὶ αἱ θα, θγ. καὶ ὁ πρὸς τῷ β κινούμενος κανών. ταύτῃ δὲ μόνον διαφέρει, ὅτι ἐκεῖ μὲν μέχρι τοσούτου ἐκινοῦμεν περὶ τὸ β τὸν κανόνα, ἄχρις ἂν αἱ ἀπὸ τῆς διχοτομίας τῆς αγ, τουτέστι τοῦ κ ἴσαι ὑπ' αὐτοῦ ἀποτέμνονται πρὸς τὰς θδ, θζ προσπιπτούσαις, ὡς αἱ κδ, κζ, ἐνταῦθα δὲ ἄχρις ἂν ἡ δβ ἴση γένηται τῇ εζ. ἐφ' ἑκατέρας δὲ κατασκευῆς τὸ αὐτὸ ἀκολουθεῖ. τὸ δὲ νῦν εἰρημένον πρὸς χρῆσιν εὐθετώτερον. τὰς γὰρ δβ, εζ ἴσας τηρεῖν ἐνδέχεται διῃρημένου τοῦ δζ κανόνος εἰς ἴσα καὶ συνεχῆ. πολὺ γὰρ εὐκολώτερον τοῦ καρκίνῳ διαπειράζειν τὰς ἀπὸ τοῦ κ ἴσας πρὸς τὰ δ, ζ.

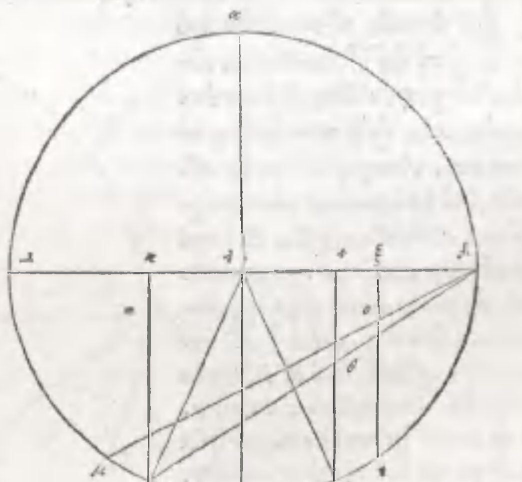
ΩΣ ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι, ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν αἱ αβγ, ὀρθὴν περιέχουσαι γωνίαν τὴν πρὸς τῷ α, κέντρῳ μὲν τῷ β, διαστήματι δὲ τῷ αγ, κύκλου περιφέρεια γεγράφθω ἡ κθλ. καὶ πάλιν κέντρῳ τῷ γ, καὶ διαστήματι τῷ αβ κύκλου περιφέρεια γεγράφθω ἡ μθν. καὶ τεμνέτω τὴν κθλ κατὰ τὸ θ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ θα, θβ, θγ. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ αγ. διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ θα. τετμήσθω δίχα ἡ θα τῷ ξ, καὶ κέντρῳ τῷ ξ γεγράφθω κύκλος τέμνων τὰς αβ, αγ ἐκβληθείσας κατὰ τὰ δ, ε. ὥστε μέντοι τὰ δ, ε ἐπ' εὐθείας εἶναι τῷ θ, ὅπερ ἂν γένοιτο κανονίου κινουμένου περὶ τὸ θ, τέμνοντος τὰς αδ, αε. καὶ παραγομένου ἐπὶ τοσοῦτον ἄχρις ἂν αἱ ἀπὸ τοῦ ξ ἐπὶ τὰ δ, ε ἴσαι γένωνται. τούτου γὰρ γενομένου ἔσται τὸ ζητούμενον. ἡ γὰρ αὐτὴ κατασκευή ἐστι τῇ τε ὑπὸ Ἥρωνος καὶ Φίλωνος γεγραμμένῃ. καὶ δῆλον ὅτι καὶ ἡ ἀπόδειξις ἡ αὐτὴ ἁρμόσει.



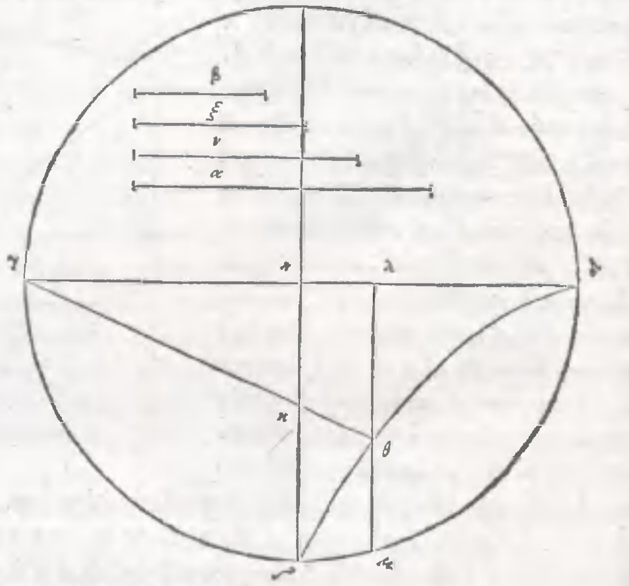
ΩΣ ΔΙΟΚΛΗΣ ΕΝ ΤΩ ΠΕΡΙ ΠΥΡΙΩΝ.

Ἐν κύκλῳ ἤχθωσαν δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς αἱ αβ, γδ, καὶ δύο περιφέρειαι ἴσαι ἀπειλήφθωσαν ἐφ' ἑκάτερα τοῦ β αἱ εβ, βζ. καὶ διὰ τοῦ ζ παράλληλος τῇ αβ, ἤχθω ἡ ζη. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δε. λέγω ὅτι τῶν γη, ηθ δύο μέσαι ἀνάλογόν εἰσιν αἱ ζη, ηδ. ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ ε τῇ αβ παράλληλος ἡ εκ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν εκ τῇ ζη, ἡ δὲ κγ τῇ ηδ. ἔσται γὰρ τοῦτο δῆλον ἀπὸ τοῦ λ ἐπὶ τὰ ε, ζ ἐπιζευχθεισῶν εὐθειῶν. ἴσαι γὰρ γίνονται αἱ ὑπὸ γλε, ζλδ. καὶ ὀρθαὶ αἱ πρὸς τοῖς κ, η. καὶ πάντα ἄρα πᾶσιν διὰ τὴν λε τῇ λζ ἴσην εἶναι, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ γκ τῇ ηδ ἴση ἐστίν. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ δκ πρὸς κε, ἡ δη πρὸς ηθ, ἀλλ' ὡς ἡ δκ πρὸς κε, ἡ εκ πρὸς κγ. μέση γὰρ ἀνάλογόν ἡ εκ τῶν δκ, κγ. ὡς ἄρα ἡ δκ πρὸς κε, καὶ ἡ εκ πρὸς κγ, οὕτως ἡ δη πρὸς ηθ. καί ἐστιν ἴση ἡ μὲν δκ τῇ γη, ἡ δὲ κε τῇ ζη. ἡ δὲ κγ τῇ ηδ. ὡς ἄρα ἡ γη πρὸς ηζ, ἡ ζη πρὸς ηδ, καὶ ἡ δη πρὸς ηθ. ἐὰν δὴ παρ' ἑκάτερα τοῦ β ληφθῶσι περιφέρειαι ἴσαι μβ, βν. καὶ διὰ μὲν τοῦ ν παράλληλος ἀχθῇ τῇ αβ ἡ νξ. ἐπιζευχθῇ δὲ ἡ δμ. ἔσονται πάλιν τῶν γξ, ξο μέσαι ἀνάλογον αἱ νξ, ξδ. πλειόνων οὖν οὕτως καὶ συνεχῶν παραλλήλων ἐκβληθεισῶν μετα



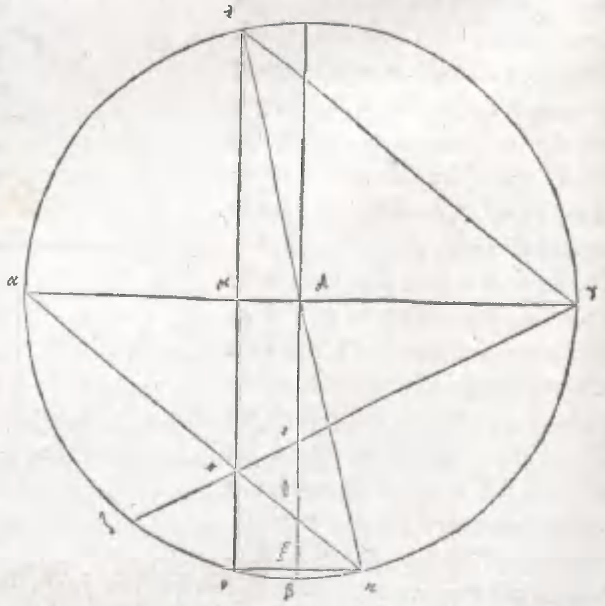
ξὺ τῶν β, δ. καὶ ταῖς ἀπολαμβανομέναις ὑπ' αὐτῶν περιφερείαις πρὸς τῷ β, ἴσων τιθεμένων ἀπὸ τοῦ β ὡς ἐπὶ τὸ γ, καὶ ἐπιζευχθεισῶν εὐθειῶν ἀπὸ τοῦ δ, ὡς τῶν ὁμοίως ταῖς δε, δμ, τμηθήσονται αἱ παράλληλοι αἱ μεταξὺ τῶν β, δ κατά τινα σημεῖα, ὡς ἐπὶ τῆς προκειμένης καταγραφῆς τὰ ο, θ. ἐφ' ἃ κανόνος παραθέσει ἐπιζεύξαντες εὐθείας, ἕξομεν καταγεγραμμένην ἐν τῷ κύκλῳ τινὰ γραμμήν. ἐφ' ἧς ἐὰν ληφθῇ τυχὸν σημεῖον, καὶ δι' αὐτοῦ παράλληλος ἀχθῇ τῇ λβ, καὶ ἡ ἀχθεῖσα, καὶ ἡ ἀπολαμβανομένη ὑπ' αὐτῆς ἀπὸ τῆς διαμέτρου πρὸς τῷ δ, μέσαι ἀνάλογον ἔσονται τῆς τε ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῆς ἀπὸ τῆς διαμέτρου πρὸς τῷ γ σημείῳ, καὶ τοῦ μέρους αὐτῆς τοῦ ἀπὸ τοῦ ἐν τῇ γραμμῇ σημείου ἐπὶ τὴν γδ διάμετρον.

Τούτων προκατεσκευασμένων, ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι, ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν, αἱ α, β. καὶ ἔστω κύκλος, ἐν ᾧ δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ γδ, εζ. καὶ γεγράφθω ἐν αὐτῷ ἡ διὰ τῶν συνεχῶν σημείων γραμμὴ ὡς προείρηται, ἡ δθζ. καὶ γεγονέτω ὡς ἡ α πρὸς τὴν β, ἡ γη πρὸς ηκ. καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ γκ, καὶ ἐκβληθεῖσα τεμνέτω τὴν γραμμὴν κατὰ τὸ θ, καὶ διὰ τοῦ θ τῇ εζ παράλληλος ἤχθω ἡ λμ. διὰ ἄρα τὰ προγεγραμμένα τῶν γλ, λθ μέσαι ἀνάλογόν εἰσιν αἱ μλ, λδ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ γλ πρὸς λθ, οὕτως ἡ γη πρὸς ηκ. ὡς δὲ ἡ γη πρὸς ηκ, οὕτως ἡ α πρὸς τὴν β. ἐὰν ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ταῖς γλ, λμ, λδ, λθ παρεμβάλλωμεν μέσας τῶν α, β ὡς τὰς ν, ξ, ἔσονται εἰλημμέναι τῶν α, β μέσαι ἀνάλογον αἱ ν, ξ. ὅπερ ἔδει εὑρεῖν.



ΩΣ ΠΑΠΠΟΣ ΕΝ ΜΗΧΑΝΙΚΑΙΣ ΕΙΣΑΓΩΓΑΙΣ.

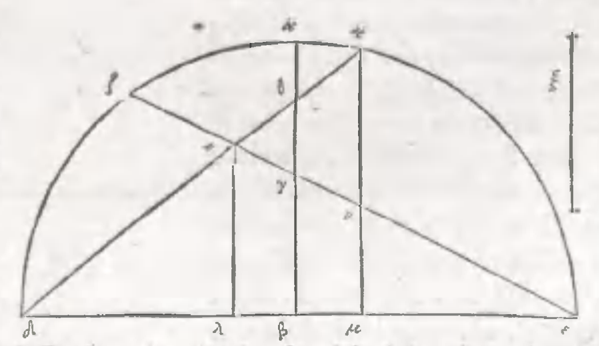
Προέθετο μὲν ὁ Πάππος κύβον εὑρεῖν πρὸς τὸν δοθέντα κύβον, λόγον ἔχοντα δεδομένον. καὶ ὡς πρὸς τὴν τοιαύτην πρότασιν καὶ τὰ ἀπὸ τῆς ἀποδείξεως αὐτῷ προέρχεται. δῆλον δὲ ὅτι τούτου εὑρισκομένου, καὶ τὸ προκείμενον εὑρίσκεται. δύο γὰρ δοθεισῶν εὐθειῶν, ἐὰν ὀφειλουσῶν μέσων εὑρεθῆναι, ἡ δευτέρα εὑρεθῇ, καὶ ἡ τρίτη αὐτόθεν δοθήσεται. γεγράφθω γάρ, ὥς φησιν αὐτὸς κατὰ λέξιν, ἡμικύκλιον τὸ αβγ. καὶ ἀπὸ τοῦ δ κέντρου πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ δβ, καὶ κινείσθω κανόνιον περὶ τὸ α σημεῖον. ὥστε τὸ μὲν ἓν πέρας αὐτοῦ προσκεῖσθαι τυλίῳ τινὶ κατὰ τὸ α σημεῖον. τὸ δὲ λοιπὸν μέρος ὡς περὶ κέντρον τὸ τυλάριον κινείσθω μεταξὺ τῶν β, γ. τούτων δὲ κατεσκευασμένων ἐπιτετάχθω δύο κύβους εὑρεῖν, λόγον ἔχοντας πρὸς ἀλλήλους τὸν ἐπιταχθέντα, καὶ τῷ λόγῳ ὁ αὐτὸς πεποιήσθω ὁ τῆς βδ πρὸς δε.



δε. καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ γε ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ ζ. παραγέσθω δὴ τὸ κανόνιον μεταξὺ τῶν β, γ, ἕως οὗ τὸ ἀπολαμβανόμενον αὐτοῦ μέρος μεταξὺ τῶν ζε, εβ εὐθειῶν, ἴσον γένηται τῷ μεταξὺ τῆς βε εὐθείας, καὶ τῆς βκγ περιφερείας. τοῦτο γὰρ πειράζοντες, καὶ μετάγοντες τὸ κανόνιον, ῥᾳδίως ποιήσομεν. γεγονέτω δὴ καὶ ἐχέτω θέσιν τὴν ακ, ὥστε ἴσας εἶναι τὰς ηθ, θκ. λέγω ὅτι ὁ ἀπὸ τῆς βδ κύβος, πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς δθ κύβον, λόγον ἔχει τὸν ἐπιταχθέντα, τουτέστι τὸν τῆς βδ πρὸς δε. νενοήσθω γὰρ ὁ κύκλος ἀναπεπληρωμένος, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ κδ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ λ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ λη. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ βδ τῇ λη, διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν μὲν κθ τῇ ηθ, τὴν δὲ κδ τῇ δλ. ἐπεζεύχθω δὴ ἥ τε αλ καὶ ἡ λγ. ἐπεὶ οὖν ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ αλγ, ἐν ἡμικυκλίῳ γάρ, καὶ κάθετος ἡ λμ. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ λμ πρὸς τὸ ἀπὸ μα, τουτέστιν ἡ γμ πρὸς μα, οὕτως τὸ ἀπὸ αμ πρὸς τὸ ἀπὸ μη. κοινὸς προσκείσθω ὁ τῆς αμ πρὸς μη λόγος. ὁ ἄρα συγκείμενος λόγος, ἔκ τε τοῦ τῆς γμ πρὸς μα, καὶ τοῦ τῆς αμ πρὸς μη, τουτέστιν ὁ τῆς γμ πρὸς μη λόγος, ὁ αὐτός ἐστι τῷ συγκειμένῳ ἔκ τε τοῦ ἀπὸ τῆς αμ πρὸς τὸ ἀπὸ μη, καὶ τοῦ τῆς αμ πρὸς μη. ὁ δὲ συγκείμενος λόγος ἔκ τε τοῦ ἀπὸ τῆς αμ πρὸς τὸ ἀπὸ μη, καὶ τοῦ τῆς αμ πρὸς μη, ὁ αὐτός ἐστι τῷ λόγῳ, ὃν ἔχει ὁ ἀπὸ τῆς αμ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς μη. καὶ ὁ τῆς γμ ἄρα πρὸς μη λόγος, ὁ αὐτός ἐστι τῷ λόγῳ, ὃν ἔχει ὁ ἀπὸ τῆς αμ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς μη. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ γμ πρὸς μη, οὕτως ἡ γδ πρὸς δε. ὡς δὲ ἡ αμ πρὸς μη, ἡ αδ πρὸς δθ. καὶ ὡς ἄρα ἡ βδ πρὸς δε, τουτέστιν ὡς ὁ δοθεὶς λόγος, οὕτως ὁ ἀπὸ τῆς βδ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς δθ κύβον. τῶν ἄρα ὀφειλουσῶν εὑρεθῆναι δύο μέσων ἀνάλογον τῶν βδ, δε, δευτέρα ἐστὶν ἡ δθ. καὶ ἐὰν ποιήσωμεν ὡς τὴν βδ πρὸς δθ, τὴν θδ πρὸς ἄλλην τινά, ἔσται καὶ ἡ τρίτη ηὑρημένη. προσέχειν δὲ χρὴ ὡς καὶ ἡ τοιαύτη κατασκευὴ ἡ αὐτή ἐστι τῇ ὑπὸ Διοκλέους εἰρημένῃ, τούτῳ μόνον διαφέρουσα, τῷ ἐκεῖνον μὲν γραμμήν τινα καταγράφειν διὰ συνεχῶν σημείων μεταξὺ τῶν α, β. ἐφ' ἧς ἐλαμβάνετο τὸ η, ἐκβαλλομένης τῆς γε, καὶ τεμνούσης τὴν εἰρημένην γραμμήν. ἐνταῦθα δὲ τὸ η πορίζεται, διὰ τοῦ ακ κανόνος κινουμένου περὶ τὸ α. ὅτι γὰρ τὸ η τὸ αὐτό ἐστιν, εἴτε ὡς ἐνταῦθα διὰ τοῦ κανόνος ληφθῇ, εἴτε ὡς ἔφη Διοκλῆς, μάθοιμεν ἂν οὕτως ἐκβληθείσης τῆς μη κατὰ τὸ ν, ἐπεζεύχθω ἡ κν. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ κθ τῇ θη, καὶ παράλληλος ἡ ην τῇ θβ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ κξ τῇ ξν, καὶ κοινὴ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ξβ. ἡ γὰρ κν δίχα τε καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνεται ὑπὸ τῆς διὰ τοῦ κέντρου, καὶ βάσις ἄρα βάσει ἴση, καὶ διὰ τοῦτο καὶ ἡ κβ περιφέρεια τῇ βν. τὸ ἄρα η ἐστὶ τὸ ἐπὶ τῆς γραμμῆς τοῦ Διοκλέους, καὶ ἡ ἀπόδειξις δὲ αὐτή ἐστιν. ἔφασκεν γὰρ ὁ Διοκλῆς, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ γμ πρὸς μν, οὕτως ἡ μν πρὸς μα. καὶ ἡ αμ πρὸς μη. ἴση δέ ἐστιν ἡ ημ τῇ μλ. ἡ γὰρ διάμετρος πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ γμ πρὸς μλ, οὕτως ἡ λμ πρὸς μα, καὶ ἡ αμ πρὸς μη. τῶν ἄρα γμ, μη μέσαι ἀνάλογόν εἰσιν αἱ λμ, μα. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ γμ πρὸς μη, ἡ γδ πρὸς δε. ὡς δὲ ἡ γμ πρὸς μλ, ἡ αμ πρὸς μη, τουτέστιν ἡ γδ πρὸς δθ. καὶ τῶν δύο μέσων ἄρα τῶν γδ, δε, δευτέρα ἐστὶν ἡ δθ, ἥν τινα ἐπορίσατο καὶ ὁ Πάππος.

ΩΣ ΣΠΟΡΟΣ.

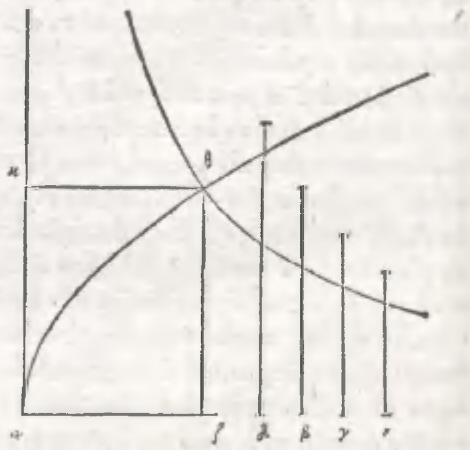
Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ αβ, βγ. δεῖ δὴ τῶν αβ, βγ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ. ἤχθω ἀπὸ τοῦ β τῇ αβ πρὸς ὀρθὰς ἡ δβε, καὶ κέντρῳ τῷ β, διαστήματι δὲ τῷ βα ἡμικύκλιον γεγράφθω τὸ δαε. καὶ ἀπὸ τοῦ ε ἐπὶ τὸ γ εὐθεῖα ἐπιζευχθεῖσα διήχθω ἐπὶ τὸ ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ δ διήχθω τις εὐθεῖα οὕτως, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν ηθ τῇ θκ. τοῦτο γὰρ δυνατόν. καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν η, κ ἐπὶ τὴν δε κάθετοι αἱ ηλ, κμ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ κθ πρὸς θη, ἡ μβ πρὸς βλ. ἴση δὲ ἡ κθ τῇ θη, ἴση ἄρα καὶ ἡ μβ τῇ βλ, ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ με τῇ λδ. καὶ ὅλη ἄρα ἡ δμ τῇ λε ἐστὶν ἴση. καὶ διὰ τοῦτο ἐστὶν ὡς ἡ μδ πρὸς δλ, ἡ λε πρὸς εμ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ μδ πρὸς δλ, ἡ κμ πρὸς ηλ. ὡς δὲ ἡ λε πρὸς εμ, ἡ ηλ πρὸς νμ. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ δμ πρὸς μκ, ἡ κμ πρὸς με. ὡς ἄρα ἡ δμ πρὸς με, οὕτως τὸ ἀπὸ δμ πρὸς τὸ ἀπὸ μκ, τουτέστι τὸ ἀπὸ δβ πρὸς τὸ ἀπὸ βθ. τουτέστι τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βθ. ἴση γὰρ ἡ δβ τῇ βα.



τῇ βα. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ μδ πρὸς δβ, ἡ λε πρὸς εβ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ μδ πρὸς δβ, ἡ κμ πρὸς θβ. ὡς δὲ ἡ λε πρὸς εβ, ἡ ηλ πρὸς γβ. καὶ ὡς ἄρα ἡ κμ πρὸς θβ, ἡ ηλ πρὸς γβ. καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ κμ πρὸς ηλ, ἡ θβ πρὸς γβ. ἀλλ' ὡς ἡ κμ πρὸς ηλ, ἡ μδ πρὸς δλ, τουτέστιν ἡ δμ πρὸς με, τουτέστι τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ, ἡ βθ πρὸς βγ. εἰλήφθω τῶν θβ, βγ μέση ἀνάλογον ἡ ξ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βθ, ἡ θβ πρὸς βγ, ἀλλὰ τὸ μὲν ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βθ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ αβ πρὸς βθ. ἡ δὲ θβ πρὸς βγ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ θβ πρὸς ξ. καὶ ὡς ἄρα ἡ αβ πρὸς βθ, ἡ θβ πρὸς ξ. ἀλλ' ὡς ἡ θβ πρὸς ξ, ἡ ξ πρὸς βγ. καὶ ὡς ἄρα ἡ αβ πρὸς βθ, ἡ θβ πρὸς ξ, καὶ ἡ ξ πρὸς βγ. φανερὸν δὲ ὅτι καὶ αὐτὴ ἡ αὐτή ἐστι τῇ ὑπὸ πάππου διοκλέους γραμμῇ.

ΩΣ ΜΕΝΕΧΜΟΣ.

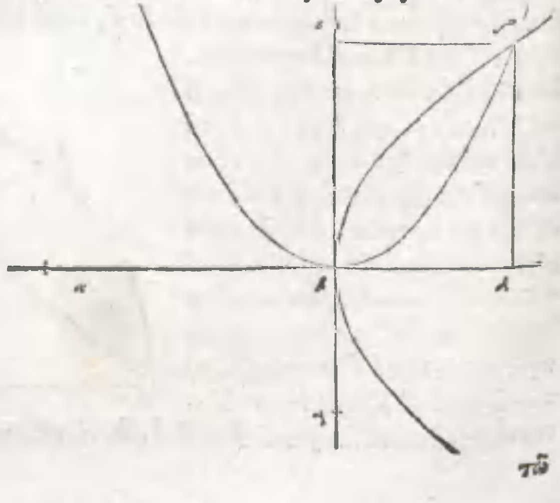
Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ δ, ε. δεῖ δὴ τῶν δ, ε δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν. γεγονέτω καὶ ἔστωσαν αἱ β, γ. καὶ ἐκκείσθω θέσει εὐθεῖα ἡ αη, πεπερασμένη κατὰ τὸ α. καὶ πρὸς τῷ α τῇ γ ἴση κείσθω ἡ αζ. καὶ ἤχθω πρὸς ὀρθὰς ἡ ζθ. καὶ τῇ β ἴση κείσθω ἡ ζθ. ἐπεὶ οὖν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ δ, β, γ, τὸ ὑπὸ τῶν δ, γ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς β. τὸ ἄρα ὑπὸ δοθείσης τῆς δ καὶ τῆς γ, τουτέστι τῆς αζ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς β, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ζθ. ἐπὶ παραβολῆς ἄρα τὸ θ, διὰ τοῦ α γεγραμμένης. ἤχθωσαν παράλληλοι αἱ θκ, ακ. καὶ ἐπεὶ δοθὲν τὸ ὑπὸ β, γ. ἴσον γάρ ἐστι τῷ ὑπὸ δ, ε. δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ κθζ. ἐπὶ ὑπερβολῆς ἄρα τὸ θ ἐν ἀσυμπτώτοις ταῖς κα, αζ. δοθὲν ἄρα τὸ θ, ὥστε καὶ τὸ ζ. συντεθήσεται δὴ οὕτως.



ἔστωσαν αἱ μὲν δοθεῖσαι εὐθεῖαι αἱ δ, ε. ἡ δὲ τῇ θέσει ἡ αη πεπερασμένη κατὰ τὸ α, καὶ γεγράφθω διὰ τοῦ α παραβολή, ἧς ἄξων μὲν ἡ αη, ὀρθία δὲ τοῦ εἴδους πλευρὰ ἡ δ. αἱ δὲ καταγόμεναι ἐπὶ τὴν αη ἐν ὀρθῇ γωνίᾳ δυνάσθωσαν τὰ παρὰ τὴν δ παρακείμενα χωρία, πλάτη ἔχοντα τὰς ἀπολαμβανομένας ὑπ' αὐτῶν πρὸς τῷ α σημείῳ. γεγράφθω, καὶ ἔστω ἡ αθ. καὶ ὀρθὴ ἡ ακ, καὶ ἐν ἀσυμπτώτοις ταῖς κα, αζ γεγράφθω ὑπερβολή, ἀφ' ἧς αἱ παρὰ τὰς κα, αζ ἀχθεῖσαι ποιήσουσι τὸ χωρίον ἴσον τῷ ὑπὸ δ, ε. τεμεῖ δὴ τὴν παραβολήν. τεμνέτω κατὰ τὸ θ, καὶ κάθετοι ἤχθωσαν αἱ θκ, θζ. ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ ζθ ἴσον τῷ ὑπὸ δ, αζ, ἔστιν ὡς ἡ δ πρὸς τὴν ζθ, ἡ ζθ πρὸς ζα. πάλιν ἐπεὶ τὸ ὑπὸ δ, ε ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ θζα, ἔστιν ὡς ἡ δ πρὸς τὴν ζθ, ἡ ζα πρὸς τὴν ε. ἀλλ' ὡς ἡ δ πρὸς τὴν ζθ, ἡ ζθ πρὸς ζα, καὶ ἡ ζα πρὸς ε. κείσθω τῇ μὲν θζ ἴση ἡ β, τῇ δὲ αζ ἴση ἡ γ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ δ πρὸς τὴν β, ἡ β πρὸς τὴν γ, καὶ ἡ γ πρὸς ε. αἱ δ, β, γ, ε ἄρα ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ὅπερ ἔδει εὑρεῖν.

ΑΛΛΩΣ.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ αβ, βγ. καὶ γεγονέτωσαν αὐτῶν μέσαι αἱ δβ, βε. ὥστε εἶναι ὡς τὴν γβ πρὸς βδ, οὕτως τὴν βδ πρὸς βε, καὶ τὴν βε πρὸς βα. καὶ ἤχθωσαν πρὸς ὀρθὰς αἱ δζ, εζ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ γβ πρὸς βδ, ἡ δβ πρὸς βε. τὸ ἄρα ὑπὸ γβε, τουτέστι τὸ ὑπὸ δοθείσης καὶ τῆς βε, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς βδ, τουτέστι τῆς εζ. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ δοθείσης καὶ τῆς βε ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ εζ, τὸ ζ ἄρα ἅπτεται παραβολῆς τῆς περὶ ἄξονα τὴν βε. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ αβ πρὸς βε, ἡ βε πρὸς βδ. τὸ ἄρα ὑπὸ αβδ, τουτέστι τὸ ὑπὸ δοθείσης καὶ τῆς βδ, ἴσον ἐστὶ



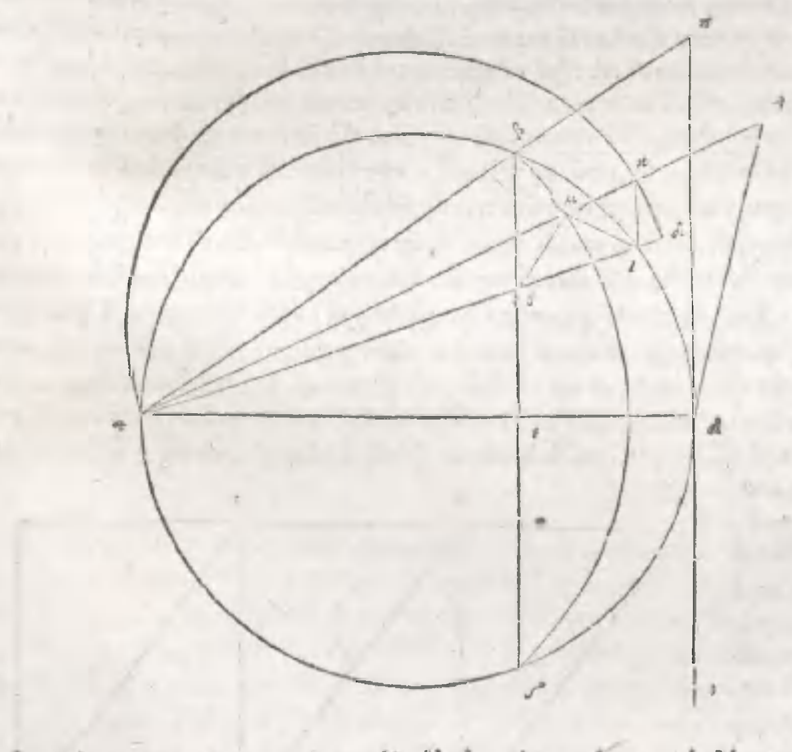
τῷ

τῷ ἀπὸ εβ, τουτέστι τῆς δζ. τὸ ζ ἄρα ἅπτεται παραβολῆς τῆς περὶ ἄξονα τὴν βδ. ἧπται δὲ καὶ ἑτέρας δοθείσης τῆς περὶ τὴν βζ. δοθὲν ἄρα τὸ ζ, καὶ κάθετοι αἱ ζδ, ζε. καὶ δοθέντα τὰ δ, ε. συντεθήσεται δὲ οὕτως. ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ αβ, βγ. καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπ' ἄπειρον ἀπὸ τοῦ β, βδ, βε. καὶ γεγράφθω περὶ ἄξονα τὴν βε παραβολή, ὥστε τὰς καταγομένας ἐπὶ τὴν βε δύνασθαι τὰ παρὰ τὴν βγ. πάλιν γεγράφθω περὶ ἄξονα τὴν δβ παραβολή, ὥστε τὰς καταγομένας δύνασθαι παρὰ τὴν αβ. τέμνουσι δὴ ἀλλήλας αἱ παραβολαί. τεμνέτωσαν κατὰ τὸ ζ. καὶ ἀπὸ τοῦ ζ κάθετοι ἤχθωσαν αἱ ζδ, ζε. ἐπεὶ οὖν ἐν παραβολῇ κατῆκται ἡ ζε, τουτέστιν ἡ δβ, τὸ ἄρα ὑπὸ γβε ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ βδ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ γβ πρὸς βδ, ἡ δβ πρὸς βε. πάλιν ἐπεὶ ἐν παραβολῇ κατῆκται ἡ ζδ, τουτέστιν ἡ εβ, τὸ ἄρα ὑπὸ δβα ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ εβ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ δβ πρὸς βε, ἡ βε πρὸς βα. ἀλλ' ὡς ἡ δβ πρὸς βε, οὕτως ἡ γβ πρὸς βδ. καὶ ὡς ἄρα ἡ γβ πρὸς βδ, ἡ βδ πρὸς βε, καὶ ἡ εβ πρὸς βα. ὅπερ ἔδει εὑρεῖν.

Γράφεται δὲ ἡ παραβολὴ διὰ τοῦ εὑρεθέντος διαβήτου τῷ μιλησίῳ μηχανικῷ ἰσιδώρῳ τῷ ἡμετέρῳ διδασκάλῳ, γραφέντος δὲ ὑπ' αὐτοῦ εἰς τὸ γενόμενον αὐτῷ ὑπόμνημα τῶν ἥρωνος καμαρικῶν.

Η ΑΡΧΙΤΟΥ ΕΥΡΕΣΙΣ, ΩΣ ΕΥΔΗμος ἱστορεῖ.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ αδ, γ. δεῖ δὴ τῶν αδ, γ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν. γεγράφθω περὶ τὴν μείζονα τὴν αδ κύκλος ὁ αβδζ. καὶ τῇ γ ἴση ἐνηρμόσθω ἡ αβ. καὶ ἐκβληθεῖσα συμπιπτέτω τῇ ἀπὸ τοῦ δ ἐφαπτομένῃ τοῦ κύκλου κατὰ τὸ π. παρὰ δὲ τὴν πδο ἤχθω ἡ βεζ. καὶ νενοήσθω ἡμικυλίνδριον ὀρθὸν ἐπὶ τοῦ αβδ ἡμικυκλίου. ἐπὶ δὲ τῆς αδ ἡμικύκλιον ὀρθὸν ἐν τῷ τοῦ ἡμικυλινδρίου παραλληλογράμμῳ κείμενον. τοῦτο δὴ τὸ ἡμικύκλιον περιαγόμενον ὡς ἀπὸ τοῦ δ ἐπὶ τὸ β, μένοντος τοῦ α πέρατος τῆς διαμέτρου, τεμεῖ τὴν κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν ἐν τῇ περιαγωγῇ, καὶ γράψει ἐν αὐτῇ γραμμήν τινα. πάλιν δὲ ἐὰν τῆς αδ



μενούσης τὸ απδ τρίγωνον περιενεχθῇ τὴν ἐναντίαν τῷ ἡμικυκλίῳ κίνησιν, κωνικὴν ποιήσει ἐπιφάνειαν τῇ απ εὐθείᾳ, ἣ δὴ περιαγομένη συμβαλεῖ τῇ κυλινδρικῇ γραμμῇ κατά τι σημεῖον. ἅμα δὲ καὶ τὸ β περιγράψει ἡμικύκλιον ἐν τῇ τοῦ κώνου ἐπιφανείᾳ. ἐχέτω δὴ θέσιν κατὰ τὸν τόπον τῆς συμπτώσεως τῶν γραμμῶν τὸ κινούμενον ἡμικύκλιον, ὡς τὴν τοῦ δκα. τὸ δὲ

κι τὸ

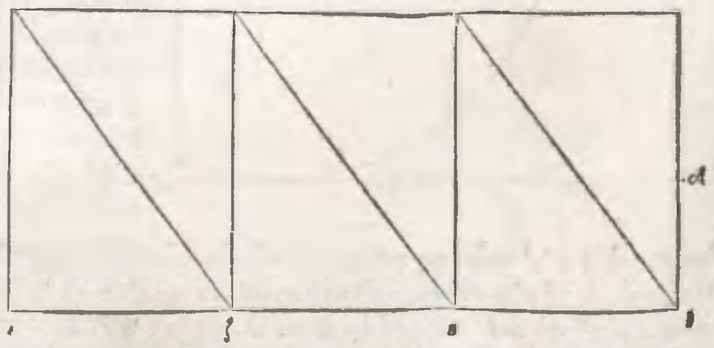
αὐτῇ περιαγόμενον τρίγωνον τὴν τῆς δ λ α. τὸ δὲ προειρημένης συμπτώσεως σημεῖον ἔστω τὸ κ. ἔστω δὲ καὶ τὸ διὰ τοῦ β γραφόμενον ἡμικύκλιον τὸ β μ ζ, κοινὴ δὲ αὐτοῦ τομὴ καὶ τοῦ β δ ζ α κύκλου ἔστω ἡ β ζ. καὶ ἀπὸ τοῦ κ ἐπὶ τὸ τοῦ β δ α ἡμικυκλίου ἐπίπεδον κάθετος ἤχθω. πεσεῖται δὴ ἐπὶ τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν, διὰ τὸ ὀρθὸν ἑστάναι τὸν κύλινδρον. πιπτέτω, καὶ ἔστω ἡ κ ι. καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ ι ἐπὶ τὸ α ἐπιζευχθεῖσα συμβαλλέτω τῇ β ζ κατὰ τὸ θ. ἡ δὲ α λ τῷ β μ ζ ἡμικυκλίῳ κατὰ τὸ μ. ἐπεζεύχθωσαν δὲ καὶ αἱ κ δ, μ ι, μ θ. ἐπεὶ οὖν ἑκάτερον τῶν δ κ α, β μ ζ ἡμικυκλίων ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, καὶ ἡ κοινὴ ἄρα αὐτῶν τομὴ ἡ μ θ πρὸς ὀρθάς ἐστι τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ. ὥστε καὶ πρὸς τὴν β ζ ὀρθή ἐστιν ἡ μ θ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν θ β, θ ζ, τουτέστι τὸ ὑπὸ θ α, θ ι, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ μ θ. ὅμοιον ἐστὶν ἄρα τὸ α μ ι τρίγωνον ἑκατέρῳ τῶν μ ι θ, μ α θ. καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ι μ α. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ δ κ α ὀρθή. παράλληλοι ἄρα εἰσὶν αἱ κ δ, μ ι. καὶ ἔσται ἀνάλογον ὡς ἡ δ α πρὸς α κ, τουτέστιν ἡ κ α πρὸς α ι, οὕτως ἡ ι α πρὸς α μ, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων. τέσσαρες ἄρα αἱ δ α, α κ, α ι, α μ ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσι. καὶ ἔστιν ἡ α μ ἴση τῇ γ. ἐπεὶ καὶ τῇ α β. δύο ἄρα δοθεισῶν τῶν α δ, γ, δύο μέσαι ἀνάλογον ηὕρηνται αἱ α κ, α ι.

ΩΣ ΕΡΑΤΟΣΘΕΝΗΣ.

Βασιλεῖ Πτολεμαίῳ Ἐρατοσθένης χαίρειν.

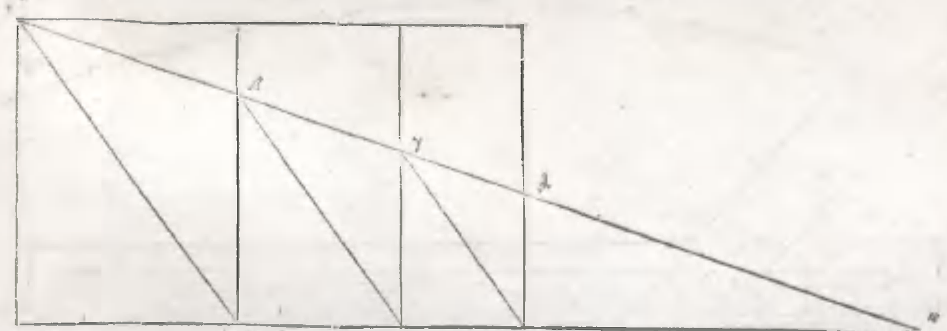
Τῶν ἀρχαίων τινὰ τραγῳδοποιῶν φασίν, εἰσαγαγεῖν τὸν Μίνω τῷ Γλαύκῳ κατασκευάζοντα τάφον. πυθόμενον δὲ ὅτι πανταχοῦ ἑκατόμπεδος εἴη, εἰπεῖν, μικρόν γ' ἔλεξας βασιλικοῦ σηκὸν τάφου, διπλάσιον ἔστω. τοῦ δὲ κύβου μὴ σφαλῆς, διπλασίαζων ἕκαστον κῶλον ἐν τάχει τάφου, ἐδόκει διημαρτηκέναι. τῶν γὰρ πλευρῶν διπλασιασθεισῶν, τὸ μὲν ἐπίπεδον γίνεται τετραπλάσιον, τὸ δὲ στερεὸν ὀκταπλάσιον. ἐζητεῖτο δὴ καὶ παρὰ τοῖς γεωμέτραις, τίνα ἄν τις τρόπον τὸ δοθὲν στερεὸν διαμένον ἐν τῷ αὐτῷ σχήματι διπλασιάσειεν. καὶ ἐκαλεῖτο τὸ τοιοῦτον πρόβλημα, κύβου διπλασιασμός. ὑποθέμενοι γὰρ κύβον, ἐζήτουν τοῦτον διπλασιάσαι. πάντων δὲ διαπορούντων ἐπὶ πολὺν χρόνον, πρῶτον Ἱπποκράτης ὁ Χῖος ἐπενόησεν, ὅτι ἐὰν εὑρεθῇ δύο εὐθειῶν γραμμῶν, ὧν ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονός ἐστι διπλασία, δύο μέσας ἀνάλογον λαβεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, διπλασιασθήσεται ὁ κύβος, ὥστε τὸ ἀπόρημα αὐτοῦ εἰς ἕτερον οὐκ ἔλασσον ἀπόρημα κατέστρεφεν. μετὰ χρόνον δέ τινάς φασιν Δηλίους ἐπιβαλλομένους νόσου κατὰ χρησμὸν διπλασιάσαι τινὰ τῶν βωμῶν ἐπιταχθέντας, ἐμπεσεῖν εἰς τὸ αὐτὸ ἀπόρημα. διαπεμψαμένοις δὲ τοὺς παρὰ τῷ Πλάτωνι ἐν Ἀκαδημίᾳ γεωμέτρας, ἀξιοῦν αὐτοῖς εὑρεῖν τὸ ζητούμενον. τῶν δὲ φιλοπόνως ἐπιδιδόντων ἑαυτοῖς, καὶ ζητούντων, δύο δοθεισῶν δύο μέσας λαβεῖν, Ἀρχύτας μὲν ὁ Ταραντῖνος λέγεται διὰ τῶν ἡμικυλίνδρων εὑρηκέναι, Εὔδοξος δὲ διὰ τῶν καλουμένων καμπύλων γραμμῶν. συμβέβηκε δὲ πᾶσιν αὐτοῖς ἀποδεικτικῶς γεγραφέναι. χειρουργῆσαι δέ, καὶ εἰς χρείαν πεσεῖν μὴ δύνασθαι, πλὴν ἐπὶ βραχύ τι τοῦ Μενέχμου, καὶ ταῦτα δυσχερῶς. ἐπινενόηται δέ τις ὑφ' ἡμῶν ὀργανικὴ ῥᾳδία, δι' ἧς εὑρήσομεν, δύο τῶν δοθεισῶν οὐ μόνον δύο μέσας, ἀλλ' ὅσας ἄν τις ἐπιτάξῃ. τούτου δὲ εὑρισκομένου δυνησόμεθα καθόλου τὸ δοθὲν στερεὸν παραλληλογράμμοις περιεχόμενον εἰς κύβον καθιστάναι, ἢ ἐξ ἑτέρου εἰς ἕτερον σχηματίζειν, καὶ ὅμοιον ποιεῖν καὶ ἐπαύξειν διατηροῦντας τὴν ὁμοιότητα. ὥστε καὶ βωμούς, καὶ ναούς. δυνησόμεθα δὲ καὶ τὰ τῶν ὑγρῶν μέτρα, καὶ ξηρῶν, λέγω δὲ οἷον μετρητὴν μεδίμνων εἰς κύβον καθιστάναι, καὶ διὰ τῆς τούτου πλευρᾶς ἀναμετρεῖν τὰ τούτων δεκτικὰ ἀγγεῖα πόσον χωρεῖ. χρήσιμον δὲ ἔσται τὸ ἐπινόημα, καὶ τοῖς βουλομένοις ἐπαύξειν καταπαλτικὰ καὶ λιθοβόλα ὄργανα.

δεῖ γὰρ ἀνάλογον ἅπαντα αὐξηθῆναι, καὶ τὰ πάχη καὶ τὰ μεγέθη, καὶ τὰς κατατρήσεις, καὶ τὰς χοινικίδας, καὶ τὰ ἐμβαλλόμενα νεῦρα, εἰ μέλλει καὶ ἡ βολὴ ἀνάλογον ἐπαυξηθῆναι. ταῦτα δὲ οὐ δυνατὰ γενέσθαι ἄνευ τῆς τῶν μέσων εὑρέ-



σεως. τὴν δὲ ἀπόδειξιν καὶ τὴν κατασκευὴν τοῦ λεχθέντος ὀργάνου ὑπογέγραφά σοι. δεδόσθωσαν δύο ἄνισοι εὐθεῖαι, ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, αἱ α ε, δ θ. καὶ κείσθω ἐπί τινος εὐθείας τῆς ε θ πρὸς ὀρθὰς ἡ α ε. καὶ ἐπὶ τῆς ε θ τρία συνεστάτω παραλληλόγραμμα ἐφεξῆς, τὰ α ζ, ζ ι, ι θ. καὶ ἤχθωσαν διάμετροι ἐν αὐτοῖς, αἱ α ζ, λ η, ι θ. ἔσονται δὴ αὗται παράλληλοι. μένοντος δὴ τοῦ μέσου παραλληλογράμμου τοῦ ζ ι συνωσθήτω, τὸ μὲν α ζ ἐπάνω τοῦ μέσου, τὸ δὲ ι θ ὑποκάτω, καθάπερ ἐπὶ τοῦ δευτέρου σχήματος. ἕως οὗ γένηται τὰ α β γ δ κατ' εὐθεῖαν. καὶ διήχθω διὰ τῶν α, β, γ, δ σημείων εὐθεῖα. καὶ συμπιπτέτω τῇ ε θ ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ κ. ἔσται δὴ ὡς ἡ α κ πρὸς κ β, ἐν μὲν ταῖς α ε, ζ β παραλλήλοις, ἡ ε κ πρὸς κ ζ. ἐν δὲ ταῖς α ζ, β η παραλλήλοις ἡ ζ κ πρὸς κ η. ὡς ἄρα ἡ α κ πρὸς κ β, ἡ ε κ πρὸς κ ζ, καὶ ἡ κ ζ πρὸς κ η. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ β κ πρὸς κ γ, ἐν μὲν ταῖς β ζ, γ η παραλλήλοις ἡ ζ κ πρὸς κ η. ἐν δὲ ταῖς β η, γ θ παραλλήλοις ἡ η κ πρὸς κ θ. ὡς ἄρα ἡ β κ πρὸς κ γ, ἡ ζ κ πρὸς κ η, καὶ ἡ η κ πρὸς κ θ. ἀλλ' ὡς ἡ ζ κ πρὸς κ η, ἡ ε κ πρὸς κ ζ. καὶ ὡς ἄρα ἡ ε κ πρὸς κ ζ, ἡ ζ κ πρὸς κ η, καὶ ἡ η κ πρὸς κ θ. ἀλλ' ὡς ἡ ε κ πρὸς κ ζ, ἡ α ε πρὸς β ζ. ὡς δὲ ἡ ζ κ πρὸς κ η, ἡ β ζ πρὸς γ η. ὡς δὲ ἡ η κ πρὸς κ θ, ἡ γ η πρὸς δ θ. καὶ ὡς ἄρα ἡ α ε πρὸς β ζ, ἡ β ζ πρὸς γ η, καὶ ἡ γ η πρὸς δ θ. ηὕρηνται ἄρα τῶν α ε, δ θ δύο μέσαι, ἥ τε β ζ καὶ ἡ γ η.

Ταῦτα οὖν ἐπὶ τῶν γεωμετρουμένων ἐπιφανειῶν ἀποδέδεικται. ἵνα δὲ καὶ ὀργανικῶς δυνώμεθα τὰς δύο μέσας λαμβάνειν, διαπήγνυται πλινθίον ξύλινον, ἢ ἐλεφάντινον, ἢ χαλκοῦν ἔχον τρεῖς πινακίσκους ἴσους ὡς λεπτοτάτους. ὧν ὁ μὲν μέσος ἐνήρμοσται, οἱ δὲ δύο ἐπωστοί εἰσιν ἐν χολέδραις, τοῖς δὲ μεγέθεσι καὶ ταῖς συμμετρίαις ὡς ἕκαστοι ἑαυτοὺς πείθουσι. τὰ μὲν γὰρ τῆς ἀποδείξεως ὡσαύτως συντελεῖται. πρὸς δὲ τὸ ἀκριβέστερον λαμβάνεσθαι τὰς γραμμὰς φιλοτεχνητέον, ἵνα ἐν τῷ συνάγεσθαι τοὺς πινακίσκους παράλληλα διαμένῃ πάντα καὶ ἄσχαστα, καὶ ὁμαλῶς συναπτόμενα ἀλλήλοις. ἐν δὲ τῷ ἀναθήματι, τὸ μὲν ὀργανικὸν χαλκοῦν ἐστι, καὶ καθήρμοσται ὑπ' αὐτὴν τὴν στεφάνην τῆς στήλης προσμεμολυβδοχημένον, ὑπ' αὐτοῦ δὲ ἡ ἀπόδειξις συντομώτερον φραζομένη καὶ τὸ σχῆμα, μετ' αὐτὸ δὲ ἐπίγραμμα. ὑπογεγράφθω οὖν σοι καὶ ταῦτα, ἵνα ἔχῃς καὶ ὡς ἐν τῷ ἀναθήματι. τῶν δὲ δύο σχημάτων τὸ δεύτερον γέγραπται ἐν τῇ στήλῃ.

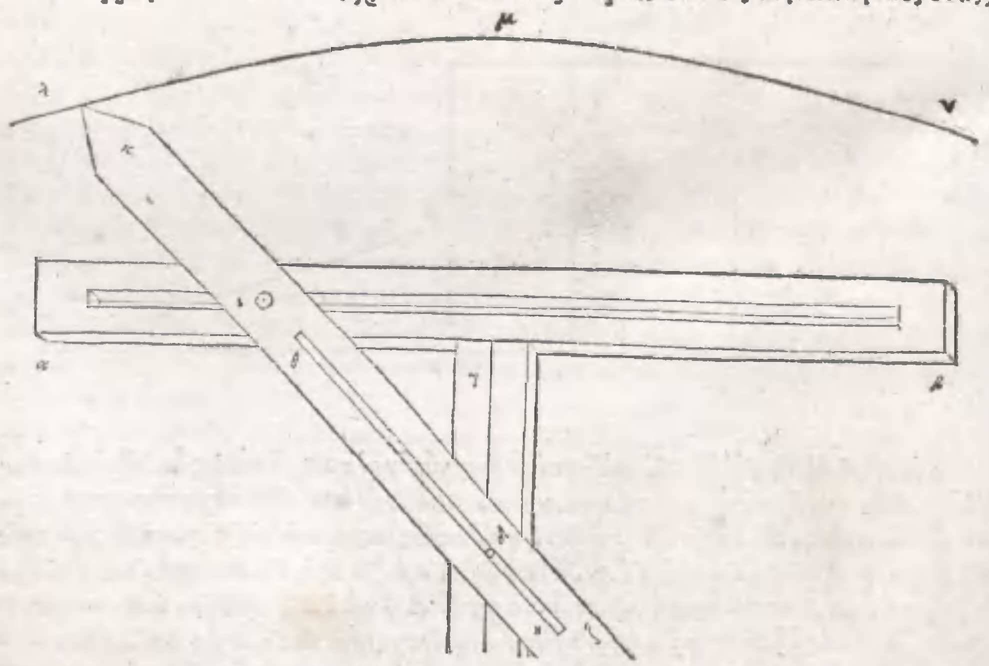


Δύο τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ. δεδόσθωσαν αἱ α ε, δ θ. συνάγω δὴ τοὺς ἐν τῷ ὀργάνῳ πίνακας, ἕως ἂν κατ' εὐθεῖαν γένηται τὰ α, β, γ, δ σημεῖα. νοείσθω δὴ ὡς ἔχει ἐπὶ τοῦ δευτέρου σχήματος. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ α κ πρὸς κ β, ἐν μὲν ταῖς α ε, β ζ παραλλήλοις ἡ ε κ πρὸς κ ζ. ἐν δὲ ταῖς α ζ, β η, ἡ ζ κ πρὸς κ η. ὡς ἄρα ἡ ε κ πρὸς κ ζ, ἡ κ ζ πρὸς κ η. ὡς δὲ αὗται πρὸς ἀλλήλας, ἥ τε α ε πρὸς β ζ, καὶ ἡ β ζ πρὸς γ η. ὡσαύτως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ ὡς ἡ ζ β πρὸς γ η, ἡ γ η πρὸς δ θ. ἀνάλογον ἄρα αἱ α ε, β ζ, γ η, δ θ. ηὕρηνται ἄρα δύο τῶν δοθεισῶν δύο μέσαι. ἐὰν δὲ αἱ δοθεῖσαι μὴ ἴσαι ὦσι ταῖς α ε, δ θ, ποιήσαντες αὐταῖς ἀνάλογον τὰς α ε, δ θ, τούτων ληψόμεθα τὰς μέσας, καὶ ἐπανοίσομεν ἐπ' ἐκείνας, καὶ ἐσόμεθα πεποιηκότες τὸ ἐπιταχθέν. ἐὰν δὲ πλείους μέσας ἐπιταχθῇ εὑρεῖν, εἰ ἐπὶ πλείους πινακίσκους κατασκευασόμεθα ἐν τῷ ὀργανίῳ τῶν ληφθησομένων μέσων, ἡ δὲ ἀπόδειξις ἡ αὐτή.

Εἰ κύβον ἐξ ὀλίγου διπλάσιον ὠγαθὲ τεύχειν
 Φράζεαι, τὴν στερεὴν πᾶσαν ἐς ἄλλο φύσιν.
Εὖ μεταμορφῶσαι, τόδε τοι πάρα, κἂν σύ γε μάνδρην
 Ἢ † σειρὸν, ἢ κοίλου φρέατος εὐρὺ κύτος. († σωρὸν)
Τῇ δ' ἀναμετρήσαιο μέσας ὅτε τέρμασιν ἄκροις
 Συνδρομάδας δισσῶν ἐντὸς ἕλῃς κανόνων.
Μηδὲ σύ γ' ἀρχύτεω δυσμήχανα ἔργα κυλίνδρων,
 Μηδὲ μενεχμείους κωνοτομεῖν τριάδας
Δίζηαι. μηδ' εἴ τι θεουδέος εὐδόξοιο,
 Καμπύλον ἐν γραμμαῖς εἶδος ἀναγράφεται.
Τοῖσδε γὰρ ἐν πινάκεσσι μεσόγραφα μυρία τεύχοις,
 Ῥεῖά κεν ἐκ παύρου πυθμένος ἀρχόμενος.
Εὐαίων πτολεμαῖε πατὴρ ὅτι παιδὶ συνηβῶν
 Πάνθ' ὅσα καὶ μούσαις καὶ βασιλεῦσι φίλα.
Αὐτὸς ἐδωρήσω· τὸ δ' ἐς ὕστερον οὐράνιε ζεῦ.
 Καὶ σκήπτρων ἐκ σῆς ἀντιάσειε χερός.
Καὶ τὰ μὲν ὡς τελέοιτο, λέγοι δέ τις ἄνθεμα λεύσσων
 Τοῦ κυρηναίου τοῦτ' ἐρατοσθένεος.

ΩΣ ΝΙΚΟΜΗΔΗΣ ΕΝ ΤΩ ΠΕΡΙ ΚΟΓΧΟΕΙΔΩΝ ΓΡΑΜΜΩΝ.

Γράφει δὲ καὶ νικομήδης ἐν τῷ ἐπιγεγραμμένῳ περὶ κογχοειδῶν συγγράμματι ὀργάνου κατασκευὴν τὴν αὐτὴν ἀποπληροῦντος χρείαν. ἐφ' ᾧ καὶ μεγάλα μὲν σεμνυνόμενος φαίνεται ὁ ἀνὴρ, πολλὰ δὲ τοῖς ἐρατοσθένους ἐπεγγελῶν εὑρήμασιν, ὡς ἀμηχάνοις τε ἅμα καὶ γεωμετρικῆς ἕξεως ἐστερημένοις, τοῦτ' ἐὰν ἐλλείποις. τῶν οὖν περὶ τὸ πρόβλημα πεπονηκότων ἕνεκα τῆς πρὸς ἐρατοσθένη συγκρίσεως, καὶ αὐτὸν τοῖς ἤδη γεγραμμένοις, συνάπτομεν δυνάμει γράφοντες οὕτως. Νοεῖν χρὴ κανόνας δύο πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλοις συμβεβλημένους οὕτως,

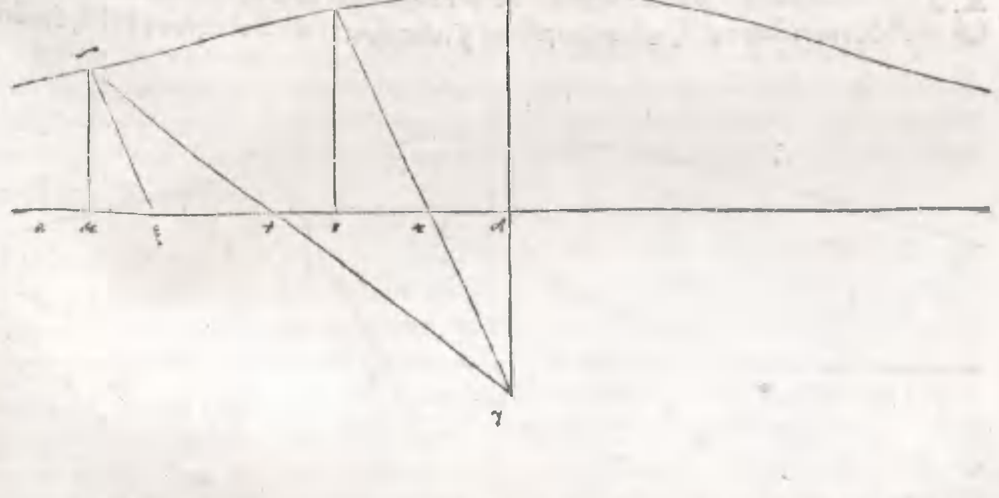


ὥστε μίαν ἀπαρτίζειν αὐτοὺς ἐπιφάνειαν. καθάπερ εἰσὶν οἱ α β, γ δ. ἐν δὲ τῷ α β σωλῆνα πελεκινοειδῆ, εἰς ὃν χελώνιον διατρέχειν δυνήσεται. ἐν δὲ τῷ γ δ ἐπὶ τὸ μέρος τὸ πρὸς τὸ δ, καὶ μέσην τὴν διαιροῦσαν εὐθεῖαν τὸ πλάτος αὐτοῦ κυλίνδριον συμφυὲς τῷ κανόνι, καὶ βραχὺ

ὑπερέχον

ὑπερέχον τῆς ἄνωθεν ἐπιφανείας αὐτοῦ τοῦ κανόνος. ἄλλον δὲ κανόνα ὡς τὸν ε ζ μετὰ βραχύ τι διάστημα τοῦ πρὸς τὸ ζ πέρατος ἀνατομὴν ἔχοντα, ὡς τὴν η θ, δυναμένην περιβαίνειν τῷ πρὸς τῷ δ κυλινδρίῳ. πρὸς δὲ τῷ ε ὀπὴν στρογγύλην, ἥτις ἐγκείσεται εἰς τὸν ἀξόνιον, συμφυὲς τῷ διατρέχοντι χελωναρίῳ ἐν τῷ πελεκινοειδεῖ σωλῆνι, τῷ ὄντι ἐν τῷ α β κανόνι. ἐναρμοσθέντος τοίνυν τοῦ ε ζ κανόνος, κατὰ μὲν τὴν η θ ἀνατομὴν, ἐν τῷ πρὸς τὸ ζ κυλινδρίῳ, κατὰ δὲ τὴν ε ὀπὴν ἐν τῷ ἀξονίῳ τῷ συμφυεῖ τῷ χελωναρίῳ, ἐάν τις ἐπιλαβόμενος τοῦ κ ἄκρου τοῦ κανόνος κινῇ αὐτὸν ἐπὶ τὰ πρὸς τὸ α μέρη, ἔπειτα πρὸς τὸ β, τὸ μὲν ε σημεῖον ἀεὶ ἐπὶ τοῦ α β κανόνος ἐνεχθήσεται. ἡ δὲ η θ ἀνατομὴ ἐπὶ τῷ πρὸς τὸ δ κυλινδρίῳ κινηθήσεται, ἀεὶ τῆς μέσης τοῦ ε ζ κανόνος εὐθείας ἐν τῇ κινήσει διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ πρὸς τῷ δ κυλίνδρῳ νοουμένης. τῆς δὲ ε κ ὑπεροχῆς τοῦ κανόνος ἀεὶ τῆς αὐτῆς μενούσης. ἐὰν τοίνυν πρὸς τὸ κ ἐπινοήσωμεν τι γραφεῖον ἐφαπτόμενον τοῦ ἐδάφους, γραφήσεταί τις γραμμὴ, οἵα ἐστὶν ἡ α μ ν, ἥν τινα καλεῖ νικομήδης κογχοειδῆ πρώτην γραμμὴν, καὶ διάστημα μὲν τῆς γραμμῆς τὸ ε κ μέγεθος τοῦ κανόνος, πόλον δὲ τὸ δ.

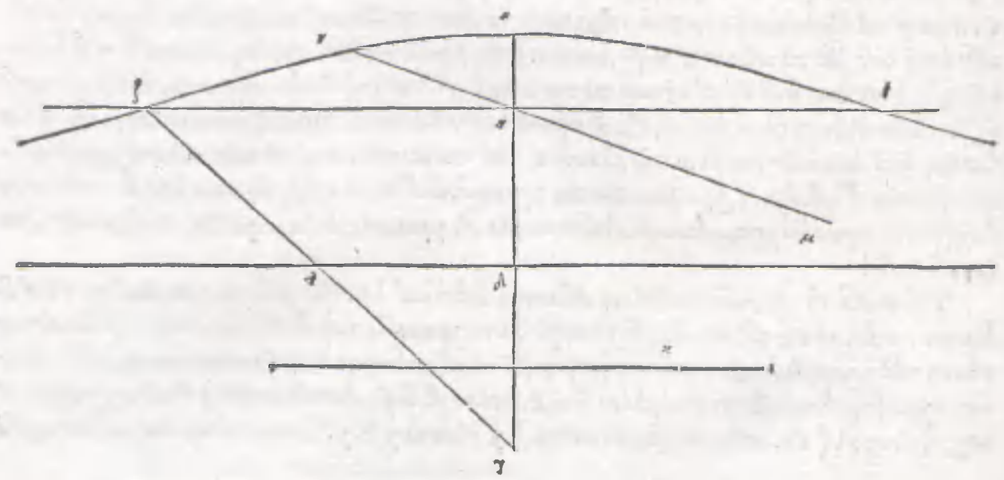
Ταύτῃ δὴ τῇ γραμμῇ συμβαῖνον δείκνυσι τὸ ἀεὶ ἐπ' ἔλαττον μὲν συμπορεύεσθαι τῷ α β κανόνι. καὶ ἐάν τις εὐθεῖα διαχθῇ μεταξὺ τῆς τε γραμμῆς καὶ τοῦ α β κανόνος, ὅτι πάντως τέμνει τὴν γραμμὴν, καὶ τὸ μὲν πρότερον τῶν συμβαινόντων ἐστὶν εὐκατανόητον, ἐφ' ἑτέρας καταγραφῆς, κανόνος τε νοουμένου τοῦ α β. πόλου δὲ τοῦ γ, διαστήματος δὲ τοῦ δ ε, γραμμῆς δὲ κογχοειδοῦς τῆς ζ ε η. προσπιπτέτωσαν ἀπὸ τοῦ γ δύο αἱ γ θ, γ ζ ἴσων, δηλονότι γινομένων τῶν



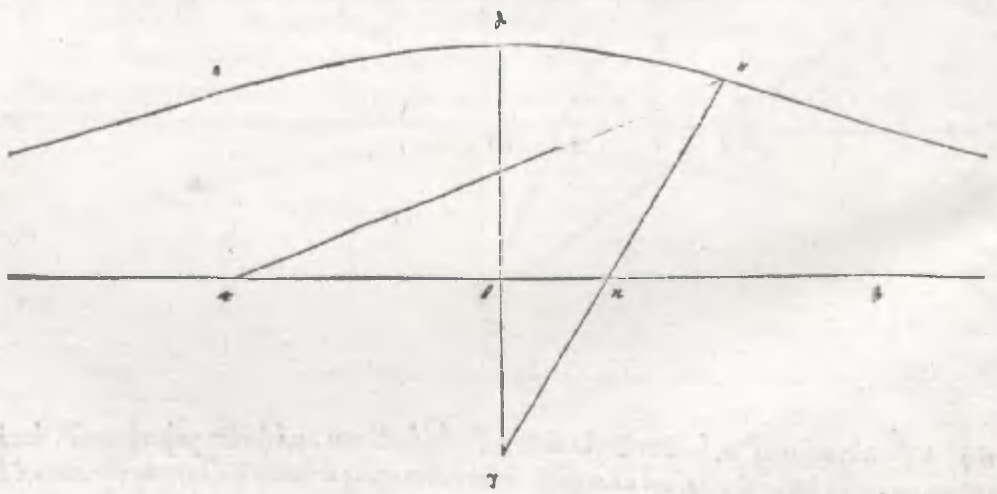
κ θ, λ ζ. λέγω ὅτι ἡ ζ μ κάθετος ἐλάττων τῆς θ ν καθέτου. μείζονος γὰρ οὔσης τῆς ὑπὸ μ λ γ γωνίας τῆς ὑπὸ ν κ γ, λοιπὴ ἡ λοιπὴ εἰς τὰς δύο ὀρθὰς ἡ ὑπὸ μ λ ζ λοιπῆς τῆς ὑπὸ ν κ θ ἐστὶν ἐλάσσων, καὶ διὰ τοῦτο ὀρθῶν οὐσῶν τῶν πρὸς τοῖς μ, ν, μείζων ἐστὶ καὶ ἡ πρὸς τὸ ζ τῆς πρὸς τῷ θ. καὶ ἐὰν τῇ πρὸς τὸ θ ἴσην συστησώμεθα τὴν ὑπὸ μ ζ ξ, ἡ κ θ, τουτέστιν ἡ λ ζ πρὸς θ ν τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, ὃν ἡ ξ ζ πρὸς ζ μ. ὥστε ἡ ζ λ πρὸς τὴν θ ν ἐλάττονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὴν ζ μ. καὶ διὰ τοῦτο μείζων ἡ θ ν τῆς ζ μ.

Τὸ δὲ δεύτερον ἦν τὸ τὴν διαγομένην εὐθεῖαν μεταξὺ τοῦ τε α β καὶ τῆς γραμμῆς τέμνειν τὴν γραμμὴν, καὶ τοῦτο δὲ οὕτω γίνεται γνώριμον. ἡ γὰρ διαγομένη, ἤτοι παράλληλος ἐστὶ τῇ α β ἢ οὐ. ἔστω πρότερον παράλληλος ὡς ἡ ζ η θ. καὶ γεγονέτω ὡς ἡ δ η πρὸς η γ, οὕτως ἡ δ ε πρὸς ἄλλην τινὰ τὴν κ. καὶ κέντρῳ τῷ γ, διαστήματι δὲ τῇ κ περιφέρεια γραφεῖσα τεμνέτω τὴν ζ η κατὰ τὸ ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ γ ζ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ δ η πρὸς η γ, οὕτως ἡ λ ζ πρὸς ζ γ. ἀλλ' ὡς ἡ δ η πρὸς η γ, οὕτως ἦν ἡ δ ε πρὸς τὴν κ, τουτέστι τὴν γ ζ. ἴση ἄρα ἡ δ ε τῇ λ ζ ἀδύνατον. δεῖ γὰρ εἶναι τὸ ζ πρὸς τῇ γραμμῇ. ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστω ἡ διαγομένη παράλληλος.

καὶ ἔσω ὡς ἡ μθ ν. καὶ ἤχθω διὰ τοῦ κ παράλληλος τῇ αβ, ἡ ζκ. ἡ ἄρα ζθ συμπεσεῖται τῇ γραμμῇ, ὥστε πολλῷ μᾶλλον ἡ μν. τούτων δὲ ὄντων τῶν παρακολουθημάτων διὰ τοῦ ὀργάνου τὸ χρήσιμον εἰς τὸ προκείμενον δείκνυται οὕτως.



Πάλιν γωνίας δοθείσης τῆς λα, καὶ σημείου ἐκτὸς τοῦ γ, διάγειν τὴν γη, καὶ ποιεῖν τὴν κη ἴσην τῇ δοθείσῃ. ἤχθω κάθετος ἀπὸ τοῦ γ σημείου ἐπὶ τὴν αβ, ἡ γθ. καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ τῇ δοθείσῃ ἴση ἔστω ἡ δθ, καὶ πόλῳ μὲν τῷ γ, διαστήματι δὲ τῷ δοθέντι τῷ δθ, κανόνι

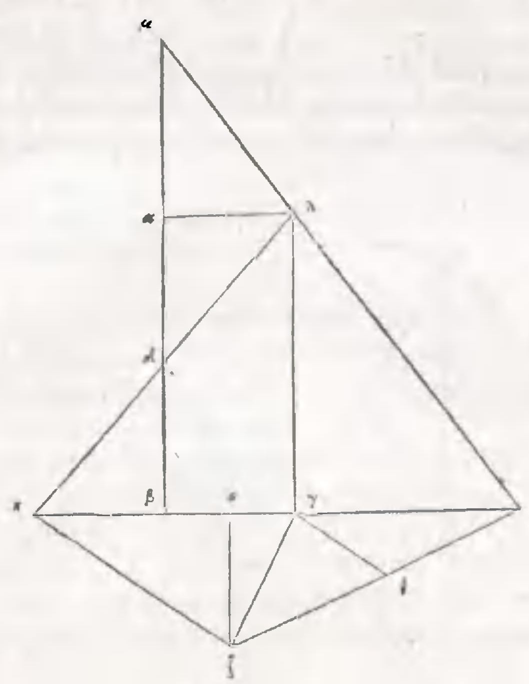


δὲ τῷ αβ, γεγράφθω κογχοειδὴς γραμμὴ πρώτη ἡ εδζ. συμβάλλει ἄρα τῇ αη, διὰ τὸ προδεδειχθέν, συμβαλλέτω κατὰ τὸ η, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ γη. ἴση ἄρα ἡ κη τῇ δοθείσῃ.

Τούτων δειχθέντων, δεδόσθωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ γλ, λα πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις, ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον κατὰ τὸ συνεχὲς εὑρεῖν. καὶ συμπεπληρώσθω τὸ αβγλ παραλληλόγραμμον, καὶ τετμήσθω δίχα ἑκατέρα τῶν αβ, βγ, τοῖς δ, ε σημείοις, καὶ ἐπιζευχθεῖσα μὲν ἡ δλ ἐκβεβλήσθω, καὶ συμπιπτέτω τῇ γβ ἐκβληθείσῃ, κατὰ τὸ η. τῇ δὲ βγ πρὸς ὀρθὰς ἡ εζ, καὶ προσβεβλήσθω ἡ γζ ἴση οὖσα τῇ αδ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ζη. καὶ αὐτῇ παράλληλος ἡ γθ. καὶ γωνίας οὔσης τῆς ὑπὸ τῶν κγθ, ἀπὸ δοθέντος τοῦ ζ, διήχθω ἡ ζθκ, ποιοῦσα ἴσην τὴν θκ τῇ αδ, ἢ τῇ γζ. τοῦτο γὰρ ὡς δυνατόν, ἐδείχθη διὰ τῆς κογχοειδοῦς. καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ κλ ἐκβεβλήσθω, καὶ συμπιπτέτω τῇ αβ ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ μ, λέγω ὅτι ἐστὶν, ὡς ἡ φλ πρὸς κγ, ἡ κγ πρὸς μα,

καὶ

καὶ ἡ μα πρὸς τὴν αλ. ἐπεὶ ἡ βγ τέτμηται δίχα τῷ ε, καὶ πρόσκειται αὐτῇ ἡ κγ. τὸ ἄρα ὑπὸ βκγ μετὰ τοῦ ἀπὸ γε, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ εκ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ εζ. τὸ ἄρα ὑπὸ βκγ μετὰ τῶν ἀπὸ γεζ, τουτέστι τοῦ ἀπὸ γζ, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ κεζ, τουτέστι τῷ ἀπὸ κζ. καὶ ἐπεὶ ὡς ἡ μα πρὸς αβ, ἡ μλ πρὸς λκ, ὡς δὲ ἡ μλ πρὸς λκ, οὕτως ἡ βγ πρὸς γκ. καὶ ὡς ἄρα ἡ μα πρὸς αβ, οὕτως ἡ βγ πρὸς γκ. καὶ ἔστι τῆς μὲν αβ ἡμίσεια ἡ αδ, τῆς δὲ βγ διπλῆ ἡ γη. ἐπεὶ καὶ ἡ λγ τῇ αδ. ἔσται ἄρα καὶ ὡς ἡ μα πρὸς αδ, οὕτως ἡ ηγ πρὸς γκ. ἀλλ' ὡς ἡ ηγ πρὸς γκ, οὕτως ἡ ζθ πρὸς θκ, διὰ τὰς παραλλήλους τὰς ηζ, γθ. καὶ συνθέντι ἄρα ὡς ἡ μδ πρὸς δα, ἡ ζκ πρὸς κθ. ἴση δὲ ὑπόκειται καὶ ἡ αδ τῇ θκ, ἐπεὶ καὶ τῇ γζ ἴση ἐστὶν ἡ αδ. ἴση ἄρα καὶ ἡ μδ τῇ ζκ. ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ μδ, τῷ ἀπὸ ζκ. καὶ ἔστι τῷ μὲν ἀπὸ μδ, ἴσον τὸ ὑπὸ βμα μετὰ τοῦ ἀπὸ δα. τῷ δὲ ἀπὸ ζκ, ἴσον ἐδείχθη τὸ ὑπὸ βκγ μετὰ τοῦ ἀπὸ γζ.



ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ βμα μετὰ τοῦ ἀπὸ δα, τὸ ὑπὸ βκγ μετὰ τοῦ ἀπὸ γζ, ὧν τὸ ἀπὸ αδ ἴσον τῷ ἀπὸ γζ. ἴση γὰρ ὑπόκειται ἡ αδ τῇ γζ. ἴσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ βμα τῷ ὑπὸ βκγ, ὡς ἄρα ἡ μβ πρὸς βκ, ἡ κγ πρὸς αμ. ἀλλ' ὡς ἡ βμ πρὸς βκ, ἡ γλ πρὸς γκ. καὶ ὡς ἄρα ἡ γλ πρὸς γκ, οὕτως ἡ γκ πρὸς αμ. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ λγ πρὸς γκ, ἡ μα πρὸς αλ. καὶ ὡς ἄρα ἡ λγ πρὸς γκ, ἡ γκ πρὸς αμ, καὶ ἡ αμ πρὸς αλ.

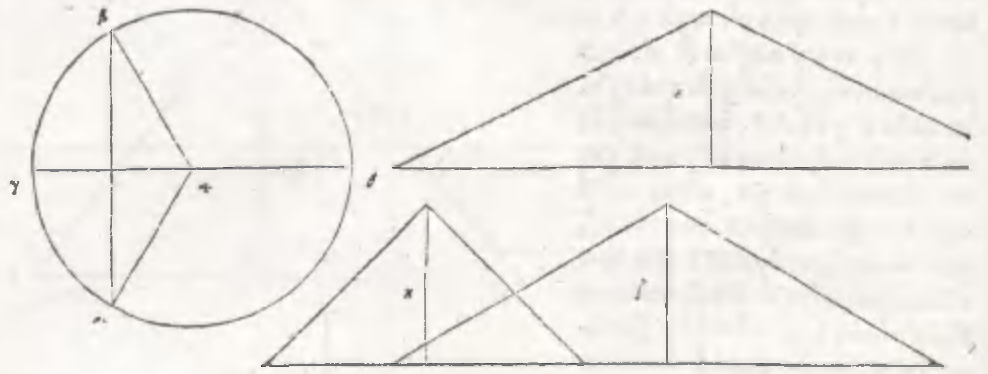
ΕΙΣ ΤΟ Β. ΘΕΩΡΗΜΑ.

Καὶ συνθέντι, ὡς ἡ δθ πρὸς θγ, ἡ γα πρὸς αε. τουτέστι τὸ ἀπὸ γβ πρὸς τὸ ἀπὸ βε. ὡς γὰρ ἐπὶ αὐτῆς τῆς ἐν τῷ ῥητῷ καταγραφῆς. ἐπεὶ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τῷ γβα, ἀπὸ τῆς ὀρθῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἦκται ἡ βε, τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις. καὶ διὰ τοῦτο ἐστὶν ὡς ἡ γα πρὸς αβ, ἡ βα πρὸς αε, καὶ ἡ γβ πρὸς βε. ὥστε καὶ ὡς τὸ ἀπὸ γα πρὸς τὸ ἀπὸ αβ, οὕτως τὸ ἀπὸ γβ πρὸς τὸ ἀπὸ βε. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ γα πρὸς τὸ ἀπὸ αβ, οὕτως ἡ γα πρὸς αε. ὡς γὰρ ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας. ὡς ἄρα ἡ γα πρὸς αε, οὕτως τὸ ἀπὸ γβ πρὸς τὸ ἀπὸ βε. διὰ δὲ τῶν αὐτῶν δείκνυται, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ γα πρὸς γε, οὕτως τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βε. διὰ γὰρ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ἐστὶ πάλιν, ὡς ἡ μὲν αγ πρὸς γβ, οὕτως ἡ βγ πρὸς γε. τουτέστιν ὡς τὸ ἀπὸ αγ πρὸς τὸ ἀπὸ γβ, οὕτως ἡ αγ πρὸς γε, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ αγ πρὸς τὸ ἀπὸ γβ, οὕτως τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βε. καὶ ὡς ἄρα ἡ αγ πρὸς γε, τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βε. ἐπεὶ τὰ ἐφεξῆς δὲ ἀκολουθοῦντα τῷ βαζ τμήματι τῆς σφαίρας, ἴσον τὸν βκζ κῶνον. ἐκκείμενος κῶνος τὴν ν, βάσιν μὲν ἔχοντα ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ βαζ τμήματος, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, φησὶν ὅτι ὁ ν κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ ζαβθ στερεῷ τομεῖ, ὡς δέδεικται ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ. ἴστεον δὲ ὅτι ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ οὐ τὸν τοιοῦτον τομέα ἀπεδείκνυεν ἴσον ὄντα τῷ οὕτως λαμβανομένῳ, ἀλλὰ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τῆς τοῦ κώνου ἐπιφανείας, καὶ σφαιρικῆς ἐπιφανείας ἔλαττον ὄντος ἡμισφαιρίου, ὅν τινα καὶ κυρίως ἐν τοῖς ὅροις τομέα στερεὸν καλεῖν ἐφαίνετο. ἔφασκεν γὰρ, τομεὺς δὲ στερεὸν καλέω, ἐπειδὰν σφαῖραν κῶνος τέμνῃ κορυφὴν ἔχων πρὸς τῷ κέντρῳ τῆς σφαίρας, τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῆς τοῦ κώνου ἐπιφανείας τῆς ἐντὸς τοῦ κώνου. τὸ δὲ νῦν προκείμενον σχῆμα περιέχεται μὲν ὑπὸ κωνικῆς ἐπιφανείας, τὴν κορυφὴν ἐχούσης πρὸς τῷ κέντρῳ τῆς σφαίρας, καὶ σφαιρικῆς ἐπιφανείας, ἀλλ' οὐ τῆς ἐντὸς ἀπολαμβανομένης τοῦ κώνου. ὅτι δὲ οὖν τὸ τοιοῦτον σχῆμα ἴσον γίνεται τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν ἴσην τῇ

ἐπιφα

ἐπιφανείᾳ τῇ σφαιρικῇ τῇ περιεχούσῃ τὸ τμῆμα, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας δειχθήσεται οὕτως διὰ τῶν ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ δεδειγμένων.

Νενοήσθω χωρὶς σφαῖρα, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ τινὶ μὴ διὰ τοῦ κέντρου τῷ περὶ διάμετρον τὴν βδ κύκλῳ. κέντρον δὲ τῆς σφαίρας τὸ α. καὶ νενοήσθω κῶνος, ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν βδ κύκλον, κορυφὴν δὲ τὸ α σημεῖον. ἐκκείσθω δὲ κῶνος ὁ ε, οὗ ἡ μὲν βάσις ἴση ἔστω τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας, ὕψος δὲ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ὁ ἄρα κῶ-



νος ἴσος ἐστὶ τῇ σφαίρᾳ. τετραπλάσιος γάρ ἐστι τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὸν μέγιστον κύκλον, ὕψος δὲ τὸ αὐτό, ὅπερ ἡ σφαῖρα ἐδείχθη τετραπλασία. ἐκκείσθωσαν δὲ καὶ ἄλλοι δύο κῶνοι οἱ ζ, η, ὧν ὁ μὲν ζ βάσιν ἐχέτω ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κατὰ τὴν βγδ τμήματος, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ὁ δὲ η βάσιν μὲν ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κατὰ τὴν βθδ τμήματος, ὕψος δὲ τὸ αὐτό. ὁ ζ ἄρα κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ τομεῖ, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ α, ἐπιφάνεια δὲ σφαιρικὴ ἡ κατὰ τὴν βγδ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ τοῦ ε κώνου βάσις ταῖς τῶν ζ, η κώνων βάσεσι, καί εἰσιν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ε κῶνος, τουτέστιν ἡ σφαῖρα τοῖς ζ, η κώνοις. ἀλλ' ὁ ζ ἴσος ἐδείχθη τῷ κατὰ τὴν βγδ στερεῷ τομεῖ, κορυφὴν ἔχοντι τὸ α. λοιπὸς ἄρα ὁ η κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ λοιπῷ τμήματι, βάσιν ἔχων τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κατὰ τὴν βθδ τμήματος, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου.

Εἶτα πάλιν φησίν, ἴσος ἄρα ὁ ν κῶνος, τουτέστιν ὁ βθζα τομεύς, τῷ βθζκ σχήματι. ἐπεὶ γὰρ συνήχθη ὁ ν κῶνος, ἴσος ὢν κώνῳ οὗ βάσις μὲν ὁ περὶ διάμετρον τὴν βζ κύκλος, ὕψος δὲ ἡ θκ. ὁ δὲ κῶνος οὗ βάσις μὲν ἐστὶν ἡ αὐτή, ὕψος δὲ ἡ εκ, ἴσος τῷ τε εἰρημένῳ κώνῳ, καὶ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν αὐτήν, ὕψος δὲ τὴν εθ. πρὸς ἀλλήλους γάρ εἰσιν ὡς τὰ ὕψη. κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὴν αὐτήν, ὕψος δὲ τὴν εθ, λοιπὸν τὸ βθζκ σχῆμα ἴσον ἐστὶ τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὸν περὶ διάμετρον τὴν βζ κύκλον, ὕψος δὲ τὴν θκ. τουτέστι τῷ ν κώνῳ, τουτέστι τῷ βαθζ τομεῖ.

Ἐπαγαγὼν δὴ τὸ ἐκ τῶν συναχθέντων πόρισμα ἐπὶ τέλει τοῦ θεωρήματος, ἑξῆς δι' ἑτέρας ἀποδείξεως συνάγει τὸ τελευταῖον μέρος τοῦ θεωρήματος, τουτέστιν ὅτι τὸ βαζ τμῆμα σφαίρας ἴσον ἐστὶ τῷ βκζ κώνῳ. καὶ προϊὼν φησίν ὡς ἄρα ἡ κθ πρὸς θγ, ἡ θδ πρὸς δγ. καὶ ὅλη ἡ κδ πρὸς δθ ἐστὶν ὡς ἡ δθ πρὸς δγ. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ κθ πρὸς θγ, ἡ θδ πρὸς δγ. καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ κθ πρὸς θδ, ἡ θγ πρὸς γδ. καὶ συνθέντι, ὡς ἡ κδ πρὸς δθ, ἡ θδ πρὸς δγ. τουτέστιν ἡ κθ πρὸς θα. ἦν γὰρ ὡς ἡ κθ πρὸς θγ, ἡ θδ πρὸς δγ. ἴση δὲ ἡ θγ τῇ θα. καὶ μετ' ὀλίγον, ὡς ἄρα ἡ κθ πρὸς δθ, οὕτως ἡ αε πρὸς εγ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ κδ πρὸς τὸ ἀπὸ τῶν κθδ, οὕτως τὸ ἀπὸ αγ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν αεγ. νοείσθωσαν γὰρ χωρὶς κείμεναι αἱ κδ, αγ. καὶ ἔστω ὡς ἡ κθ πρὸς θδ, οὕτως ἡ αε πρὸς εγ. λέγω ὅτι ἐστὶ καὶ ὡς τὸ ἀπὸ κδ, πρὸς τὸ ὑπὸ κθδ, οὕτως τὸ ἀπὸ αγ πρὸς τὸ ὑπὸ

τὸ ὑπὸ αεγ. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ κθ πρὸς θδ, οὕτως ἡ αε πρὸς εγ. καὶ συνθέντι ἐστὶν ὡς ἡ κδ πρὸς δθ, οὕτως ἡ αγ πρὸς γε. καὶ τὸ ἀπὸ κδ πρὸς τὸ ἀπὸ θδ, ὡς τὸ ἀπὸ αγ, πρὸς τὸ ἀπὸ εγ. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ κθ πρὸς θδ, οὕτως ἡ αε πρὸς εγ. ἀλλ' ὡς ἡ κθ πρὸς θδ, οὕτως τὸ ὑπὸ κθδ πρὸς τὸ ἀπὸ θδ, κοινοῦ ὕψους τῆς θδ λαμβανομένης. ὡς δὲ ἡ αε πρὸς εγ, οὕτως τὸ ὑπὸ αεγ πρὸς τὸ ἀπὸ εγ, κοινοῦ πάλιν ὕψους λαμβανομένης τῆς εγ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ κθδ πρὸς τὸ ἀπὸ θδ, οὕτως τὸ ὑπὸ αεγ πρὸς τὸ ἀπὸ εγ. ἐδείχθη δὲ ὡς τὸ ἀπὸ θδ πρὸς τὸ ἀπὸ δκ, οὕτως τὸ ἀπὸ εγ πρὸς τὸ ἀπὸ γα. καὶ δι' ἴσου ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ κθδ πρὸς τὸ ἀπὸ κδ, οὕτως τὸ ὑπὸ αεγ πρὸς τὸ ἀπὸ αγ. καὶ ἀνάπαλιν, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΕΙΣ ΤΟ Γ.

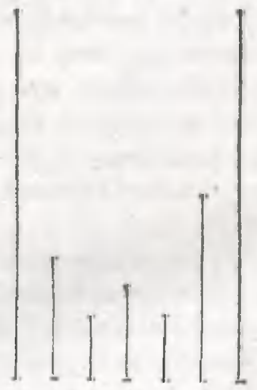
Ὡς δὲ οἱ εἰρημένοι κύκλοι πρὸς ἀλλήλους τὸ ἀπὸ αδ πρὸς τὸ ἀπὸ δβ, τουτέστιν ἡ αγ πρὸς γβ. ὡς γὰρ ἐν αὐτῇ τῇ τοῦ ῥητοῦ καταγραφῇ, ἐπεὶ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τῷ αδβ κάθετος ἦκται, καὶ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς ἡ δγ μέση ἀνάλογον ἐστὶ τῶν τῆς βάσεως τμημάτων. καὶ τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις. ὥστε ἐστὶν ὡς ἡ βγ πρὸς δγ, ἡ βδ πρὸς δα. καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν ἄρα. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ βγ πρὸς τὸ ἀπὸ γδ, οὕτως ἡ πρώτη ἡ βγ πρὸς τρίτην τὴν γα. καὶ ὡς ἄρα ἡ βγ πρὸς γα, οὕτως τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δα. δοθεὶς δὲ λόγος ὁ τῆς αγ πρὸς γβ, ὥστε δοθέν ἐστι τὸ γ σημεῖον. ἐπεὶ γὰρ ἡ σφαῖρα ὑπόκειται δεδομένη, δέδοται ἄρα καὶ ἡ διάμετρος αὐτῆς ἡ αγ. καὶ δέδοται ὁ λόγος τῆς αγ πρὸς γβ. ἐὰν δεδομένον μέγεθος εἰς δεδομένον λόγον διαιρεθῇ, δέδοται ἑκάτερον τῶν τμημάτων, ὥστε δοθεῖσά ἐστιν ἡ αγ, καὶ δοθὲν τὸ α. ἐπὶ γὰρ τῆς κοινῆς τομῆς ἐστὶ θέσει δεδομένων γραμμῶν, δέδοται, ἄρα καὶ τὸ γ.

ΕΙΣ ΤΟ Δ.

Καὶ διὰ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον διὰ τῆς κατασκευῆς, ὡς ἡ λδ πρὸς δκ, ἡ κβ πρὸς βρ, καὶ ἡ δχ πρὸς χβ. ἐν γὰρ τῷ πρὸ τούτου συνήχθη τοῦτο. ἐπεὶ ἐστὶν ὡς συναμφότερος ἡ κδ, δχ πρὸς δχ, οὕτως ἡ ρχ πρὸς χβ. διελόντι ὡς ἡ κδ πρὸς δχ, ἡ ρβ πρὸς βχ. ἐναλλάξ, ὡς ἡ κδ, τουτέστιν ἡ κβ πρὸς βρ, ἡ δχ πρὸς χβ. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ λχ πρὸς χδ, οὕτως συναμφότερος ἡ κβ, βχ πρὸς χβ. διελόντι καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ λδ πρὸς δκ, ἡ δχ πρὸς χβ. ἦν δὲ καὶ ὡς ἡ δχ πρὸς χβ, ἡ κβ πρὸς βρ. ὡς ἄρα ἡ λδ πρὸς δκ, ἡ δχ πρὸς χβ, καὶ ἡ κβ πρὸς βρ. καὶ ὅλη ἄρα ἡ ρλ πρὸς ὅλην κλ, ἐστὶν ὡς ἡ κλ πρὸς λδ. ὡς γὰρ ἓν πρὸς ἕν, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα. ὡς ἄρα ἡ ρλ πρὸς λδ, τὸ ἀπὸ κλ πρὸς τὸ ἀπὸ λδ. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ρλ πρὸς λκ, ἡ κλ πρὸς λδ. καὶ ὡς ἄρα ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας. ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ρλ πρὸς λδ, οὕτως τὸ ἀπὸ ρλ πρὸς τὸ ἀπὸ λκ, οὕτως τὸ ἀπὸ λκ πρὸς τὸ ἀπὸ λδ. ἀνάλογον γάρ εἰσιν, ὡς ἄρα ἡ ρλ πρὸς λδ, οὕτως τὸ ἀπὸ λκ πρὸς τὸ ἀπὸ λδ. κείσθω τῇ κβ ἴση ἡ βζ. ὅτι γὰρ ἐκτὸς τοῦ ρ πεσεῖται, δῆλον. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ χδ πρὸς χβ, οὕτως ἡ κβ πρὸς βρ. μείζων δὲ ἡ δχ τῆς βχ, μείζων ἄρα καὶ ἡ κβ τῆς βρ. ἐκτὸς ἄρα πίπτει τὸ ζ.

Ἐπεὶ δὲ λόγος ἐστὶ τῆς δλ πρὸς λχ δοθείς, καὶ τῆς ρλ ἄρα πρὸς λδ λόγος ἐστὶ δοθείς. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς συναμφότερος ἡ κβ, βχ, πρὸς βχ, τουτέστιν ἡ ζχ πρὸς χβ, οὕτως ἡ χλ πρὸς λδ. καὶ ἀναστρέψαντι ὡς ἡ χζ πρὸς ζβ, οὕτως ἡ χλ πρὸς λδ. καὶ ἀνάπαλιν, ὡς ἡ βζ πρὸς ζχ, ἡ λδ πρὸς λχ. δέδοται δὲ ὁ τῆς βζ πρὸς ζχ λόγος. ἡ μὲν γὰρ ζβ ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς δεδομένης σφαίρας. ἡ δὲ βχ τῷ πρότερον αὐτῆς δεδομένῳ, καθ' ὑπόθεσιν τετμημένης τῆς σφαίρας ὑπὸ τοῦ διὰ τῆς αγ ἐπιπέδου. καὶ τῆς δβ πρὸς ὀρθὰς οὔσης τῇ αγ δέδοται. καὶ διὰ τοῦτο καὶ ὅλη ἡ χζ καὶ ὁ τῆς ζχ πρὸς ζβ. ὥστε καὶ ὁ τῆς λχ πρὸς χλ λόγος ἐστὶ δοθείς. πάλιν ἐπειδὴ δέδοται ὁ λόγος τῶν τμημάτων, καὶ ὁ τοῦ λαγ κώνου πρὸς αργ κῶνον λόγος ἐστὶ δοθείς. ὥστε καὶ ὁ τῆς λχ πρὸς χρ. πρὸς ἀλλήλους γάρ εἰσιν ὡς τὰ ὕψη, καὶ ὅλης ἄρα τῆς ρλ πρὸς τὴν λχ λόγος ἐστὶ δοθείς. ἐπεὶ οὖν ἑκατέρας τῶν ρλ, λδ πρὸς τὴν λχ λόγος ἐστὶ δοθείς, καὶ τῆς ρλ ἄρα πρὸς λδ λόγος ἐστὶ δοθείς. τὰ γὰρ πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἔχοντα δεδομένον, καὶ πρὸς ἄλληλα λόγον ἕξει δεδομένον. ἐπεὶ οὖν ὁ τῆς ρλ πρὸς λδ λόγος συνῆπται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ρλ πρὸς λκ, καὶ ἡ κλ πρὸς λδ. ὅτι μὲν ἡ σύνθεσις τῶν λόγων λαμβάνεται τῆς λκ μέσης λαμβανομένης, ὡς ἐὰν τῇ στοιχειώσει ἐλαμβάνετο φανερόν. Περὶ συνθέσεως λόγων.
ἐπεὶ δὲ τὸ λεγόμενον ἀσαφέστερον, καὶ οὐχ οὕτως ὥς τε τὴν ἔννοιαν ἀναπληρῶσαι λέλεκται,

κται, ὡς ἔστιν εὑρεῖν ἐντυγχάνοντας πάππῳ τε καὶ θέωνι καὶ ἀρκαδίῳ, ἐν πολλοῖς συντάγμασιν οὐκ ἀποδεικτικῶς, ἀλλ᾽ ἐπαγωγῇ τὸ λεγόμενον παριστῶσιν, οὐδένα τόπον πρὸς βραχὺ διατρίψαντας τῷ λόγῳ, τὸ σαφέστερον παραστῆσαι. φημὶ τοίνυν, ὅτι ἐὰν δύο ἀριθμῶν, ἤτοι μεγεθῶν μέσος τις ὅρος ληφθῇ, ὁ τῶν ἐξ ἀρχῆς ληφθέντων ἀριθμῶν λόγος, σύγκειται ἐκ τοῦ λόγου ὃν ἔχει ὁ πρῶτος πρὸς τὸν μέσον, καὶ τοῦ ὃν ἔχει ὁ μέσος πρὸς τὸν τρίτον, ὑπομνηστέον δὴ πρότερον πῶς ἐλέγετο λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι. ὡς γὰρ ἐν τῇ στοιχειώσει, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες ἐφ᾽ ἑαυτὰς πολλαπλασιασθεῖσαι ποιῶσί τινα, πηλικότητος δηλονότι λεγομένης τοῦ ἀριθμοῦ, οὗ παρώνυμός ἐστιν ὁ διδόμενος λόγος, ὥς φασιν ἄλλοι τε καὶ νικόμαχος ἐν τῷ πρώτῳ τῷ περὶ μουσικῆς, καὶ ἥρωνας ἐν τῷ ὑπομνήματι τῷ εἰς τὴν ἀριθμητικὴν εἰσαγωγήν. ταὐτὸν δὲ εἰπεῖν καὶ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ πολλαπλασιαζομένου ἐπὶ τὸν ἑπόμενον ὅρον τοῦ λόγου, καὶ ποιοῦντος τὸν ἡγούμενον. κυριώτερον μὲν ἐπὶ τῶν πολλαπλασίων ἡ πηλικότης ἂν λαμβάνοιτο. ἐπὶ δὲ τῶν ἐπιμορίων, ἢ ἐπιμερῶν, οὐκ ἔτι τὴν πηλικότητα δυνατὸν λαμβάνεσθαι, ἀδιαιρέτου μενούσης τῆς μονάδος, ὡς τὸ ἐπ᾽ ἐκείνων διαιρετέον τὴν μονάδα. εἰ καὶ μὴ κατὰ τὸ προσῆκον τῇ ἀριθμητικῇ, ἀλλὰ τῇ λογιστικῇ τυγχάνει. διαιρεῖται δὲ ἡ μονὰς εἰς τὸ μέρος, ἢ τὰ μέρη ἀφ᾽ ὧν ὠνόμασται ὁ λόγος, ὥστε εἶναι ὡς ἐν σαφεστέρῳ τῷ λέγειν, τοῦ μὲν ἡμιολίου λόγου πηλικότητα πρὸς τῇ μονάδι, καὶ τὸ ἥμισυ τῆς μονάδος. τοῦ δὲ ἐπιτρίτου πρὸς τῇ μονάδι τὸ τρίτον, ὥστε καθὰ καὶ ἀνωτέρω εἴρηται τὴν πηλικότητα τοῦ λόγου ἐπὶ τὸν ἑπόμενον ὅρον, πολλαπλασιαζομένην ποιεῖν τὸν ἡγούμενον. τοῦ γὰρ ἐννέα πρὸς τὰ ἓξ ἡμιολίου πηλικότης, ἡ μονὰς καὶ τὸ ἥμισυ πολλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ τὸν ς ποιεῖ τὸν θ, καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων δὲ τὸ αὐτὸ ἔξεστι καταναοεῖν. τούτων δὴ προσαφηνισθέντων ἐπανακτέον ἐπὶ τὸ προτεθέν. Ἔστωσαν γὰρ οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ οἱ α, β. μέσος δὲ αὐτῶν εἰλήφθω τις ὁ γ. δεικτέον δή, ὅτι ὁ τοῦ α πρὸς τὸν β λόγος συνῆπται ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ὁ α πρὸς τὸν γ, καὶ ὁ γ πρὸς τὸν β. εἰλήφθω γὰρ τοῦ μὲν α γ λόγου πηλικότης ὁ δ, τοῦ δὲ γ β ὁ ε. ὁ ἄρα ε τὸν δ πολλαπλασιάσας, τὸν ζ ποιείτω. λέγω ὅτι ὁ ζ πηλικότης ἐστὶ τοῦ τοῦ α πρὸς τὸν β λόγου, τουτέστιν ὅτι ὁ ζ τὸν β πολλαπλασιάσας τὸν α ποιεῖ. ὁ γὰρ β τὸν ζ πολλαπλασιάσας, τὸν η ποιείτω. ἐπεὶ οὖν ὁ β τὸν μὲν ζ πολλαπλασιάσας τὸν η πεποίηκεν, τὸν δὲ ε πολλαπλασιάσας τὸν γ. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ζ πρὸς τὸν ε, ὁ η πρὸς τὸν γ. πάλιν ἐπεὶ ὁ δ τὸν μὲν ε πολλαπλασιάσας τὸν ζ πεποίηκεν, τὸν δὲ γ πολλαπλασιάσας τὸν α πεποίηκεν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ε πρὸς τὸν γ, ὁ ζ πρὸς τὸν α. ἐναλλάξ, ὡς ὁ ε πρὸς τὸν ζ, ὁ γ πρὸς τὸν α. καὶ ἀνάπαλιν, ὡς ὁ ζ πρὸς τὸν ε, οὕτως ὁ α πρὸς τὸν γ. ἀλλ᾽ ὡς ὁ ζ πρὸς τὸν ε, ἐδείχθη ὁ η πρὸς τὸν γ. καὶ ὡς ἄρα η πρὸς τὸν γ, ὁ α πρὸς τὸν γ. ἴσος ἄρα ὁ α τῷ η. ἀλλ᾽ ὁ β τὸν ζ πολλαπλασιάσας, τὸν η πεποίηκεν. καὶ ὁ β ἄρα τὸν ζ πολλαπλασιάσας τὸν α ποιεῖ. ὁ ζ ἄρα πηλικότης ἐστὶ τοῦ τοῦ α πρὸς τὸν β λόγου. καὶ ἔστιν ὁ ζ ὁ δ ἐπὶ τὸν ε πολλαπλασιασθέντος, τουτέστιν ἡ πηλικότης τοῦ α γ λόγου ἐπὶ τὴν πηλικότητα τοῦ γ β λόγου. ὁ ἄρα τοῦ α πρὸς τὸν β λόγος, σύγκειται ἐκ τε τοῦ ὃν ἔχει ὁ α πρὸς τὸν γ, καὶ ὁ γ πρὸς τὸν β, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.


α γ β δ ε ζ η

Ἵνα δὲ καὶ ἐπὶ ὑποδείγματος φανερὸν γένηται τὸ εἰρημένον, παρεμπιπτέτω τοῦ ιβ, καὶ τοῦ β, μέσος τις ἀριθμὸς ὁ δ. λέγω ὁ τοῦ ιβ πρὸς τὸν β λόγος, τουτέστιν ὁ ἑξαπλάσιος, σύγκειται ἐκ τε τοῦ τριπλασίου τοῦ ιβ πρὸς τὰ δ, καὶ τοῦ διπλασίου τοῦ δ πρὸς τὰ β. ἐὰν γὰρ τὰς πηλικότητας τῶν λόγων πολλαπλασιάσωμεν ἐπ᾽ ἀλλήλας, τουτέστι τὸν γ ἐπὶ τὸν β, γίνεται ὁ ς πηλικότης ὢν τοῦ ιβ πρὸς τὰ β λόγου. καὶ ἔστιν ἑξαπλάσιος, ὅνπερ καὶ προέκειτο ὑποδεῖξαι. εἰ δὲ καὶ ὁ μέσος παρεμπίπτων μὴ ὑπάρχῃ τοῦ μὲν μείζονος ἐλάττων, τοῦ δὲ ἐλάττονος μείζων, ἀλλ᾽ ἢ τὸ ἀνάπαλιν, ἢ ἀμφοτέρων μείζων, ἢ ἀμφοτέρων ἐλάττων. καὶ οὕτως ἡ σύνθεσις, ἡ προειρημένη ἀκολουθήσει, τοῦ θ καὶ τοῦ ς μέσος τις παρεμπιπτέτω ἀμφοτέρων μείζων ὁ ιβ. λέγω ὅτι ἐκ τε τοῦ ὑπεπιτρίτου τοῦ θ πρὸς τὸν ιβ λόγου, καὶ τοῦ

τοῦ διπλασίου τοῦ ιβ πρὸς τὸν ς, σύγκειται ὁ ἡμιόλιος τοῦ θ πρὸς τὰ ς. ἡ γὰρ πηλικότης τοῦ θ πρὸς τὸν ιβ λόγου ἐστὶ τρία τέταρτα, τουτέστιν ἥμισυ καὶ τέταρτον. ἡ δὲ πηλικότης τοῦ ιβ πρὸς τὸν ς ἐστὶν ὁ β. ἐὰν οὖν πολλαπλασιάσωμεν τὸν β ἐπὶ τὸ ἥμισυ καὶ τέταρτον, γίνεται μονὰς α καὶ ἥμισυ, ἥτις πηλικότης ἐστὶ τοῦ ἡμιολίου λόγου, ὃν ἔχει ὁ θ πρὸς τὸν ς. ὁμοίως δὲ κἂν τοῦ θ καὶ τοῦ ς μέσος ἐμπέσῃ ὁ δ, ἐκ τοῦ θ πρὸς δ διπλασιεπιτετάρτου, καὶ τοῦ δ πρὸς ς ὑφημιολίου, σύγκειται ὁ ἡμιόλιος λόγος. πάλιν γὰρ τὴν πηλικότητα τοῦ διπλασιεπιτετάρτου, τὰ β δ, ἐπὶ τὴν πηλικότητα τοῦ ὑφημιολίου, τουτέστι τὰ δύο τρίτα, πολλαπλασιάσαντες ἕξομεν τὸ ἓν ἥμισυ, πηλικότητα τοῦ ἡμιολίου ὡς εἴρηται λόγου, καὶ ἐπὶ πάντων ὁμοίως ὁ αὐτὸς ἁρμόσει λόγος. συμφανὲς δὲ ἐκ τῶν εἰρημένων, ὡς ἐὰν δύο δοθέντων ἀριθμῶν, ἤτοι μεγεθῶν μὴ εἷς μέσος, πλείονες δὲ παρεμπίπτωσιν ὅροι, ὁ τῶν ἄκρων λόγος σύγκειται ἐκ πάντων τῶν λόγων, ὧν ἔχουσιν οἱ κατὰ τὸ ἑξῆς κείμενοι, ἀρχόμενοι ἀπὸ πρώτου, καὶ λήγοντες εἰς τὸν ἔσχατον τῇ ἰδίᾳ συνεχομένους τάξει. δύο γὰρ ὅρων τῶν α, β παρεμπιπτέτωσαν πλείους εἷς ὅροι, γ, δ. λέγω ὅτι ὁ τοῦ α πρὸς τὸν β λόγος, σύγκειται ἐκ τε τοῦ ὃν ἔχει ὁ α πρὸς τὸν γ, καὶ ὁ γ πρὸς τὸν δ, ὁ δ πρὸς τὸν β. ἐπεὶ γὰρ ὁ τοῦ α πρὸς τὸν β σύγκειται ἐκ τε τοῦ ὃν ἔχει ὁ α πρὸς τὸν δ, καὶ ὁ δ πρὸς τὸν β, ὡς ἀνωτέρω εἴρηται. ὁ δὲ τοῦ α πρὸς τὸν δ λόγος σύγκειται ἐκ τε τοῦ ὃν ἔχει ὁ α πρὸς τὸν γ, καὶ ὁ γ πρὸς τὸν δ. ὁ ἄρα τοῦ α πρὸς τὸν β λόγος, συνῆπται ἐκ τε τοῦ ὃν ὁ α πρὸς τὸν γ, καὶ ὁ γ πρὸς τὸν δ, καὶ ὁ δ πρὸς τὸν β. ὁμοίως δὲ καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν δειχθήσεται.

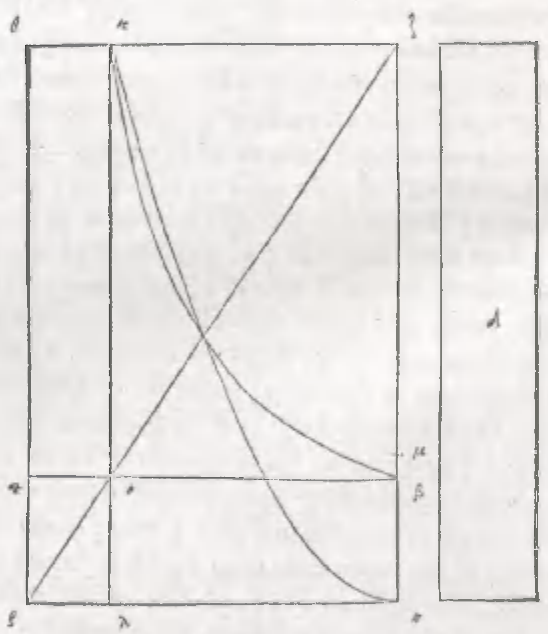

α γ δ β

Ἔτι ἐν τῷ ῥητῷ φησίν, ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ ρλ πρὸς λδ, ἐδείχθη τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ. ἐπεὶ γὰρ ἐδείχθη ὡς ἡ ρλ πρὸς λδ, τὸ ἀπὸ λκ πρὸς τὸ ἀπὸ δλ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ κλ πρὸς τὸ ἀπὸ λδ, οὕτως τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ. ἐδείχθη γάρ, ὡς ἡ κλ πρὸς λδ, ἡ βδ πρὸς δχ διὰ τὸ συνθεῖναι. ὡς ἄρα ἡ ρλ πρὸς λδ, τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ. πεποιήσθω δὲ ὡς ἡ ρλ πρὸς λχ, ἡ βζ πρὸς ζθ. τὸ θ σημειούμενον ὅπως ποτὲ μὲν ἐὰν τεθῇ ὅσον πρὸς τὴν ἀκολουθίαν τῆς ἀποδείξεως, κατ᾽ οὐδὲν ἐμποδὼν γίνεται τῷ λόγῳ. ὅτι δὲ καθὰ ἐν τῇ καταγραφῇ κεῖται ἀεὶ μεταξὺ τῶν β, ζ πίπτει, οὕτω δῆλον. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ λκ πρὸς δκ, τουτέστι πρὸς κβ, οὕτως ἡ κρ πρὸς ρβ. καὶ ὡς ἄρα ἓν πρὸς ἕν, οὕτως ἅπαντα πρὸς ἅπαντα. ὡς ἡ λρ πρὸς ρκ, ἡ κρ πρὸς ρβ. μείζονα δὲ λόγον ἔχει ἡ λρ πρὸς ρχ, ἤπερ ἡ λρ πρὸς ρκ. καὶ ἡ λρ ἄρα πρὸς ρχ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ κρ πρὸς ρβ. τουτέστιν ἡ ζβ πρὸς ζρ. ἐὰν ἄρα ποιήσωμεν ὡς ρλ πρὸς λχ, οὕτως τὴν βζ πρὸς ἄλλην τινά, ἔσται πρὸς μείζονα τῆς ζρ. φανερὸν δὲ αὐτόθεν ὅτι ἡ ζθ τῆς ζβ μείζων ἐστίν. ἐπεὶ γὰρ δέδεικται ὡς ἡ λδ πρὸς δκ, ἡ δχ πρὸς χβ, καὶ ἡ κβ πρὸς βρ. μείζων δὲ ἡ δχ τῆς χβ, μείζων ἄρα καὶ ἡ λδ τῆς δκ, καὶ ἡ κβ τῆς βρ. ὥστε καὶ ἡ λδ τῆς βρ. καὶ ὅλη ἄρα ἡ λχ τῆς χρ μείζων ἐστίν, ὥστε καὶ ἡ θζ τῆς ζβ. λοιπὸν ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ βδ, τουτέστι τὸ δοθὲν πρὸς τὸ ἀπὸ δχ, οὕτως ἡ ζχ πρὸς ζθ. ἐπεὶ γὰρ τῶν τῆς βζ πρὸς θζ λόγων ὁ αὐτὸς ἐδείχθη ὁ συγκείμενος ἔκ τε τοῦ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ, καὶ τῆς βζ πρὸς ζχ. ὁ αὐτὸς δὲ τῷ τῆς βζ πρὸς ζθ ἐστί, καὶ ὁ συγκείμενος ἔκ τε τοῦ τῆς βζ πρὸς ζχ, καὶ τοῦ τῆς ζχ πρὸς ζθ λόγου. καὶ ὁ συγκείμενος ἄρα ἔκ τε τοῦ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ, καὶ τοῦ τῆς βζ πρὸς ζχ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ συγκειμένῳ ἐκ τοῦ τῆς βζ πρὸς ζχ, καὶ τοῦ τῆς ζχ πρὸς ζθ. ἐὰν οὖν τὸν ἐν ἀμφοτέροις τοῖς λόγοις κοινὸν ἀφέλωμεν τὸν τῆς βζ πρὸς ζχ, λοιπὸς ὁ τοῦ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ λόγος, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς ζχ πρὸς ζθ. καὶ δεῖ δοθεῖσαν τὴν δζ τέμνειν δεῖ κατὰ τὸ χ, καὶ ποιεῖν ὡς τὴν χζ πρὸς δοθεῖσαν, τουτέστι τὴν ζθ, οὕτως τὸ δοθέν, τουτέστι τὸ ἀπὸ βδ, πρὸς τὸ ἀπὸ δχ. τὸ δὲ οὕτως ἁπλῶς μὲν λεγόμενον ἔχει διορισμόν. προστιθεμένων δὲ τῶν προβλημάτων τῶν ἐνθάδε ὑπαρχόντων, τουτέστι τοῦ τε διπλασίαν εἶναι τὴν δβ τῆς βζ, καὶ τοῦ μείζονα τὴν βζ τῆς ζθ, οὐ κατὰ τὴν ἀνάλυσιν οὐκ ἔχει διορισμόν, καὶ ἔσται πρόβλημα τοιοῦτον. δύο δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν δβ, βζ, καὶ διπλασίας οὔσης τῆς δβ τῆς βζ, καὶ σημείου ἐπὶ τῆς βζ τοῦ θ, τεμεῖν τὴν δβ κατὰ τὸ χ, καὶ ποιεῖν ὡς τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ, τὴν χζ πρὸς ζθ. ἑκάτερα δὲ ταῦτα ἐπὶ τέλει ἀναλυθήσεται, καὶ συντεθήσεται. ἐπὶ τέλει μὲν τὸ προ-

ῥηθὲν

ῥηθὲν ἐπηγγείλατο δεῖξαι, ἐν οὐδενὶ δὲ τῶν ἀντιγράφων εὑρεῖν. ἔνεστι δὲ τὸ ἐπάγγελμα, ὅθεν καὶ Διονυσόδωρον μὲν εὑρίσκομεν μὴ τῶν αὐτῶν ἐπιτυχόντα, ἀδυνατήσαντα δὲ ἐπιβαλεῖν τῷ καταλειφθέντι λήμματι, ἐφ᾽ ἑτέραν ὁδὸν τοῦ ὅλου προβλήματος ἐλθεῖν, ἥν τινα ἑξῆς γράψομεν. Διοκλῆς μέντοι καὶ αὐτὸς ἐν τῷ περὶ πυρείων αὐτῷ συγγεγραμμένῳ βιβλίῳ, ἐπηγγέλθαι νομίζων τὸν Ἀρχιμήδη, μὴ ποτε πεποιηκέναι δὲ τὸ ἐπάγγελμα, αὐτὸς ἀναπληροῦν ἐπεχείρησε. καὶ τὸ ἐπιχείρημα ἑξῆς γράψομεν. ἔστι γὰρ καὶ αὐτὸ οὐδένα μὲν ἔχον πρὸς τὰ παραλελειμμένα λόγον. ὁμοίως δὲ τῷ Διονυσοδώρῳ δι᾽ ἑτέρας ἀποδείξεως κατασκευάζον τὸ πρόβλημα. ἐν τινι μέντοι παλαιῷ βιβλίῳ. οὐδὲ γὰρ τῆς εἰς πολλὰ ζητήσεως ἀπέστημεν, ἐντετύχαμεν θεωρήμασι γεγραμμένοις, οὐκ ὀλίγην τὴν ἐκ τῶν πταισμάτων ἔχουσιν ἀσάφειαν περί τε τὰς καταγραφὰς πολυτρόπως ἡμαρτημένοις. τῶν μέντοι ζητουμένων εἶχον τὴν ὑπόστασιν, ἐν μέρει δὲ τὴν Ἀρχιμήδει φίλην Δωρίδα γλῶσσαν ἀπέσωζον, καὶ τοῖς συνήθεσι τῷ ἀρχαίῳ τῶν πραγμάτων ὀνόμασιν ἐγέγραπτο. τῆς μὲν παραβολῆς ὀρθογωνίου κώνου τομῆς ὀνομαζομένης, τῆς δὲ ὑπερβολῆς ἀμβλυγωνίου κώνου τομῆς. ὡς ἐξ αὐτῶν διανοεῖσθαι, μὴ ἄρα καὶ αὐτὸ εἴη τὰ ἐν τῷ τέλει ἐπηγγελμένα γράφεσθαι. ὅθεν σπουδαιότερον ἐντυγχάνοντες, αὐτὸ μὲν τὸ ῥητὸν ὡς γέγραπται διὰ πλῆθος, ὡς εἴρηται, τῶν πταισμάτων δυσχερὲς εὑρόντες, τὰς ἐννοίας δὲ κατὰ μικρὸν ἀποσυλήσαντες κοινοτέρᾳ καὶ σαφεστέρᾳ κατὰ τὸ δυνατὸν λέξει γράφομεν. καθόλου δὲ πρῶτον
† διορισμῶν τὸ θεώρημα γραφήσεται, ἵνα τὸ λεγόμενον ὑπ᾽ αὐτοῦ σαφηνισθῇ περὶ τῶν † διορισμῶν. εἶτα καὶ τοῖς ἀναλελυμένοις ἐν τῷ προβλήματι προσαρμοσθήσεται.

Εὐθείας δοθείσης τῆς αβ, καὶ ἑτέρας τῆς αγ, καὶ χωρίου τοῦ δ, προκείσθω λαβεῖν ἐπὶ τῆς αβ σημεῖον ὡς τὸ ε, ὥστε εἶναι ὡς τὴν αε πρὸς αγ, οὕτω τὸ δ χωρίον πρὸς τὸ ἀπὸ εβ. γεγονέτω, καὶ κείσθω ἡ αγ πρὸς ὀρθὰς τῇ αβ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ γε διήχθω ἐπὶ τὸ ζ. καὶ ἤχθω διὰ τοῦ γ τῇ αβ παράλληλος ἡ γη, διὰ δὲ τοῦ β τῇ αγ παράλληλος ἡ ζηβ, συμπίπτουσα ἑκατέρᾳ τῶν γε, γη. καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ηθ παραλληλόγραμμον, καὶ διὰ τοῦ ε ὁποτέρᾳ τῶν γθ, ηζ παράλληλος ἤχθω ἡ κελ. καὶ τῷ δ ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ γημ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ εα πρὸς αγ, οὕτως τὸ δ πρὸς τὸ ἀπὸ εβ. ὡς δὲ ἡ εα πρὸς αγ, οὕτως ἡ γη πρὸς ηζ. ὡς δὲ ἡ γη πρὸς ηζ, οὕτως τὸ ἀπὸ γη πρὸς τὸ ὑπὸ γηζ. ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ γη πρὸς τὸ ὑπὸ γηζ, οὕτως τὸ δ πρὸς τὸ ἀπὸ εβ, τουτέστι πρὸς τὸ ἀπὸ κζ. καὶ ἐναλλὰξ, ὡς τὸ ἀπὸ γη πρὸς τὸ δ, τουτέστι πρὸς τὸ ὑπὸ γημ, οὕτως τὸ ὑπὸ γηζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζκ. ἀλλ᾽ ὡς τὸ ἀπὸ γη πρὸς τὸ ὑπὸ γημ, οὕτως ἡ γη πρὸς ημ. καὶ ὡς ἄρα ἡ γη πρὸς ημ, οὕτως τὸ ὑπὸ γηζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζκ. ἀλλ᾽ ὡς ἡ γη πρὸς ημ, τῆς ηζ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης, οὕτως τὸ ὑπὸ γηζ πρὸς τὸ ὑπὸ μηζ.

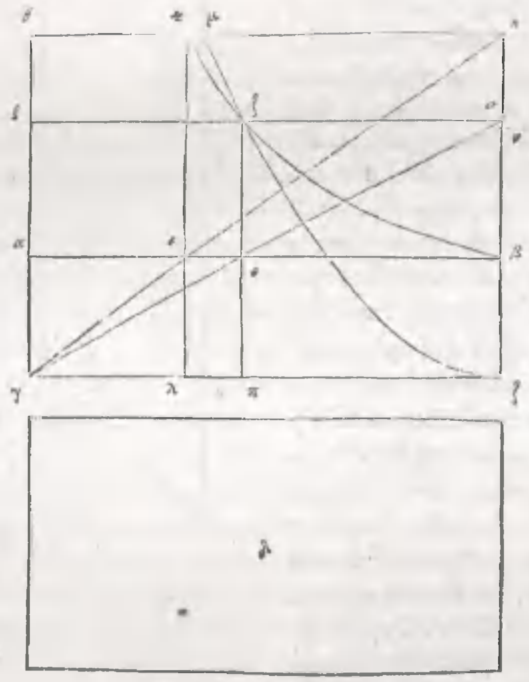


ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ γηζ πρὸς τὸ ὑπὸ μηζ, οὕτως τὸ ὑπὸ γηζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζκ. ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ μηζ τῷ ἀπὸ ζκ. ἐὰν ἄρα περὶ ἄξονα τὴν ζη γραφῇ διὰ τοῦ η παραβολή, ὥστε τὰς καταγομένας δύνασθαι παρὰ τὴν ημ, ἥξει διὰ τοῦ κ. καὶ ἔσται θέσει δεδομένη, διὰ τὸ δεδομένην εἶναι τὴν ημ τῷ μεγέθει, περιέχουσαν μετὰ τῆς ηγ δεδομένης δοθὲν τὸ δ. τὸ ἄρα κ ἅπτεται θέσει δεδομένης παραβολῆς. γεγράφθω οὖν, ὡς εἴρηται, καὶ ἔστω ὡς ἡ ηκ. πάλιν ἐπειδὴ τὸ θλ χωρίον

ἴσον

ἴσον ἐστὶ τῷ γβ, τουτέστι τὸ ὑπὸ θκλ τῷ ὑπὸ αβη. ἐὰν διὰ τοῦ β περὶ ἀσυμπτώτους τὰς θγ, γη γραφῇ ὑπερβολή, ἥξει διὰ τοῦ κ, διὰ τὴν ἀντιστροφὴν τοῦ η θεωρήματος τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων. καὶ ἔσται θέσει δεδομένη, διὰ τὸ καὶ ἑκατέραν τῶν θγ, γη, ἔτι μὴν καὶ τὸ β τῇ θέσει δεδόσθαι. γεγράφθω ὡς εἴρηται, καὶ ἔστω ὡς ἡ κβ. τὸ ἄρα κ ἅπτεται θέσει δεδομένης ὑπερβολῆς. ἥπτετο δὲ καὶ θέσει δεδομένης παραβολῆς. δέδοται ἄρα τὸ κ. καί ἐστιν ἀπ᾽ αὐτοῦ κάθετος ἡ κε, ἐπὶ θέσει δεδομένην τὴν αβ. δέδοται ἄρα τὸ ε. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ εα πρὸς τὴν δοθεῖσαν τὴν αγ, οὕτως δοθὲν τὸ δ πρὸς τὸ ἀπὸ εβ. δύο ἄρα στερεῶν ὧν βάσεις τὸ ἀπὸ εβ, καὶ τὸ δ. ὕψη δὲ αἱ εα, αγ, ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ὥστε ἴσα ἐστὶ τὰ στερεά. τὸ ἄρα ἀπὸ εβ ἐπὶ τὴν εα, ἴσον ἐστὶ τῷ δοθέντι τῷ δ, ἐπὶ δοθεῖσαν τὴν γα. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ βε ἐπὶ τὴν εα μέγιστόν ἐστι πάντων τῶν ὁμοίως λαμβανομένων ἐπὶ τῆς βα. ὅταν ἡ διπλασία ἡ βε τῆς εα, ὡς δειχθήσεται. δεῖ ἄρα τὸ δοθὲν ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν μὴ μεῖζον εἶναι τοῦ ἀπὸ τῆς βε ἐπὶ τὴν εα.

Συντεθήσεται δὲ οὕτως. ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ αβ, ἄλλη δέ τις δοθεῖσα ἡ αγ, τὸ δὲ δοθὲν χωρίον τὸ δ. καὶ δέον ἔστω τεμεῖν τὴν αβ, ὥστε εἶναι ὡς τὸ ἓν τμῆμα πρὸς τὴν δοθεῖσαν τὴν αγ, οὕτως τὸ δοθὲν τὸ δ πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος. εἰλήφθω τῆς αβ τρίτον μέρος ἡ αε. τὸ ἄρα δ ἐπὶ τὴν αγ, ἤτοι μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς βε ἐπὶ τὴν εα, ἢ ἴσον, ἢ ἔλασσον. εἰ μὲν οὖν μεῖζόν ἐστιν, οὐ συντεθήσεται, ὡς ἐν τῇ ἀναλύσει δέδεικται. εἰ δὲ ἴσον ἐστὶ, τὸ ε σημεῖον ποιήσει τὸ πρόβλημα. ἴσων γὰρ ὄντων τῶν στερεῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι. καὶ ἔστιν ὡς ἡ εα πρὸς αγ, οὕτως τὸ δ πρὸς τὸ ἀπὸ βε. εἰ δὲ ἔλασσόν ἐστι τὸ δ ἐπὶ τὴν αγ, τοῦ ἀπὸ βε ἐπὶ τὴν εα, συντεθήσεται οὕτως. κείσθω ἡ αγ πρὸς ὀρθὰς τῇ αβ, καὶ διὰ τοῦ γ τῇ αβ παράλληλος ἤχθω ἡ γζ. διὰ δὲ τοῦ β τῇ αγ παράλληλος ἤχθω ἡ βζ, καὶ συμπιπτέτω τῇ γε ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ η. καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ζθ παραλληλόγραμμον, καὶ διὰ τοῦ ε τῇ ζη παράλληλος ἤχθω ἡ κελ. ἐπεὶ οὖν τὸ δ ἐπὶ τὴν αγ, ἔλασσόν ἐστι τοῦ ἀπὸ βε ἐπὶ τὴν εα. ἐστὶν ὡς ἡ εα πρὸς αγ, οὕτως τὸ δ πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ἀπὸ τῆς βε, τουτέστι τοῦ ἀπὸ τῆς ηκ. ἔστω οὖν ὡς ἡ εα πρὸς αγ, οὕτως τὸ δ πρὸς τὸ ἀπὸ ημ. καὶ τῷ δ ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ γζν. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ εα πρὸς αγ, οὕτως τὸ δ, τουτέστι τὸ ὑπὸ γζν πρὸς τὸ ἀπὸ ημ. ἀλλ᾽ ὡς ἡ εα πρὸς αγ, οὕτως ἡ γζ πρὸς ζη. ὡς δὲ ἡ γζ πρὸς ζη, οὕτως τὸ ἀπὸ γζ πρὸς τὸ ὑπὸ γζη. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ γζ πρὸς τὸ ὑπὸ γζη, οὕτως τὸ ὑπὸ γζν πρὸς τὸ ἀπὸ ημ. καὶ ἐναλλὰξ, ὡς τὸ ἀπὸ γζ πρὸς τὸ ὑπὸ γζν, οὕτως τὸ ὑπὸ γζη πρὸς τὸ ἀπὸ ημ. ἀλλ᾽ ὡς τὸ ἀπὸ γζ πρὸς τὸ ὑπὸ γζν, οὕτως ἡ γζ πρὸς ζν. ὡς δὲ ἡ γζ πρὸς ζν, τῆς ζη κοινοῦ ὕψους

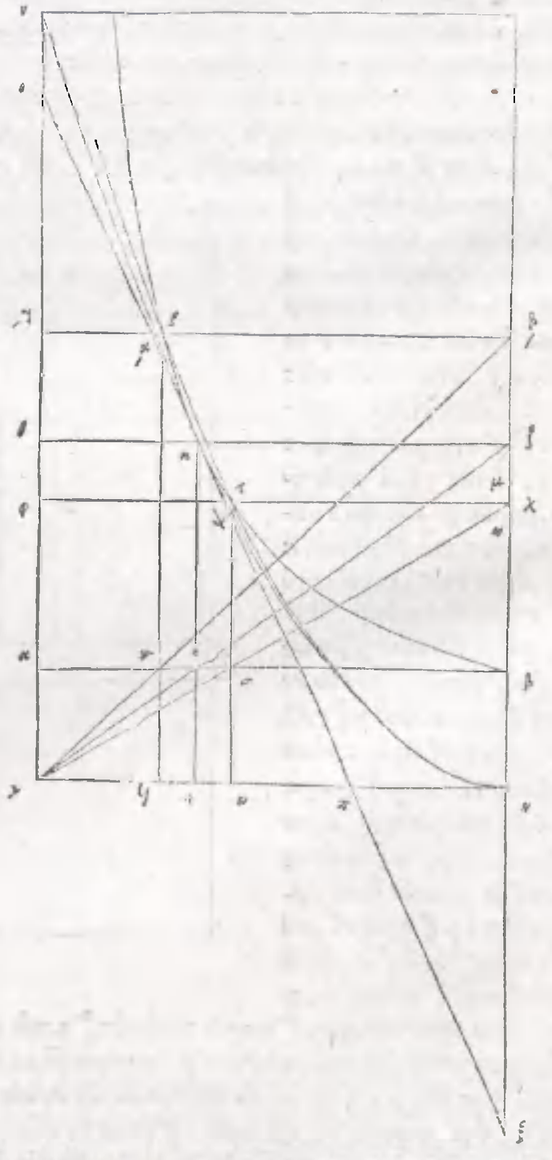


λαμβανομένης, οὕτως τὸ ὑπὸ γζη πρὸς τὸ ὑπὸ νζη. καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ γζη πρὸς τὸ ὑπὸ νζη, οὕτως τὸ ὑπὸ γζη πρὸς τὸ ἀπὸ ημ. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ ημ τῷ ὑπὸ ηζν. ἐὰν ἄρα διὰ τοῦ ζ περὶ ἄξονα τὴν ζη γράψωμεν παραβολήν, ὥστε τὰς καταγομένας δύνασθαι παρὰ τὴν ζν, ἥξει διὰ τοῦ μ. γεγράφθω, καὶ ἔστω ἡ μξζ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ θλ τῷ αζ, τουτέστι τὸ ὑπὸ θκλ τῷ ὑπὸ αβζ. ἐὰν διὰ τοῦ β περὶ ἀσυμπτώτους τὰς θγ, γζ γράψωμεν ὑπερβολήν, ἥ-

ξει διὰ

ξει διὰ τοῦ κ, διὰ τὴν ἀντιστροφὴν τοῦ η θεωρήματος τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων. γεγράφθω, καὶ ἔστω ὡς ἡ β κ, τέμνουσα τὴν παραβολὴν κατὰ τὸ ξ. καὶ ἀπὸ τοῦ ξ ἐπὶ τὴν α β κάθετος ἤχθω ἡ ξ ο π. καὶ διὰ τοῦ ξ τῇ α β παράλληλος ἤχθω ἡ ρ ξ σ. ἐπεὶ οὖν ὑπερβολή ἐστιν ἡ β κ ζ, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ θ γ, γ ζ. καὶ παράλληλοι ἠγμέναι εἰσὶν αἱ ρ ξ π, ταῖς α β ζ. ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ρ ξ π τῷ ὑπὸ α β ζ, ὥστε καὶ τὸ ρ ο τῷ ο ζ. ἐὰν ἄρα ἀπὸ τοῦ γ ἐπὶ τὸ σ ἐπιζευχθῇ, ἥξει διὰ τοῦ ο. ἐρχέσθω, καὶ ἔστω ὡς ἡ γ ο ϲ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ο α πρὸς α γ, οὕτως ἡ ο β πρὸς β ϲ, τουτέστιν ἡ γ ζ πρὸς ζ ϲ. ὡς δὲ ἡ γ ζ πρὸς ζ ϲ, τῆς ζ ν κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης, οὕτως τὸ ὑπὸ γ ζ ν πρὸς τὸ ὑπὸ ϲ ζ ν. καὶ ὡς ἄρα ἡ ο α πρὸς α γ, οὕτως τὸ ὑπὸ γ ζ ν πρὸς τὸ ὑπὸ ϲ ζ ν. καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ γ ζ ν, τὸ δ χωρίον. τῷ δὲ ὑπὸ ϲ ζ ν, ἴσον τὸ ἀπὸ ϲ ξ, τουτέστι τὸ ἀπὸ β ο, διὰ τὴν παραβολήν. ὡς ἄρα ἡ ο α πρὸς α γ, οὕτως τὸ δ χωρίον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς β ο. εἴληπται ἄρα τὸ ο σημεῖον, ποιοῦν τὸ πρόβλημα.

Ὅτι διπλασίας οὔσης τῆς β ε τῆς ε α, τὸ ἀπὸ τῆς β ε ἐπὶ τὴν ε α μέγιστόν ἐστι πάντων τῶν ὁμοίως λαμβανομένων ἐπὶ τῆς β α, δειχθήσεται οὕτως. ἔστω γὰρ ὡς ἐν τῇ ἀναλύσει πάλιν δοθεῖσα εὐθεῖα πρὸς ὀρθὰς τῇ α β, ἡ α γ. καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ γ ε ἐκβεβλήσθω, καὶ συμπιπτέτω τῇ διὰ τοῦ β παραλλήλῳ, ἠγμένῃ τῇ α γ κατὰ τὸ ζ. καὶ διὰ τῶν γ ζ παράλληλοι τῇ α β ἤχθωσαν αἱ θ ζ, γ η. καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ γ α ἐπὶ τὸ θ. καὶ ταύτῃ παράλληλος διὰ τοῦ ε ἤχθω ἡ κ ε λ. καὶ γεγονέτω ὡς ἡ ε α πρὸς α γ, οὕτως τὸ ὑπὸ γ η μ πρὸς τὸ ἀπὸ ε β. τὸ ἄρα ἀπὸ β ε ἐπὶ τὴν ε α, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ γ η μ ἐπὶ τὴν α γ, διὰ τὸ δύο στερεῶν ἀντιπεπονθέναι τὰς βάσεις τοῖς ὕψεσι. λέγω οὖν, ὅτι τὸ ὑπὸ γ η μ ἐπὶ τὴν α γ, μέγιστόν ἐστι πάντων ὁμοίως ἐπὶ τῆς β α λαμβανομένων. γεγράφθω γὰρ διὰ τοῦ η περὶ ἄξονα τὴν ζ η παραβολή, ὥστε τὰς καταγομένας δύνασθαι παρὰ τὴν η μ. ἥξει δὴ διὰ τοῦ κ, ὡς ἐν τῇ ἀναλύσει δέδεικται. καὶ συμπεσεῖται ἐκβαλλομένη τῇ θ γ παραλλήλῳ οὔσῃ τῇ διαμέτρῳ τῆς τομῆς, διὰ τὸ ἕβδομον καὶ εἰκοστὸν θεώρημα τοῦ πρώτου βιβλίου τοῦ ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων. ἐκβεβλήσθω καὶ συμπιπτέτω κατὰ τὸ ν. καὶ διὰ τοῦ β περὶ ἀσυμπτώτους τὰς ν γ η, γεγράφθω ὑπερβολή. ἥξει ἄρα διὰ τοῦ κ, ὡς ἐν τῇ ἀναλύσει εἴρηται. ἐρχέσθω οὖν ὡς ἡ β κ. καὶ ἐκβληθείσῃ τῇ ζ η ἴση κείσθω ἡ η ξ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ξ κ. καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ ο. φανερὸν ἄρα ὅτι ἐφάπτεται τῆς παραβολῆς



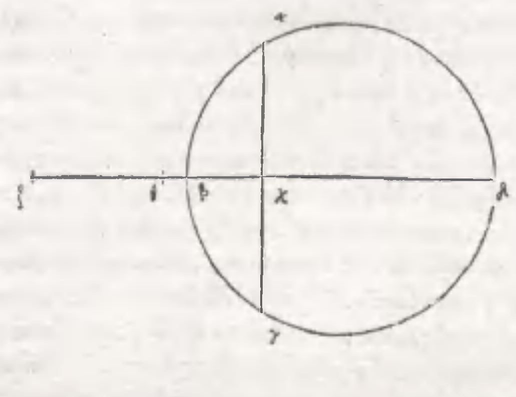
διὰ

διὰ τὴν ἀντιστροφὴν τοῦ τετάρτου καὶ τριακοστοῦ θεωρήματος τοῦ πρώτου βιβλίου τῶν ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων. ἐπεὶ οὖν διπλῆ ἐστιν ἡ β ε τῆς ε α, οὕτως γὰρ ὑπόκειται, τουτέστιν ἡ ζ κ τῆς κ θ. καί ἐστιν ὅμοιον τὸ ο θ κ τρίγωνον τῷ ξ ζ κ τριγώνῳ. διπλασία ἐστὶ καὶ ἡ ξ κ τῆς κ ο. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ξ κ τῆς κ ο διπλῆ, διὰ τὸ ἴσην τὴν ξ ζ τῇ ζ η. καὶ παράλληλον ἐν τῷ π κ τῇ κ ζ. ἴση ἄρα ἡ ο κ τῇ κ π, ἡ ἄρα ο κ π ἐφάπτουσα τῆς παραβολῆς, καὶ μεταξὺ οὖσα τῶν ἀσυμπτώτων δίχα τέμνεται. ἐφάπτεται ἄρα τῆς ὑπερβολῆς, διὰ τὴν ἀντιστροφὴν τοῦ τρίτου θεωρήματος τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων. ἐφήπτετο δὲ καὶ τῆς παραβολῆς κατὰ τὸ αὐτὸ κ. ἡ ἄρα παραβολὴ τῆς ὑπερβολῆς ἐφάπτεται κατὰ τὸ κ. νενοήσθω οὖν καὶ ἡ ὑπερβολὴ προσεκβαλλομένη ὡς ἐπὶ τὸ ρ. καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς α β τυχὸν σημεῖον τὸ ϲ, καὶ διὰ τοῦ ϲ τῇ κ λ παράλληλος ἤχθω ἡ τ ϲ υ. καὶ συμβαλλέτω τῇ ὑπερβολῇ κατὰ τὸ τ, καὶ διὰ τοῦ τ τῇ γ η παράλληλος ἤχθω ἡ φ τ χ. ἐπεὶ οὖν διὰ τὴν ὑπερβολὴν καὶ τὰς ἀσυμπτώτους, ἴσον ἐστὶ τὸ φ υ τῷ β, κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ γ ϲ. ἴσον γὰρ τὸ φ ϲ τῷ ϲ η. καὶ διὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ γ ἐπὶ τὸ χ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἥξει διὰ τοῦ ϲ. ἐρχέσθω, καὶ ἔστω ὡς ἡ γ ϲ χ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ ψ χ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ χ η μ διὰ τὴν παραβολήν, τὸ ἀπὸ τ χ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ὑπὸ χ η μ. γεγονέτω οὖν τῷ ἀπὸ τ χ ἴσον τὸ ὑπὸ χ η ω. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ϲ α πρὸς α γ, οὕτως ἡ γ η πρὸς η χ. ἀλλ' ὡς ἡ γ η πρὸς η χ τῆς η ω κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης, οὕτως τὸ ὑπὸ γ η ω πρὸς τὸ ὑπὸ χ η ω. καὶ πρὸς τὸ ἴσον αὐτῷ, τὸ ἀπὸ χ τ, τουτέστι τὸ ἀπὸ β ϲ ἐπὶ τὴν ϲ α ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ γ η ω ἐπὶ τὴν γ α. τὸ δὲ ὑπὸ γ η ω ἐπὶ τὴν γ α ἔλασσόν ἐστι τοῦ ὑπὸ γ η μ ἐπὶ τὴν γ α, τὸ ἄρα ἀπὸ β ϲ ἐπὶ τὴν ϲ α ἔλασσόν ἐστι τοῦ ἀπὸ β ε ἐπὶ τὴν ε α. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ ἐπὶ πάντων τῶν σημείων τῶν μεταξὺ λαμβανομένων τῶν ε, β. ἀλλὰ δὴ εἰλήφθω μεταξὺ τῶν ε, α σημεῖον τὸ ς. λέγω ὅτι καὶ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς β ε ἐπὶ τὴν ε α μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ β ς ἐπὶ τὴν ς α. τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασμένων ἤχθω διὰ τοῦ ς τῇ κ λ παράλληλος ἡ υ ς ρ. καὶ συμβαλλέτω τῇ ὑπερβολῇ κατὰ τὸ ρ. συμβαλεῖ γὰρ αὐτῇ διὰ τὸ παράλληλος εἶναι τῇ ἀσυμπτώτῳ. καὶ διὰ τοῦ ρ παράλληλος ἀχθεῖσα τῇ α β, ἡ α ρ β. συμβαλλέτω τῇ η ζ ἐκβαλλομένῃ κατὰ τὸ β. καὶ ἐπεὶ πάλιν διὰ τὴν ὑπερβολὴν ἴσον ἐστὶ τὸ γ υ καὶ τῷ α η, ἡ ἀπὸ τοῦ γ ἐπὶ τὸ β ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα, ἥξει διὰ τοῦ ς. ἐρχέσθω, καὶ ἔστω ὡς ἡ γ ς β. καὶ ἐπεὶ πάλιν διὰ τὴν παραβολὴν ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ α β τῷ ὑπὸ β η μ, τὸ ἄρα ἀπὸ ρ β ἔλασσόν ἐστι τοῦ ὑπὸ β η μ. γεγονέτω τὸ ἀπὸ ρ β ἴσον τῷ ὑπὸ β η ω. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ς α πρὸς α γ, οὕτως ἡ γ η πρὸς η β. ἀλλ' ὡς ἡ γ η πρὸς η β τῆς η ω κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης, οὕτως τὸ ὑπὸ γ η ω πρὸς τὸ ὑπὸ β η ω. τουτέστι πρὸς τὸ ἀπὸ ρ β, τουτέστι πρὸς τὸ ἀπὸ β ς. τὸ ἄρα ἀπὸ β ς ἐπὶ τὴν ς α, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ γ η ω ἐπὶ τὴν γ α. καὶ μεῖζον τὸ ὑπὸ γ η μ τοῦ ὑπὸ γ η ω. μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ β ε ἐπὶ τὴν ε α, τοῦ ἀπὸ β ς ἐπὶ τὴν ς α. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ ἐπὶ πάντων τῶν σημείων τῶν μεταξὺ τῶν ε, α λαμβανομένων. ἐδείχθη δὲ καὶ ἐπὶ πάντων τῶν μεταξὺ τοῦ ε, β λαμβανομένων. πάντων ἄρα τῶν ἐπὶ τῆς α β ὁμοίως λαμβανομένων, μέγιστόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς β ε ἐπὶ τὴν ε α, ὅταν ἡ διπλασία ἡ β ε τῆς ε α. ἐπιστῆσαι δὲ χρὴ καὶ τοῖς ἀκολουθοῦσι κατὰ τὴν εἰρημένην καταγραφήν. ἐπεὶ γὰρ δέδεικται τὸ ἀπὸ β ϲ ἐπὶ τὴν ϲ α, καὶ τὸ ἀπὸ β ς ἐπὶ τὴν ς α ἔλασσον τοῦ ἀπὸ β ε ἐπὶ τῆς ε α. δυνατόν ἐστι καὶ τοῦ δοθέντος χωρίου ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν ἐλάσσονος ὄντος τοῦ ἀπὸ τῆς β ε ἐπὶ τῆς ε α κατὰ δύο σημεῖα τῆς α β τεμνομένην ποιεῖν τὸ ἐξ ἀρχῆς πρόβλημα. τοῦτο δὲ γίνεται, εἰ νοήσαιμεν περὶ διάμετρον τὴν χ η γραφομένην παραβολήν, ὥστε τὰς καταγομένας δύνασθαι παρὰ τὴν η ω. ἡ γὰρ τοιαύτη παραβολή, πάντως ἔρχεται διὰ τοῦ τ. καὶ ἐπειδὴ ἀνάγκη αὐτὴν συμπίπτειν τῇ γ ν παραλλήλῳ οὔσῃ τῇ διαμέτρῳ, δῆλον ὅτι τέμνει τὴν ὑπερβολήν, καὶ κατ' ἄλλο σημεῖον ἀνωτέρω τοῦ κ, ὡς ἐνταῦθα κατὰ τὸ ρ. καὶ ἀπὸ τοῦ ρ ἐπὶ τὴν α β κάθετος ἀγομένη, ὡς ἐνταῦθα ἡ ρ ς τέμνει τὴν α β κατὰ τὸ ς. ὥστε τὸ ς σημεῖον ποιεῖν τὸ πρόβλημα, καὶ ἴσον γίνεσθαι τὸ ἀπὸ β ϲ ἐπὶ τὴν ϲ α, τῷ ἀπὸ β ς ἐπὶ τὴν ς α, ὡς ἐστὶ διὰ τῶν προειρημένων ἀποδείξεων ἐμφανές. ὥστε δυνατοῦ ὄντος ἐπὶ τῆς β α δύο σημεῖα λαμβάνειν, ποιοῦντα τὸ ζητούμενον, ἔξεστιν ὁπότερον τις βούλοιτο λαμβάνειν, ἢ τὸ μεταξὺ τῶν ε, β. ἢ τὸ μεταξὺ τῶν ε, α. εἰ μὲν γὰρ τὸ μεταξὺ τῶν ε, β ὡς εἴρηται τῆς διὰ τῶν η, τ σημείων γραφομένης παραβολῆς κατὰ δύο σημεῖα τεμνούσης τὴν ὑπερβολὴν τὸ μὲν ἐγγύτερον τοῦ η, τουτέστι τοῦ ἄξονος τῆς παραβολῆς εὑρήσει τὸ μεταξὺ τῶν ε, β, ὡς ἐνταῦθα τὸ τ εὑρίσκει τὸ ϲ. τὸ δὲ ἀπωτέρω τὸ μεταξὺ τῶν ε, α ὡς ἐνταῦθα τὸ ρ εὑρίσκει τὸ ς.

Καθόλου μὲν οὖν οὕτως ἀναλέλυται καὶ συντέθειται τὸ πρόβλημα. ἵνα δὲ καὶ τοῖς ἀρχι-

μηδείοις

μηδείοις ῥήμασιν ἐφαρμοσθῇ, νενοήσθω ὡς ἐν αὐτῇ τῇ τοῦ ῥητοῦ καταγραφῇ, διάμετρος μὲν τῆς σφαίρας ἡ δ β. ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου ἡ β ζ, καὶ ἡ δεδομένη ἡ ζ θ. κατηντήσαμεν ἄρα φησὶν εἰς τὸ τὴν δ ζ τεμεῖν κατὰ τὸ χ. ὥστε εἶναι ὡς τὴν χ ζ πρὸς τὴν δοθεῖσαν, οὕτως τὸ δοθὲν πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δ χ. τοῦτο δὲ ἁπλῶς μὲν λεγόμενον ἔχει διορισμόν. εἰ γὰρ τὸ δοθὲν ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν μεῖζον ἐτύγχανεν τοῦ ἀπὸ τῆς δ β ἐπὶ τὴν β ζ, ἀδύνατον ἦν τὸ πρόβλημα ὡς δέδεικται. εἰ δὲ ἴσον, τὸ β σημεῖον ἐποίει τὸ πρόβλημα, καὶ οὕτως δὲ οὐδὲν ἦν πρὸς τὴν ἐξ ἀρχῆς ἀρχιμήδους πρόθεσιν. ἡ γὰρ σφαῖρα οὐκ ἐτέμνετο εἰς τὸν δοθέντα λόγον. ἁπλῶς γὰρ λεγόμενον εἶχον πρὸς διορισμόν. προστιθεμένων δὲ τῶν προβλημάτων τῶν ἐνθάδε ὑπαρχόντων, τουτέστι τοῦ τε διπλασίαν εἶναι τὴν δ β τῆς ζ β, καὶ τοῦ μείζονα εἶναι τὴν β ζ τῆς ζ θ, οὐκ ἔχει διορισμόν. τὸ γὰρ ἀπὸ δ β τὸ δοθὲν ἐπὶ τὴν ζ θ τὴν δοθεῖσαν ἔλαττόν ἐστι, τοῦ ἀπὸ τῆς δ β ἐπὶ τῆς β ζ. διὰ τὸ τὴν β ζ τῆς ζ θ μείζονα εἶναι, ὅπερ ὑπάρχον ὑπεδείξαμεν δυνατόν, καὶ ὅπως πρόκειται τὸ πρόβλημα. κατανοεῖν δὲ χρὴ καὶ τοῖς ὑπ' ἀρχιμήδους λεγομένοις συμφώνως ἔχουσιν τοῖς ὑφ' ἡμῶν ἀναλελυμένοις. πρότερον μὲν γὰρ μετὰ τὴν ἀνάλυσιν αὐτοῦ καθόλου τὸ εἰς ὃ κατήντησεν λέγων, φησί. δοθεῖσαν τὴν δ ζ τεμεῖν δεῖ κατὰ τὸ χ, καὶ ποιεῖν ὡς τὸ χ ζ πρὸς δοθεῖσαν, οὕτως τὸ δοθὲν πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δ χ. εἶτα εἰπὼν ὡς καθόλου μὲν τὸ λεγόμενον ἔχει διορισμόν. προστεθέντων δὲ τῶν ὑπ' αὐτοῦ εὑρεθέντων προβλημάτων, τοῦ τε εἶναι διπλασίαν τὴν δ β τῆς β ζ. καὶ μείζονα τὴν β ζ. τῆς ζ θ. μὴ ἔχειν διορισμὸν μερικώτερον, ἐπαναλαμβάνει τὸ πρόβλημα. καὶ φησίν· ὅτι καὶ ἔσται πρόβλημα τοιοῦτον. δύο δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν δ β, β ζ, καὶ διπλασίας οὔσης τῆς δ β τῆς β ζ, καὶ σημείου ἐπὶ τῆς β ζ τοῦ θ, τεμεῖν τὴν δ β κατὰ τὸ χ, οὐκέτι ὡς πρότερον τὴν δ ζ εἰπὼν, ἀλλὰ τὴν δ β δεῖν τεμεῖν διὰ τὸ ὡς ἀνωτέρω ἡμεῖς ἀπεδείξαμεν εἰδέναι αὐτὸν, ὡς δύο σημεῖα ἐστὶ τὰ λαμβανόμενα ἐπὶ τῆς δ ζ, καὶ ποιοῦντα τὸ πρόβλημα, ἓν μὲν τὸ μεταξὺ τῶν δ, β. ἕτερον δὲ τὸ μεταξὺ τῶν β, ζ. ὧν τὸ μεταξὺ τῶν δ, β ἦν τὸ πρὸς τὴν ἐξ ἀρχῆς πρόθεσιν χρήσιμον.

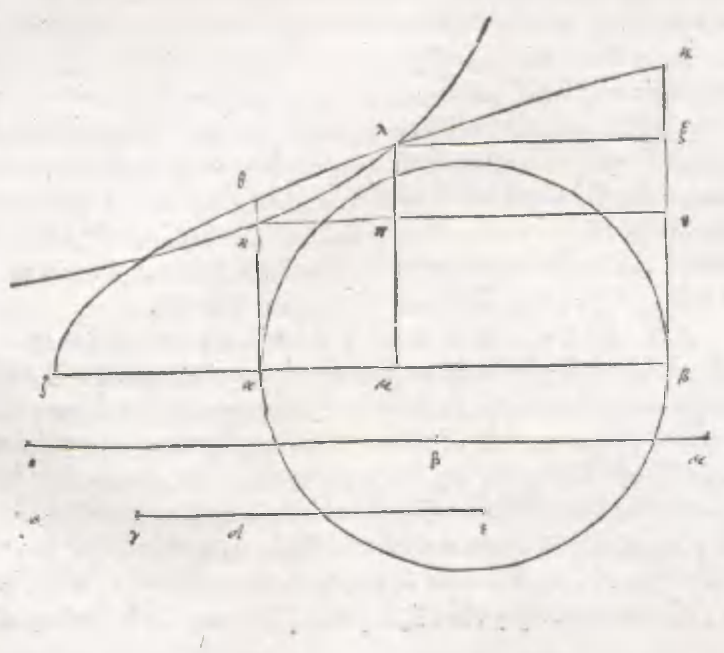


Ταῦτα μὲν οὖν ἀκόλουθα τοῖς ἀρχιμήδους ῥήμασι, κατὰ τὸ δυνατὸν σαφῶς ἀπεγραψάμεθα. ἐπεὶ δὲ ὡς προείρηται καὶ διονυσόδωρος οὐδαμῶς τοῖς ἐπὶ τέλει γραφομένοις παρ' ἀρχιμήδους ἐπηγγελμένοις ἐντυχὼν, ἀτονήσας ὥσπερ προσευρεῖν τὰ μὴ ἐκτεθέντα, ἐφ' ἑτέραν ὁδὸν βαδίζων τοῦ ὅλου προβλήματος, οὐκ ἄχαριν εὑρέσεως συνέγραψε τὸ πρῶτον ἀναγκαῖον, ᾠήθημεν δεῖν καὶ αὐτὸν τούτοις ὑποσυνάψαι διορθωσάμενοι κατὰ δύναμιν. καὶ γὰρ αὐτὸς ἐκ πολλῆς ἀμελετησίας τῶν ἀνθρώπων τὰ πολλὰ τῶν ἀποδείξεων τῷ πλήθει τῶν πταισμάτων ἠφανισμένην ἔχων ἐν πᾶσιν οἷς ἡμεῖς ἐνετύχαμεν ἀντιγράφοις ἐφέρετο,

ΩΣ ΔΙΟΝΥΣΟΔΩΡΟΣ.

Τὴν δοθεῖσαν σφαῖραν ἐπιπέδῳ τεμεῖν, ὥστε τὰ τμήματα αὐτῆς πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχειν τὸν δοθέντα. ἔστω ἡ δοθεῖσα σφαῖρα, ἧς διάμετρος ἡ α β. ὁ δὲ δοθεὶς λόγος, ὃν ἔχει ἡ γ δ πρὸς δ ε. δεῖ δὴ τεμεῖν τὴν σφαῖραν ἐπιπέδῳ ὀρθῷ πρὸς τὴν α β, ὥστε τὸ τμῆμα οὗ κορυφὴ τὸ α, πρὸς τὸ τμῆμα οὗ κορυφὴ τὸ β λόγον ἔχειν, ὃν ἔχει ἡ γ δ πρὸς δ ε. ἐκβεβλήσθω ἡ β α ἐπὶ τὸ ζ. καὶ κείσθω τῆς α β ἡμίσεια ἡ α ζ. καὶ ὃν ἔχει λόγον ἡ γ ε πρὸς ε δ, ἐχέτω ἡ ζ α πρὸς α η, καὶ ἔστω ἡ α η πρὸς ὀρθὰς τῇ α β. καὶ τῶν ζ α, α η μέση ἀνάλογον εἰλήφθω ἡ α θ. μείζων ἄρα ἡ α θ τῆς α η. καὶ περὶ ἄξονα τὴν ζ β διὰ τοῦ ζ γεγράφθω παραβολὴ, ὥστε τὰς καταγομένας δύνασθαι παρὰ τὴν α η. ἥξει ἄρα διὰ τοῦ θ. ἐπειδὴ τὸ ὑπὸ ζ α η ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ α θ. γεγράφθω οὖν, καὶ ἔστω ὡς ἡ ζ θ κ. καὶ διὰ τοῦ β ἀνήχθω παρὰ τὴν

τὴν α θ ἡ β κ, καὶ τεμνέτω τὴν παραβολὴν κατὰ τὸ κ, καὶ διὰ τοῦ θ περὶ ἀσυμπτώτους τὰς ζ β κ γεγράφθω ὑπερβολή. τεμεῖ δὴ τὴν παραβολὴν μεταξὺ τῶν θ, κ. τεμνέτω κατὰ τὸ λ. καὶ ἀπὸ τοῦ λ ἐπὶ τὴν α β κάθετος ἤχθω ἡ λ μ. καὶ διὰ τῶν, λ τῇ α β παράλλη-

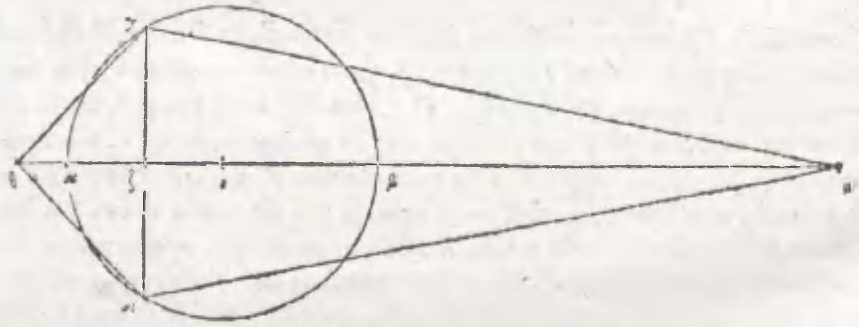


λοι ἤχθωσαν αἱ ν κ, λ ξ. ἐπεὶ οὖν ὑπερβολή ἐστιν ἡ θ λ, ἀσύμπτωτοι δὲ α β κ, ἐπὶ παράλληλοι ταῖς α κ ν, αἱ μ λ ξ, ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ α κ ν τῷ ὑπὸ μ λ ξ, διὰ τὸ η θεώρημα τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων. ἀλλ' ἡ μὲν ν κ τῇ α β ἴση ἐστὶν, ἡ δὲ λ ξ τῇ μ β, τὸ ἄρα ὑπὸ λ μ β ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ θ α β. καὶ διὰ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον εἶναι τῷ ὑπὸ τῶν μέσων, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσιν. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ λ μ πρὸς θ α, οὕτως ἡ α β πρὸς β μ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ λ μ πρὸς τὸ ἀπὸ θ α, οὕτως τὸ ἀπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ β μ. καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν παραβολὴν τὸ ἀπὸ λ μ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ζ μ α η, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ζ μ πρὸς μ λ, ἡ μ λ πρὸς α η. καὶ ὡς ἄρα ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας. καὶ τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς τρίτης. ὡς ἄρα ἡ ζ μ πρὸς α η, οὕτως τὸ ἀπὸ λ μ πρὸς τὸ ἀπὸ η α. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ λ μ πρὸς τὸ ἀπὸ θ α, οὕτως ἐδείχθη τὸ ἀπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ β μ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ β μ, οὕτως ἡ ζ μ πρὸς α η. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ β μ, οὕτως ὁ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ α β, πρὸς τὸν κύκλον οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ β μ. καὶ ὡς ὁ κύκλος οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ α β, πρὸς τὸν κύκλον οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ β μ, οὕτως ἡ ζ μ πρὸς α η. ὁ ἄρα κῶνος βάσιν ἔχων τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ α β, ὕψος δὲ τὴν α η, ἴσος ἐστὶ τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ β μ, ὕψος δὲ τὴν ζ μ. ὧν γὰρ κώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσοι εἰσὶν ἐκεῖνοι. ἀλλ' ὁ κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ α β, ὕψος δὲ τὴν ζ α, πρὸς τὸν κῶνον τὸν βάσιν μὲν ἔχοντα τὴν αὐτὴν, ὕψος δὲ τὴν α η, ἐστὶν ὡς ἡ ζ α πρὸς α η, τουτέστιν ἡ γ ε πρὸς ε δ. ἐπεὶ γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντες πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ὕψη. ὁ ἄρα κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ α β, ὕψος δὲ τὴν ζ α, πρὸς τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ β μ, ὕψος δὲ τὴν ζ μ, ἐστὶν ὡς ἡ γ ε πρὸς ε δ. ἀλλ' ὁ κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ α β, ὕψος δὲ τὴν ζ α, ἴσος ἐστὶ τῇ σφαίρᾳ. ὁ δὲ κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ β μ, ὕψος δὲ τὴν ζ μ, ἴσος ἐστὶ τῷ τμήματι τῆς σφαίρας, οὗ κορυφὴ μὲν ἐστὶ τὸ β, ὕψος δὲ ἡ β μ, ὡς ἑξῆς δειχθήσεται. καὶ ἡ σφαῖρα ἄρα πρὸς τὸ εἰρημένον τμῆμα λόγον ἔχει, ὃν ἡ γ ε πρὸς ε δ. καὶ διελόντι τὸ τμῆμα, οὗ κορυφὴ τὸ α, ὕψος δὲ ἡ α μ πρὸς τὸ τμῆ τμῆμα οὗ κορυφὴ τὸ β, ὕψος δὲ ἡ β μ, ὅπερ ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ γ δ πρὸς δ ε. τὸ ἄρα διὰ τοῦ λ μ ἐπίπεδον ἐκβαλλόμενον ὀρθὸν πρὸς τὴν α β, τέμνει τὴν σφαῖραν εἰς τὸν δοθέντα λόγον, ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Ὅτι δὲ ὁ κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ λ μ, ὕψος δὲ τὴν ζ μ, ἴσος ἐστὶ τῷ τμήματι τῆς σφαίρας, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ β, ὕψος δὲ ἡ β μ, δειχθήσεται οὕτως. γεγονέτω γὰρ ὡς ἡ ζ μ πρὸς μ α, οὕτως ἡ ο μ πρὸς μ β. ὁ ἄρα κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι, ὕψος δὲ τὴν ο μ, ἴσος ἐστὶ τῷ τμήματι. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ζ μ πρὸς μ α, οὕτως ἡ ο μ πρὸς μ β. καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ζ μ πρὸς μ ο, οὕτως ἡ α μ πρὸς μ β, ἀλλ' ὡς ἡ α μ πρὸς μ β, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς μ λ πρὸς τὸ ἀπὸ μ β. καὶ οὕτως ὁ κύκλος οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ λ μ, πρὸς τὸν κύκλον οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ μ β. ὡς ἄρα ὁ κύκλος οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ λ μ, πρὸς τὸν κύκλον οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ μ β, οὕτως ἡ ζ μ πρὸς μ ο. ὁ ἄρα κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ μ β, ὕψος δὲ τὴν ζ μ, ἴσος ἐστὶ τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ μ λ, ὕψος δὲ τὴν μ ο. ἀντιπεπόνθασι γὰρ αὐτῶν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ὥστε καὶ τῷ τμήματι ἴσος ἐστί.

ΩΣ ΔΙΟΚΛΗΣ ΕΝ ΤΩ ΠΕΡΙ ΠΥΡΙΩΝ.

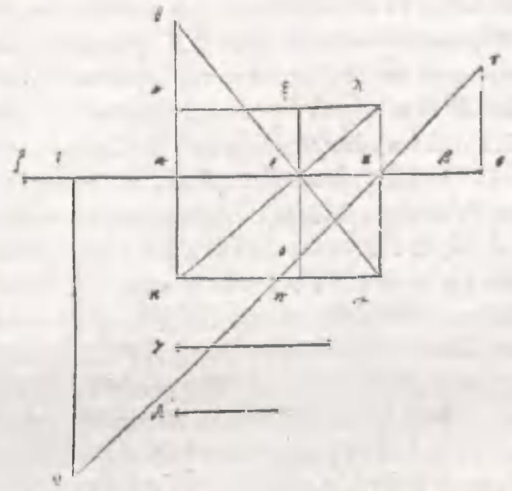
Γράφει δὲ καὶ ὁ Διοκλῆς ἐν τῷ περὶ πυρίων, λέγων τάδε. ἐν τῷ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου Ἀρχιμήδης ἀπέδειξεν, ὅτι πᾶν τμῆμα σφαίρας ἴσον ἐστὶ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι, ὕψος δὲ εὐθεῖάν τινα λόγον ἔχουσαν πρὸς τὴν ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετον, ὃν ἔχει συναμφότερος, ἥ τε ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, καὶ ἡ τοῦ ἐναλλὰξ τμήματος κάθετος πρὸς τὴν τοῦ ἐναλλὰξ τμήματος κάθετον. οἷον ἐὰν ᾖ σφαῖρα ἡ α β γ, καὶ τμηθῇ ἐπιπέδῳ τινὶ τῷ περὶ διάμετρον τὴν γ δ κύκλῳ. καὶ διαμέτρου οὔσης τῆς α β, κέντρου δὲ τοῦ ε. ποιήσωμεν ὡς συναμφότερον τὴν ε α, α ζ πρὸς ζ α, οὕτως τὴν η ζ πρὸς ζ β. ἔτι τε ὡς συναμφότερον τὴν ε β, β ζ πρὸς ζ β, οὕτως τὴν θ ζ πρὸς ζ α, ἀποδέδει-



κται ὅτι τὸ μὲν γ β δ τμῆμα τῆς σφαίρας ἴσον ἐστὶ τῷ κώνῳ, οὗ βάσις μέν ἐστιν ὁ περὶ διάμετρον τὴν γ δ κύκλος, ὕψος δὲ ἡ ζ η. τὸ δὲ γ α δ τμῆμα ἴσον ἐστὶ τῷ κώνῳ, οὗ βάσις μέν ἐστιν ἡ αὐτή, ὕψος δὲ ἡ θ ζ. προτεθέντος οὖν αὐτῷ τὴν δοθεῖσαν σφαῖραν ἐπιπέδῳ τεμεῖν, ὥστε τὰ τμήματα τῆς σφαίρας πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχειν τὸν δοθέντα, κατασκευάσας τὰ εἰρημένα φησί. λόγος ἄρα δοθείς ἐστι τοῦ κώνου, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν γ δ κύκλος, ὕψος δὲ ἡ ζ θ, πρὸς τὸν κῶνον, οὗ βάσις μέν ἐστιν ἡ αὐτή, ὕψος δὲ ἡ ζ η. καὶ γὰρ τοῦτο ἀποδέδεικται, οἱ κῶνοι οἱ ἐπὶ τῆς ἴσης βάσεως ὄντες, πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ὕψη. λόγος ἄρα τῆς θ ζ πρὸς ζ η δοθείς. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ θ ζ πρὸς ζ α, οὕτως συναμφότερος ἡ ε β ζ πρὸς τὴν ζ β. διελόντι ὡς ἡ θ α πρὸς α ζ, οὕτως ἡ ε β πρὸς ζ β. διὰ τὰ αὐτὰ δή, καὶ ὡς ἡ η β πρὸς ζ β, οὕτως ἡ αὐτὴ εὐθεῖα πρὸς τὴν ζ α. γέγονεν οὖν πρόβλημα τοιοῦτον. θέσει δοθείσης εὐθείας τῆς α β, καὶ δύο δοθέντων σημείων τῶν α, β, καὶ λόγου τοῦ τῆς θ ζ πρὸς ζ η, τεμεῖν τὴν α β κατὰ τὸ ζ, καὶ προσθεῖναι τὰς θ α, β η, ὥστε λόγον εἶναι τὸν τῆς θ ζ πρὸς ζ η τὸν δοθέντα, ἔτι τε εἶναι ὡς μὲν τὴν θ α πρὸς α ζ, οὕτως τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πρὸς τὴν ζ β, ὡς δὲ τὴν η β πρὸς β ζ, οὕτως τὴν αὐτὴν δοθεῖσαν πρὸς ζ α. ταῦτα δὲ ἑξῆς δέδεικται. ὁ γὰρ Ἀρχιμήδης μακρότερον αὐτὸ δείξας, καὶ οὕτως εἰς πρόβλημα ἕτερον ἀπάγει, ὃ οὐκ ἀποδείκνυσιν ἐν τοῖς περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου.

Θέσει

Θέσει δεδομένης εὐθείας τῆς α β, καὶ δύο δοθέντων σημείων τῶν α, β, καὶ λόγου τοῦ ὃν ἔχει ἡ γ πρὸς τὴν δ, τεμεῖν τὴν α β κατὰ τὸ ε, καὶ προσθεῖναι τὰς ζ α, η β, ὥστε εἶναι ὡς τὴν γ πρὸς τὴν δ, οὕτως τὴν ζ ε πρὸς τὴν ε η. ἔτι τε εἶναι ὡς τὴν ζ α πρὸς α ε, οὕτως δοθεῖσάν τινα εὐθεῖαν πρὸς τὴν β ε. ὡς δὲ τὴν η β πρὸς β ε, οὕτως τὴν αὐτὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πρὸς τὴν ε α. γεγονέτω, καὶ τῇ α β πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ θ α κ, λ β μ, καὶ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἴση κείσθω ἑκατέρα τῶν α κ, β μ. καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ κ ε, μ ε, ἐκβεβλήσθωσαν ἐπὶ τὰ λ, θ. ἐπεζεύχθω δὲ καὶ ἡ κ μ. διὰ τοῦ λ παράλληλος ἤχθω τῇ α β ἡ λ ν. διὰ δὲ τοῦ ε τῇ ν κ ἡ ξ ε ο π. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ζ α πρὸς α ε, οὕτως ἡ μ β πρὸς β ε. ὑπόκειται γάρ. ὡς δὲ ἡ μ β πρὸς β ε, οὕτως ἡ θ α πρὸς α ε, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων. ὡς ἄρα ἡ ζ α πρὸς α ε, οὕτως ἡ θ α πρὸς α ε. ἴση ἄρα ἡ ζ α τῇ θ α. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ β η τῇ β λ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς συναμφότερος ἡ θ α ε πρὸς συναμφότερον τὴν μ β ε, οὕτως συναμφότερος ἡ κ α ε πρὸς συναμφότερον τὴν λ β ε. ἑκάτερος γὰρ τῶν λόγων ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς α ε πρὸς ε β. τὸ ἄρα ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς λ β ε, καὶ συναμφοτέρου τῆς θ α ε ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς κ α ε, καὶ συναμφοτέρου τῆς μ β ε. κείσθω τῇ κ α ἴση ἑκατέρα τῶν α ρ, β ς. ἐπεὶ οὖν συναμφότερος μὲν ἡ θ α ε ἴση ἐστὶ τῇ ζ ε, συναμφότερος δὲ ἡ λ β ε ἴση τῇ ε η, συναμφότερος δὲ ἡ κ α ε ἴση τῇ ρ ε, συναμφότερος δὲ ἡ μ β ε ἴση τῇ ς ε. καὶ ἐδείχθη τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς θ α ε, καὶ συναμφοτέρου τῆς λ β ε, ἴσον τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς κ α ε, καὶ συναμφοτέρου τῆς μ β ε, τὸ ἄρα ὑπὸ ζ ε η ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ρ ε ς. διὰ δὴ τοῦτο ὅταν τὸ ρ μεταξὺ τῶν α, ζ πίπτῃ, τότε τὸ ς ἐξωτέρω τοῦ η πεσεῖται, καὶ τὸ ἀνάπαλιν. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ γ πρὸς τὴν δ, οὕτως ἡ ζ ε πρὸς ε η. ὡς δὲ ἡ ζ ε πρὸς ε η, οὕτως τὸ ὑπὸ ζ ε η πρὸς τὸ ἀπὸ ε η. ὡς ἄρα ἡ γ πρὸς τὴν δ, οὕτως τὸ ὑπὸ ζ ε η πρὸς τὸ ἀπὸ ε η. τὸ δὲ ὑπὸ ζ ε η ἴσον ἐδείχθη τῷ ὑπὸ ρ ε ς, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ γ πρὸς τὴν δ, οὕτως τὸ ὑπὸ ρ ε ς πρὸς τὸ ἀπὸ ε η. κείσθω τῇ β ε ἴση ἡ ε ο, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ β ο ἐκβεβλήσθω ἐφ' ἑκάτερα, καὶ ἀπὸ τῶν ς, ρ πρὸς ὀρθὰς ἀχθεῖσαι αἱ ς τ, ρ υ, συμβαλλέτωσαν αὐτῇ κατὰ τ, υ. ἐπεὶ οὖν διὰ δεδομένου τοῦ β, πρὸς θέσει δεδομένην τὴν α β, ἦκται ἡ τ υ, δεδομένην ποιοῦσα γωνίαν τὴν ὑπὸ ε β ο ἡμίσειαν ὀρθῆς, δέδοται ἡ τ υ τῇ θέσει. καὶ ἀπὸ δεδομένων τῶν ς, ρ θέσει ἠγμέναι αἱ ς τ, ρ υ τέμνουσιν αὐτὴν κατὰ τὰ τ, υ. δοθέντα ἄρα ἐστὶ τὰ τ, υ. δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ τ υ τῇ θέσει, καὶ τῷ μεγέθει. καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν τῶν ε ο β, ς τ υ τριγώνων ὁμοιότητα ἐστὶν ὡς ἡ τ β πρὸς β ο, οὕτως ἡ ς β πρὸς β ε. καὶ συνθέντι ἐστὶν, ὡς ἡ τ ο πρὸς ο β, οὕτως ἡ ς ε πρὸς ε β. ἀλλ' ὡς ἡ β ο πρὸς ο υ, οὕτως ἡ β ε πρὸς ε ρ. δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ τ ο πρὸς ο υ, οὕτως ἡ ς ε πρὸς ε ρ. ἀλλ' ὡς ἡ τ ο πρὸς ο υ, οὕτως τὸ ὑπὸ τ ο υ πρὸς τὸ ἀπὸ ο υ. ὡς δὲ ἡ ς ε πρὸς ε ρ, οὕτως τὸ ὑπὸ ς ε ρ πρὸς τὸ ἀπὸ ε ρ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ τ ο υ πρὸς τὸ ἀπὸ ο υ, οὕτως τὸ ὑπὸ ς ε ρ πρὸς τὸ ἀπὸ ε ρ. καὶ ἐναλλὰξ, ὡς τὸ ὑπὸ τ ο υ πρὸς τὸ ὑπὸ ς ε ρ, οὕτως τὸ ἀπὸ ο υ πρὸς τὸ ἀπὸ ε ρ. τὸ δὲ ἀπὸ ο υ τοῦ ἀπὸ ε ρ διπλάσιον. ἐπειδὴ καὶ τὸ ἀπὸ ο β τοῦ ἀπὸ β ε. καὶ τὸ ὑπὸ τ ο υ ἄρα τοῦ ὑπὸ ς ε ρ ἐστὶ διπλάσιον. τὸ δὲ ὑπὸ ς ε ρ πρὸς τὸ ἀπὸ ε η ἐδείχθη λόγον ἔχειν ὃν ἔχει ἡ γ πρὸς τὴν δ. καὶ τὸ ὑπὸ τ ο υ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ ε η λόγον ἔχει, ὃν ἡ διπλασία τῆς γ πρὸς τὴν δ. τὸ δὲ ἀπὸ ε η ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ξ ο. ἑκατέρα γὰρ τῶν ε η, ξ ο ἴση ἐστὶ συναμφοτέρῳ τῇ λ β ε. τὸ ἄρα ὑπὸ τ ο υ πρὸς τὸ ἀπὸ ξ ο λόγον ἔχει, ὃν ἡ διπλασία τῆς γ πρὸς τὴν δ, καὶ δέδοται ὁ τῆς διπλασίας τῆς γ πρὸς τὴν δ λόγος. δέδοται ἄρα καὶ ὁ τοῦ ὑπὸ τ ο υ πρὸς τὸ ἀπὸ ξ ο λόγος. ἐὰν ἄρα ποιήσωμεν ὡς τὴν δ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς γ, οὕτως τὴν τ υ πρὸς ἄλλην τινὰ ὡς τὴν φ, καὶ περὶ τὴν τ υ γράψωμεν ἔλλειψιν ὥστε τὰς καταγομένας ἐν τῇ ὑπὸ ξ ο β γίνεται, τουτέστιν ἐν ἡμισείᾳ ὀρθῆς δύνασθαι τὰ παρὰ τὴν φ ἐλλείποντα ὁμοίῳ τῷ ὑπὸ τ υ φ, ἥξει διὰ τοῦ ξ, διὰ τὴν ἀντιστροφὴν τοῦ

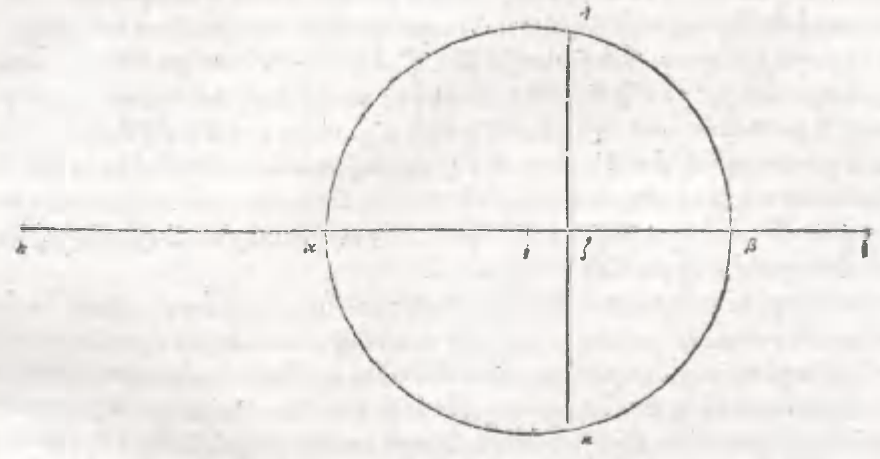


εἰκοστοῦ θεωρήματος τοῦ πρώτου βιβλίου τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων. γεγράφθω, καὶ ἔστω ὡς ἡ υξ τ. τὸ ἄρα ξ σημεῖον ἅπτεται θέσει δεδομένης ἐλλείψεως. καὶ ἐπεὶ διαγώνιός ἐστιν ἡ λκ τοῦ νμ παραλληλογράμμου, ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ νξ π τῷ ὑπὸ αβ μ. ἐὰν ἄρα διὰ τοῦ β περὶ ἀσυμπτώτους τὰς θκ μ γράψωμεν ὑπερβολήν, ἥξει διὰ τοῦ ξ. καὶ ἔσται θέσει δεδομένη διὰ τὸ καὶ τὸ β σημεῖον τῇ θέσει δεδόσθαι, καὶ ἑκατέραν τῶν αβ, βμ (καὶ διὰ τοῦτο τὰς θκ μ ἀσυμπτώτους) γεγράφθω. καὶ ἔστω ὡς ἡ ξβ, τὸ ἄρα ξ σημεῖον ἅπτεται θέσει δεδομένης ὑπερβολῆς. ἥπτετο δὲ καὶ θέσει δεδομένης ἐλλείψεως. δέδοται ἄρα τὸ ξ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ κάθετος ἡ ξε. δέδοται ἄρα τὸ ε. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ μβ πρὸς βε, οὕτως ἡ ζα πρὸς αε. καὶ δέδοται ἡ αε, δέδοται ἄρα καὶ ἡ αζ, διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δέδοται καὶ ἡ ηβ.

Συντεθήσεται δὲ οὕτως. ὡς γὰρ ἐπὶ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς, ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἣν δεῖ τέμνειν ἡ αβ. ἡ δὲ δοθεῖσα ἑτέρα ἡ ακ. ὁ δὲ δοθεὶς λόγος ὁ τῆς γ πρὸς τὴν δ. ἤχθω τῇ αβ πρὸς ὀρθὰς ἡ βμ ἴση οὖσα τῇ ακ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ κμ. καὶ τῇ μὲν κα ἴση κείσθω ἡ αρ, τῇ δὲ ἡ βς. ἀπὸ τῶν ρ, ς πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ ρυ, ςτ. καὶ πρὸς τῷ β σημείῳ συνεστάτω ἡμίσεια ὀρθῆς ἡ ὑπὸ αβο, καὶ ἐκβληθεῖσα ἡ βο ἐφ' ἑκάτερα τεμνέτω τὰς ςτ, ρυ κατὰ τὰ τ, υ. καὶ γεγονέτω ὡς ἡ δ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς γ, οὕτως ἡ τυ πρὸς τὴν φ, καὶ περὶ τὴν τυ γεγράφθω ἔλλειψις, ὥστε τὰς καταγομένας ἐν ἡμισείᾳ ὀρθῆς δύνασθαι τὰ παρακείμενα παρὰ τὴν φ, ἐλλείποντα ὅμοια τῷ ὑπὸ τυ φ. διὰ δὲ τοῦ β περὶ ἀσυμπτώτους τὰς ακ, κμ, γεγράφθω ὑπερβολὴ ἡ βξ, τέμνουσα τὴν ἔλλειψιν κατὰ τὸ ξ, καὶ ἀπὸ τοῦ ξ ἐπὶ τὴν αβ κάθετος ἤχθω ἡ ξε, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ π. διὰ δὲ τοῦ ξ τῇ αβ παράλληλος ἤχθω ἡ λξν. καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ κα, μβ ἐπὶ τὰ λ, θ. καὶ ἡ με ἐπιζευχθεῖσα ἐκβεβλήσθω, καὶ συμπιπτέτω τῇ κν κατὰ τὸ θ. ἐπεὶ οὖν ὑπερβολή ἐστιν ἡ βξ, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ θκ, κμ, ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ νξ π τῷ ὑπὸ αβ μ, διὰ τὸ η θεώρημα τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων. καὶ διὰ τοῦτο εὐθεῖά ἐστιν ἡ κελ. κείσθω οὖν τῇ μὲν θα ἴση ἡ αζ, τῇ δὲ λβ ἴση ἡ βη. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ διπλασία τῆς γ πρὸς τὴν δ, οὕτως ἡ φ πρὸς τὴν τυ. ὡς δὲ ἡ φ πρὸς τὴν τυ, οὕτως τὸ ὑπὸ τοῦ υ πρὸς τὸ ἀπὸ ξο, διὰ τὸ κα θεώρημα τοῦ πρώτου βιβλίου τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων. ὡς ἄρα ἡ διπλασία τῆς γ πρὸς τὴν δ, οὕτως τὸ ὑπὸ τοῦ υ πρὸς τὸ ἀπὸ ξο. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ τβ πρὸς βο, οὕτως ἡ σβ πρὸς βε. καὶ συνθέντι ὡς ἡ το πρὸς οβ, οὕτως ἡ σε πρὸς εβ. ἀλλ' ὡς ἡ βο πρὸς ου, οὕτως ἡ βε πρὸς ερ. καὶ δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ το πρὸς ου, οὕτως ἡ ςε πρὸς ερ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ τοῦ υ πρὸς τὸ ἀπὸ ου, οὕτως τὸ ὑπὸ ςε ρ πρὸς τὸ ἀπὸ ερ. ἐναλλὰξ ὡς τὸ ὑπὸ τοῦ υ πρὸς τὸ ὑπὸ ςε ρ, οὕτως τὸ ἀπὸ ου πρὸς τὸ ἀπὸ ερ. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ ου τοῦ ἀπὸ ερ διπλάσιον, διὰ τὸ καὶ τὸ ἀπὸ βο τοῦ ἀπὸ βε. ἴση γάρ ἐστιν ἡ βε τῇ εο, ἡμισείας ὀρθῆς οὔσης ἑκατέρας τῶν πρὸς τοῖς β, ο. καὶ τὸ ὑπὸ τοῦ υ ἄρα διπλάσιόν ἐστι τοῦ ὑπὸ ςε ρ. ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη ὡς ἡ διπλασία τῆς γ πρὸς τὴν δ, οὕτως τὸ ὑπὸ τοῦ υ πρὸς τὸ ἀπὸ ξο, καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ ἡμίση. ὡς ἄρα ἡ γ πρὸς τὴν δ, οὕτως τὸ ὑπὸ ρες πρὸς τὸ ἀπὸ ξο. ἴση δὲ ἡ ξο τῇ εη, διὰ τὸ ἑκατέραν αὐτῶν ἴσην εἶναι συναμφοτέρῳ τῇ λβε. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς συναμφότερος ἡ θαε πρὸς συναμφότερον τὴν μβε, οὕτως συναμφότερος ἡ καε πρὸς συναμφότερον τὴν λβε. ἑκάτερος γὰρ τῶν λόγων ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς αε πρὸς εβ. τὸ ἄρα ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς θαε, καὶ συναμφοτέρου τῆς λβε, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς καε, καὶ συναμφοτέρου τῆς μβε. ἀλλὰ συναμφοτέρῳ μὲν τῇ θαε ἴση ἐστὶν ἡ ζε. συναμφοτέρῳ δὲ τῇ λβε, ἴση ἡ εη. συναμφοτέρῳ τῇ καε ἴση ἡ ρε. συναμφοτέρῳ δὲ τῇ μβε, ἴση ἡ εc. τὸ ἄρα ὑπὸ ζεη ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ρεc. ἀλλ' ὡς ἡ γ τὴν δ, οὕτως τὸ ὑπὸ ρεc πρὸς τὸ ἀπὸ εη. καὶ ὡς ἄρα ἡ γ πρὸς τὴν δ, οὕτως τὸ ὑπὸ ζεη πρὸς τὸ ἀπὸ εη. ἀλλ' ὡς τὸ ὑπὸ ζεη πρὸς τὸ ἀπὸ εη, οὕτως ἡ ζε πρὸς εη, καὶ ὡς ἄρα ἡ γ πρὸς τὴν δ, οὕτως ἡ ζε πρὸς εη, καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ μβ πρὸς βε, οὕτως ἡ θα πρὸς αε. ἴση δὲ ἡ θα τῇ ζα. ὡς ἄρα ἡ μβ πρὸς βε, οὕτως ἡ ζα πρὸς αε. διὰ τὰ αὐτὰ καὶ ὡς ἡ κα πρὸς αε, οὕτως ἡ ηβ πρὸς βε. εὐθείας ἄρα δοθείσης τῆς αβ, καὶ ἑτέρας τῆς ακ, καὶ λόγου τοῦ τῆς γ πρὸς τὴν δ, εἴληπται ἐπὶ τῆς αβ τυχὸν σημεῖον τὸ ε, καὶ προσετέθησαν εὐθεῖαι αἱ ζα, ηβ, καὶ γέγονε τῷ δοθέντι λόγῳ ἡ ζε πρὸς εη. ἔτι τε ἐστὶν ὡς ἡ δοθεῖσα ἡ μβ πρὸς βε, οὕτως ἡ ζα πρὸς αε. ὡς δὲ αὐτὴ ἡ δοθεῖσα ἡ κα πρὸς αε, οὕτως ἡ ηβ πρὸς βε, ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

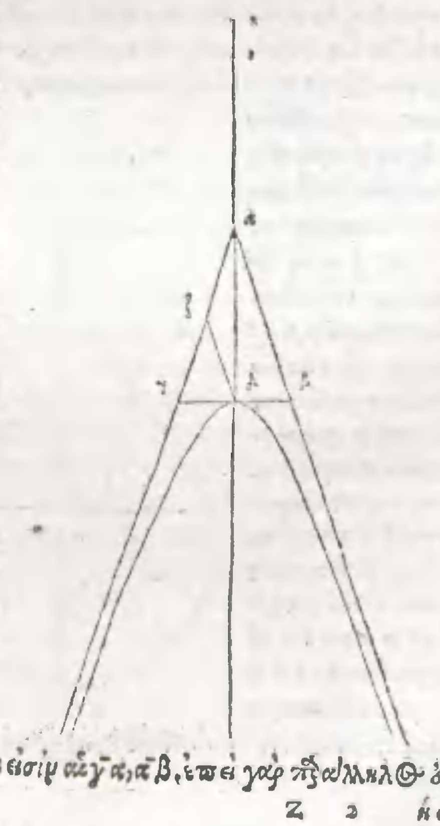
Τούτων δεδειγμένων δυνατόν ἐστι τὴν δοθεῖσαν σφαῖραν εἰς τὸν δοθέντα λόγον τέμνειν οὕτως. ἔστω γὰρ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ αβ. ὁ δὲ δοθεὶς λόγος, ὃν δεῖ ἔχειν τὰ τμήματα

ματα τῆς σφαίρας πρὸς ἄλληλα, ὁ τῆς γ πρὸς τὴν δ, κέντρον δὲ τῆς σφαίρας ἔστω τὸ ε, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς αβ σημεῖον τὸ ζ, καὶ προσκείσθωσαν αἱ ηα, θβ. ὥστε εἶναι ὡς τὴν γ πρὸς τὴν δ, οὕτως τὴν ηζ πρὸς τὴν ζθ. ἔτι τε εἶναι, ὡς μὲν τὴν ηα πρὸς αζ, οὕτως δοθεῖσαν τὴν εβ πρὸς βζ. ὡς δὲ τὴν θβ πρὸς βζ, οὕτως τὴν αὐτὴν δοθεῖσαν τὴν εα πρὸς αζ. τοῦτο γὰρ ὡς δυνατὸν ποιεῖν προδέδεικται. καὶ διὰ τοῦ ζ τῇ αβ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ κλζ. καὶ διὰ τῆς κλ ἐπίπεδον ἐκβληθὲν ὀρθὸν πρὸς τὴν αβ τεμνέτω τὴν σφαῖραν. λέγω ὅτι τὰ τμήματα τῆς σφαίρας πρὸς ἀλ-



ληλα λόγον ἔχει τὸν τῆς γ πρὸς τὴν δ. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ηα πρὸς αζ, οὕτως ἡ εβ πρὸς βζ. καὶ συνθέντι, ὡς ἄρα ἡ ηζ πρὸς ζα, οὕτως συναμφότερος ἡ εβ, βζ πρὸς βζ. ὁ ἄρα κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὴν κλ, ὕψος δὲ τὴν ζη, ἴσος ἐστὶ τῷ τμήματι τῆς σφαίρας τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν αὐτήν, ὕψος δὲ τὴν ζα. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ θβ πρὸς βζ, οὕτως ἡ εα πρὸς αζ. καὶ συνθέντι ἐστὶν ὡς ἡ θζ πρὸς βζ, οὕτως συναμφότερος ἡ εα, αζ πρὸς αζ. ὁ ἄρα κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν κλ κύκλον, ὕψος δὲ τὴν ζθ ἴσος ἐστὶ τῷ τμήματι τῆς σφαίρας, τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν αὐτήν, ὕψος δὲ τὴν βζ. ἐπεὶ οὖν οἱ εἰρημένοι κῶνοι ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντες πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ὕψη, τουτέστιν ὡς ἡ θζ πρὸς ζη, τουτέστιν ἡ γ πρὸς τὴν δ, καὶ τὰ τμήματα ἄρα τῆς σφαίρας πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει τὸν δοθέντα, ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Ὡς δὲ δεῖ διὰ τοῦ δοθέντος σημείου περὶ τὰς δοθείσας ἀσυμπτώτους γράψαι ὑπερβολήν, δείξομεν οὕτως. ἐπειδὴ οὐκ αὐτόθεν κεῖται ἐν τοῖς κωνικοῖς στοιχείοις. ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ γα, αβ τυχοῦσαν γωνίαν περιέχουσαι τὴν πρὸς τῷ α, καὶ δεδόσθω σημεῖόν τι τὸ δ. καὶ προσκείσθω διὰ τοῦ δ περὶ ἀσυμπτώτους τὰς γα, αβ γράψαι ὑπερβολήν. ἐπεζεύχθω ἡ αδ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ ε. καὶ κείσθω τῇ δα ἴση ἡ αε, καὶ διὰ τοῦ δ τῇ αβ παράλληλος ἤχθω ἡ δζ. καὶ κείσθω τῇ αζ ἴση ἡ ζγ. καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ γδ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ β, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς γβ ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ δεη, καὶ ἐκβληθείσης τῆς αδ γεγράφθω περὶ αὐτὴν διὰ τοῦ δ ὑπερβολή, ὥστε τὰς καταγομένας δύνασθαι τὰ παρὰ τὴν εη ὑπερβάλλοντα, ὅμοια τῷ ὑπὸ δεη.



λέγω ὅτι τῆς γεγραμμένης ὑπερβολῆς ἀσύμπτωτοι εἰσὶν αἱ γα, αβ, ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ δζ τῇ βα, καὶ ἴση ἡ γζ τῇ ζα, ἴση ἄρα καὶ ἡ γδ τῇ δβ, ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς γβ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς γδ. καὶ ἔστι τὸ ἀπὸ γβ ἴσον τῷ ὑπὸ δεη. ἑκάτερον ἄρα τῶν ἀπὸ γδ, δβ, τέταρτον μέρος ἐστὶ τοῦ ὑπὸ δεη εἴδους. αἱ ἄρα γα, αβ ἀσύμπτωτοί εἰσι τῆς ὑπερβολῆς, διὰ τὸ πρῶτον θεώρημα τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων.

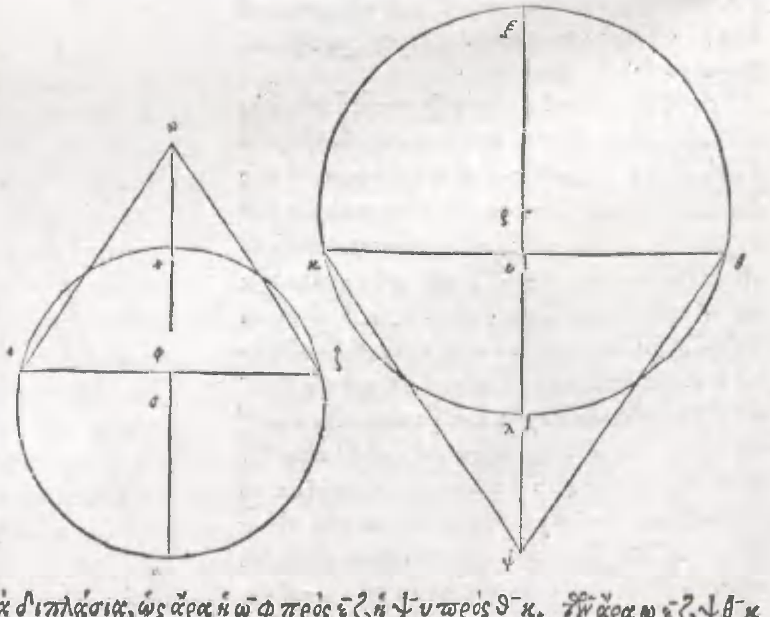
ΕΙΣ ΤΗΝ ΣΥΝΘΕΣΙΝ ΤΟΥ Δ.

Ἐν δὲ τῇ συνθέσει προσεκβάλλων τὴν διάμετρον τῆς σφαίρας τὴν δβ, καὶ ἀφελόμενος τῆς ἡμισείας αὐτῆς ἴσην τὴν ζβ. καὶ τεμὼν αὐτὴν εἰς τὸν δοθέντα λόγον κατὰ τὸ θ, καὶ ἔτι τῆς δβ λαβὼν τὸ χ οὕτως, ὥστε εἶναι ὡς τὴν χζ πρὸς θζ, οὕτως τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ, τὰ αὐτὰ κατασκευάζων τοῖς πρότερον φησί, ὅτι γεγονέτω ὡς συναμφότερος ἡ κδχ πρὸς δχ, οὕτως ἡ ρχ πρὸς χβ. καὶ τίθησι τὸ ρ μεταξὺ τῶν β, ζ. ὅτι δὲ τοῦτο οὕτως ἔχει δεικτέον. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς συναμφότερος ἡ κδχ πρὸς δχ, οὕτως ἡ ρχ πρὸς χβ. διελόντι ὡς ἡ κδ πρὸς δχ, ἡ ρβ πρὸς χβ. ἐναλλὰξ ὡς ἡ κβ πρὸς ρβ, ἡ δχ πρὸς βχ. μείζων δὲ ἡ δχ τῆς χβ, μείζων ἄρα καὶ ἡ κβ τῆς βρ. τουτέστιν ἡ ζβ τῆς βρ, ὥστε τὸ ρ ἐντὸς τοῦ ζ πεσεῖται. ὅτι δὲ καὶ ἐκτὸς τοῦ θ, δειχθήσεται ὁμοίως τοῖς ἐν τῇ ἀναλύσει προελθούσαις πάσης τῆς συνθέσεως τοῦ θεωρήματος. συνάγεται γὰρ ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ρχ πρὸς χλ, ἡ ζθ πρὸς θβ, ὥστε καὶ συνθέντι. καὶ διὰ τοῦτο γὰρ ἀκόλουθος τοῖς ἄνω εἰρημένοις καὶ ἐνταῦθα ἡ δεῖξις.

Καὶ δι' ἴσου ἐν τῇ τεταραγμένῃ ἀναλογίᾳ. τεταραγμένην ἀναλογίαν ἐν τοῖς στοιχείοις ἐμάθομεν τριῶν ὄντων μεγεθῶν καὶ ἄλλων αὐτοῖς ἴσων τὸ πλῆθος, ὅταν ᾖ ὡς μὲν ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον. ὡς δὲ ἑπόμενον πρὸς ἄλλο τι ἐν τοῖς πρώτοις, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις ἄλλο τι πρὸς ἡγούμενον. καὶ ἐνταῦθα οὖν δέδεικται ὡς μὲν ἡγούμενον ἡ ρλ πρὸς ἑπόμενον τὴν λδ, οὕτως ἡγούμενον ἡ χζ πρὸς ἑπόμενον τὴν ζθ. ὡς δὲ ἑπόμενον ἡ δλ πρὸς ἄλλο τι τὴν δχ, οὕτως ἄλλο τι ἡ εζ πρὸς ἡγούμενον τὴν χζ. ἕπεται ἄρα καὶ δι' ἴσου ὡς δέδεικται ἐν τῷ πέμπτῳ τῶν στοιχείων, ὡς ρλ πρὸς λχ, οὕτως ἡ βζ πρὸς ζθ.

ΕΙΣ ΤΟ Ε.

Καὶ ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ εζη τμῆμα τῷ θκλ τμήματι, ὅμοιος ἄρα ἐστὶ καὶ ὁ εζω κῶνος τῷ ψθκ κώνῳ. νενοήσθωσαν γὰρ χωρὶς κείμεναι αἱ καταγραφαὶ καὶ ἐπεζευγμέναι αἱ εη, ηζ, εο, οζ, θλ, λκ, θξ, ξκ. ἐπεὶ οὖν ὅμοιά ἐστι τὰ εζη, θκλ τμήματα, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ὑπὸ εηζ, θλκ γωνίαι, ὥστε καὶ αἱ ἡμίσειαι αὐτῶν. καὶ εἰσὶν ὀρθαὶ αἱ πρὸς τοῖς φ, υ. καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα τῇ λοιπῇ ἐστιν ἴση. ἰσογώνιον ἄρα τὸ ηφζ τρίγωνον τῷ λυκ. καὶ ἔστιν ὡς ἡ ηφ πρὸς φζ, οὕτως ἡ λυ πρὸς υκ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἰσογωνίων ὄντων τῶν φζο, υκξ τριγώνων. ἔστιν ὡς ἡ ζφ πρὸς φο, ἡ κυ πρὸς υξ. δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ ηφ πρὸς φο, ἡ λυ πρὸς υξ. καὶ συνθέντι ὡς ἡ ηο πρὸς οφ, ἡ λξ πρὸς ξυ. καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ ἡμίση, ὡς ἡ ςο πρὸς οφ, ἡ ρξ πρὸς ξυ. καὶ συνθέντι, ὡς συναμφότερος ἡ ςοφ πρὸς φο, τουτέστιν ἡ ωφ πρὸς φη, οὕτως συναμφότερος ἡ ρξυ πρὸς ξυ. τουτέστιν ἡ ψυ πρὸς υλ. ἀλλ' ὡς ἡ ηφ πρὸς φζ, ἡ λυ πρὸς υκ. καὶ δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ ωφ πρὸς φζ, ἡ ψυ πρὸς



υκ, καὶ τῶν ἑπομένων τὰ διπλάσια, ὡς ἄρα ἡ ωφ πρὸς εζ, ἡ ψυ πρὸς θκ, τῶν ἄρα ωεζ, ψθκ κώνων

κώνων ἀνάλογόν εἰσιν οἱ ἄξονες καὶ διάμετροι τῶν βάσεων. ὅμοιοι ἄρα εἰσὶν οἱ κῶνοι, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λόγος δὲ τῆς ωφ πρὸς τὴν εζ δοθείς. ἐπεὶ γὰρ δέδοται τὰ τμήματα τῆς σφαίρας δεδομένα, εἰσὶ καὶ αἱ διάμετροι τῶν βάσεων, καὶ τὰ ὕψη τῶν τμημάτων, ὥστε δέδοται ἡ εζ καὶ ἡ ηφ, καὶ ἡ ἡμίσεια ἄρα τῆς εζ ἡ εφ δοθήσεται, ὥστε καὶ τὸ ἀπ' αὐτῆς. καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ὑπὸ ηφο. ἐὰν δὲ δοθὲν παρὰ δοθεῖσαν παραβληθῇ πλάτος ποιεῖ δοθεῖσαν, δοθεῖσα ἄρα ἡ φο, ἀλλὰ καὶ ἡ φη. καὶ ὅλη ἄρα ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας δοθεῖσά ἐστι, καὶ διὰ τοῦτο καὶ ἡμίσεια αὐτῆς. δέδοται ἡ ςο, ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ οφ. δέδοται ἄρα καὶ ὁ τῆς ςο πρὸς οφ λόγος. καὶ συνθέντι ὡς συναμφοτέρου τῆς ςοφ πρὸς τὴν οφ λόγος δοθείς ἐστι, τουτέστι τῆς ωφ πρὸς φη. καὶ δέδοται ἄρα καὶ ἡ ωφ. ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ εζ. δέδοται ἄρα καὶ ὁ τῆς ωφ πρὸς εζ λόγος. τὰ αὐτὰ δὲ ἂν ῥηθείη καὶ ἐπὶ τοῦ αβγ τμήματος. καὶ συναχθήσεται ὁ τῆς χτ πρὸς αβ λόγος δοθείς, καὶ διὰ τὸ δοθεῖσαν εἶναι τὴν αβ, δοθεῖσά ἐστι καὶ ἡ χτ.

Ὅτι δ' ἂν τὰ τμήματα δεδομένα ᾖ, καὶ τὰ ὕψη αὐτῶν δοθήσονται, πρόδηλον μέν. ἵνα δὲ καὶ τοῦτο ἀκολούθως τῇ στοιχειώσει τῶν δεδομένων δοκῇ συνάγεσθαι, λεχθήσεται. ἐπειδὴ δέδοται τὰ τμήματα τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει, δέδοται καὶ ἡ εζ. καὶ ἡ ἐν τῷ τμήματι γωνία, ὥστε καὶ ἡ ἡμίσεια αὐτῆς, καὶ ἐὰν νοήσωμεν ἐπεζευγμένην τὴν εη δεδομένης τῆς πρὸς τῷ φ ὀρθῆς. δεδομένη ἔσται καὶ ἡ λοιπή. καὶ τὸ εηφ τρίγωνον τῷ εἴδει. ὥστε καὶ ὁ τῆς εφ πρὸς φη λόγος δοθεὶς ἔσται. καὶ δέδοται ἡ εφ ἡμίσεια οὖσα τῆς εζ, δέδοται ἄρα καὶ ἡ φη. ἔνεστι δὲ καὶ ἄλλως λέγειν. ἐπειδὴ δέδοται ἡ εζ τῇ θέσει, καὶ ἀπὸ δεδομένου τοῦ φ, διχοτομία γάρ ἐστι τῆς εζ, πρὸς ὀρθὰς ἦκται ἡ φη τῇ θέσει. δέδοται δὲ καὶ ἡ περιφέρεια τοῦ τμήματος τῇ θέσει, δέδοται ἄρα τὸ η. ἦν δὲ καὶ τὸ φ δεδομένον. δέδοται ἄρα καὶ ἡ φη. ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ψυ πρὸς χτ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς βα πρὸς τὸ ἀπὸ θκ, οὕτως ἡ κθ πρὸς δλ. ἐπεὶ γὰρ γέγονεν ὡς ἡ ψυ πρὸς θκ, ἡ χτ πρὸς δλ. ἐναλλὰξ ἡ ψυ πρὸς χτ ἡ κθ πρὸς δλ. ἀλλ' ὡς ἡ ψυ πρὸς χτ, τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ θκ. ἴσων γὰρ ὄντων τῶν κώνων, ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. ὡς δὲ αἱ βάσεις πρὸς ἀλλήλους, οὕτως τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ βα πρὸς τὸ ἀπὸ θκ, ἡ θκ πρὸς τὴν δλ. καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ αβ πρὸς θκ, ἡ ς πρὸς δλ. ἐπειδὴ τῷ λόγῳ τοῦ ἀπὸ τῆς βα πρὸς τὸ ἀπὸ θκ, ὁ αὐτὸς ἐδείχθη ὁ τῆς βα πρὸς ς, καὶ ὁ τῆς κθ πρὸς δλ. καὶ ὁ τῆς βα ἄρα πρὸς ς, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς κθ πρὸς δλ. ὥστε ἐναλλάξ ἐστιν ὡς ἡ βα πρὸς θκ, ἡ ς πρὸς δλ.

ΕΙΣ ΤΗΝ ΣΥΝΘΕΣΙΝ ΤΟΥ Ε.

Ἐπειδὴ ἀνάλογόν εἰσιν αἱ αβ, θκ, ς, δλ, ἔστιν ὡς τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ θκ, ἡ θκ πρὸς δλ. καθόλου γὰρ ἐὰν ὦσι τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσται, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, ἡ δευτέρα πρὸς τὴν τετάρτην. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν δευτέραν, ἡ τρίτη πρὸς τὴν τετάρτην. ἐναλλὰξ ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, ἡ δευτέρα πρὸς τὴν τετάρτην. ἀλλ' ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, ἡ δευτέρα πρὸς τὴν τετάρτην.

ΕΙΣ ΤΟ Ϛ.

Ἐπεὶ δὲ ὅμοιόν ἐστι τὸ κλμ τῷ αβγ τμήματι, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ρλ πρὸς ρν, ἡ βπ πρὸς πθ, ἐὰν ἐπιζευχθῶσιν αἱ μν, γθ. ἐπεὶ ὅμοιά ἐστι τὰ τμήματα, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ πρὸς τοῖς βλ γωνίαι. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ πρὸς τοῖς μ, γ ὀρθαί, καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα τῇ λοιπῇ, καὶ ἰσογώνιά ἐστι τὰ τρίγωνα. καὶ ἔστιν ὡς ἡ θβ πρὸς θγ, οὕτως ἡ λν πρὸς μν. ἀλλ' ὡς ἡ θγ πρὸς θπ, ἡ μν πρὸς νρ, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν γθπ, μνρ τριγώνων. καὶ δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ βθ πρὸς θπ, ἡ λν πρὸς νρ. ὥστε καὶ διελόντι, ὡς ἡ βπ πρὸς πθ, οὕτως ἡ λρ πρὸς ρν. λόγος δὲ τῆς εζ πρὸς βγ δοθείς, δοθεῖσα ἄρα καὶ ἑκατέρα. ἐπεὶ γὰρ δέδοται τὰ τμήματα τῶν σφαιρῶν, δεδομέναι εἰσὶ καὶ αἱ διάμετροι τῶν βάσεων, καὶ τὰ ὕψη τῶν τμημάτων. ὥστε ἐπεὶ δέδοται ἡ αγ, δέδοται καὶ ἡ ἡμίσεια αὐτῆς ἡ γπ. δέδοται δὲ καὶ ἡ βπ, καὶ ὀρθὴν γωνίαν περιέχουσιν. δέδοται ἄρα καὶ ἡ βγ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, καὶ ἡ εζ δοθεῖσά ἐστιν. ὥστε καὶ ὁ τῆς βγ πρὸς εζ λόγος δοθείς ἐστιν.

ΕΙΣ ΤΗΝ ΣΥΝΘΕΣΙΝ ΤΟΥ Ϛ.

Ὅμοια ἄρα ἐστὶ τὰ ἐπὶ τῶν κμ, αγ τμήματα κύκλων. ἐὰν γὰρ ὡς ἐν τῇ ἀναλύσει ἐπιζευχθῶσιν αἱ γθ, μν. ἐπεὶ ὀρθαί εἰσιν αἱ πρὸς τοῖς γ, μ. καὶ κάθετοι αἱ γπ, μρ. μέσαι ἀνάλογόν εἰσι τῶν τῆς βάσεως τμημάτων. ὥστε ἐστὶν ὡς ἡ πρώτη ἡ βπ, πρὸς τὴν τρίτην τὴν πθ,

 οὕτως

οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης τῆς πβ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας τῆς βγ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ λρ πρὸς ρν, οὕτως τὸ ἀπὸ λρ πρὸς τὸ ἀπὸ ρμ. καί ἐστιν ὡς ἡ βπ πρὸς πθ, ἡ ρλ πρὸς ρν. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ βπ πρὸς τὸ ἀπὸ πγ, οὕτως τὸ ἀπὸ λρ πρὸς τὸ ἀπὸ ρμ. καὶ ὡς ἄρα ἡ πβ πρὸς π λρ, πρὸς ρμ. καὶ περὶ ἴσας γωνίας αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσι. ἰσογώνια ἄρα τὰ τρίγωνα. ἴσαι ἄρα αἱ πρὸς τοῖς β, λ γωνίαι, καὶ αἱ διπλάσιαι αὐτῶν αἱ ἐν τοῖς τμήμασιν. ὅμοια ἄρα εἰσὶ τὰ τμήματα.

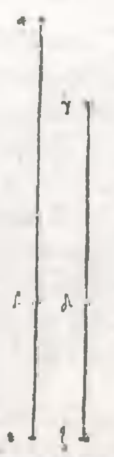
ΕΙΣ ΤΟ Ζ.

Λόγος ἄρα δεδομένος συναμφοτέρου τῆς εδ, δζ πρὸς δζ. ἐπεὶ γὰρ συναμφότερος ἡ εδ, δζ πρὸς δζ λόγον ἔχει δεδομένον. ἐὰν μέγεθος πρός τι μόριον ἑαυτοῦ λόγον ἔχει δεδομένον, καὶ πρὸς τὸ λοιπὸν λόγον ἕξει δεδομένον, ὥστε συναμφότερος ἡ εδ, δζ πρὸς εδ λόγον ἔχει δεδομένον. ἐπεὶ οὖν ἑκατέρα τῶν εδ, δζ πρὸς συναμφότερον τὴν εδ, δζ λόγον ἔχει δεδομένον, καὶ πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχουσι δεδομένον. δέδοται ἄρα ὁ τῆς εδ πρὸς δζ λόγος. καὶ δέδοται ἡ εδ. δέδοται γὰρ ἡ διάμετρος. δέδοται ἄρα καὶ ἡ δζ. λοιπὴ ἄρα ἡ ζβ δοθήσεται, ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ δζβ, τουτέστι τὸ ἀπὸ αζ. τουτέστιν ἡ αζ, δοθεῖσα ἔσται. καὶ ὅλη ἄρα ἡ αγ. καὶ ἄλλως δὲ λέγοις ἄν, ὅτι ἡ αγ δοθεῖσά ἐστιν. ἐπεὶ γὰρ δέδοται ἡ διάμετρος ἡ δβ τῇ θέσει. δέδοται δὲ καὶ τὸ ζ ὡς ἔτυχε, καὶ ἀπὸ δεδομένου τοῦ ζ πρὸς ὀρθὰς ἦκται ἡ αγ, δέδοται ἡ αγ τῇ θέσει. ἀλλὰ καὶ ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια. δοθέντα ἄρα τὰ α, γ. καὶ αὐτὴ ἡ αζγ δοθεῖσά ἐστι.

Καὶ ἐπεὶ συναμφότερος μὲν ἡ εδ, δζ πρὸς δζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ εδ, δβ πρὸς δβ. ἐπεὶ γὰρ ἡ εδ μείζων ἡ ἡμίσεια ἐστὶ τῆς δζ, συναμφότερος ἄρα ἡ εδ, δζ τῆς δζ μείζων ἐστὶν ἢ ἡμιόλια. συναμφότερος δὲ ἡ εδ, δβ τῆς δβ ἡμιόλια, μείζονα ἄρα λόγον ἔχει ἡ εδ, δζ πρὸς δζ, ἤπερ ἡ εδ, δβ πρὸς δβ. ἢ καὶ ἄλλως, ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ δβ τῆς δζ, ἄλλη δέ τις ἡ εδ, ἡ εδ ἄρα μείζονα λόγον ἔχει πρὸς δζ, ἤπερ ἡ εδ πρὸς δβ συνθέντι συναμφότερος ἡ εδ, δζ πρὸς δζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ εδ, δβ πρὸς δβ, ἡ σύνθεσις τοῦ θεωρήματος σαφὴς διὰ τῶν ἐνταῦθα εἰρημένων.

ΕΙΣ ΤΟ Η.

Ἡ θζ πρὸς ζη ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ διπλασίονα τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ βα πρὸς τὸ ἀπὸ αδ. τουτέστιν ἡ βζ πρὸς ζδ. ἐπεὶ γὰρ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς κάθετος ἦκται ἡ αζ τῶν πρὸς τῇ καθέτῳ τριγώνων ὁμοίων ὄντων, ἔστιν ὡς ἡ ζβ πρὸς βα, ἡ αβ πρὸς βδ. καὶ ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας. καὶ τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς τρίτης, ὡς ἀνωτέρω δέδεικται. ὡς ἄρα ἡ ζβ πρὸς βδ, τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βδ. ἀλλ' ὡς ἡ βδ πρὸς δζ, οὕτως τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δα. ὡς γὰρ ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας. καὶ δι' ἴσου ἄρα, ὡς τὸ ἀπὸ βα πρὸς τὸ ἀπὸ δα, οὕτως ἡ βζ πρὸς δζ. συναχθείη δ' ἂν τὸ αὐτὸ καὶ ἄλλως οὕτως. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ βζ πρὸς ζδ, οὕτως τὸ ὑπὸ ζβδ πρὸς τὸ ὑπὸ βδζ, τῆς βδ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης, καί ἐστι τὸ μὲν ὑπὸ δβζ ἴσον τὸ ἀπὸ βα. τῷ δὲ ὑπὸ βδζ ἴσον τὸ ἀπὸ δα. ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ βα πρὸς τὸ ἀπὸ δα, οὕτως ἡ βζ πρὸς δζ.



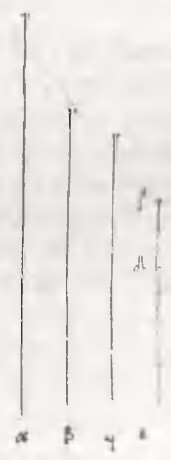
Καὶ ἐπεὶ ἡ θζ πρὸς ζη ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ θβ πρὸς βκ. καθόλου γὰρ ἐὰν ὦσι δύο μεγέθη ἄνισα, καὶ προστεθῇ αὐτοῖς ἴσα, τὸ μεῖζον πρὸς τὸ ἔλασσον μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ συντεθὲν πρὸς τὸ συντεθέν. ἔστωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ αβ, γδ. καὶ προσκείσθωσαν αὐταῖς ἴσαι αἱ βε, δζ. λέγω ὅτι ἡ αβ πρὸς γδ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ αε πρὸς γζ. ἐπεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ αβ τῆς γδ, ἡ αβ ἄρα πρὸς βε μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γδ πρὸς τὴν βε, τουτέστι πρὸς δζ. ὥστε καὶ συνθέντι ἡ αε πρὸς εβ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γζ πρὸς τὴν δζ, διὰ τὰ προδεδειγμένα.

Ἔλαττον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν θζη τοῦ ἀπὸ ζκ. ἐὰν γὰρ ὦσι τρεῖς εὐθεῖαι συνεχεῖς, ὡς αἱ α, β, γ, ὥστε

γ, ὥστε τὴν α πρὸς τὴν β ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, ἤπερ τὴν β πρὸς τὴν γ. τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων τῶν α, γ, ἔλασσόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς μέσης τῆς β. ἐὰν γὰρ ποιήσωμεν, ὡς τὴν α πρὸς τὴν β, οὕτως τὴν β πρὸς ἄλλην τινά, ἔσται πρὸς μείζονα τῆς γ, ἤπερ δεῖ ἐλαττῶσαι τὸν τῆς β πρὸς γ λόγον, καὶ ἔσται τὸ ὑπὸ τῆς α καὶ τῆς μείζονος τῆς γ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς β, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν α, γ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς β.

Τὸ ἄρα ὑπὸ θζη πρὸς τὸ ἀπὸ ζη ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ κζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζη. ὡς γὰρ ἡ θζ πρὸς ζη, οὕτως τὸ ὑπὸ θζη πρὸς τὸ ἀπὸ ζη. τὸ δὲ ὑπὸ θζη τοῦ ἀπὸ ζκ ἔλασσον. τὸ δὲ μεῖζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἔλασσον. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ βε τῇ εδ, ἔλασσον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν βζδ τοῦ ὑπὸ τῶν βεδ. τὸ μὲν γὰρ ὑπὸ βδε ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ εδ. τὸ δὲ ὑπὸ βζδ μετὰ τοῦ ἀπὸ εζ ἴσον ἐστὶ τῷ αὐτῷ. καὶ δῆλον ὅτι ὅσῳ τῆς διχοτομίας ἐφέστηκεν τὸ ζ μεῖζον, ἔλασσόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν ἴσων. μετὰ γὰρ μείζονος τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν, ἴσον γίνεται τὸ ὑπὸ τῶν ἴσων, ὥστε εὐθεῖα κἂν εἰς ἄνισα τέμνηται κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῶν ἐγγίον τῆς διχοτομίας, μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν ἀπωτέρων τμημάτων.

Ἡ βζ ἄρα πρὸς βε ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ εδ πρὸς δζ. καθόλου γὰρ ἐὰν τέσσαρες ὅροι ὦσι οἱ α, β, γ, δ, ε. καὶ ᾖ τὸ ὑπὸ τῶν α δε, ἔλασσον τοῦ ὑπὸ βγ, ὁ α πρὸς τὸν β ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ γ πρὸς δε. ἔστω γὰρ τὸ ὑπὸ τῶν βγ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν α ζε. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ α πρὸς τὸν β, ὁ γ πρὸς τὸν ζε. ὁ δὲ γ πρὸς τὸν ζε ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὸν εδ. καὶ ὁ α ε πρὸς τὸν β ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ γ πρὸς δε.

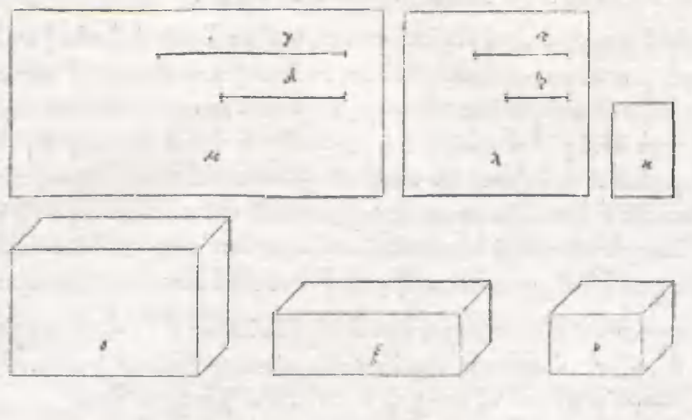


Ἔστιν ἄρα ὡς ἡ θβ πρὸς βκ, τὸ ἀπὸ θν πρὸς τὸ ἀπὸ νκ. ἐπεὶ γὰρ τῷ ὑπὸ θβκ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ βν, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσιν ὡς ἡ θβ πρὸς βν, ἡ νβ πρὸς βκ. καὶ ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, ἡ θβ πρὸς βκ. οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς τρίτης, τουτέστι τὸ ἀπὸ βν πρὸς τὸ ἀπὸ βκ, ὡς δέδεικται ἀνωτέρω. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς θβ πρὸς βν, ἡ νβ πρὸς βκ. συνθέντι ὡς ἡ θν πρὸς νβ, ἡ κν πρὸς κβ. ἐναλλὰξ ὡς ἡ θν πρὸς νκ, ἡ νβ πρὸς βκ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ θν πρὸς τὸ ἀπὸ νκ, οὕτως τὸ ἀπὸ νβ πρὸς τὸ ἀπὸ βκ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ νβ πρὸς τὸ ἀπὸ βκ, οὕτως ἐδείχθη ἡ θβ πρὸς βκ. καὶ ὡς ἄρα ἡ θβ πρὸς βκ, οὕτως τὸ ἀπὸ θν πρὸς τὸ ἀπὸ νκ. τὸ δὲ ἀπὸ θζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζκ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ θν πρὸς τὸ ἀπὸ νκ. πάλιν γὰρ δύο ἀνίσας ταῖς θζ, ζκ πρόσκειται ἡ νζ, καὶ διὰ τὸ ἀνωτέρω εἰρημένον ἡ θζ πρὸς ζκ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ θν πρὸς νκ, ὥστε καὶ τὰ διπλάσια. τὸ ἄρα ἀπὸ θζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζκ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ θν πρὸς τὸ ἀπὸ νκ, τουτέστιν ἡ θβ πρὸς βε, τουτέστιν ἡ κζ πρὸς ζη. ἡ ἄρα θζ πρὸς ζη μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ἡμιόλιον τῆς κζ πρὸς ζη. νοείσθωσαν γὰρ χωρὶς κείμεναι εὐθεῖαι, ὡς αἱ αβ, γ, δ. ὥστε τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ γ μείζονα λόγον ἔχειν, ἤπερ τὴν γ πρὸς τὴν δ. λέγω ὅτι ἡ αβ πρὸς δ μείζονα ἢ ἡμιόλιον λόγον ἔχει, τοῦ ὃν ἔχει ἡ γ πρὸς τὴν δ. εἰλήφθω γὰρ τῶν γ, δ μέση ἀνάλογον ἡ ε. ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ γ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γ πρὸς τὴν δ, ἀλλ' ὁ μὲν τοῦ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ γ λόγος διπλάσιόν ἐστι τοῦ τῆς αβ πρὸς γ. ὁ δὲ τῆς γ πρὸς τὴν δ διπλάσιόν ἐστι τοῦ τῆς γ πρὸς ε, καὶ ἡ αβ ἄρα πρὸς γ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ γ πρὸς ε. γεγονέτω οὖν ὡς ἡ ε πρὸς τὴν γ, ἡ γ πρὸς βζ. καὶ ἐπεὶ τέσσαρες εὐθεῖαι ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν αἱ βζ, γ, ε, δ, ἡ βζ ἄρα πρὸς δ τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ βζ πρὸς γ, τουτέστιν ἡ γ πρὸς ε. ἔχει δὲ καὶ ἡ γ πρὸς δ διπλασίονα λόγον τοῦ τῆς γ πρὸς ε, ἡ ἄρα βζ πρὸς δ ἡ-

μιόλιον

ΛΗΜΜΑ ΕΙΣ ΤΟ ΕΞΗΣ.

Ἔστωσαν τέσσαρες ὅροι οἱ α, γ, δ, β. λέγω ὅτι ὁ συγκείμενος λόγος ἐκ τοῦ ὑπὸ τῶν α, β πρὸς τὸ ἀπὸ γ μετὰ τοῦ τῆς β πρὸς δ λόγου, ὁ αὐτός ἐστι τῷ ὑπὸ α β ἐπὶ τὴν β πρὸς τὸ ἀπὸ γ ἐπὶ τὴν δ. ἔστω γὰρ τῷ μὲν ὑπὸ α β ἴσος ὁ κ, τῷ δὲ ἀπὸ γ ἴσος ὁ λ. καὶ γεγονέτω ὡς ὁ β πρὸς δ, οὕτως ὁ λ πρὸς μ. ὁ ἄρα τοῦ κ πρὸς μ λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ κ πρὸς λ, τουτέστι τοῦ ὑπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ γ, καὶ τοῦ λ πρὸς μ, τουτέστι τῆς β πρὸς δ. ὁ δὴ κ τὸν β πολλαπλασιάσας τὸν ν ποιείτω, ὁ δὲ λ τὸν β πολλαπλασιάσας, τὸν ξ ποιείτω, τὸν δὲ δ πολλαπλασιάσας, τὸν ο. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν α β ὁ κ ἐστιν, ὁ δὲ κ τὸν β πολλαπλασιάσας τὸν ν πεποίηκεν, ὁ ἄρα ν ἐστιν ὁ ὑπὸ α β ἐπὶ τὸν β. πάλιν ἐπεὶ ὁ ἀπὸ γ ὁ λ ἐστιν, ὁ δὲ λ τὸν δ πολλαπλασιάσας τὸν ο πεποίηκεν, ὁ ο ἄρα ἐστὶν ὁ ἀπὸ τῆς γ ἐπὶ τὸν δ, ὥστε ὁ τοῦ ὑπὸ α β ἐπὶ τὴν β πρὸς τὸ ἀπὸ γ ἐπὶ τὸν δ λόγος, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς ν πρὸς ο. δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι ὁ τῆς κ πρὸς μ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ν πρὸς ο. ἐπεὶ οὖν ἑκάτερος τῶν κ, λ τὸν β πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τὸν ν, ξ πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ κ πρὸς τὸν λ, οὕτως ὁ ν πρὸς ξ. πάλιν ἐπεὶ ὁ λ ἑκάτερον τῶν β, δ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν ξ, ο πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ β πρὸς δ, ὁ ξ πρὸς ο. ἀλλ' ὡς ὁ β πρὸς δ, ὁ λ πρὸς τὸν μ. καὶ ὡς ἄρα ὁ λ πρὸς μ, ὁ ξ πρὸς ο. οἱ ἄρα κ, λ, μ τοῖς ν, ξ, ο ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ σὺν δύο λαμβανόμενοι, καὶ δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ κ πρὸς μ, οὕτως ὁ ν πρὸς ο. καὶ ὁ τῆς κ πρὸς μ λόγος, ὁ αὐτὸς τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῆς ὑπὸ α β πρὸς τὸν ἀπὸ γ, καὶ τοῦ ὃν ἔχει ὁ β πρὸς δ. ὁ δὲ τοῦ ν πρὸς ο λόγος, ὁ αὐτός ἐστι τῷ ὑπὸ α β ἐπὶ τὴν β πρὸς τὸ ἀπὸ γ ἐπὶ τὴν δ. ὁ ἄρα συγκείμενος λόγος ἐκ τοῦ ὑπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ γ, καὶ τοῦ ὃν ἔχει ὁ β πρὸς δ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ ὑπὸ δ β ἐπὶ τὴν β πρὸς τὸν ἀπὸ γ ἐπὶ τὸν δ.



Φανερὸν δὲ, καὶ ὅτι τὸ ὑπὸ α β ἐπὶ τὴν β ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς β ἐπὶ τὸν α. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ α πρὸς τὸν β, οὕτως τὸ ὑπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς β, τῆς β κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης. ἐὰν δὲ τέσσαρες ὅροι ἀνάλογον ὦσιν, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων. ὁ ἄρα ὑπὸ α β ἐπὶ τὴν β, ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς β ἐπὶ τὴν α.

ΕΙΣ ΤΟ ΑΛΛΩΣ ΤΟΥ Η.

Εἴρηται ἐν τοῖς προλαβοῦσιν, ὡς ἐὰν δύο μεγεθῶν ληφθῇ τὸ μέσον, ὁ τῶν ἄκρων λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ ὃν ἔχει τὸ πρῶτον πρὸς τὸ μέσον, καὶ τὸ μέσον πρὸς τὸ τρίτον. ὁμοίως δὲ κἂν πλείονα μέσα ληφθῇ, ὁ τῶν ἄκρων λόγος σύγκειται ἐκ τῶν λόγων ὧν ἔχουσι πάντα κατὰ τὸ ἑξῆς πρὸς ἄλληλα τὰ μεγέθη. καὶ ἐνταῦθα οὖν φησί, ὅτι ὁ τοῦ β α δ τμήματος πρὸς τὸ β γ δ τμῆμα λόγος σύγκειται, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει τὸ β α δ τμῆμα πρὸς τὸν κῶνον οὗ βάσις μέν ἐστιν ὁ περὶ διάμετρον τὴν β δ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ α σημεῖον, καὶ ὁ αὐτὸς κῶνος πρὸς τὸν κῶνον τὸν βάσιν μὲν ἔχοντα τὴν αὐτήν, κορυφὴν δὲ τὸ γ σημεῖον. καὶ ὁ εἰρημένος κῶνος πρὸς τὸ β γ δ τμῆμα. δηλαδὴ τοῦ δ α β τμήματος, καὶ τοῦ β γ δ μέσων λαμβανομένων τῶν εἰρημένων κωνικῶν. ἀλλ' ὁ μὲν τοῦ β α δ τμήματος πρὸς τὸν β α δ κῶνον, ὁ τῆς η θ ἐστὶ πρὸς θ γ, διὰ τὸ πόρισμα τοῦ δευτέρου θεωρήματος τοῦ δευτέρου βιβλίου. ἐλέγετο γὰρ τὸ τμῆμα πρὸς τὸν ἐν αὐτῷ κῶνον.

τῷ κῶνον τὸν αὐτὸν ἔχειν τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερος, ἥ τε ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, καὶ τὸ ὕψος τοῦ λοιποῦ τμήματος πρὸς τὸ ὕψος τοῦ λοιποῦ τμήματος. ὁ δὲ τοῦ β α δ κώνου πρὸς τὸν β γ δ κῶνον, ὁ τῆς α θ ἐστὶ πρὸς θ γ. ἐπεὶ γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντες πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, ὡς τὰ ὕψη. ὁ δὲ τοῦ β γ δ κώνου πρὸς τὸ β γ δ τμῆμα, ὁ τῆς α θ ἐστὶ πρὸς θ ζ, διὰ τὸ ἀνάπαλιν τοῦ εἰρημένου πορίσματος, ὥστε ὁ τοῦ β α δ τμήματος πρὸς τὸ β γ δ τμῆμα λόγος σύγκειται, ἔκ τε τοῦ τῆς η θ πρὸς θ γ, καὶ τοῦ τῆς α θ πρὸς θ γ, καὶ τοῦ τῆς α θ πρὸς θ ζ. ὁ δὲ συγκείμενος λόγος ἔκ τε τῆς η θ πρὸς θ γ, μετὰ τῆς α θ πρὸς θ γ, ὁ τοῦ ὑπὸ η θ α ἐστὶ πρὸς τὸ ἀπὸ θ γ. τὰ γὰρ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν. ὁ δὲ τοῦ ὑπὸ η θ α πρὸς τὸ ἀπὸ γ θ, μετὰ τῆς α θ πρὸς θ ζ, ὁ τοῦ ὑπὸ η θ α ἐστὶν ἐπὶ τὴν θ α, πρὸς τὸ ἀπὸ γ θ ἐπὶ τὴν θ ζ, ὡς δέδεικται ἐν τῷ προληφθέντι λήμματι. ὁ δὲ τοῦ ὑπὸ η θ α ἐπὶ τὴν θ α, ὁ αὐτός ἐστι τῷ ἀπὸ α θ ἐπὶ τὴν θ η. καὶ τοῦτο γὰρ συναποδέδεικται ἐν τῷ προληφθέντι. ὁ ἄρα τοῦ τμήματος πρὸς τὸ τμῆμα λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ α θ ἐπὶ τὴν θ η, πρὸς τὸ ἀπὸ γ θ ἐπὶ τὴν θ ζ. ἐπεὶ οὖν δεῖ δεῖξαι, ὅτι τὸ τμῆμα πρὸς τὸ τμῆμα ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ διπλάσιον τοῦ τῆς ἐπιφανείας πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν λόγου, δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι τὸ ἀπὸ α θ ἐπὶ τὴν θ η, πρὸς τὸ ἀπὸ γ θ ἐπὶ τὴν θ ζ, ἐλάσσονα ἢ διπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ β α δ τμήματος, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ β γ δ. τουτέστι τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ β γ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ β γ, οὕτως ἡ α θ πρὸς θ γ. δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς προλαβοῦσι θεωρήμασι. δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι τὸ ἀπὸ α θ ἐπὶ τὴν θ η, πρὸς τὸ ἀπὸ γ θ ἐπὶ τὴν θ ζ ἐλάσσονα, ἢ διπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ τῆς α θ πρὸς θ γ. ἀλλὰ τοῦ τῆς α θ πρὸς θ γ λόγου διπλάσιός ἐστιν ὁ τοῦ ἀπὸ α θ πρὸς τὸ ἀπὸ θ γ. ὅτι ἄρα τὸ ἀπὸ α θ ἐπὶ τὴν θ η πρὸς τὸ ἀπὸ γ θ ἐπὶ τὴν θ ζ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ α θ πρὸς τὸ ἀπὸ θ γ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ α θ πρὸς τὸ ἀπὸ θ γ, τῆς θ η κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης, οὕτως τὸ ἀπὸ α θ ἐπὶ τὴν θ η, πρὸς τὸ ἀπὸ γ θ ἐπὶ τὴν θ η. καὶ ἄρα δειχθῆναι, ὅτι τὸ ἀπὸ α θ ἐπὶ τὴν θ η, πρὸς τὸ ἀπὸ γ θ ἐπὶ τὴν θ ζ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ αὐτὸ τὸ ἀπὸ α θ ἐπὶ τὴν θ η, πρὸς τὸ ἀπὸ γ θ ἐπὶ τὴν θ η. πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο μεῖζόν ἐστι. δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι τὸ ἀπὸ γ θ ἐπὶ τὴν ζ θ μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ γ θ ἐπὶ τὴν θ η. τουτέστιν ὅτι μείζων ἡ ζ θ τῆς θ η. ἐστὶ δὲ τοῦτο φανερόν. αἱ ἴσοις γὰρ ταῖς α θ, θ γ ἴσαι πρόσκεινται αἱ ζ α, γ η.

Ταῦτα ἀναλύσας αὐτὸς μὲν οὐκ ἐπήγαγε τὴν σύνθεσιν, ἡμεῖς δὲ αὐτὴν προσθήσομεν. ἐπεὶ ἡ ζ θ τῆς θ η μείζων ἐστί, τὸ ἀπὸ γ θ ἐπὶ τὴν θ ζ, μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ γ θ ἐπὶ τὴν θ η. ὥστε τὸ ἀπὸ α θ ἐπὶ τὴν θ η πρὸς τὸ ἀπὸ γ θ ἐπὶ τὴν θ ζ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ αὐτὸ τὸ ἀπὸ α θ ἐπὶ τὴν θ η, πρὸς τὸ ἀπὸ γ θ ἐπὶ τὴν θ η. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ α θ ἐπὶ τὴν θ η, πρὸς τὸ ἀπὸ γ θ ἐπὶ τὴν θ η, τὸ ἀπὸ α θ πρὸς τὸ ἀπὸ γ θ. τὸ ἄρα ἀπὸ α θ ἐπὶ τὴν θ η, πρὸς τὸ ἀπὸ γ θ ἐπὶ τὴν θ ζ, ἐλάσσονα λόγον ἔχει, τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ α θ πρὸς τὸ ἀπὸ θ γ. ἀλλ' ὁ τοῦ ἀπὸ α θ πρὸς τὸ ἀπὸ θ γ λόγος διπλάσιός ἐστι τοῦ τῆς α θ πρὸς θ γ. τὸ ἄρα ἀπὸ α θ ἐπὶ τὴν θ η, πρὸς τὸ ἀπὸ γ θ ἐπὶ τὴν θ ζ, ἐλάσσονα ἢ διπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ τῆς α θ πρὸς θ γ. ἀλλ' ὁ μὲν τῶν τμημάτων λόγος ὁ αὐτὸς ἐδείχθη τῷ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ α θ ἐπὶ τὴν θ η πρὸς τὸ ἀπὸ γ θ ἐπὶ τὴν θ ζ. ὁ δὲ τῶν ἐπιφανειῶν ὃν ἔχει ἡ α θ πρὸς θ γ, τὸ ἄρα τμῆμα πρὸς τὸ τμῆμα ἐλάσσονα ἢ διπλασίονα λόγον ἔχει, τῆς ἐπιφανείας πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν λόγου. ἑξῆς δὲ ἀναλύων τὸ ἕτερον μέρος τοῦ θεωρήματος ἐπάγει. φημὶ δὴ ὅτι τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὸ ἔλασσον μείζονα λόγον ἔχει, ἢ τὸν ἡμιόλιον τῆς ἐπιφανείας πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν λόγου. ἀλλ' ὁ μὲν τῶν τμημάτων ἐδείχθη ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ α θ ἐπὶ τὴν θ η πρὸς τὸ ἀπὸ γ θ ἐπὶ τὴν θ ζ. τοῦ δὲ τῆς ἐπιφανείας πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν λόγου ἡμιόλιός ἐστιν ὁ τοῦ ἀπὸ α β κύβου πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς β γ κύβον. τοῦ γὰρ τῆς α β πρὸς β γ διπλάσιος μέν ἐστιν ὁ τοῦ ἀπὸ α β τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ β γ τετράγωνον. τριπλάσιος δὲ ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς α β πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς β γ κύβον. ἀλλ' ὡς ὁ ἀπὸ τῆς α β κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς β γ κύβον, οὕτως ὁ ἀπὸ α θ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς θ β κύβον. ὡς γὰρ ἡ α β πρὸς τὴν β γ, οὕτως ἡ α θ πρὸς θ β, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν α β γ, α β θ τριγώνων. ἐὰν δὲ ὦσι τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν στερεὰ τὰ ὅμοια, καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον εἰσίν, ὥστε ὁ ἀπὸ τῆς α θ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς θ β κύβον, ἡμιόλιον λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ α β τετράγωνον, τουτέστιν ἡ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν. ἀλλ' ὡς τὸ τμῆμα πρὸς τὸ τμῆμα, οὕτως τὸ ἀπὸ α θ ἐπὶ τὴν θ η, πρὸς τὸ ἀπὸ γ θ ἐπὶ τὴν θ ζ. φημὶ οὖν ὅτι τὸ ἀπὸ α θ ἐπὶ τὴν θ η, πρὸς τὸ ὑπὸ ἀπὸ ἐπὶ τὴν θ ζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ ἀπὸ τῆς α θ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς θ β κύβον. τουτέστιν ὁ ἀπὸ α θ πρὸς τὸ ἀπὸ

H θ β.

θβ. καὶ ὁ τῆς αθ πρὸς θβ. ὁ γὰρ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ διπλασίων τοῦ τῆς αθ πρὸς θβ. προσλαβὼν τὸν τῆς αθ πρὸς θβ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς αθ κύβῳ πρὸς τὸν ἀπὸ θβ κύβον. ἑκάτερος γὰρ τοῦ αὐτοῦ ἐστι τριπλάσιος. ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ προσλαβὼν τὸν τῆς αθ πρὸς θβ, ὁ τοῦ ἀπὸ αθ ἐστὶ πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ. ἐπεὶ γὰρ ὁ τῆς αθ πρὸς θβ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς θβ πρὸς θγ, τῆς βθ μέσης ἀνάλογον ὑπαρχούσης, ὁ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ μετὰ τοῦ τῆς αθ πρὸς θβ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ μετὰ τοῦ τῆς βθ πρὸς θγ. ἀλλ' ὁ τῆς βθ πρὸς θγ ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ βθ πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ, τῆς βθ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης. ὥστε ὁ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ λόγος, μετὰ τοῦ τῆς αθ πρὸς θβ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ, μετὰ τοῦ ἀπὸ θβ πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ. ἀλλ' ὁ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ λόγος ὁ συγκείμενός ἐστιν ἐκ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ βθ, καὶ τοῦ ἀπὸ βθ πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ, τοῦ ἀπὸ βθ μέσου λαμβανομένου. ὥστε ὁ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ βθ λόγος, μετὰ τοῦ τῆς αθ πρὸς θβ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ. ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ λόγος, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ ἐπὶ τὴν θη, τῆς θη κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης. φημὶ δὴ ὅτι τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ ἐπὶ τὴν θη. πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλασσόν ἐστι. δεικτέον ὅτι τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ὑπὸ βθγ ἐπὶ τὴν θη, τουτέστι τῷ δεῖξαι, ὅτι τὸ ἀπὸ γθ πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ θη πρὸς θζ. ἐὰν γὰρ ὦσι τέσσαρες ὅροι ὡς ἐνταῦθα, τὸ ἀπὸ γθ καὶ τὸ ὑπὸ γθβ, καὶ ἡ θη καὶ θζ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἔλασσον ᾖ τοῦ ὑπὸ τῶν μέσων, ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ τρίτος πρὸς τὸν τέταρτον, ὡς δέδεικται ἀνωτέρω. εὐλόγως ἄρα ἔχει δεῖξαι τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ ἔλασσον τοῦ ὑπὸ γθβ ἐπὶ τὴν θη. τουτέστι τῷ δεῖξαι ὅτι τὸ ἀπὸ γθ πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ θη πρὸς θζ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ γθ πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ, ἡ γθ πρὸς θβ. δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι ἡ γθ πρὸς θβ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ θη πρὸς θζ. τουτέστιν ἡ ηθ πρὸς θζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γθ πρὸς θβ. ἤχθω ἀπὸ τοῦ ε τῇ εγ πρὸς ὀρθὰς ἡ εκ. καὶ ἀπὸ τοῦ β κάθετος ἐπ' αὐτὴν ἡ βλ. ἐπίλοιπον ἡμῖν δεῖξαι δεῖ, ὅτι ἡ ηθ πρὸς θζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γθ πρὸς θβ. ἴση δὲ ἐστὶν ἡ θζ συναμφοτέρῳ τῇ θα κε. ἡ γὰρ αζ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστί. δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι ἡ ηθ πρὸς συναμφότερον τὴν θα κε μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γθ πρὸς θβ. καὶ ἀφαιρεθείσης ἄρα ἀπὸ τῆς ηθ τῆς γθ, ἀπὸ δὲ τῆς κε τῆς ελ ἴσης τῇ βθ δέησει δειχθῆναι, ὅτι λοιπὴ ἡ γη πρὸς λοιπὴν συναμφότερον τὴν αθ κλ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γθ πρὸς θβ. ἐπεὶ γὰρ δεῖ δειχθῆναι, ὅτι ἡ ηθ πρὸς συναμφότερον τὴν θα κε μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γθ πρὸς θβ. καὶ ἐναλλὰξ, ὅτι ἡ ηθ πρὸς θγ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ θα κε πρὸς θβ, τουτέστι πρὸς λε, καὶ διελόντι ἡ ηγ πρὸς γθ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ θα κλ πρὸς λε, τουτέστι πρὸς βθ. ἐναλλὰξ, ὅτι ἡ ηγ πρὸς συναμφότερον τὴν θα κλ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γθ πρὸς θβ. ἀλλ' ὡς ἡ γθ πρὸς θβ, οὕτως ἡ θβ πρὸς θα, τουτέστιν ἡ λε πρὸς αθ. ὅτι ἄρα ἡ ηγ πρὸς συναμφότερον τὴν θα κλ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ λε πρὸς αθ. καὶ ἐναλλὰξ, ὅτι ἡ γη, τουτέστιν ἡ κε πρὸς ελ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ κλ θα πρὸς θα, διελόντι ἡ κλ πρὸς λε μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ αὐτὴ ἡ κλ πρὸς θα. τουτέστιν ὅτι ἐλάσσων ἡ λε τῆς θα ἐστίν. ἑξῆς δὲ ἡμεῖς τὴν σύνθεσιν προσθήσομεν, ἐπεὶ ἡ λε τῆς αθ ἐλάσσων, ἡ ἄρα κλ πρὸς λε μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ κλ πρὸς αθ. συνθέντι ἡ κε πρὸς ελ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ κλ αθ πρὸς αθ. ἡ δὲ λε τῇ βθ ἐστὶν ἴση. ἡ ἄρα κη πρὸς βθ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ κλ αθ πρὸς αθ. ἐναλλὰξ, ἡ ἄρα ηγ πρὸς συναμφότερον τὴν κλ αθ, μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ βθ πρὸς θα, τουτέστιν ἡ γθ πρὸς θβ. ἐναλλὰξ ἡ ηγ πρὸς γθ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ κλ αθ πρὸς θβ. συνθέντι ἡ ηθ πρὸς θγ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ κλ αθ μετὰ τῆς θβ, τουτέστι συναμφότερος ἡ αθ κε πρὸς βθ. ἴση δὲ ἡ κε τῇ ζα. ἡ ζθ ἄρα πρὸς θβ. ἐναλλὰξ ἡ ηθ πρὸς θζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γθ πρὸς θβ. ὡς δὲ ἡ γθ πρὸς θβ, οὕτως τὸ ἀπὸ γθ πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ. ἡ ἄρα ηθ πρὸς θζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ γθ πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ, καὶ διὰ τὰ πρότερον εἰρημένα, τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ὑπὸ γθβ ἐπὶ τὴν θη. τὸ ἄρα ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ ἐπὶ τὴν θη, τουτέστι τὸ ἀπὸ

αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ ἐπὶ τὴν θη μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ὑπὸ γθβ. ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ, τοῦ ἀπὸ βθ μέσου λαμβανομένου, σύγκειται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ, καὶ τοῦ ἀπὸ βθ πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ. ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ βθ πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς βθ πρὸς θγ, τουτέστι τῷ τῆς αθ πρὸς θβ. τὸ ἄρα ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ, μετὰ τῆς αθ πρὸς θβ. ὁ δὲ συγκείμενος λόγος ἔκ τε τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ, καὶ τῆς αθ πρὸς θβ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ τῆς αθ κύβου, πρὸς τὸν ἀπὸ θβ κύβον, τουτέστι τοῦ ἀπὸ αβ κύβου πρὸς τὸν ἀπὸ βγ κύβον. τὸ ἄρα ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ μείζονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει ὁ ἀπὸ αβ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ βγ κύβον. ἀλλ' ὁ μὲν τοῦ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ λόγος, ὁ αὐτὸς ἐδείχθη τῷ τῶν τμημάτων λόγῳ. ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ τῆς αβ κύβου πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς βγ κύβον λόγου, ἡμιόλιος ἐδείχθη τοῦ τῶν ἐπιφανειῶν λόγου. τὸ ἄρα τμῆμα πρὸς τὸ τμῆμα μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ἡμιόλιον τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν.

ΕΙΣ ΤΟ Θ.

Δῆλον δὲ ὅτι ἡ βα τῆς μὲν ακ ἐλάσσων ἐστὶ, ἢ διπλασία δυνάμει. τῆς δὲ ἐκ τοῦ κέντρου μείζων, ἢ διπλασία. ἐπιζευχθείσης γὰρ ἀπὸ τοῦ β ἐπὶ τὸ κέντρον τῆς πρὸς τῷ κέντρῳ ἀμβλείας γινομένης ὑπὸ τῆς βα, τὸ ἀπὸ τῆς αβ μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ἀμβλεῖαν περιεχουσῶν ἴσων οὐσῶν. ὥστε τοῦ ἀπὸ ἑνὸς αὐτῶν, τουτέστι τοῦ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου μεῖζόν ἐστιν, ἢ διπλάσιον. πάλιν δὲ τοῦ ἀπὸ αβ ἴσου ὄντος τοῖς ἀπὸ ακ, κβ. καὶ μείζονος ὄντος τοῦ ἀπὸ ακ τοῦ ἀπὸ κβ, τὸ ἀπὸ αβ τοῦ ἀπὸ ακ ἔλασσόν ἐστιν ἢ διπλάσιον. καὶ ταῦτα μὲν ἐπὶ τοῦ σχήματος, ἐφ' οὗ ἐστι μεῖζον θ. ἐν δὲ τῷ ἑτέρῳ σχήματι τἀναντία τούτοις εἰκότως λεχθήσεται.

Ἔσω τῇ ελ ἴση ἡ εν. καὶ ἀπὸ τοῦ κύκλου τοῦ περὶ διάμετρον τὴν θζ, κῶνος ἔσω κορυφὴν ἔχων τὸ ν σημεῖον. ἴσος δὴ καὶ οὗτός ἐστι τῷ κατὰ τὴν θεζ περιφέρειαν ἡμισφαιρίῳ. ἐπεὶ γὰρ ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν θζ, ὕψος δὲ τὴν λε, τοῦ μὲν κώνου τὴν βάσιν ἔχοντος τὴν αὐτὴν, καὶ ὕψος ἴσον, τριπλάσιός ἐστι, τοῦ δὲ ἡμισφαιρίου ἡμιόλιος. τὸ ἡμισφαίριον διπλάσιον ἐστὶ τοῦ αὐτοῦ κώνου. ἔστι δὲ καὶ ὁ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν θζ κύκλον, ὕψος δὲ τὴν λν, διπλάσιος τοῦ αὐτοῦ κώνου. καὶ τὸ ἡμισφαίριον ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὸν περὶ διάμετρον τὴν ζθ κύκλον, ὕψος δὲ τὴν λν.

Τὸ δὲ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν αργ μεῖζόν ἐστι τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τῶν ακγ, διότι τὴν ἐλάσσονα πλευρὰν τῆς ἐλάσσονος τοῦ ἑτέρου μείζονα ἔχει. εἴρηται γὰρ ἀνωτέρω, ὅτι ἐὰν εὐθεῖα τμηθῇ εἰς ἄνισα, καθ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῶν ἐγγυτέρων τῆς διχοτομίας τομῶν μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῶν ἀπωτέρω. τοῦτο δὲ ἐστιν ἀπαρ. διότι τὴν ἐλάσσονα πλευρὰν τῆς ἐλάσσονος τοῦ ἑτέρου μείζονα ἔχει. ὅσῳ γὰρ ἐλάσσων ἐστὶ, τοσούτῳ πλέον ἀφέστηκεν ἡ τομὴ τῆς διχοτομίας.

Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς αρ ἴσον ἐστὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν ακ, γξ. ἥμισυ γὰρ ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς αβ. ἐὰν γὰρ ἐπιζευχθῇ ἡ βγ διὰ τὸ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς κάθετον ἦχθαι τὴν βκ, καὶ τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὅμοια εἶναι τῷ ὅλῳ, τὸ ὑπὸ γακ ἴσον τῷ ἀπὸ αβ, ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ τῆς ἡμισείας τῆς γα, καὶ ακ, τουτέστι τὸ ὑπὸ γξ ακ ἴσον ἐστὶ τῷ ἡμίσει τοῦ ἀπὸ αβ, τουτέστι τῷ ἀπὸ αρ.

Μεῖζον οὖν ἐστὶ καὶ τὸ συναμφότερον τοῦ συναμφοτέρου. ἐπεὶ γὰρ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ακ, γξ, τῷ ἀπὸ αρ, μεῖζον δὲ τὸ ὑπὸ αργ τοῦ ὑπὸ ακγ. ἐὰν δὲ ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἄνισα, καὶ ἐκεῖνο μεῖζον, ὃ καὶ ἐξ ἀρχῆς μεῖζον, τῷ ὑπὸ αργ προστεθέντος τοῦ ἀπὸ αρ, τῷ δὲ ὑπὸ ακγ τοῦ ὑπὸ ακγξ, μεῖζον γίνεται τὸ ὑπὸ αργ μετὰ τοῦ ἀπὸ αρ, τοῦ ὑπὸ ακγ, μετὰ τοῦ ὑπὸ ακγξ, ἀλλὰ τὸ ὑπὸ αργ μετὰ τοῦ ἀπὸ αρ ἴσον γίνεται τῷ ὑπὸ γαρ, διὰ τὸ δεύτερον θεώρημα τοῦ δευτέρου βιβλίου τῆς στοιχειώσεως. τὸ δὲ ὑπὸ ακγ μετὰ τοῦ ὑπὸ ακγξ ἴσον τῷ ὑπὸ ακξ, διὰ τὸ πρῶτον θεώρημα τοῦ αὐτοῦ βιβλίου, ὥστε τὸ ὑπὸ γαρ μεῖζον ἐστὶ τοῦ ὑπὸ ακξ. τῷ δὲ ὑπὸ τῆς ξκα ἴσον τὸ ὑπὸ μκγ. ὑπόκειται γὰρ ὡς ἡ ξγ πρὸς γκ, ἡ μα πρὸς ακ. ὥστε καὶ συνθέντι ὡς ἡ ξκ πρὸς κγ, οὕτως ἡ μκ πρὸς κα. καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν μέσων. τὸ ἄρα ὑπὸ τῆς ξκα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ μκγ. ἀλλὰ τοῦ ὑπὸ τῆς ξκα μεῖζον ἦν τὸ ὑπὸ γαρ. καὶ τὸ ὑπὸ γαρ ἄρα μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ μκγ, ὥστε μείζονα λόγον ἔχει ἡ γα πρὸς γκ, ἤπερ ἡ μκ πρὸς αρ. ἐπεὶ οὖν τέσσαρες εὐθεῖαι εἰσὶν αἱ γκ, κμ, γα, αρ. καὶ τὸ ὑπὸ πρώτης τῆς γα καὶ τετάρτης τῆς αρ, μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ δευτέρας τῆς μκ, καὶ τρίτης τῆς κγ. ἡ πρώτη ἡ γα πρὸς δευτέραν τὴν μκ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ τρίτη ἡ κγ πρὸς τετάρτην τὴν αρ. καὶ ἐναλλὰξ ἡ γα πρὸς κγ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ μκ πρὸς αρ. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἡ αγ πρὸς γκ, τοῦτον ἔχει τὸ ἀπὸ τῆς αγ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γβ. ἐπιζευχθείσης γὰρ τῆς βγ, διὰ τὸ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς κάθετον εἶναι τὴν βγ, γίνεται ὡς ἡ αγ πρὸς γβ, ἡ βγ πρὸς γκ. καὶ διὰ τοῦτο ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, τουτέστιν ἡ αγ πρὸς γκ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς αγ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γβ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς αγ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γβ, οὕτως τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βκ. ὅμοιον γὰρ τὸ αβκ τῷ αβγ. ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ αγ πρὸς γκ, οὕτως τὸ ἀπὸ αβ πρὸς τὸ ἀπὸ βκ. ἡ δὲ αγ πρὸς γκ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ μκ πρὸς αρ. καὶ τὸ ἀπὸ αβ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ βκ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ μκ πρὸς αρ, καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ ἡμίση, τὸ ἥμισυ τοῦ ἀπὸ αβ. ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ αρ, πρὸς τὸ ἀπὸ βκ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡμίσεια τῆς μκ πρὸς τὴν αρ. τουτέστιν ἡ μκ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς αρ, ἀλλὰ τῷ ἀπὸ αρ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ ζλ. ἐπειδὴ ἡ μὲν αβ τῇ εζ ὑπόκειται ἴση, ἡ δὲ εζ τῇ ζλ δυνάμει διπλῆ. ἴση γὰρ ἡ ελ τῇ λζ. τῆς δὲ αρ διπλασία ἡ νλ. ἐπεὶ καὶ τῆς λζ. ὥστε τὸ ἀπὸ ζλ πρὸς τὸ ἀπὸ βκ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ μκ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς αρ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ λν. μείζονα ἄρα λόγον ἔχει καὶ ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν θζ πρὸς τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὴν βδ, ἤπερ ἡ μκ πρὸς νλ. ὥστε μείζων ἐστὶν ὁ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν ζθ κύκλον, κορυφὴν δὲ τὸ ν σημεῖον, τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν περὶ διάμετρον τὴν βδ κύκλον, κορυφὴν δὲ τὸ μ σημεῖον. ἐὰν γὰρ ποιήσωμεν ὡς τὸν περὶ διάμετρον τὴν ζθ κύκλον πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν βδ κύκλον, οὕτως τὴν κμ πρὸς ἄλλην τινά, ἔσται πρὸς ἐλάσσονα τῆς λν. καὶ ἔσται ὁ κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν ζθ κύκλον, ὕψος δὲ τὴν εὑρεθεῖσαν ἐλάσσονα εὐθεῖαν, ἴσος μὲν τῷ μβδ, διὰ τὸ ἀντιπεπονθέναι τὰς βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἐλάττων δὲ τοῦ νθζ, διὰ τὸ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντας πρὸς ἀλλήλους εἶναι ὡς τὰ ὕψη. δῆλον οὖν ὅτι καὶ τὸ ἡμισφαίριον τὸ κατὰ τὴν εζθ περιφέρειαν, μεῖζόν ἐστι τοῦ τμήματος τοῦ κατὰ τὴν αβδ περιφέρειαν.

ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΑΣΚΑΛΩΝΙΤΟΥ ΥΠΟμνημα εἰς τὸ δεύτερον τῶν ἀρχιμήδους περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου ἐκδόσεως, παραναγνωσθέσης ὑπὸ τοῦ μιλησίου μηχανικοῦ ἰσιδώρου ἡμετέρου διδασκάλου.

Εὐτοκίου πινυτοῦ γλυκερὸς πόνος, ὅν ποτ' ἐκεῖνος
γράψεν τοῖς φθονεροῖς πολλάκι μεμψάμενος.

Εὐτοκίου

ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΑΣΚΑΛΩΝΙΤΟΥ ΥΠΟΜΝΗΜΑ ΕΙΣ ΤΗΝ ΑΡΧΙμήδους τῆς κύκλου μέτρησιν.

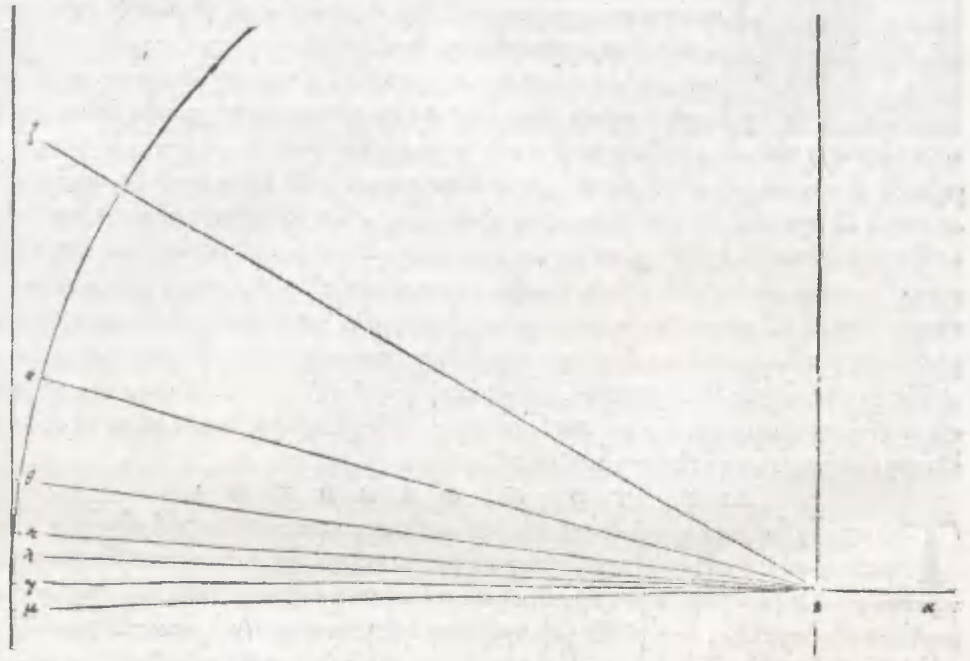
Ἐχόμενον ἂν εἴη τοῦ ἐμοῦ πληροῦντι σκοποῦ τοῖς σαφεστέροις, καὶ βραχυτέρας ἐπιστάσεως δεομένοις, τῶν ὑπὸ ἀρχιμήδους γεγραμμένων ἐντυγχάνοντι, καὶ τὰ ὁποσοῦν ἐν αὐτοῖς ἐπεξεργασίας δεόμενα, τὸν δυνατὸν τρόπον συνεχῆ ποιεῖν τοῖς πρότερον ὑφ' ἡμῶν ἐν τῷ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου γεγραμμένοις, ἐχὴς ὡς ἀληθῶς ἄξιον τυγχάνοντος τοῦ καὶ τοῖς μείζοσι καὶ πλείονος φροντίδος δεομένοις ἐπιστῆσαι. εἴη δ' ἂν ὡς πρὸς τὸ προκείμενον ἐφεξῆς τὸ γεγραμμένον ἀρχιμήδει βιβλίον κύκλου μέτρησιν τὴν ἐπιγραφὴν ἔχον, ἐν ᾧ τὴν πρόθεσιν τοῦ ὅρου, ἐξ αὐτῆς τῆς ἐπιγραφῆς γνωρίζομεν. βούλεται γὰρ ἐπιδεῖξαι τινὶ χωρίῳ εὐθυγράμμῳ ἴσος ἂν εἴη κύκλος, πρᾶγμα πάλαι πρὸς τῶν πρὸ αὐτοῦ κλεινῶν φιλοσόφων ζητηθέν. δῆλον γὰρ ὅτι τι ἂν εἴη τὸ ζητούμενον, ὅπερ ἱπποκράτης τε ὁ χῖος καὶ ἀντιφῶν ζητήσαντες ἐπιμελῶς ἐκείνους ἡμῖν τοὺς παραλογισμοὺς εὑρήκασιν, οὓς ἀκριβῶς εἰδέναι νομίζω τούς τε τὴν εὐδήμου γεωμετρικὴν ἱστορίαν ἐπεσκεμμένους, καὶ τῶν ἀριστοτελικῶν μεταχόντας κηρίων. ἀλλ' ἔστι μὲν οὖν τὸ βιβλίον, ὥς φησιν ἡρακλείδης ἐν τῷ ἀρχιμήδους βίῳ, πρὸς τὰς τοῦ βίου χρείας ἀναγκαῖον. δείκνυσι γάρ, ὅτι ἡ περιφέρεια τῆς διαμέτρου ἐστὶ τριπλασία, καὶ ἔτι ὑπερέχει, ἔλαττον μὲν ἢ ἑβδόμῳ μέρει, μεῖζον δὲ ἢ δέκα ἑβδομηκοστομόνοις. τοῦτο οὖν φησι σύνεγγυς δεδεῖχθαι, εὑρῆσθαι μέντοι αὐτῷ διά τινων ἑλίκων εὐθεῖαν ἴσην τῇ δοθείσῃ κύκλου περιφερείᾳ.

ΕΙΣ ΤΟ Α ΘΕΩΡΗΜΑ.

Τὸ πρῶτον θεώρημα καὶ τοῖς ἐπὶ ποσὸν μαθημάτων γυμνασαμένοις, οὐδεμίαν ἔχον ζήτησιν φαίνεται, αὐτοῦ τοῦ ἀρχιμήδους ῥημάτων σαφῶς ἐκτεθειμένων, καὶ τὸ συμπέρασμα πρὸς τὴν πρότασιν ἀνελλιπῶς ἀποσωζόντων. δοκεῖ δέ τι κατακεχρῆσθαι πρὸς τὴν ἀπόδειξιν πράγματι μηδέπω δεδειγμένῳ. ἐκθέμενος γὰρ τρίγωνον ὀρθογώνιόν φησιν, ἐχέτω τὴν μίαν τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ἴσην τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, τὴν δὲ λοιπὴν τῇ περιφερείᾳ, ἀλλὰ τῇ περιφερείᾳ κύκλου ἴσην εὐθεῖαν λαβεῖν, οὐδὲ πρὸς αὐτοῦ ἤδη δεδειγμένον εἶν, ἀλλ' οὐδὲ ὑπὸ ἄλλου παραδεδομένον. συνορᾶν δὲ ὅμως χρή, ὡς οὐδὲν ἔξω τῶν προσηκόντων ὑπὸ ἀρχιμήδους γράφεται. εἶν γὰρ τὸ μέγεθος τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, πάντη που δῆλον. οἶμαι καὶ τοῦτο τῶν ἐφ' ἓν διαστάτων. ἔστι δὲ καὶ εὐθεῖα τοῦ αὐτοῦ εἴδους. κἂν εἰ μηδέπω οὖν ἐφαίνη, δυνατὸν περιφερείᾳ κύκλου ἴσην εὐθεῖαν πορίσασθαι, ἀλλ' ὅμως εἶν τινὰ τῇ φύσει εὐθεῖαν ἴσην αὐτῇ, πρὸς οὐδενὸς ἐστὶ ζητούμενον. τὸ τοίνυν καὶ πρὸς ἀρχιμήδους προτεθὲν τοιοῦτον ἐστίν. ὅτι τρίγωνον τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον ὡς προείρηται τὰς πλευράς, ἴσον ἐστὶ τῷ κύκλῳ, ὥστε τὸ προτεθὲν ἐκθέμενος οὐδεμίαν ἂν καταχρήσεως κρίνοιτο. θαύματος δ' ἂν μᾶλλον κἂν τούτοις δέξειεν τοῖς οὕτως ὑπερμεγέθεσι τῶν ζητημάτων σαφῆ καὶ ῥᾳδίαν τὴν εὕρεσιν ἐπιτιθείς. ὡς δὲ εἴρηται, οὐδὲ μιᾶς ζητήσεως τῷ πρώτῳ θεωρήματι. τὸ γὰρ π ο ρ τρίγωνον, ὅτι μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ αζ ο μ σχήματος. καὶ ὅτι ἁπλῶς περὶ τὸν δοθέντα κύκλον, δυνατὸν εὐθύγραμμον περιγράψαι, ὥστε τὰ τμήματα τὰ μεταξὺ τῶν τοῦ κύκλου περιφερειῶν καὶ τῶν πλευρῶν τοῦ περιγραφομένου εὐθυγράμμου, ἐλάττονα εἶν τοῦ δοθέντος χωρίου, σαφῶς εἴρηται ἐν τοῖς εἰς τὸ πρῶτον τῶν περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου γεγραμμένοις ἡμῖν.

ΕΙΣ ΤΟ Γ ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐν τούτῳ τῷ θεωρήματι συνεχῶς ἐπιταττόμεθα τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ τὴν τετραγωνικὴν πλευρὰν εὑρεῖν. τοῦτο δὲ ἀκριβῶς μὲν εὑρεῖν ἐπὶ ἀριθμοῦ μὴ ὄντος τετραγώνου ἀδύνατον. ἀριθμὸν μὲν γὰρ ἐφ' ἑαυτὸν πολλαπλασιαζόμενον ποιεῖ τινὰ τετράγωνον ἀριθμόν. ὃς δὲ καὶ μόριον ἐφ' ἑαυτὰ γινόμενα, οὐκέτι ἀριθμὸν ποιεῖ πλήρη, ἀλλὰ καὶ μόριον. ὅπως δὲ δεῖ σύνεγγυς τὴν δυνάμει πλευρὰν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν εὑρεῖν, εἴρηται μὲν ἥρωνι ἐν τοῖς μετρικοῖς. εἴρηται δὲ πάππῳ καὶ θέωνι καὶ ἑτέροις πλείοσιν, ἐξηγουμένοις τὴν μεγάλην σύνταξιν τοῦ κλαυδίου πτολεμαίου, ὥστε οὐδὲν ἡμᾶς χρὴ περὶ τούτου ζητεῖν, ἐξὸν τοῖς φιλομαθέσιν ἐξ ἐκείνων ἀναλέγεται, καὶ ἡ ὑπὸ γεζ τρίτον ὀρθῆς. ἐὰν γὰρ τὴν τοῦ ἑξαγώνου περιφέρειαν δίχα τεμόντες, καὶ τὸ ἥμισυ αὐτῆς πρὸς τὸ τρίτον ἀπολαβόντες ἐπιζεύξωμεν τὴν εζ, ἡ ὑπὸ γεζ τρίτον ὀρθῆς. ἡ γὰρ πρὸς τῷ γ ἀπολειφθεῖσα περιφέρεια ἡμίσεια οὖσα τῆς τοῦ ἑξαγώνου δωδέκατόν ἐστι τοῦ κύκλου, ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ γεζ γωνία πρὸς τῷ κέντρῳ οὖσα, δωδέκατόν ἐστι τῶν τεσσάρων ὀρθῶν, τρίτον ἄρα ὀρθῆς. ἡ εζ ἄρα πρὸς ζγ λόγον ἔχει, ὃν τϛ πρὸς ρνγ. ὅτι δὲ διπλῆ ἐστιν ἡ εζ τῆς ζγ, δῆλον ἐντεῦθεν. ἐὰν γὰρ προσεκβαλόντες τὴν ζγ ἐπὶ τὸ μ, καὶ ἴσην αὐτῇ ἀφελόμενοι ἐπιζεύξωμεν ἀπὸ τοῦ ε, συσταθήσεται ἡ πρὸς τῷ μ γωνία διμοίρου ὀρθῆς. ἔστι δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ



ε γωνία διμοίρου ὀρθῆς. ἔστι δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ ζ διμοίρου· ἰσοπλεύρου ἄρα τριγώνου ἥμισυ ἐστὶ τὸ γεζ, καὶ διὰ τὸ τὴν βάσιν τοῦ ἰσοπλεύρου ἴσην οὖσαν τῇ εζ δίχα τέμνεσθαι ὑπὸ τοῦ γ, διπλῆ ἐστιν ἡ εζ τῆς γζ. ἡ δὲ εγ πρὸς γζ λόγον ἔχει, ὃν σξε πρὸς ρνγ. ἐπεὶ γὰρ ἡ εζ ὑπόκειται τϛ, ἐὰν αὐτὰ ἐφ' ἑαυτὰ πολυπλασιάσωμεν, γενήσεται $\overset{\theta}{M}$ γχλϛ. ἡ δὲ γζ ἐστι ρνγ. ὥστε τὸ ἀπ' αὐτῆς ἔσται $\overset{\beta}{M}$ γυθ. ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ εζ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ εγ, γζ, ἐὰν ἀπὸ τοῦ ἀπὸ εζ ὄντος $\overset{\theta}{M}$ γχλϛ, ἀφέλωμεν τὸ ἀπὸ γζ ὑπάρχον $\overset{\beta}{M}$ γυθ, καταλειφθήσεται τὸ ἀπὸ ε $\overset{\zeta}{M}$ σκζ, ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ σξε, καὶ ἔτι μόριον ἐλάχιστον καὶ ἀνεπαίσθητον. λείπεται γὰρ ἡ τῶν σξε δύναμις τοῦ ἀκριβοῦς μονάσιν β. οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται.

ἡ εζ τϛ	ἡ ζγ ρνγ	λοιπὸν τὸ ἀπὸ εγ $\overset{\zeta}{M}$ σκζ
ἐπὶ τϛ	ἐπὶ ρνγ	τὰ δὲ σξε ἐφ' $\overset{\zeta}{M}$ σκε
$\overset{\theta}{M}$,αω	$\overset{\alpha}{M}$,ετ	ἐπεὶ δ' ἐλλείπει ἄρα $\overset{\theta}{M}$ β
αωλϛ	ζχν	$\overset{\varepsilon}{M}$ $\overset{\alpha}{M}$,β ,α εἰς τὸ ἀκριβὲς
⫽ $\overset{\theta}{M}$,γχλϛ	υνθ	$\overset{\alpha}{M}$ β ,γχτ
	$\overset{\beta}{M}$,γυθ	ατκε.

Τετμήσθω οὖν ἡ ὑπὸ ζεγ δίχα τῇ εη. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ζε πρὸς εγ, ἡ ζη πρὸς ηγ, διὰ τὸ τρίτον θεώρημα τοῦ ἕκτου βιβλίου τῆς Εὐκλείδου στοιχειώσεως. καὶ συνθέντι ὡς συναμφότερος ἡ ζε, εγ πρὸς εγ, ἡ ζγ πρὸς γη. καὶ ἐναλλὰξ ὡς συναμφότερος ἡ ζε, εγ πρὸς ζγ, ἡ εγ πρὸς γη. συναμφότερος δὲ ἡ εζ, εγ μείζων ἐστὶν ἤπερ φοα. ἡ μὲν γὰρ ζε ὑπόκειται τϛ. ἡ δὲ εγ σξε, καὶ ἔτι μορίου τινός. ὥστε μείζους εἰσὶ τῶν φοα. ἡ δὲ ζγ ἐστι ρνγ. συναμφότερος ἄρα ἡ ζε, εγ πρὸς ζγ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ φοα πρὸς ρνγ. ὥστε καὶ ἡ εγ πρὸς γη μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ

ἤπερ φοα πρὸς ρνγ, ἡ εη ἄρα πρὸς ηγ δυνάμει λόγον ἔχει, ὃν $\overset{\lambda\delta}{M}$,θυν πρὸς $\overset{\beta}{M}$,γυθ. συναχθήσεται δὲ οὕτως. ἐπεὶ γὰρ δέδεικται ἡ εγ πρὸς γη μείζονα λόγον ἔχουσα ἤπερ φοα πρὸς ρνγ, εἴ τις ὑποθοῖτο τὴν μὲν εγ φοα, τὴν δὲ γη ρνγ, ἔσται τὸ μὲν ἀπὸ εγ $\overset{\lambda\beta}{M}$ ϛμα. τὸ δὲ ἀπὸ γη $\overset{\beta}{M}$ γυθ. συναμφότερα δὲ ἴσα ὄντα τῷ ἀπὸ εη, ἔσται $\overset{\lambda\delta}{M}$,θυν. τούτων πλευρὰ τετραγωνικὴ φϟα ἡ ἔγγιστα. ἐλλείπει γὰρ ὁ ἀπὸ τοῦ φϟα ἴσον τετράγωνος εἰς τὸ ἀκριβὲς $\overset{\circ}{M}$ κα ϛ ιε ἔγγιστα. ἡ ἄρα εη πρὸς ηγ, δυνάμει μὲν λόγον ἔχει ὃν $\overset{\lambda\delta}{M}$,θυν πρὸς $\overset{\beta}{M}$,γυθ. μήκει δὲ ὃν φϟα ἔγγιστα πρὸς ρνγ. οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται.

ἡ εγ φοα	ἡ ηγ ρνγ	φϟα ἡ
ἐπὶ φοα	ἐπὶ ρνγ	ἐπὶ φϟα ἡ
$\overset{\kappa\varepsilon}{M}$ $\overset{\gamma}{M}$,εφ	$\overset{\alpha}{M}$,ετ	$\overset{\kappa\varepsilon}{M}$ $\overset{\delta}{M}$,εφξβ ∠'
$\overset{\gamma}{M}$,ε ,δλο	,ε ,β φ ,ρν.	$\overset{\varepsilon}{M}$,ηρ ϟια δ'
φοα	τ ρνθ	φϟα η
$\overset{\lambda\beta}{M}$,ϛμα	⫽ $\overset{\beta}{M}$,γυθ	ξβ ζια δ' ηξ δ'
	⫽ $\overset{\lambda\delta}{M}$	θ υκη ζ δ' ξ δ'
Ἐκ τούτων συνάγεται		Ἐλλείπει ἄρα τοῦ ἀκριβοῦς
τὸ ἀπὸ εη		$\overset{\circ}{M}$ κα ϛ ιε ἔγγιστα
$\overset{\lambda\delta}{M}$,θυν		

Πάλιν δίχα ἡ ὑπὸ ηεγ τῇ θε, διὰ τὰ αὐτὰ ἡ εγ πρὸς γθ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ὃν ,αρξβ ἴσον πρὸς ρνγ. γίνεται γὰρ διὰ τὴν διχοτομίαν τῆς γωνίας, ὡς ἡ ηε πρὸς εγ, ἡ ηθ πρὸς θγ. καὶ συνθέντι, ὡς συναμφότερος ἡ ηε, εγ πρὸς εγ, ἡ ηγ πρὸς γθ. καὶ ἐναλλὰξ ὡς συναμφότερος ἡ ηε, εγ πρὸς ηγ, ἡ εγ πρὸς γθ. καὶ ἔστιν ἡ μὲν εγ, φοα. καὶ ἔτι μορίου τινός. ἡ δὲ εη φϟα. καὶ ἔτι μορίου τινός. μείζονες ἄρα εἰσὶν, ἤπερ ,αρξβ η. καὶ ἔστιν ἡ ηγ, ρνγ. συναμφότερος ἄρα ἡ ηε, εγ πρὸς ηγ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ,αρξβ η πρὸς ρνγ.

Η θε ἄρα πρὸς θγ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ὃ ,αξβ η πρὸς ρνγ. ἐπεὶ γὰρ δέδεικται ἡ εγ πρὸς θγ μείζονα λόγον ἔχουσα, ἤπερ ,αρξβ η πρὸς ρνγ. εἴ τις ὑποθοῖτο αὐτὰς οὕτως ἔχειν, ἔσται τὸ μὲν ἀπὸ εγ $\overset{\rho\lambda\varepsilon}{M}$ φλ δὲ ∠ ,ξ' δ'. τὸ δὲ ἀπὸ γθ $\overset{\beta}{M}$,γυθ. τὸ ἄρα ἀπὸ εθ ἴσον ὂν τοῖς ἀπὸ εγ, γθ, ἔσται $\overset{\rho\lambda\zeta}{M}$,γλμγ ∠ ξ' δ', ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ ,αροβ. λείπεται γὰρ τοῦ ἀκριβοῦς δυνάμεως τὸ ἀπ' αὐτῆς $\overset{\circ}{M}$ ξϛ. οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται.

ἡ εγ ,αρξβ η	ἡ θγ ρνγ	,αροβ η
ἐπὶ ,αρξβ η	ἐπὶ ρνγ	ἐπὶ ,αροβ η
$\overset{\rho}{M}$ $\overset{\iota}{M}$ $\overset{\varsigma}{M}$,βρκε	μα ,ετ	$\overset{\rho}{M}$ $\overset{\iota}{M}$ $\overset{\zeta}{M}$,βρμϛ ∠
$\overset{\iota}{M}$ $\overset{\alpha}{M}$,ϛ ,ει β ∠	,ε ,β φρν	$\overset{\iota}{M}$ $\overset{\alpha}{M}$ ζ σκα ∠
$\overset{\varsigma}{M}$,ϛ ,γ χρκζ ∠	τ ρνθ	$\overset{\zeta}{M}$,ζ δ' λρμη ∠ δ'
,βερκ δ' δ'	⫽ $\overset{\beta}{M}$,γυθ	,βσρμ δ' δ'
ρμε δ' ξ' δ'		ρμϛ ∠ ξ' δ'
⫽ $\overset{\rho\lambda\varepsilon}{M}$ φλδ ∠ ξ' δ'	⫽ $\overset{\lambda}{M}$,γλζ ∠ ξ' δ'	
τὸ ἀπὸ εθ ἴσον τοῖς		Ἐλλείπει ἄρα τοῦ ἀκριβοῦς
ἀπὸ εγ γθ ἐστὶ $\overset{\rho\lambda\zeta}{M}$,γλμγ ∠ ξ' δ'.		$\overset{\circ}{M}$ λϛ.

Ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ θεγ τῇ εκ, ἡ εγ ἄρα πρὸς γκ μείζονα λόγον ἔχει ἢ ,βτλδ δ' πρὸς ρνγ. πάλιν γὰρ διὰ τὴν διχοτομίαν τῆς ὑπὸ θεγ γωνίας ἐστὶν ὡς ἡ θε πρὸς εγ, ἡ θκ πρὸς γκ. καὶ συνθέντι ὡς συναμφότερος ἡ θε, εγ πρὸς εγ, ἡ θγ πρὸς γκ. ἐναλλὰξ ὡς συναμφότερος ἡ θε, εγ πρὸς θγ, ἡ εγ πρὸς γκ. καὶ ἐπεὶ δέδεικται ἡ θε ,αροβ η, καὶ ἔτι μορίου τινός. συναμφότερος ἄρα ἡ θε, εγ μείζων ἐστὶ ,βτλδ δ'. καὶ ὑπόκειται ἡ θγ ρνγ. συναμφότερος ἄρα ἡ θε, εγ πρὸς θγ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ,βτλδ δ' πρὸς ρνγ.

Ἡ εκ ἄρα πρὸς τὴν γκ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ὃν ,βτλθ δ' πρὸς ρνγ. πάλιν γὰρ ἐπεὶ ὑπόκειται

ἡ μὲν

ἡ μὲν εγ, ͵βτλδ δ΄. ἡ δὲ γκ ͵γρνγ. ἔσται τὸ μὲν ἀπὸ εγ Μ φνδκ ͵ψκγ ις΄. τὸ δὲ ἀπὸ γκ Μ β ͵γυθ. τὰ τοῖς δὲ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ κε. ἔσται ἄρα Μ φνζ ͵βρλβ ις΄. ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ ἔγγιστα ͵βτλθ δ΄. λείπει γὰρ τὸ ἀπ' αὐτῆς τοῦ ἀκριβοῦς Μ μα ∠΄. οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται.

ἡ εγ ͵βτλδ δ΄
ἐπὶ ͵βτλδ δ΄
Μ ν Μ ξ Μ ϛ ͵κφ
Μ ξ Μ θ ͵θασοε
Μ ϛ ͵θλρκζ ∠΄
ηασρκισα
φπγ ∠΄ ις΄
ὁμοῦ Μ φνδ ͵ηψκγ ις΄

ἡ γκ ͵γρνγ
ἐπὶ ͵γρνγ
Μ α ͵ετ
ε ͵βφρν
τρνθ
ὁμοῦ Μ β ͵γυθ

ἐκ τούτων συνάγεται τὸ ἀπὸ εκ Μ φνζ ͵βρλβ ις΄.

͵βτλθ δ΄
ἐπὶ ͵βτλθ δ΄
Μ ν Μ ξ Μ ϛ Μ α ͵κφ
Μ ξ Μ θ ͵βψοε
Μ ϛ ͵θλςοζ ∠΄
Μ α ͵ηβψςωαβδ΄
φωδ ∠΄ δ΄ ις΄.
ὁμοῦ Μ φνϛ ͵βϙ ∠΄ ις΄
ἐλλείπει ἄρα τοῦ ἀκριβοῦς Μ μα ∠΄

Ἐπεὶ δίχα ἡ ὑπὸ κεγ τῇ ελ, ἡ εγ ἄρα πρὸς γλ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὰ ͵δχογ ∠΄ πρὸς ρνγ. πάλιν γὰρ διὰ τὴν διχοτομίαν τῆς γωνίας ἐστίν, ὡς ἡ κε πρὸς εγ, ἡ κλ πρὸς λγ. καὶ συνθέντι, ὡς συναμφότερος ἡ κε, εγ πρὸς εγ, ἡ κγ πρὸς γλ. ἐναλλὰξ ὡς συναμφότερος ἡ κε, εγ πρὸς κγ, ἡ εγ πρὸς λγ. καὶ ἔστιν ἡ μὲν κε ͵βτλθ δ΄, καὶ ἔτι μορίου τινός. ἡ δὲ εγ ͵βτλδ δ΄, καὶ ἔτι μορίου. συναμφότερος ἄρα ἡ κε, εγ μείζων ͵δχογ ∠΄. καὶ ἔστιν ἡ κγ ρνγ. συναμφότερος ἄρα ἡ κε, εγ πρὸς κγ, μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ͵δχογ ∠΄ πρὸς ρνγ. ὡς δὲ συναμφότερος ἡ κε, εγ πρὸς κγ, οὕτως ἡ εγ πρὸς γλ. καὶ ἡ εγ ἄρα πρὸς γλ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵δχογ ∠΄ πρὸς ρνγ. ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ ζεγ τρίτου οὖσα ὀρθῆς, δωδέκατον μέρος ἐστὶ τῶν τεσσάρων ὀρθῶν. ταύτης δὲ ἡμίσεια ἡ ὑπὸ κεγ, εἰκοστοτέταρτον ἂν εἴη. ταύτης δὲ ἡμίσεια ἡ ὑπὸ θεγ, ὡς τεμη ἐστί. ταύτης δὲ ἡμίσεια ἐστὶν ἡ ὑπὸ κεγ. ϙϛ ἄρα ἐστί, ἧς ἡμίσεια οὖσα ἡ ὑπὸ λεγ ρϙβ ἐστί. κείσθω οὖν φησὶ ἴση αὐτῇ ἡ ὑπὸ γεμ. καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ζγ ἐπὶ τὸ μ. ἡ ἄρα ὑπὸ λεμ διπλασία οὖσα τῆς ὑπὸ λεγ ϙϛ ἐστὶ τῶν τεσσάρων ὀρθῶν. ὥστε καὶ ἡ λμ πλευρά ἐστὶ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφομένου πολυγώνου πλευρὰς ἔχοντος ϙϛ. ἐπεὶ οὖν ἡ εγ πρὸς τὴν γλ δέδεικται μείζονα λόγον ἔχουσα ἤπερ ͵δχογ ∠΄ πρὸς ρνγ, καὶ ἐστὶ τῆς μὲν εγ διπλῆ ἡ αγ, τῆς δὲ λγ ἡ λμ, καὶ ἡ αγ ἄρα πρὸς λμ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ͵δχογ ∠΄ πρὸς ρνγ. ἀνάπαλιν ἄρα ἡ λμ πρὸς αγ ἐλάττονα λόγον ἔχει, ἤπερ ρνγ πρὸς ͵δχογ ∠΄. καὶ ἐπεὶ ἡ λμ πολυγώνου ἐστὶ πλευρὰ τοῦ πλευρὰς ἔχοντος ϙϛ. ἡ περίμετρος ἄρα τοῦ πολυγώνου ἐστὶ Μ α ͵δχπη. ὁ γὰρ ϙϛ ἐπὶ τὸν ρνγ πολυπλασιαζόμενος τοῦτον ποιεῖ. ἡ περίμετρος ἄρα τοῦ πολυγώνου πρὸς τὴν αγ διάμετρον ἐλάττονα λόγον ἔχει, ἤπερ Μ α ͵δχπη πρὸς ͵δχογ ∠΄. ἡ περίμετρος ἄρα τοῦ πολυγώνου τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου ἐστὶ τριπλασία, καὶ ἔτι ὑπερέχει Μ ͵χξζ ∠΄. ταῦτα δὲ ἐλάττονα ἐστὶ τοῦ ἑβδόμου τῆς διαμέτρου μιᾶς μονάδος ἑβδόμῳ μέρει. τὰ γὰρ ἑπταπλάσια τῶν ͵χξζ ∠΄, ἅπερ ἐστὶ ͵δχογ ∠΄, ἐλάττονα ἐστὶ τῆς διαμέτρου Μ α. ἐπεὶ οὖν τὸ πολύγωνον ἔλαττόν ἐστιν ἢ τριπλάσιον, καὶ ἔτι ἑβδόμῳ ὑπερέχον. ἡ δὲ περίμετρος τοῦ κύκλου ἐλάσσων ἐστὶ τῆς τοῦ πολυγώνου. πολλῷ ἄρα ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια τῆς διαμέτρου ἐστὶ τριπλασία, καὶ ἔτι ὑπερέχει ἔλασσον ἢ ἑβδόμῳ μέρει.

ΕΙΣ ΤΟ Δ ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἑξῆς δὲ κατασκευάζων τὸ λοιπὸν μέρος τοῦ θεωρήματος φησί. ἔστω κύκλος περὶ διάμετρον τὴν αγ, καὶ τρίτου ὀρθῆς ἡ ὑπὸ βαγ. τοῦτο δὲ ἔσται, ἐὰν ἀπὸ τῆς γ τῇ τοῦ ἑξαγώνου ἴσην ἀπολαβόντες τὴν γβ ἐπιζεύξωμεν τὴν αβ. ἡ γὰρ ἐπὶ τῆς τοῦ ἑξαγώνου περιφερείας βεβηκυῖα γωνία πρὸς μὲν τῷ κέντρῳ διμοίρου ἐστὶν ὀρθῆς, πρὸς δὲ τῇ περιφερείᾳ τρίτου. ἐπεὶ οὖν ὀρθὴ ἐστὶν ἡ ὑπὸ αβγ, τρίτου δὲ ἡ ὑπὸ βαγ, διμοίρου ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ αγβ. ἐὰν ἄρα προσεκβάλλοντες τὴν γβ ἐπὶ τὸ β, καὶ ἴσην αὐτῇ ἀπολαβόντες ἀπὸ τοῦ α ἐπιζεύξωμεν, ἰσόπλευρον ἔσται τὸ τρίγωνον, καὶ διὰ τὸ τὴν αβ κάθετον διχοτομεῖν τὴν βάσιν, διπλῆ ἐστὶν ἡ αγ τῆς γβ. ἐὰν οὖν πάλιν λάβωμεν τὴν αγ, ͵αφξ ἔσται ἡ γβ, ψπ. καὶ τὸ μὲν ἀπὸ αγ ἔσται Μ σμγ ͵γχ. τὸ δὲ ἀπὸ γβ Μ ξ ͵θυ. καὶ ἐὰν ἀφέλωμεν τὸ ἀπὸ γβ ἀπὸ τοῦ αγ, λοιπὸν καταλειφθήσεται τὸ ἀπὸ αβ Μ ρπβ ͵εϛ, ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ ͵ατνα ἔγγιστα, περιττεύει γὰρ τὸ ἀπ' αὐτῆς τοῦ ἀ-

κριβοῦς

κριβοῦς Μ α. διό φησιν, ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἡ αβ πρὸς βγ, ἤπερ ͵ατνα πρὸς ψπ. οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται.

ἡ αγ ͵αφξ
ἐπὶ ͵αφξ
Μ ρ Μ ν Μ ϛ
Μ ν Μ κε Μ γ
Μ ϛ Μ γ ͵γχ
ὁμοῦ Μ σμγ ͵γχ
ἂν ἀφέλωμεν τὸ ἀπὸ βγ ἀπὸ τοῦ αγ, καταλείπονται Μ ρπβ ͵εϛ.

ἡ γβ ψπ
ἐπὶ ψπ
Μ μθ Μ ϛ
Μ ε ϛυ
ὁμοῦ Μ ξ ͵θυ

͵ατνα
ἐπὶ ͵ατνα
Μ ρ Μ λ Μ α
Μ λ Μ θ Μ α ͵ετ
Μ ε Μ α ͵εβφν
͵ατνα
ὁμοῦ Μ ρπβ ͵εϛα
περιττεύει τοῦ ἀκριβοῦς Μ α.

Τετμήσθω δίχα ἡ ὑπὸ βαγ τῇ αζη. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ βαη τῇ ὑπὸ ηγβ. ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς περιφερείας βεβήκασιν, ἀλλὰ καὶ τῇ ὑπὸ ηαγ καὶ ἡ ὑπὸ ηγβ ἄρα τῇ ὑπὸ ηαγ ἐστὶν ἴση. καὶ κοινὴ ἡ ὑπὸ αηγ ὀρθή. καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ηζγ λοιπῇ τῇ ὑπὸ αγη ἐστὶν ἴση. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ αηγ τρίγωνον τῷ γηζ τριγώνῳ. ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ αη πρὸς ηγ, ἡ γη πρὸς ηζ. καὶ ἡ αγ πρὸς γζ. τῶν γὰρ ἰσογωνίων τριγώνων ἀνάλογον εἰσὶν αἱ πλευραί, καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι. ἀλλ' ὡς ἡ αγ πρὸς γζ, συναμφότερος ἡ γα, αβ πρὸς γβ, καὶ ἡ αη πρὸς ηγ. ἐπεὶ γὰρ ἡ ὑπὸ βαγ γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς αζ, ἐστὶν ὡς ἡ βα πρὸς αγ, ἡ βζ πρὸς ζγ. καὶ συνθέντι ὡς συναμφότερος ἡ βα, αγ πρὸς αγ, ἡ βγ πρὸς γζ. καὶ ἐναλλὰξ ὡς συναμφότερος ἡ βα, αγ πρὸς βγ, ἡ αγ πρὸς γζ. καὶ ἔστιν ἡ μὲν αβ ἐλάσσων, ἢ ͵ατνα. ἡ δὲ αγ ͵αφξ, ἡ δὲ βγ, ψπ, συναμφότερος ἄρα ἡ αβ, βγ πρὸς βγ, ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵βϡια πρὸς ψπ. καὶ ἡ αγ ἄρα πρὸς γζ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵βϡια πρὸς ψπ. ὡς δὲ ἡ αγ πρὸς γζ, ἡ αη πρὸς ηγ, καὶ ἡ αη ἄρα πρὸς ηγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ͵βϡια πρὸς ψπ. διὰ δὴ ταῦτα, ἔσται τὸ μὲν ἀπὸ αη Μ ωμζ ͵γϡκα. τὸ δὲ ἀπὸ ηγ Μ ξ ͵θυ. καὶ ἔστιν αὐτοῖς ἴσον τὸ ἀπὸ αγ. ἐπεὶ αὐτὸ ἄρα ἔσται Μ ͵βτκα. ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ ͵γιγ ∠΄ δ΄ ἔγγιστα. ὑπερέχει γὰρ τὸ ἀπ' αὐτῆς τοῦ ἀκριβοῦς δυνάμεως Μ ͵τξη ις΄. διὰ ταῦτα οὖν φησίν, ὅτι ἡ αγ πρὸς γη ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ͵γιγ ∠΄ δ΄ πρὸς ψπ. οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται.

ἡ αη ͵βϡια
ἐπὶ ͵βϡια
Μ ν Μ ρπ Μ β ͵β
Μ ρπ Μ πα ͵θλ
Μ β ͵θρι
͵βϡια
ὁμοῦ Μ ωμζ ͵γϡκα

ἡ ηγ ψπ
ἐπὶ ψπ
Μ μθ Μ ϛ
Μ ε ϛυ
ὁμοῦ Μ ξ ͵θυ

͵γιγ ∠΄ δ΄
ἐπὶ ͵γιγ ∠΄ δ΄
Μ λ Μ γ ͵θαφψν
Μ γ ρλε β∠΄
͵θλθα ∠΄ ∠΄ δ΄
͵αφϛ ∠΄ δ΄ η΄
ψνγ δ΄ η΄ ις΄
ὁμοῦ Μ λη ͵βχωθ ις΄

τὰ ἀπὸ τῶν αη, ηγ ἐπὶ Μ ͵βτκα
ὑπερέχει τοῦ ἀκριβοῦς Μ ͵τξη ις΄

Δίχα ἡ ὑπὸ γαη τῇ αθ. διὰ δὴ τὴν διχοτομίαν τῆς γωνίας πρὸς τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων, καὶ ἀναλογίαν τῶν πλευρῶν. καὶ τὸ συνθέντι καὶ ἐναλλάξ, ἐστὶν ὡς συναμφότερος ἡ ηα, αγ πρὸς ηγ, ἡ αθ πρὸς θγ. καὶ ὑπόκειται ἡ μὲν αη ἐλάσσων ἢ ͵βϡια. ἡ δὲ αγ ἐλάσσων ἤπερ ͵γιγ ∠΄ δ΄. συναμφότερος ἄρα ἡ ηα, αγ ἐλάσσων ἐστὶν, ἢ ͵ελκδ ∠΄ δ΄. ἡ δὲ ηγ ἐστὶ ψπ. συναμφότερος ἄρα ἡ ηα, αγ πρὸς ηγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ͵ελκδ ∠΄ δ΄ πρὸς ψπ. ὥστε καὶ ἡ αθ πρὸς θγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵ελκδ ∠΄ δ΄ πρὸς ψπ. ὥστε ἡ αθ πρὸς θγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵αρνε ∠΄ δ΄ πρὸς ρξ. ἑκάτερα γὰρ ἑκατέρας ἐστὶ μέρος ιγ. ἐπὶ τὰ τούτων τετραπλάσια, ἡ αθ πρὸς θγ, ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵αωκγ πρὸς σμ. διὰ τοῦτο γὰρ φησίν, ὅτι ἑκάτερα ἑκατέρας ἐστὶ δ΄ ιγ. καὶ ἐπεὶ ἡ αθ ἐστὶν ͵αωκγ. τὸ ἄρα ἀπ' αὐτῆς ἐστὶ Μ τλβ ͵γτκθ. ἔστι δὲ καὶ ἡ θγ σμ. ἐπὶ τὸ ἀπ' αὐτῆς Μ ε ͵ζϡ. ἐπὶ ἔστι τοῖς ἀπὸ αθ, θγ ἴσον τὸ ἀπὸ αγ. ἔσται ἄρα Μ τλη ͵γλκθ. ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ ͵αωλη θ΄ ια΄. τὸ γὰρ ἀπ' αὐτῆς ὑπερέχει τοῦ ἀκριβοῦς Μ ͵τκα ἔγγιστα. ὥστε ἡ αγ πρὸς θγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵αωλη θ΄ ια΄ πρὸς σμ. οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται.

ἡ αθ ͵αωκγ ἡ θγ σμ ͵αωλη θ΄ ια΄

ὑπὸ αωκγ
Μ Μ Μ γ
Μ Μ Μ ͵ϛϡ
Μ Μ, ͵ϛυξ
γ βυξθ
Μ γτκθ.
τούτοις ἴσον τὸ ᾱ ᾱγ
Μ λκθ ἐστί

ὑπὸ ͵γσμ
Μ
ηαχ
Μ ͵ζχ

ὑπὸ αωληθ' ια
Μ Μ Μ ηριαθ' < ια
Μ Μ Μ ασῡτη Μ οβ η.
Μ Μ, δλςμγγ β ια
η ϛυςμξδ
ϱιαθ' πηγγγ ηπαςθ
ϲιαοβηα.
η αἰηϛθγκα
ασγαγορεγγυϲ.
ὑπερέχει ἄρα τοῦ ἀκριβοῦς Μ.
τκαέγγυς

Ετι δίχα ἡ ὑπὸ θᾱγ γωνία τῇ κα. πάλιν οὖν διὰ τὴν διχοτομίαν τῆς γωνίας καὶ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων καὶ τὴν ἀναλογίαν τῶν πλευρῶν, καὶ τὸ συνθεῖναι καὶ ἐναλλὰξ ἐστὶν ὡς συναμφότερος ἡ θᾱ α γ πρὸς γθ, ἡ ακ πρὸς κγ. ἀλλὰ συναμφότερος ἡ θᾱ, αγ ἐλάσσων ἐστὶν ἢ γχξ αθ ια. ἐπειδὴ ἡ Μ θ α ὑπόκειται αωκγ. ἡ δὲ αγ αωληθ' ια. ἔτι δὲ καὶ ἡ θγ γσμ. συναμφότερος ἄρα ἡ θα, αγ πρὸς θγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ γχξ αθ ια πρὸς σμ. καὶ ὑπὸ τῆς Μ γχξ αθ ια τὸ ια ὠκ ἐστι ᾱζ.τ σμ,ξ καὶ ἡ ακ ἄρα πρὸς κγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ αζ πρὸς ξς. καὶ ἐστὶ τὸ Μ ἀπὸ ακ Μ λμθ. τὸ δὲ ἀπὸ κγ δτνς. οἷς ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ αγ ἐστὶ Μ νυς. ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ αθς ἔγγιστα. ἡ αγ ἄρα πρὸς γκ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ αθς πρὸς ξς. οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται.

ἡ ακ αζ
ὑπὸ αζ
Μ ζ
ζμθ
Μ λμθ. δτνς.
Τούτοις ἴσον τὸ ᾱ αγ ἐστὶ Μ νυς

ἡ κγ ξς
ὑπὸ ξς
γχτξ
τξλς
δτνς.

αθς
ὑπὸ αθς
Μ θϱξς < ς
θπαας
ϱξςζ.ς.αγλς
Μ νυιζ.γ.λς.
ὑπερέχει τοῦ ἀκριβοῦς Μ ιβ.γ λς.

Ετι δίχα ἡ ὑπὸ καγ γωνία τῇ αλ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἐστὶν ὡς συναμφότερος ἡ κα, αγ πρὸς κγ, ἡ αλ πρὸς λγ. καὶ ἔστιν ἡ μὲν ακ ἐλάσσων ἢ αζ. ἡ δὲ αγ ἐλάσσων ἢ αθς. ἡ δὲ κγ, ξς. συναμφότερος ἄρα ἡ κα, αγ πρὸς κγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ βις,ς πρὸς ξς. καὶ ἡ αλ ἄρα πρὸς λγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ βις,ς πρὸς ξς. καὶ ἐπεὶ ἡ αλ ὑπόκειται βισς. καὶ τὸ ἀπ' αὐτῆς Μ δλκηλς. ἡ δὲ λγ, ξς. καὶ τὸ ἀπ' αὐτῆς δτνς. ἴσον δὲ αὐτοῖς ἐστὶ τὸ ἀπὸ αγ. ἔσται ἄρα Μ θϲ πδλς. ὧν πλευρὰ τετραγωνική ἐστι βιζδ' ἔγγιστα. ὑπερέχει τὸ ἀπ' αὐτῆς τοῦ ἀκριβοῦς Μ ιγς κ. ὥστε ἡ αγ πρὸς γλ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ βιζδ' πρὸς ξς. οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται.

ἡ αλ βισς'
ὑπὸ βισς'
Μ Μ Μ, βτλϱγ'
Μ ϱξα < ς'
Μ βξλςα
τλγγ α < ς' αλς
Μ δλκηλς'
τούτοις ἴσον τὸ ᾱ αγ ἐστὶ
Μ θϲπδλς.

ἡ λγ ξς
ὑπὸ ξς
γχτξ
τξλς
δτνς

βιζδ'
ὑπὸ βιζδ'
Μ Μ Μ δφ
Μ ϱοβ <
Μ δομθ α < δ'
φβ < α < δ' ις
θϲϛζ < ις
περιέχει τοῦ ἀκριβοῦς
Μ ιγ < κ

Ἐπεὶ οὖν ἡ αγ πρὸς γλ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ βιζδ' πρὸς ξς. ἀνάπαλιν ἄρα ἡ λγ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ξς πρὸς ξς πρὸς βιζδ'. καὶ ἐπεὶ ἡ γβ περιφέρεια ἕκτον ἐστὶ τοῦ κύκλου. ἡ κγ ἄρα ιβ μέρος ἐστίν, ἡ δὲ θγ, κδ. ἡ δὲ κγ, μη. ἡ δὲ λγ, ϙς. ὥστε ἡ λγ εὐθεῖα πολυγώνου ἐστὶ πλευρὰ ϙς πλευρὰς ἔχοντος, καὶ ἐστὶν ἡ λγ, ξς. ἡ ἄρα τοῦ πολυγώνου περίμετρος πρὸς τὴν τοῦ κύκλου διάμετρον μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ϛτλς πρὸς βιζδ'. ταῦτα δὲ ἐστὶ τριπλάσια. καὶ ἔτι ὑπερέχει ϲπδ

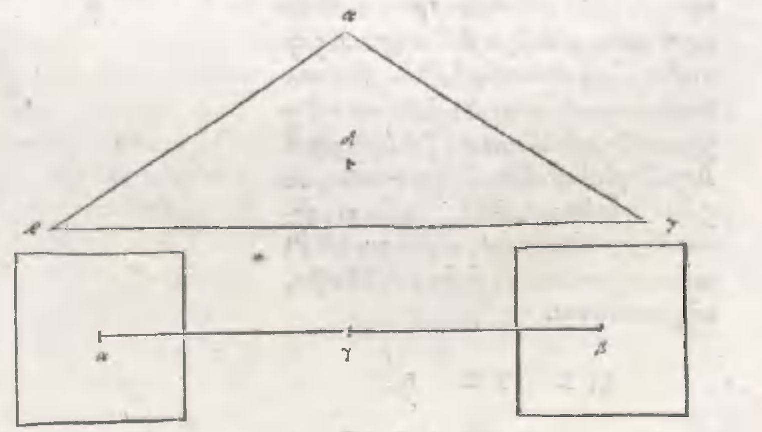
δ

δ, ἅπερ ἐλάττονα ἐστὶ δέκα ἑβδομηκοστομόνων, ὅ ἐστι Μ, κζ < ς ἔγγιστα. τὰ δὲ δεκαπλάσια τούτων ϲοζ. πολλῷ ἄρα ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια μείζων ἐστὶν ἢ τριπλάσια, καὶ δέκα ἑβδομηκοστόμονα. ὡς μὲν οὖν ἐνεχώρει οἱ παρ' αὐτοῦ εἰρημένοι ἀριθμοί, μετρίως ἐσαφηνίσθησαν. ἱστέον δὲ ὅτι καὶ ἀπολλώνιος ὁ περγαῖος ἐν τῷ ὠκυτοκίῳ ἀπέδειξεν αὐτὸ δι' ἀριθμῶν ἑτέρων ἐπὶ τὸ σύνεγγυς μᾶλλον ἀγαγών. τοῦτο δὲ ἀκριβέστερον μὲν εἶναι δοκεῖ, οὐ χρήσιμον δὲ πρὸς τὸν ἀρχιμήδους σκοπόν. ἔφαμεν γὰρ αὐτὸν σκοπὸν ἔχειν ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ τὸ σύνεγγυς εὑρεῖν, διὰ τὰς ἐν τῷ βίῳ χρείας, ὥστε οὐδὲ πορφύριος ὁ νικαεὺς δίκαιον εὑρεθήσεται, μέμψιν ἐπάγων ἀρχιμήδει, ὡς μὴ ἀκριβῶς εὑρόντι ποίᾳ εὐθείᾳ ἴση ἐστὶν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια, ἐξ ὧν αὐτὸς ἐν τοῖς κηρίοις φησί, τὸν ἑαυτοῦ διδάσκαλον φίλωνα λέγων, τὸν ἀπὸ γαδάρων εἰς ἀκριβεστέρους ἀριθμοὺς ἀγαγεῖν τῶν ὑπ' ἀρχιμήδους εἰρημένων, τοῦ τε ζ' φημὶ καὶ τῶν ιθ'. ἅπαντες γὰρ ἐφεξῆς φαίνονται, τὸν σκοπὸν αὐτοῦ ἠγνοηκότες. κέχρηνται δὲ καὶ τοῖς τῶν μυριάδων πολλαπλασιασμοῖς καὶ μερισμοῖς, οἷς οὐκ εὔκολον παρακολουθεῖν, τὸν μὴ διὰ τῶν μάγνου λογιστικῶν ἠγμένον. εἰ δέ τις ὅλως ἐβούλετο εἰς ἔλαττον αὐτὸ καταγαγεῖν, ἐχρῆν τοῖς ἐν τῇ μαθηματικῇ συντάξει τοῦ κλαυδίου πτολεμαίου εἰρημένοις ἀκολουθοῦντα, διὰ τῶν μοιρῶν καὶ λεπτῶν καὶ τῶν ἐν τῷ κύκλῳ εὐθειῶν τοῦτο ποιεῖν. καὶ πεποιήκειν ἂν ἐγὼ τοῦτο, εἰ μὴ ὅπερ πολλάκις εἶπον ἐγίνωσκον, ὡς οὔτε ἀκριβῶς δυνατὸν διὰ τῶν ἐνταῦθα εἰρημένων εὑρεῖν τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ ἴσην εὐθεῖαν. καὶ εἴ τις τὸ σύνεγγυς καὶ παρὰ μικρὸν προσέχοι, ἀρκεῖ τὰ ὑπ' ἀρχιμήδους ἐνταῦθα εἰρημένα.

ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΑΣΚΑΛΩΝΙΤΟΥ ΥΠΟΜΝΗΜΑ ΕΙΣ ΤΗΝ ΑΡΧΙΜΗδους τοῦ κύκλου μέτρησιν ἐκδόσεως παραναγνωσθείσης τῷ μιλησίῳ μηχανικῷ ἰσιδώρῳ τῷ ἡμετέρῳ διδασκάλῳ.

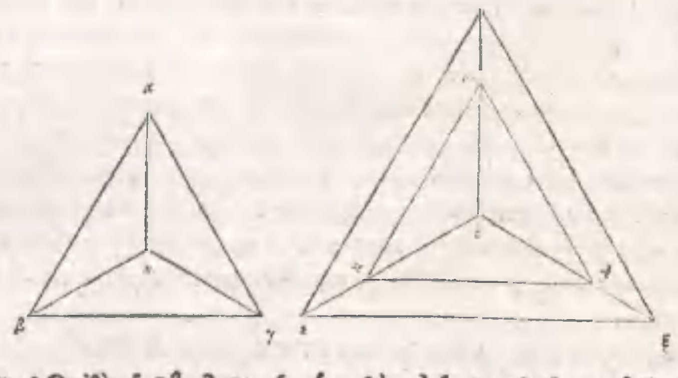
ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΕΙΣ ΤΟ Α ΤΩΝ ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΚΩΝ.

ΤΗΝ ῥοπὴν, ὦ γενναιότατε πέτρε, κοινὸν εἶναι γένος βαρύτητος καὶ κουφότητος, ἀριστοτέλης τε λέγει, καὶ πτολεμαῖος τούτῳ ἀκολουθῶν. ὁ δέ γε παρὰ πλάτωνι τίμαιος πᾶσαν ῥοπὴν ἀπὸ βαρύτητος λέγει γίνεσθαι. τὴν γὰρ κουφότητα στέρησιν νομίζει, ὧν ἔξεστι τὰς δόξας τοῖς φιλομαθέσι ἀναλέγεσθαι, ἔκ τε τοῦ περὶ ῥοπῶν βιβλίου τῷ πτολεμαίῳ συγγεγραμμένου, καὶ ἐκ τῶν ἀριστοτέλους φυσικῶν πραγματειῶν, καὶ ἐκ τοῦ πλάτωνος τιμαίου, καὶ τῶν ταῦτα ὑπομνηματισάντων. ὁ δὲ ἀρχιμήδης ἐν τούτῳ τῷ βιβλίῳ κέντρον ῥοπῆς ἐπιπέδου σχήματος νομίζει, ἀφ' οὗ ἀρτώμενον παράλληλον μένει τῷ ὁρίζοντι. δύο δὲ ἢ πλειόνων ἐπιπέδων κέντρον ῥοπῆς, ἤτοι βάρους, ἀφ' οὗ ἀρτώμενος ὁ ζυγὸς παράλληλός ἐστι τῷ ὁρίζοντι, οἷον ἔστω τρίγωνον τὸ αβγ, καὶ ἐν τῷ μέσῳ αὐτοῦ σημεῖόν τι τὸ δ, ἀφ' οὗ ἀρτώμενον παράλληλον μένει τῷ ὁρίζοντι. δῆλον οὖν ὅτι ἰσορροπήσει τὰ αβγ μέρη ἑαυτοῖς, καὶ οὐδ' ἕτερον τοῦ ἑτέρου, μᾶλλον ῥέψει ἐπὶ τὸν ὁρίζοντα. ὁμοίως δὲ καὶ ζυγοῦ ὄντος τοῦ α, β, καὶ ἀπηρτημένων ἐξ αὐτοῦ τῶν α, β μεγεθῶν,

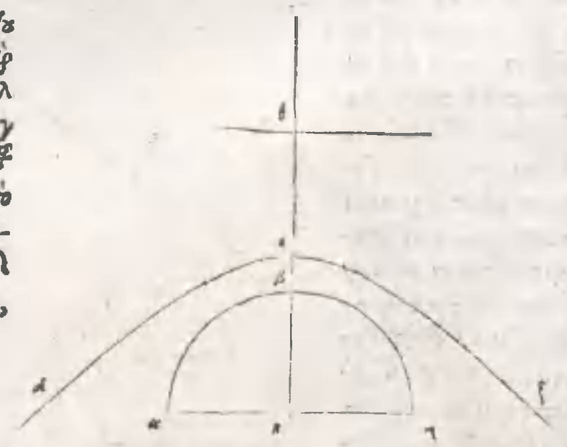


ἐὰν ἀρτώμενος ὁ ζυγὸς ἀπὸ τοῦ γ ἰσορροποῦντα ἔχει τὰ α, β μέρη, παράλληλος μένει τῷ ὁρίζοντι, καὶ ἔσται κέντρον τῆς ἀρτήσεως τῶν α, β μεγεθῶν τὸ γ.

Καλῶς δὲ δοκεῖ ὁ γεμῖνος εἰπεῖν περὶ τοῦ ἀρχιμήδους, ὅτι τὰ ἀξιώματα αἰτήματα λέγει. τὰ γὰρ ἴσα βάρη ἀπὸ ἴσων μήκων, ἰσορροπεῖν ἀξίωμά ἐστι, καὶ τὰ ἑξῆς. καὶ ἔστι πάντα σαφῆ τοῖς μετρίως αὐτὰ ἐπισκεμμένοις. τῶν δὲ ἴσων καὶ ὁμοίων φησὶν ἐπιπέδων σχημάτων ἐφαρμοζομένων ἐπ᾽ ἄλληλα, καὶ τὰ κέντρα τῶν βαρῶν ἐφαρμόζει ἐπ᾽ ἄλληλα. πάντα γὰρ τὰ μέρη αὐτῶν πᾶσιν ἐφαρμόζει. τῶν δὲ ἀνίσων, ὁμοίων δὲ, τὰ κέντρα τῶν βαρῶν, ὁμοίως ἔσται κείμενα. νοείσθω δὲ ὡς ἐπὶ τῆς ὑποκειμένης καταγραφῆς τὰ αβγ, δεζ τρίγωνα ἄνισα καὶ ὅμοια, κέντρον δὲ βάρους τοῦ μὲν αβγ τὸ η, τοῦ δὲ δεζ τὸ θ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αη, ηγ, βη, δθ, θε, θζ. λέγω ὅτι εἰς ἴσα διαιροῦσι τὰς γωνίας αἱ ἀπὸ τῶν η θ σημείων ἐπιζευχθεῖσαι. γινέσθω γὰρ ὡς ἡ εζ πρὸς βγ, οὕτως ἡ εθ πρὸς καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ θα, καὶ ἡ ζθ πρὸς θλ. καὶ ἡ δθ πρὸς θμ. μκ, κλ, λμ. ἔσται δὴ ὅμοιον τὸ κλμ τρίγωνον, τῷ δεζ τριγώνῳ. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ εθ πρὸς θκ, ἡ θζ πρὸς θλ, παράλληλός ἐστιν ἡ εζ τῇ κλ. ὁμοίως δὴ καὶ ἡ μκ τῇ δε, καὶ ἡ λμ τῇ δζ. ὅμοιον ἄρα τὸ δεζ τρίγωνον τῷ κλμ τριγώνῳ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ δε πρὸς μκ, ἡ εζ πρὸς κλ, καὶ ἡ δζ πρὸς μλ. ὑπόκειται δὲ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν αβγ, δεζ τριγώνων, ὡς ἡ δε πρὸς αβ, ἡ βγ πρὸς εζ, καὶ ἡ δζ πρὸς αγ. ἴσαι ἄρα εἰσὶν αἱ αβγ ταῖς μκλ. ὥστε ἐφαρμόζει ἑκάστη ἐπὶ ἑκάστην. ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ αβγ τρίγωνον τῷ κμλ τριγώνῳ. ὥστε καὶ ἐφαρμόσει τὸ κέντρον τοῦ αβγ ἐπὶ τὸ τοῦ μκλ. τοῦ δὲ η ἐπὶ τὸ θ ἐφαρμόζοντος, καὶ τῶν αβγ ἐπὶ τὰς μκλ, ἐφαρμόσουσιν καὶ αἱ αη, βη, γη, ἐπὶ τὰς μθ, κθ, λθ, καὶ ἴσας ποιήσουσιν γωνίας πρὸς τοῖς μκλ ταῖς ἐν τῷ αβγ τριγώνῳ, ὥστε καὶ ἐν τῷ δεζ. αἱ αὐταὶ γάρ εἰσιν εὐθεῖαι ἀπὸ τοῦ θ ἐπί τε τὰ μκλ, καὶ ἐπὶ τὰ δεζ ἐπιζευγνύμεναι.



Παντὸς σχήματος οὗ ἂν ἡ περίμετρος ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλα ᾖ, τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐντὸς εἶναι δεῖ τοῦ σχήματος. τίνας καλεῖ τὰς ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλας γραμμὰς, εἴρηται ἡμῖν σαφῶς ἐν τοῖς προειρημένοις τοῦ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου. ἐπειδὴ δὲ τὸ σχῆμα τὸ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλην ἔχον τὴν περίμετρον, πάντα τὰ μέρη τοῦ ἐπιπέδου ἐντὸς ἔχει καὶ τὰς γωνίας, δῆλον ὅτι καὶ τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐντὸς ἔχει τοῦ σχήματος. ἐπὶ γὰρ τινῶν σχημάτων τὸ κέντρον τοῦ σχήματος ἐκτός ἐστι, καὶ ἐπὶ τῆς περιμέτρου. ἐπὶ μὲν γὰρ τοῦ αβ ἡμικυκλίου κέντρον τοῦ σχήματος ἐστὶ τὸ η, ἐπὶ δὲ τῆς δεζ ὑπερβολῆς τὸ κέντρον τοῦ σχήματος ἐκτός ἐστι, καθ᾽ ὃ αἱ διάμετροι συμπίπτουσιν ἀλλήλαις, ὡς ἔχει τὸ θ. εἴρηται γὰρ ταῦτα ἐν τῷ δευτέρῳ βιβλίῳ τῶν ἀπολλωνίου κωνικῶν. ὅμως δὲ καὶ ἐπὶ τοῦ αβγ σχήματος, καὶ ἐπὶ τοῦ δεζ τὸ κέντρον τοῦ βάρους, ἀφ᾽ οὗ δῆλον ὅτι ἀρτώμενον τὸ σχῆμα παράλληλόν ἐστι τῷ ὁρίζοντι, ἐντός ἐστι τῆς περιμέτρου. εἰ γὰρ ἔσται ἐπὶ τῆς περιμέτρου, ἢ ἐκτὸς ῥέψει ἐπὶ θάτερα, οὐχ ὑπόκειται.



ΕΙΣ ΤΟ Β.

Κέντρον τοῦ βάρους τὸ δ εἰ δυνατόν. ὅτι γάρ ἐστιν ἐπὶ τῆς αβ, δέδεικται. εἴρηται γὰρ ἀνωτέρω, ὅτι δύο μεγεθῶν κέντρον ἐστὶν, ἀφ᾽ οὗ ἀρτώμενος ὁ ζυγὸς ἰσορροποῦντα ἔχει τὰ μέρη, παράλληλος μένων τῷ ὁρίζοντι. ὥστε ὂν ἐπὶ τῆς αβ ἐστὶ τὸ κέντρον τῶν αβ μεγεθῶν.

ΕΙΣ ΤΟ Ε.

Ἤτοι μεῖζόν ἐστι τὸ αβ τοῦ γ, ὥστε ἰσορροπεῖν, ἢ οὔ. τοῦτο τὸ ῥητὸν δεῖ ἀκούειν, οὐχ ὡς μείζονος ὑπάρχοντος πάντως τοῦ αβ μεγέθους τοῦ γ, ἀλλὰ μείζονος ὑποκειμένου, ἢ κατὰ τὴν ἰσορροπίαν. δυνατὸν γάρ ἐστι καὶ ἔλαττον μέγεθος τοῦ μείζονος μείζονα ἔχειν τὴν ῥοπὴν διὰ τὸ μῆκος τοῦ ζυγοῦ, μεῖζον ὂν πάνυ καὶ ἄνισον ποιοῦν τὸν λόγον. ὥστε καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ αβ ἔλασσον τῆς ὑπεροχῆς, ᾧ μεῖζόν ἐστι τὸ αβ τοῦ γ, ὥστε ἰσορροπεῖν, ὥστε λοιπὸν τὸ α σύμμετρον εἶναι τῷ γ. δεῖ φησὶν ἀφελεῖν ἀπὸ τοῦ αβ μεγέθους τι τὸ β, ὃ ποιεῖ λοιπὸν τὸ α, τῷ γ σύμμετρον, καὶ μεῖζον τὸ α τοῦ γ ἢ κατὰ τὴν ἰσορροπίαν. τοῦτο δὲ δυνατὸν ποιεῖν, διὰ τῶν ἐν τῇ ἀρχῇ τοῦ δεκάτου τῆς στοιχειώσεως εὐκλείδου εἰρημένων, καὶ ἐν τῷ τρίτῳ τῶν θεοδοσίου σφαιρικῶν.

ΕΙΣ ΤΟ ΑΙ.

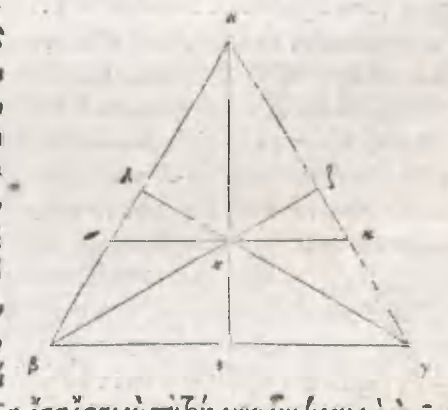
Καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ εζ, ηκ, λμ. παράλληλοι ἔσονται δὴ αὗται παρὰ τὴν βγ. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ βο τῇ ψγ, καὶ ἡ δβ τῇ δγ. ἔσται ὡς ἡ δβ πρὸς οβ, ἡ δγ πρὸς ψγ. καὶ διελόντι ὡς ἡ δο πρὸς οβ, ἡ δψ πρὸς ψγ, ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ δο πρὸς οβ, ἡ αε πρὸς εβ. ἡ γὰρ εο παρὰ τὴν αδ ἐστίν. ὡς δὲ ἡ δψ πρὸς ψγ, ἡ αζ πρὸς ζγ. καὶ ὡς ἄρα ἡ αε πρὸς εβ, ἡ αζ πρὸς ζγ. παράλληλος ἐστὶν ἄρα ἡ εζ τῇ βγ. ὁμοίως δὴ δειχθήσονται καὶ αἱ λοιπαί. τὸ δὴ αδγ ποτὶ πάντα τὰ τρίγωνα τὰ ἀπὸ τῶν αμ, μκ, κζ, ζγ ἀναγεγραμμένα, ὅμοια τῷ αδγ, τὸν αὐτὸν ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ γα πρὸς αμ, διὰ τὸ ἴσας εἶναι τὰς εὐθείας. ἐπεὶ γὰρ ὅμοιά ἐστι τὰ αδγ ασμ τρίγωνα, πρὸς ἄλληλα, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ αγ πρὸς αμ. ἐπεὶ δὲ νῦν ὑπόκειται, ἡ αγ τῆς αμ τετραπλασίων τὸ αδγ τρίγωνον πρὸς τὸ ασμ λόγον ἔχει, ὃν ις πρὸς ἕν. πρὸς δὲ πάντα τὰ τρίγωνα, τὰ ἀπὸ αμ, μκ, κζ λόγον ἔχει ὃν ις πρὸς τέσσαρα. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ αβγ τρίγωνον πρὸς τὰ τρίγωνα τὰ ἀπὸ τῶν αμ, μκ, κζ, ζγ, ὅμοια τῷ αδγ, οὕτως αὐτὰ τρίγωνα πρὸς τὸ ασμ, τουτέστιν ἡ γα πρὸς αμ. ὅμοια γάρ εἰσι καὶ ἐπὶ ἴσων βάσεων, καὶ διὰ τὸ ἴσα, καὶ εἰσὶ πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις. ἀλλὰ ἡ γα πρὸς αμ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ φρ πρὸς ρθ. ὁ γὰρ τῆς αγ πρὸς αμ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς φρ πρὸς ρω. εἰ γὰρ νοήσειας ἐκβεβλημένας τὰς ρφ, γδ, καὶ συμπιπτούσας διὰ τὰς παραλλήλους, ἔσται ὡς ἡ φρ πρὸς ρω, ἡ γδ πρὸς δω. ἀλλ᾽ ὡς ἡ γδ πρὸς δω, ἡ γα πρὸς αμ. καὶ ὡς ἄρα ἡ γα πρὸς αμ, ἡ φρ πρὸς ρω. ἡ δὲ φρ πρὸς ρω μείζονα ἔχει λόγον, ἤπερ ἡ φρ πρὸς ρθ. καὶ ἡ γα ἄρα πρὸς αμ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ φρ πρὸς ρθ. ὅπερ ἀδύνατον. τὰς γὰρ διὰ τοῦ χ εὐθείας παρὰ τὴν δα ἀγομένας ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἔσεσθαι πάντα τὰ κέντρα. τουτέστιν ἐπὶ θάτερον μέρος, καὶ ῥέψει δῆλον ὅτι ἐπ᾽ ἐκεῖνο πάντα τὰ μεγέθη, καὶ οὐκ ἰσορροπήσει, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται. ὑπόκειται γὰρ κέντρον τῶν μὲν παραλληλογράμμων τὸ ρ, τῶν δὲ τριγώνων τὸ χ.

ΕΙΣ ΤΟ ΑΛΛΩΣ ΤΟΥ ΓΑ.

Ὁμοίως γὰρ ἐν τοῖς κείμενα τὰ θκ, λε τοῖς τριγώνοις. αἵ τε γὰρ αθ, εκ ζα παράλληλοι οὖσαι ὁμοίως διαιροῦσι τὰς γωνίας, καὶ αἱ θλγ, θκβ αἱ αὐταί εἰσι, ἐν πᾶσι τοῖς τριγώνοις, καὶ λοιπαὶ αἱ κδ, δλ.

ΕΙΣ ΤΟ ΙΓ.

Ἐὰν γὰρ ἐκβάλῃς τὰς γδη, ζεη, βαη, δῆλον ὅτι ἐπὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον ἔρχονται. ἐκβεβλήσθωσαν γὰρ τῶν βαη, ζεη, καὶ συμπιπτέτωσαν ἀλλήλαις κατὰ τὸ η. καὶ ἡ βδ ἐκβαλλομένη ἐν τῷ αὐτῷ πεσεῖται. ἔστι δὲ ὡς ἡ βη πρὸς ηα, ἡ ζη πρὸς ηε, καὶ ἡ βζ πρὸς αε, καὶ ἡ ζγ πρὸς εδ. καὶ ἐναλλὰξ δὴ ἡ δη πρὸς δς. ἔσται δὴ τοῦ μὲν βδγ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρους ἐπὶ τὰς θμ. ἐπειδήπερ τρίτον μέρος αβθ τὰς βδ. ἔστω τρίγωνον τὸ αβγ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν ἀπὸ τῶν γωνιῶν ἐπὶ τὰς διχοτομίας τῶν πλευρῶν αἱ αε, βζ, γδ. κέντρον ἄρα ἐστὶ τοῦ βάρους τοῦ αβγ τριγώνου τὸ η. καὶ φανερὸν ὅτι πάντα τὰ τρίγωνα ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις. καὶ ὅτι αἱ ἐπὶ τὰς διχοτομίας τῶν πλευρῶν ἐπιζευγνύμεναι διὰ τοῦ η ἔρχονται. ἵνα μὴ τοῦ αὐτοῦ πλείονα κέντρα ᾖ. ἐπεὶ δὲ ἴσαι αἱ αδ, δβ, βε, εγ, γζ, ζα, ἴσα ἔσται καὶ τὰ τρίγωνα ὧν κορυφὴ τὸ η ση



μέσον, βάσις δὲ αἱ εἰρημέναι εὐθεῖαι. ὥστε διπλάσιόν ἐστι τὸ α β γ τρίγωνον, τοῦ α β ε τριγώνου, ὥστε καὶ ἡ α η τῆς η ε. ἐὰν διὰ τοῦ η παρὰ τὴν β γ ἀγάγωμεν τὴν θ κ διπλασία ἐστὶν ἡ α θ τῆς θ β, ὥστε καθόλου ἐὰν μία πλευρὰ τριγώνου τμηθῇ, ὥστε τὸ πρὸς τῇ κορυφῇ μέρος διπλάσιον εἶναι τοῦ πρὸς τῇ βάσει, καὶ διὰ τοῦ ληφθέντος σημείου παράλληλος ἀχθῇ τῇ βάσει ἐπὶ τῆς ἀχθείσης ἔσται τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ τριγώνου.

ΤΩΝ ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΕΙΣ ΤΟ ΠΡΩΤΟΝ βιβλίον τέλος.

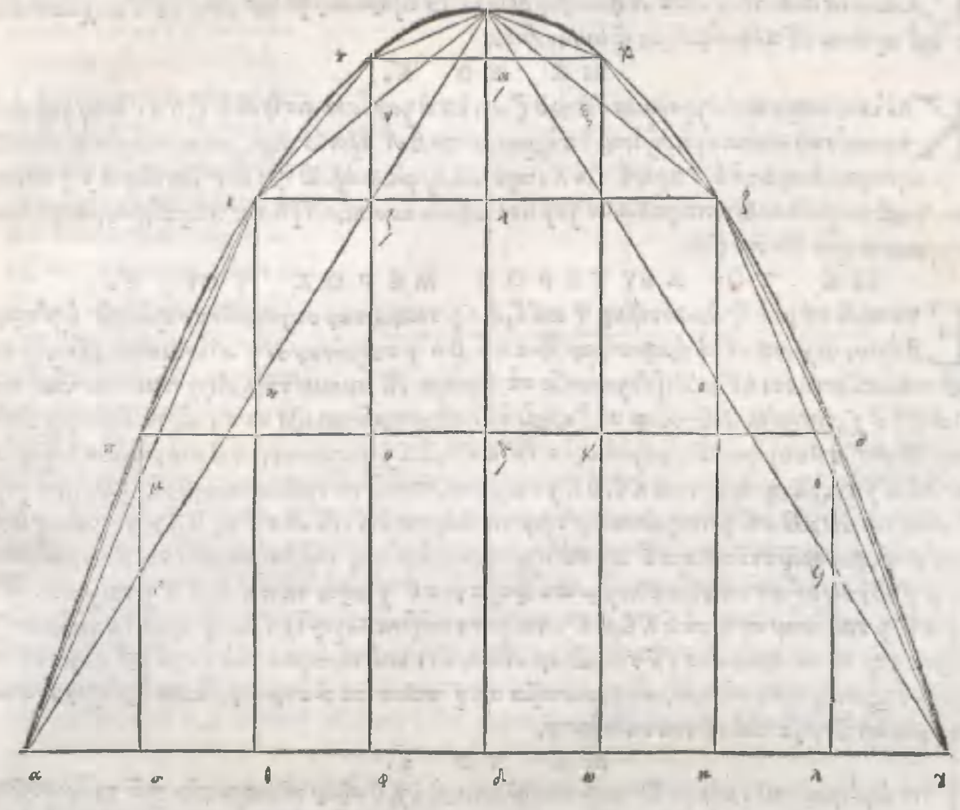
ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΕΙΣ ΤΟ Β ΤΩΝ ΙΣΟΡΡΟΠΙΚΩΝ ΑΡΧΙμήδους.

ΑΚΡΙΒΩΣ ἐπεξελθόντες τῷ πρώτῳ, καὶ σαφηνίσαντες τὰ ἐν αὐτῷ δυσθεώρητα, ἀναγκαῖον ἡγούμεθα καὶ τὰ ἐν τῷ δευτέρῳ δυσχερῶς εἰρημένα μετρίως ἐκθέσθαι. φησὶ τοίνυν ἐν τῇ προτάσει τοῦ πρώτου θεωρήματος, ὑποκείσθω τὰ α β, γ δ χωρία περιεχόμενα ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς, ἃ δυνάμεθα παρὰ τὰν δοθεῖσαν παραβαλεῖν. τὸ δὲ αὐτόθεν μὲν διὰ τῶν ἐνταῦθα δεδειγμένων οὐκ ἔστιν εὑρεῖν. ἐπεὶ δὲ δέδεικται αὐτῷ, ὡς ἐν τῷ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου εἴπῃ, ὅτι τὸ τοιοῦτον σχῆμα ἐπίτριτόν ἐστι τριγώνου τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ καὶ ὕψος ἴσον. τῷ δὲ ἐπιτρίτῳ τοῦ τριγώνου ἐπιπέδῳ εὐθυγράμμῳ ὄντι, δυνάμεθα ἴσον παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν παραβαλεῖν. φανερὸν ὅτι καὶ τοῖς τοιούτοις σχήμασι, τὰ δὲ ἐν τῇ κατασκευῇ εἰρημένα ἅπαντα δῆλα ἐστὶ διὰ τοῦ τετάρτου θεωρήματος τοῦ πρώτου τούτων τῶν βιβλίων.

ΕΙΣ ΤΟ Β.

ΤΟῦ δευτέρου θεωρήματος προλέγει τινά, δηλοῦντα πῶς δυνατὸν ἐν τῇ τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομῇ σχῆμα γνωρίμως ἐγγράφεσθαι, καί φησι ταῦτα δεικτέον ἐν ταῖς τάξεσιν. ἐπειδὴ οὖν ἀσαφές ἐστι τὸ λεγόμενον, ἀναγκαῖον εἰπεῖν βραχέα περὶ αὐτοῦ ἐκ τῶν ἀπολλωνίου κωνικῶν εὑρεθέντα. ἔστω σχῆμα περιεχόμενον ὑπὸ παραβολῆς τῆς α β γ, καὶ εὐθείας τῆς α γ, οὗ διάμετρος ἔστω ἡ β δ. φανερὸν δὴ ὅτι κορυφή ἐστι τοῦ τμήματος τὸ β σημεῖον. κορυφὰς γὰρ ἐκάλει τῶν γραμμῶν ὁ ἀπολλώνιος τὰ πρὸς ταῖς γραμμαῖς πέρατα τῶν διαμέτρων. ἐὰν δὴ ἐπιζεύξωμεν τὰς α β, β γ, ἔσται τὸ ἀπὸ α β γ τρίγωνον τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχον τῷ τμήματι, καὶ ὕψος ἴσον τὴν ἀπὸ τοῦ β ἐπὶ τὴν α β κάθετον ἀγομένην. οὕτως γὰρ πάντως ἄξων ἐστὶν ἡ β δ. ἐὰν δὴ λαβόντες τὰς κορυφὰς τῶν α β, β γ τμημάτων τὰς ε, ζ διʼ αὐτῶν παραλλήλους ἀγάγωμεν τῇ β δ, ὡς τὰς ε η, ζ ἔσονται αὗται διάμετροι τῶν α β, β γ τμημάτων. δέδεικται γὰρ ἐπὶ τῆς παραβολῆς, ὅτι πᾶσαι αἱ παρὰ τὴν διάμετρον ἀγόμεναι διάμετροι εἰσὶ τῆς τομῆς, ἔσονται δὴ τὰ ε, ζ κορυφαὶ τῶν τμημάτων, καὶ αἱ διὰ τῶν ε, ζ ἐφαπτόμεναι παράλληλοι ταῖς α β, β γ. ἔσται δὴ καὶ ἡ ε λ ζ παρὰ τὴν α β γ. ἐπειδὴ αἱ ε θ, ζ κ παράλληλοι εἰσὶ καὶ ἴσαι, διάμετροι οὖσαι τῶν ἴσων τμημάτων, καὶ ἐφαρμόζουσαι ἀλλήλαις ὡς ἐν τῷ ς τῶν κωνικῶν δέδεικται. καὶ ἐπεὶ ἡ ε θ η παράλληλός ἐστι τῇ β δ, ἐστὶν ὡς ἡ β η πρὸς η α, ἡ δ θ πρὸς θ α. ἴση δὲ ἡ η β τῇ α η. δίχα γὰρ αὐτὴν τέμνει ἡ ε η διάμετρος παράλληλον οὖσαν τῇ ἐφαπτομένῃ. ἴση ἄρα καὶ ἡ δ θ τῇ θ α, διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ δ κ τῇ κ γ ἴση ἐστί. ἴση δὲ ὅλη ἡ α δ τῇ δ γ, ἴση ἄρα καὶ ἡ δ θ τῇ δ κ. καὶ διὰ τοῦτο καὶ ἡ ε λ τῇ λ ζ. ὥστε ἀληθῶς λέγει ὅτι ἡ τὰς κορυφὰς τῶν τμημάτων ἐπιζευγνύουσα παράλληλος ἔσται τῇ βάσει τοῦ τμήματος, καὶ δίχα διαιρεθήσεται ὑπὸ τῆς τοῦ τμήματος διαμέτρου. ἐπεζεύχθωσαν δὲ καὶ α ε, ε β, β ζ, ζ γ. καὶ δίχα τετμήσθωσαν κατὰ τὰ μ, ν, ξ, ο σημεῖα. καὶ ἤχθωσαν διὰ τῶν μ, ν, ξ, ο παρὰ τὴν β δ, αἱ π μ ρ ς, τ ν υ φ, χ ξ ψ ω, ς ο γ λ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α π, π ε, ε τ, τ β, β χ, χ ζ, ζ ς, ς γ. καὶ αἱ τ α χ, καὶ π β γ δ ε ς. φανερὸν δὴ ἐκ τῶν προδεδειγμένων, ὅτι ἡ τ χ καὶ ἡ ε ζ καὶ ἡ π ς παράλληλοι εἰσὶ τῇ α γ. καὶ ὅτι ἴση ἡ τ α τῇ α χ. καὶ ἡ π δ τῇ δ ς. λέγω οὖν ὅτι τέμνουσι τὴν β δ εἰς τοὺς ἑξῆς περισσοὺς ἀριθμούς, τουτέστιν οἵου ἐστὶν ἑνὸς ἡ β α, τοιούτων τριῶν

τριῶν ἡ α λ, καὶ ἡ λ δ πέντε, καὶ ἡ δ δ ἑπτά. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ α η τῇ η β, καὶ παράλληλος ἡ ε θ τῇ β δ, ἴση ἄρα καὶ ἡ α θ τῇ θ δ, ἡ α δ ἄρα τῆς δ θ διπλῆ ἐστιν. ὥστε καὶ τῆς ε λ, τὸ



ἀπὸ τῆς α δ ἄρα τετραπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ε λ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ α δ πρὸς τὸ ἀπὸ ε λ, οὕτως δέδεικται ἡ β δ πρὸς β λ. τετραπλασία ἄρα καὶ ἡ δ β τῆς β λ. τριπλῆ ἄρα ἡ δ λ τῆς λ β. οἵων ἄρα ἐστὶν ἑνὸς ἡ λ β, τοιούτων τριῶν ἐστὶν ἡ λ δ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ οἵων ἄρα ἡ λ β τεσσάρων, ἡ λ δ δώδεκα. καὶ ἐπεὶ ἴση ἡ ε ν τῇ ν β, καὶ ἡ ε χ τῇ ζ λ, καὶ ἡ θ φ τῇ φ δ, διπλασία ἐστὶν ἡ ε λ τῆς λ ζ, τουτέστι τῆς τ α. τετραπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ ε λ τοῦ ἀπὸ τ α, τετραπλασία ἄρα καὶ ἡ λ β τῆς β α. ὥστε τριπλασία ἡ λ α τῆς α β. οἵων ἄρα ἐστὶν ἡ λ β τεσσάρων, τοιούτων ἡ μὲν β α ἑνός, ἡ δὲ α λ τριῶν, ἡ δὲ λ δ δώδεκα. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ α μ τῇ μ ε, καὶ ἡ α ρ τῇ ρ η, καὶ ἡ α σ τῇ σ θ, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ α σ, σ θ, θ φ, φ δ. οἵων ἄρα ἐστὶν ἡ α δ τεσσάρων, τοιούτων ἡ σ δ τριῶν, τουτέστιν ἡ π δ. οἵων ἄρα τὸ ἀπὸ α δ δεκαέξ, τοιούτων τὸ ἀπὸ π δ ἐννέα. καὶ οἵων ἄρα ἡ δ β δεκαέξ, ἡ β δ ἐννέα, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ λ δ ἑπτά. ἐπεὶ οὖν δέδεικται οἵων ἡ β δ δεκαέξ, τοιούτων ἡ μὲν β α ἑνός, ἡ δὲ α λ τριῶν, ἡ δὲ λ δ ἑπτά. καὶ λοιπὴ ἡ δ δ ἐστὶ πέντε. τέμνεται ἄρα ἡ β δ ὑπὸ τῶν παραλλήλων εἰς τοὺς τῶν ἑξῆς περισσῶν ἀριθμῶν λόγους, ἑνὸς λεγομένου τοῦ πρὸς τῇ κορυφῇ τοῦ τμήματος. δῆλον οὖν ἐστιν ἐκ τῆς καταγραφῆς, ὅτι αἱ καταγόμεναι ὑπὸ τῶν διαμέτρων εἰς τοὺς ἀπὸ μονάδος ἑξῆς ἀριθμούς,* οἵου γάρ ἐστιν ἑνὸς ἡ τ α, τοιούτων ἐστὶ δύο ἡ ε λ, τριῶν δὲ ἡ π δ, τεσσάρων δὲ ἡ α δ. παράλληλοι γὰρ οὖσαι πᾶσαι εἰς ἴσα τέμνουσιν ἀλλήλας. ὠνόμασθη δὲ ὑπὸ ἀρχιμήδους τὸ α π ε τ β χ ζ ς γ σχῆμα γνωρίμως ἐγγραφόμενον.

ΕΙΣ ΤΟ Γ.

ΤΑ ὅμοια τμήματα τῶν τοῦ κώνου τομῶν ἀπολλώνιος ὡρίσατο ἐν τῷ ἕκτῳ βιβλίῳ τῶν κωνικῶν, ἐν οἷς ἀχθεισῶν ἐν ἑκάστῳ παραλλήλων τῇ βάσει, ἴσων τὸ πλῆθος αἱ παράλληλοι, καὶ αἱ βάσεις πρὸς τὰς ἀποτεμνομένας ἀπὸ τῶν διαμέτρων ταῖς κορυφαῖς ἐν τοῖς αὐτοῖς λόγοις εἰσί, καὶ αἱ ἀποτεμνόμεναι πρὸς τὰς ἀποτεμνομένας. καὶ ὅτι αἱ παραβολαὶ πᾶσαι ὅμοιαι εἰσί, τὸ δὲ γνωρίμως ἐγγραφόμενον σχῆμα εἴρηται ἐν τῷ προλαβόντι λήμματι, τὸ δὲ ὅμοιον διαιρεῖσθαι

τὰς

τὰς διαμέτρους ἐστὶν, ἵνα τὰ τμήματα αὐτὰ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, τὰ λοιπὰ τοῦ θεωρήματος σαφῆ ἐστιν ἐκ τοῦ προειρημένου σχήματος.

ΕΙΣ ΤΟ Δ.

Εγγεγράφθω εὐθύγραμμον εἰς τὸ τμῆμα γνωρίμως, ὥστε τὰ περιλειπόμενα τμήματα ἐλάσσονα εἶναι τοῦ κ. τοῦτο δὲ φανερόν ἐστιν ἐκ τῶν εἰρημένων ἐν τῷ δεκάτῳ τῶν στοιχείων, καὶ ἐν τῷ πρώτῳ τῶν περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου.

ΕΙΣ ΤΟ Ε.

Καὶ ἐπεὶ παραλληλόγραμμον ἐστὶ τὸ θ ζ η ι. ἐπεὶ γὰρ ἴσαι εἰσὶν αἱ ι ζ, λ θ. ἴσων γάρ εἰσι τμημάτων διάμετροι, καὶ ἴσον ἀπέχουσαι τοῦ β δ ἄξονος, καὶ ὁμοίως διῄρηνται ὑπὸ τῶν θ, ι κέντρων. ἔστιν ὡς ἡ ι ε πρὸς ε ζ, ἡ λ ι πρὸς ι η, καὶ ἐναλλάξ. καὶ διὰ τοῦτο ἴση ἐστὶν ἡ θ ζ τῇ ι η, ἔστι δὲ καὶ παράλληλος. παράλληλοι γάρ εἰσι πᾶσαι αἱ διάμετροι τῆς παραβολῆς, παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ θ ζ η ι.

ΕΙΣ ΤΟ ΔΕΥΤΕΡΟΝ ΜΕΡΟΣ ΤΟΥ Ε.

Εστω δὲ τοῦ μὲν ἐξ ἀμφοτέρων τῶν α κ β, β λ γ τμημάτων συγκειμένου μεγέθους κέντρον βάρους τὸ χ, τοῦ δὲ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν α κ β, β λ γ τριγώνων τὸ τ. δέδεικται μὲν γὰρ ἐν τῷ προλαβόντι, ὅτι ἡ θ ι ἡ ἐπιζευγνύουσα τὰ κέντρα τῶν τμημάτων, διχοτομεῖται ὑπὸ τῆς β δ κατὰ τὸ χ, παράλληλος οὖσα τῇ ζ η, καὶ ἡ ζ η διχοτομεῖται κατὰ τὸ τ. ὥστε κέντρον βάρους ἐστὶ τὸ τ τοῦ συγκειμένου μεγέθους ἐκ τῶν α κ β, β λ γ τριγώνων. ἐπεὶ οὖν μείζονα λόγον ἔχει τὸ β α γ τρίγωνον πρὸς τὰ α κ β, β λ γ τρίγωνα, ἤπερ πρὸς τὰ τμήματα, καὶ τὰ ἑξῆς. ἐπεὶ γὰρ δέδεικται τοῦ μὲν α β γ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρους τὸ ε, τῶν δὲ α β κ, β λ γ τριγώνων κέντρον τὸ τ, φανερὸν ὅτι τοῦ α κ β λ γ εὐθυγράμμου κέντρον τοῦ βάρους ἐπὶ τῆς ε τ ἐκβληθείσης ἐπὶ τὸ ε, ἐπὶ τὸν ἀντιπεπονθότα λόγον τοῦ ὃν ἔχει τὸ α β γ πρὸς τὰ α κ β, β λ γ τρίγωνα. ἐπεὶ δὲ τὸ α β γ τρίγωνον πρὸς τὰ α κ β, β λ γ τρίγωνα μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὰ τμήματα. μείζονα γάρ ἐστι τὰ τμήματα τῶν τριγώνων. δῆλον ὅτι ἐὰν τέμωμεν τὴν ε τ ἐν τῷ λόγῳ τῷ ὃν ἔχει τὸ τρίγωνον πρὸς τὰ τμήματα αὐτῶν, τοῦ ε περιπίπτει τὸ σημεῖον, ὃ ἔσται κέντρον τοῦ παντὸς τμήματος, διὰ τὴν ἀντιπεπόνθησιν.

ΕΙΣ ΤΟ ς.

Το κέντρον τοῦ τμήματος πάντως ἐν ἐστι, καὶ ἐγγύτερον τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος, ἤπερ τὰ τῶν ἐγγραφομένων εὐθυγράμμων. τοῦ γὰρ α β γ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρους ἐστὶν ἔτυχε τὸ ε τῆς β δ τμηθείσης οὕτως, ὥστε διπλασίαν εἶναι τὴν β ε τῆς ε δ. φανερὸν ὅτι πάντα τὰ κέντρα τῶν ἐγγραφομένων εὐθυγράμμων μεταξὺ πίπτουσι τῶν β ε σημείων. καὶ ὅσῳ δὲ ἂν πολυπλευρότερον ᾖ τὸ γνωρίμως ἐγγραφόμενον, τοσούτῳ μᾶλλον συνεγγίζει τῷ β. φανερὸν οὖν ὅτι τὴν μεταξὺ τῶν κέντρων τοῦ γνωρίμως ἐγγραφομένου εὐθυγράμμου, καὶ τοῦ τμήματος μείζονα μὲν εἶναι τῆς ε θ ἀδύνατον, ἐλάσσονα δὲ δυνατὸν οὐ μόνον τῆς ε θ, ἀλλὰ καὶ πάσης τῆς δοθείσης.

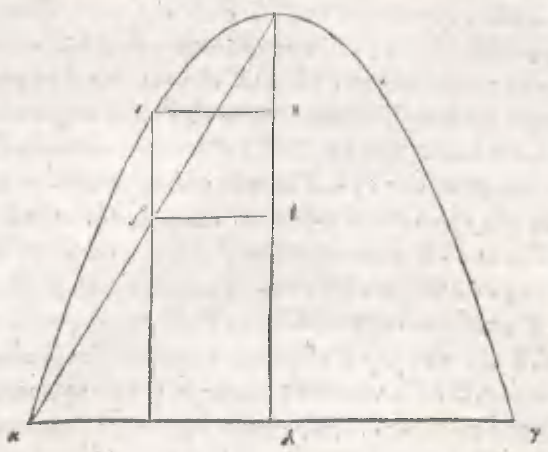
ΕΙΣ ΤΟ Ζ.

Εγγεγράφθω γὰρ εἰς τὸ α β γ τμῆμα τὸ ἐν τῷ δ ε ζ τμήματι, ὅμοιον εὐθύγραμμον, τουτέστιν ὁμοίως γνωρίμως. ὁμοίως γὰρ γνωρίμως ἐγγράφεται, ὅταν αἱ τομαὶ τῶν α β γ παραβολῆς ἴσαι γίνωνται τῶν ε ζ, ὥστε τὰς πλευρὰς τοῦ ἐν τῷ α β γ τμήματι ἐγγεγραμμένου γνωρίμως ἰσοπληθεῖς εἶναι ταῖς ἐν τῷ δ ε ζ ἐγγεγραμμένου εὐθυγράμμου. ἐπεὶ γὰρ αἱ κορυφαί εἰσι τὰ β ζ σημεῖα τῶν ὁμοίων τμημάτων, ὅμοια ἐστὶ τὰ οὕτως γνωρίμως ἐγγραφόμενα.

ΕΙΣ ΤΟ Η.

Και ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ β θ πρὸς θ δ, οὕτως ἡ κ μ πρὸς μ ζ. ὅμοια γὰρ ὄντα τὰ τμήματα τὰ κέντρα εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους τέμνοντα τὰς διαμέτρους. καὶ συνθέντι ὡς ἡ β δ πρὸς δ θ, ἡ κ ζ πρὸς ζ μ. καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ β δ πρὸς κ ζ, οὕτως ἡ δ θ πρὸς μ ζ. τετραπλασία δὲ ἡ β δ τῆς κ ζ. τοῦτο γὰρ ἐπὶ τέλει δείκνυται οὕτως σημεῖον δ. ἑξῆς δὲ αὐτὸ ἡμεῖς δείξομεν. ἔστω παραβολὴ ἡ α β γ, ἧς διάμετρος ἡ β δ. καὶ ἤχθω τεταγμένως ἡ α δ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ α β, καὶ δίχα τετμήσθω ἡ α β κατὰ τὸ ζ, καὶ διὰ τοῦ ζ τῇ β δ παράλληλος ἤχθω ἡ κ ζ. διάμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ α β τμήματος. καὶ διὰ τῶν ε, ζ παρατεταγμένως ἤχθωσαν αἱ ε η, ζ θ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ α ζ τῇ ζ β, διπλῆ ἐστιν ἡ α β τῆς ζ β, καὶ ἡ α δ τῆς ζ θ, τουτέστι τῆς ε η. ὥστε τὸ ἀπὸ α δ τοῦ ἀπὸ ε η ἐστὶ τετραπλάσιον, καὶ διὰ τοῦτο ἡ δ β τῆς β η ἐστὶ τετραπλασία μήκει. ἐπεὶ οὖν ἡ β δ τῆς

μὲν



μὲν β θ διπλῆ, ἡ β θ τῆς β η ἐστὶ διπλῆ, καὶ ἡ θ η τῇ η β ἴση, τουτέστι τῇ ε ζ, διὰ τὸ παραλληλόγραμμον εἶναι τὸ ε η ζ θ. τετραπλασία ἄρα ἡ β δ τῆς ζ ε.

Καὶ ἐπεὶ τετραπλασίων ἐστὶν ἡ β δ τῆς β ς. καὶ γὰρ τοῦτο δείκνυται. δέδεικται γὰρ ἐν τῷ λήμματι ἡ β δ ἑκατέρας τῶν β η, ε ζ τετραπλασία, ὥστε ἡ β η τῇ ε ζ ἐστὶν ἴση. καὶ διὰ τοῦτο ἐνταῦθα ἡ β ς τῇ κ ζ ἴση, καὶ ἡ β δ ἑκατέρας αὐτῶν τετραπλασία. ἡ β ξ ἄρα τῆς β δ τρίτον μέρος. ἐπεὶ γὰρ τετραπλασίων ἡ β δ τῆς β ς. οἵων ἄρα ἡ β δ τεσσάρων, ἡ β ς ἑνός. καὶ οἵων ἄρα ἡ β δ δώδεκα, τοιούτων ἡ β ς τριῶν. τριπλῆ δὲ ἡ β ς τῆς ς ξ, οἵων ἄρα ἡ β ς τριῶν, ἡ ξ ς ἑνός, καὶ ὅλη ἡ β ξ τεσσάρων. τούτων δὲ ἦν ἡ β δ δώδεκα. ἡ β ξ ἄρα τῆς β δ τρίτον μέρος ἐστί. τριπλοῦν δὲ τὸ α β γ τρίγωνον τῶν τμημάτων. δέδεικται γὰρ ὑπ᾽ αὐτοῦ ἐν τῷ περὶ τῆς ὀρθογωνίου κώνου τομῆς, ὅτι πᾶν σχῆμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομῆς ἐπίτριτόν ἐστι τριγώνου, τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ καὶ ὕψος ἴσον, ὥστε τὸ α β γ τμῆμα τοῦ α β γ τριγώνου ἐπίτριτον ἐστί, καὶ διελόντι τὸ α β γ τρίγωνον τῶν α κ β, β λ γ τμημάτων τριπλάσιον ἐστί, καὶ ἐν τῇ τῆς ε δ τριπλασία. ἡμιολία ἄρα ἐστὶν ἡ β θ τῆς θ δ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι. ἐπεὶ γὰρ τριπλῆ ἐστιν ἡ β δ τῆς δ ε. οἵων ἄρα ἡ β δ δεκαπέντε, τοιούτων ἡ ε δ πέντε· οἵων δὲ ἡ δ ε πέντε, τοιούτου ἡ θ ε ἑνός, καὶ ὅλη ἡ θ ε, δ ε ἕξ. ἑξαπλασία ἡ δ θ τῆς θ ε. οἵων ἄρα ἡ β δ δεκαπέντε, τοιούτων ἡ δ θ ἕξ. καὶ λοιπὴ ἡ θ β ἐννέα, ὥστε ἡμιολία ἐστὶν ἡ β θ τῆς θ δ.

ΕΙΣ ΤΟ Θ.

Το ἔνατον θεώρημα πάνυ ὂν ἀσαφὲς ἐκθησόμεθα παραφράζοντες σαφῶς κατὰ τὸ δυνατόν. ἐπεὶ γὰρ ἀνάλογόν εἰσιν αἱ α β, β γ, δ β, β ε, καὶ διελόντι, καὶ ἐναλλὰξ αἱ α γ, γ δ, δ ε ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσί. ἐπεὶ οὖν αἱ α β, β γ, β δ, δ ε ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσί, καὶ αἱ α γ, γ δ, δ ε, ἐστὶν ὡς ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἡγούμενον, καὶ μέσον πρὸς ἑπόμενον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἡγούμενον καὶ μέσον πρὸς ἑπόμενον. ὡς ἄρα συναμφότερος ἡ α γ, γ δ, τουτέστιν ἡ α δ πρὸς δ ε, οὕτως συναμφότερος ἡ α β, γ β πρὸς δ β. ὡς δὲ συναμφότερος ἡ α β, γ β πρὸς δ β, οὕτως ἡ β συναμφοτέρου τῆς α β, β γ πρὸς τὴν β τῆς β δ. διότι τὰ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. καὶ ὡς ἄρα ἡ α δ πρὸς δ ε, οὕτως ἡ β συναμφοτέρου τῆς α β γ πρὸς τὴν β τῆς δ β. πάλιν ἐπειδὴ αἱ γ β, β δ, β ε ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν, καὶ αἱ α γ, γ δ, δ ε. ἔστι διὰ τὰ πρότερον εἰρημένα, ὡς ἡ α δ πρὸς δ ε, οὕτως συναμφότερος ἡ γ β, β δ πρὸς β ε. ἦν δὲ καὶ ὡς ἡ α δ πρὸς δ ε, ἡ β συναμφοτέρου τῆς α β, β γ πρὸς τὴν β τῆς β δ. καὶ ὡς ἄρα ἓν πρὸς ἕν, ἅπαντα πρὸς ἅπαντα. ὡς ἄρα ἡ α δ πρὸς δ ε, οὕτως τὰ ἡγούμενα πρὸς τὰ ἑπόμενα. ἔστι δὲ ἡγούμενα μὲν ἡ β συναμφοτέρου τῆς α β, β γ, καὶ συναμφότερος ἡ γ β, β δ, τουτέστι δύο αἱ α β, καὶ τρεῖς αἱ γ β, καὶ μία ἡ β δ. ἑπόμενα δὲ ἡ β τῆς β δ, καὶ ἡ β ε μόνη. ἔστιν οὖν ὡς ἡ α δ πρὸς δ ε, ἡ συγκειμένη εὐθεῖα, ἔκ τε τῆς β τῆς α β, καὶ γ τῆς γ β, καὶ τῆς δ β μόνης, πρὸς τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῆς β τῆς β δ, καὶ μόνης τῆς ε β. καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ συγκειμένη ἔκ τε τῆς β τῆς α β, καὶ τῆς δ τῆς γ β, καὶ τῆς δ τῆς δ β, καὶ τῆς β τῆς β ε, τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς β τῆς α β καὶ γ τῆς γ β, καὶ τῆς β δ μόνης. ἔξωθεν δέ ἐστιν ἡ συγκειμένη ἔκ τε τῆς β τῆς β δ, καὶ μόνης τῆς ε β. τὸ δὲ μεῖζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἔλαττον. μείζονα ἄρα λόγον ἔχει ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β συναμφοτέρου τῆς α β, β ε, καὶ δ συναμφοτέρου τῆς γ β, β δ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β τῆς δ β, καὶ τῆς ε β μόνης, ἤπερ ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β τῆς α β, καὶ τῆς γ τῆς γ β, καὶ μόνης τῆς δ β πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς

I διπλῆς

διπλῆς τῆς β̄ δ, καὶ μόνης τῆς ε β. ἀλλ' ὡς ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β̄ τῆς α β, καὶ γ̄ τῆς γ β, καὶ τῆς β̄ δ μόνης, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῶν β̄ τῶν β̄ δ, καὶ μόνης τῆς ε β, οὕτως ἐδείχθη ἡ α δ πρὸς δ̄ ε. καὶ ἡ συγκειμένη ἄρα ἐκ τῶν β̄ συναμφοτέρου τῶν α β, β̄ ε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τῆς γ β, β̄ δ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τε τῶν β̄ τῶν β̄ δ, καὶ μόνης τῆς ε β μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ α δ πρὸς δ̄ ε. ἐὰν ἄρα θελήσωμεν ποιῆσαι τὸν αὐτὸν τῷ α δ πρὸς ἄλλην τινά, ἐλάσσων ἔσται ἐκείνη τῆς δ̄ ε. ἔστω ἡ δ̄ ο. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ α δ πρὸς δ̄ ο, ἡ συγκειμένη ἐκ τῶν β̄ συναμφοτέρου τῶν α β, β̄ ε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τῶν γ β, β̄ δ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῶν β̄ τῶν β̄ δ, καὶ μόνης τῆς ε β. ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ο δ πρὸς δ̄ α, ἡ συγκειμένη ἐκ τῶν β̄ τῶν β̄ δ, καὶ μόνης τῶν ε β, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῶν β̄ συναμφοτέρου τῶν α β, β̄ ε, καὶ τῶν δ̄ συναμφοτέρου τῶν γ β, β̄ δ, καὶ συνθέντι, ὡς ἡ ο α πρὸς α δ, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῶν β̄ τῶν α β, καὶ δ̄ τῶν γ β, καὶ ς̄ τῶν β̄ δ, καὶ γ̄ τῶν β̄ ε, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῶν β̄ συναμφοτέρου τῶν α β, β̄ ε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τῶν γ β, β̄ δ. ἥ τε γὰρ β̄ δ ἑξάκις παρελήφθη, τετράκις μὲν ἐν τοῖς προτέροις, δὶς δὲ ἐν τοῖς δευτέροις, καὶ ἡ β̄ ε τρεῖς ἐλήφθη, δὶς μὲν ἐν τοῖς πρώτοις, ἅπαξ δὲ ἐν τοῖς δευτέροις. ὑπόκειται δὲ καὶ ἡ α δ πρὸς η θ ὃν ἔχουσα τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ συγκειμένη ἐκ τῶν ε̄ συναμφοτέρου τῶν α β, β̄ ε, καὶ ῑ συναμφοτέρου τῶν γ β, β̄ δ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β̄ τῶν α β, καὶ δ̄ τῶν γ β, καὶ ς̄ τῶν β̄ δ, καὶ γ̄ τῶν β̄ ε. καὶ ἔστι τεταραγμένη ἀναλογία. δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ο α πρὸς η θ, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῶν ε̄ συναμφοτέρου τῆς α β, β̄ ε, καὶ ῑ τῶν γ β, β̄ δ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τε τῶν β̄ συναμφοτέρου τῶν α β, β̄ ε, καὶ δ̄ τῆς γ β, β̄ δ. τὸ γὰρ τῆς τεταραγμένης ἀναλογίας οὕτως ἔσται δῆλον. ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ὡς ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἡγούμενον ἡ ο α, πρὸς ἑπόμενον τὴν α δ, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἡγούμενον ἡ συγκειμένη ἐκ τῶν β̄ τῆς α β, καὶ δ̄ τῶν γ β, καὶ ς̄ τῶν β̄ δ, καὶ γ̄ τῆς β̄ ε, πρὸς ἑπόμενον τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς α β, β̄ ε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τῆς γ β, δ̄ β. ὥστε ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἑπόμενον ἡ α δ πρὸς ἄλλο τι τὴν η θ, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν, ἄλλο τι ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς ε̄ συναμφοτέρου τῆς α β, β̄ ε, καὶ ῑ συναμφοτέρου τῆς γ β, β̄ δ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τε τῆς β̄ τῆς α β, καὶ δ̄ τῆς γ β, καὶ ς̄ τῆς β̄ δ, καὶ γ̄ τῆς β̄ ε. ἐπεὶ ἡ ε̄ συναμφοτέρου τῆς α β, β̄ ε πρὸς τὴν β̄ τῆς αὐτῆς λόγον ἔχει, ὃν πέντε πρὸς δύο. ἔχει δὲ καὶ ἡ ῑ συναμφοτέρου τῆς γ β, β̄ δ πρὸς τὴν δ̄ τῆς αὐτῆς λόγον, ὃν πέντε πρὸς δύο. ἐπειδὴ καὶ τὰ πέντε πρὸς δύο, καὶ τὰ δέκα πρὸς τέσσαρα λόγον ἔχει, ὃν πέντε πρὸς δύο. καὶ ἡ συγκειμένη ἄρα ἐκ τῆς ε̄ συναμφοτέρου τῆς α β, β̄ ε, καὶ ῑ συναμφοτέρου τῆς γ β, β̄ δ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς α β, β̄ ε, καὶ δ̄ τῆς γ β, β̄ δ λόγον ἔχει, ὃν πέντε πρὸς δύο. ὡς δὲ καὶ ἡ α ο πρὸς η θ λόγον ἔχει ὃν πέντε πρὸς δύο. πάλιν ἐπεὶ ἐδείχθη ἐν τοῖς ἀνωτέρω, ὅτι ἡ ο δ πρὸς δ̄ α τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει ἡ ε β μετὰ τῆς β̄ τῆς β̄ δ πρὸς τὴν ἴσην τῇ συγκειμένῃ ἐκ τε τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς α β, β̄ ε, μετὰ τὴν δ̄ συναμφοτέρου τῆς γ β, β̄ δ. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἑπόμενον ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν, ἡ α δ πρὸς ἄλλο τι τὴν δ̄ ε, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἄλλο τι ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β̄ τῆς α β, καὶ γ̄ τῆς γ β, καὶ μόνης τῆς δ̄ β πρὸς ἡγούμενον τὴν συγκειμένην ἐκ τε τῆς ε β, καὶ τῆς β̄ τῆς β̄ δ. ἀνομοίως τῶν λόγων τεταγμένων, τουτέστι τεταραγμένης οὔσης τῆς ἀναλογίας, δι' ἴσου ἐστὶν ὡς ἡ ο δ πρὸς δ̄ ε, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β̄ τῆς α β, καὶ τῆς γ̄ τῆς γ β, καὶ μόνης τῆς β̄ δ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς α β, β̄ ε, καὶ δ̄ τῆς γ β, β̄ δ. ὥστε καὶ ἀνάπαλιν ὡς ἡ ε δ πρὸς δ̄ ο, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς α β, β̄ ε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τῆς γ β̄ δ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τε τῆς β̄ τῆς α β, καὶ γ̄ τῆς γ β, καὶ μόνης τῆς β̄ δ. καὶ ἀναστρέψαντι, ὡς ἡ δ̄ ε πρὸς ε ο, τὸ ἡγούμενον φημὶ πρὸς τὴν ὑπεροχήν, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς α β̄ ε, μετὰ τῆς δ̄ τῆς γ β̄ δ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς γ β μόνης, καὶ γ̄ τῆς β̄ δ, καὶ τῆς β̄ τῆς ε β. ἐν μὲν γὰρ τῷ ἡγουμένῳ ἡ β̄ τῆς α β, καὶ τῆς β̄ ε. ἐν δὲ τῷ ἑπομένῳ ἡ β̄ τῆς α β μόνης, ὥστε περιλείπεται ἐν ταῖς ὑπεροχαῖς ἡ β̄ τῆς ε β. πάλιν ἐν μὲν τῷ ἡγουμένῳ ἡ δ̄ συναμφοτέρου τῆς γ β̄ δ, ἐν δὲ τῷ ἑπομένῳ ἡ γ̄ τῆς γ β, καὶ ἡ β̄ δ μόνη. ὥστε περιλείπεται ἐν ταῖς ὑπεροχαῖς ἡ γ β μόνη, καὶ ἡ γ̄ τῆς β̄ δ. καλῶς οὖν ἐλέχθη, ὅτι ἐστὶν ἀναστρέψαντι ὡς ἡ δ̄ ε πρὸς ε ο, ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς α β, β̄ ε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τῆς γ β̄ δ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τε τῆς γ β, καὶ τῆς γ̄ τῆς δ̄ β, καὶ τῆς β̄ τῆς ε β. ὥστε καὶ ἀνάπαλιν ὡς ο ε πρὸς ε δ, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς γ β, μετὰ τῆς γ̄ τῆς β̄ δ, καὶ β̄ τῆς ε β, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς α β̄ ε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τῆς γ β̄ δ. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ δ̄ β πρὸς ἄλλο τι τὴν ε β, ἡ α β πρὸς β̄ γ. καὶ διελόντι ὡς ἡ

δ̄ ε

δ̄ ε πρὸς ε β, ἡ α γ πρὸς γ β. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἔστιν ὡς ἡ γ δ πρὸς δ̄ β, οὕτως ἡ δ̄ ε πρὸς ε β. καὶ ὡς ἄρα ἡ γ̄ τῶν γ δ πρὸς τὴν γ̄ τῶν δ̄ β, οὕτως ἡ β̄ τῶν δ̄ ε πρὸς τὴν β̄ τῶν ε β. τὰ γὰρ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. καὶ ὡς ἄρα ἓν πρὸς ἕν, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ δ̄ ε πρὸς ε β, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς α γ, καὶ τῆς γ̄ τῶν γ δ, καὶ ἡ β̄ τῶν δ̄ ε πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς γ β, καὶ τῆς γ̄ τῆς β̄ δ, καὶ τῆς β̄ τῆς ε β. ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη ὡς ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἡγούμενον ἡ ο ε πρὸς ἑπόμενον τὴν δ̄ ε, ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς γ β, καὶ τῆς γ̄ τῆς β̄ δ, καὶ β̄ τῆς β̄ ε, πρὸς ἑπόμενον τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς α β, β̄ ε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τῆς γ β̄ δ. ὡς δὲ ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἑπόμενον ἡ δ̄ ε πρὸς ἄλλο τι τὴν ε β, ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἄλλο τι ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς α γ, καὶ ἡ γ̄ τῆς γ δ, καὶ β̄ τῆς δ̄ ε πρὸς ἡγούμενον τὴν συγκειμένην, ἐκ τε τῆς γ β, καὶ γ̄ τῆς δ̄ β, καὶ β̄ τῆς β̄ ε. δι' ἴσου ἐν τῇ τεταραγμένῃ ἀναλογίᾳ, ὡς ἡ ο ε πρὸς ε β, ἡ συγκειμένη ἐκ τε τῆς α γ, καὶ γ̄ τῆς γ δ, καὶ ἡ β̄ τῆς δ̄ ε πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς α β̄ ε, μετὰ τῆς δ̄ συναμφοτέρου τῆς γ β̄ δ. καὶ συνθέντι πῶς ἡ ο β πρὸς β̄ ε, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς α γ, καὶ γ̄ τῆς γ δ, καὶ β̄ τῆς δ̄ ε, καὶ β̄ συναμφοτέρου τῆς α β, β̄ ε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τῆς γ β̄ δ πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τε τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς α β̄ ε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τῆς γ β̄ δ. ἀλλὰ ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς α γ, καὶ γ̄ τῆς γ δ, καὶ β̄ τῆς δ̄ ε, καὶ β̄ συναμφοτέρου τῆς α β, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τῆς γ β̄ δ. ἴση ἐστὶ τῇ συγκειμένῃ ἐκ τε τῆς γ̄ τῆς α β, καὶ ς̄ τῆς γ β, καὶ γ̄ τῆς δ̄ β. ἥ τε γὰρ α β δὶς παρελήφθη αὐτόθεν, καὶ προσλαβοῦσα τὴν α γ, καὶ ἐκ τῆς δ̄ τῆς γ β μίαν, ποιεῖ τρίτον τὴν α β. πάλιν ἀφαιρεθείσης ἀπὸ τῆς δ̄ τῆς γ β μίαν, γίνεται γ̄. προσλαβοῦσα δὲ τὴν γ̄ τῆς γ δ, καὶ γ̄ τῆς δ̄ β, ποιεῖ τὴν ς̄ τῆς γ β. πάλιν ἀφαιρεθείσης ἀπὸ τῆς δ̄ β, γ̄, μένει μόνη ἡ δ̄ β. προσλαβοῦσα δὲ τὴν β̄ τῆς δ̄ ε, καὶ τὴν β̄ τῆς ε β, ποιεῖ τὴν γ̄ τῆς β̄ δ. καλῶς οὖν λέγει, ὅτι ἡ ο β πρὸς ε β ὃν ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς γ̄ τῆς α β, καὶ ς̄ τῆς γ β, καὶ γ̄ τῆς δ̄ β, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς α β̄ ε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τῆς γ β̄ δ. πάλιν ἐπεὶ αἱ ε δ, δ γ, γ α ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσί, καὶ διὰ τὸ ἀνάπαλιν ἐξ ὑποθέσεως συναμφότερος ἑκάστη τῶν ε β, β δ, δ β, β γ, β α. ἔσται ὡς ἡ ε δ πρὸς τὴν μέσην καὶ τὴν ἑπομένην τὰς δ γ, γ α, τουτέστι τὴν δ α, οὕτως συναμφότερος ἡ ε β, β δ πρὸς συναμφότερον τὴν δ β, β γ, μετὰ συναμφοτέρου τῆς γ β, β α. καὶ συνθέντι ἄρα ὡς ε α πρὸς α δ, οὕτως συναμφότερος ἡ ε β̄ δ, μετὰ συναμφοτέρου τῆς δ β̄ γ, καὶ μετὰ συναμφοτέρου τῆς γ β̄ α, πρὸς συναμφότερον τὴν δ β̄ γ, μετὰ συναμφοτέρου τῆς γ β̄ α. ἀλλὰ συναμφότερος ἡ ε β̄ δ μετὰ τῆς δ β̄ γ, καὶ τῆς γ β̄ α, ἴση ἐστὶ συναμφοτέρῳ τῇ ε β̄ α, καὶ δὶς συναμφοτέρῳ τῇ δ β̄ γ. ἅπαξ γὰρ αἱ ἄκραι παραλαμβάνονται, καὶ δὶς αἱ μέσαι, συναμφότερος δὲ ἡ δ β̄ γ μετὰ τῆς γ β̄ α, ἴση ἐστὶ συναμφοτέρῳ τῇ α β̄ δ, καὶ δὶς τῇ γ β, διὰ τὴν αὐτὴν αἰτίαν. ὥστε ἐστὶν ὡς ἡ ε α πρὸς α δ, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τε τῆς ε β̄ α, καὶ β̄ συναμφοτέρου τῆς δ β̄ γ πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τε συναμφοτέρου τῆς δ β̄ α, καὶ τῆς β̄ τῆς γ β. ὥστε καὶ ἡ διπλασία πρὸς τὴν διπλασίαν τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. ὡς ἄρα ἡ ε α πρὸς α δ, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς ε β̄ α, μετὰ τῆς δ̄ συναμφοτέρου τῆς γ β̄ δ πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς α β̄ δ. καὶ τῆς δ̄ τῆς γ β. ὥστε καὶ ὡς ἡ ε α πρὸς τὰ τρία πέμπτα τῆς α δ, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς α β̄ ε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τῆς γ β̄ δ, πρὸς τὰ τρία πέμπτα τῆς συγκειμένης ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς α β̄ δ, καὶ τῆς δ̄ τῆς γ β. ἀλλ' ὡς ἡ α ε πρὸς τὰ τρία πέμπτα τῆς α δ, οὕτως ἐλήφθη ἡ β̄ ε πρὸς ζ η. καὶ ὡς ἄρα ἡ ε β πρὸς ζ η, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς α β̄ ε, καὶ τῆς δ̄ συναμφοτέρου τῆς γ β̄ δ, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς α β̄ δ, καὶ δ̄ τῆς γ β. ἐπεὶ οὖν δέδεικται ὡς ἡγούμενον ἡ ο β πρὸς ἑπόμενον τὴν β̄ ε, οὕτως ἡγούμενον ἡ γ̄ συναμφοτέρου τῆς α β̄ δ, καὶ μετὰ τῆς ς̄ τῆς γ β, πρὸς τὴν β̄ συναμφοτέρου τῆς α β̄ ε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τῆς γ β̄ δ. ὡς δὲ ἑπόμενον ἡ ε β πρὸς ἄλλο τι τὴν ζ η, οὕτως ἡγούμενον ἡ β̄ συναμφοτέρου τῆς α β̄ ε, καὶ ἡ δ̄ συναμφοτέρου τῆς γ β̄ δ πρὸς τὰ τρία πέμπτα τοῦ ἑπομένου, τουτέστι τῆς συγκειμένης ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς α β̄ δ, καὶ τῆς δ̄ τῆς γ β. τεταγμένης οὖν οὔσης τῆς ἀναλογίας δι' ἴσου ἐστίν, ὡς ο β πρὸς ζ η, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τε τῆς γ̄ συναμφοτέρου τῆς α β̄ δ, καὶ ς̄ τῆς γ β, πρὸς τὰ τρία πέμπτα τῆς συγκειμένης ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς α β̄ δ, καὶ δ̄ τῆς γ β. ἡ δὲ ε̄ συγκειμένη ἐκ τῆς γ̄ συναμφοτέρου τῆς α β̄ δ, καὶ ς̄ τῆς γ β πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β̄ συναμφοτέρου τῆς α β̄ δ, καὶ δ̄ τῆς γ β, λόγον ἔχει ὃν πέντε πρὸς δύο. τὰ δὲ ἑξαπλάσια τῶν αὐτῶν

τετρα-

τετραπλασίων ἡμιόλια ἐστί. τὰ δὲ τρία πέμπτα τῆς αὐτῆς λόγον ἔχει, ὃν πέντε πρὸς δύο. ἐπειδὴ δὲ τὰ ἡγούμενα τῶν ἑπομένων ἡμιόλια, καὶ λόγον ἔχει πρὸς αὐτά, ὃν τρία πρὸς δύο, ἔχει ἄρα καὶ ὃν τεσσαράκοντα πέντε πρὸς τριάκοντα. ἑκάτερον γὰρ ἑκατέρου ἐστὶ πεντεκαιδεκαπλάσιον. καὶ ἔστι τὰ τρία πέμπτα τῶν τριάκοντα δεκαοκτώ. ἔχει ἄρα τεσσαράκοντα πέντε πρὸς δεκαοκτὼ λόγον, ὃν πέντε πρὸς δύο. τὰ γὰρ πέντε καὶ τὰ δύο ἀμφοτέρων εἰσὶν ἔνατα. ἐπεὶ οὖν δέδεικται ἡ μὲν οα πρὸς ηθ λόγον ἔχουσα, ὃν πέντε πρὸς δύο, ἡ δὲ οβ πρὸς ζη τὸν αὐτὸν λόγον, δύο πεμπτημόρια ἐστὶν ὅλη ἡ ζθ ὅλης τῆς αβ.

ΕΙΣ ΤΟ Γ.

Φανερὸν δή, ὅτι καὶ τοῦ αδεγ τόμου διάμετρός ἐστιν ἡ ζη. ἐπεὶ γὰρ ὑπόκειται ἡ ζβ διάμετρος τοῦ τμήματος, καὶ αἱ αγ, δε διχοτομούμεναι ὑπ' αὐτῆς, καὶ ἔτι τὸ ζ, η, παράλληλοί εἰσι τῇ κατὰ τὸ β ἐφαπτομένῃ τῆς τομῆς. καὶ δῆλον ὅτι καὶ πᾶσαι αἱ ὁμοίως αὐταῖς ἀγόμεναι παράλληλοι, εἴτε μεταξὺ αὐτῶν, εἴτε καὶ μεταξὺ τῆς δε, καὶ τῆς β κορυφῆς δίχα τμηθήσονται ὑπὸ τῆς βζ. καὶ διὰ τοῦτο φησὶ διάμετρον εἶναι τοῦ τόμου τὴν ζη. ἀλλ' ὡς μὲν ὁ ἀπὸ ζβ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ δη κύβον, οὕτως τὸ ἀπὸ αβγ τμῆμα πρὸς τὸ δβε τμῆμα. ἐπεὶ γὰρ δέδεικται ὑπ' αὐτοῦ, ὅτι τὸ αβγ τμῆμα τοῦ αβγ τριγώνου ἐστὶν ἐπίτριτον, καὶ τὸ δεβ τμῆμα τοῦ δεβ τριγώνου, ἔστιν ὡς τὸ αβγ τμῆμα πρὸς τὸ αβγ τρίγωνον, οὕτως τὸ δεβ τμῆμα πρὸς τὸ δεβ τρίγωνον. καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ τμῆμα πρὸς τὸ τμῆμα, τὸ τρίγωνον πρὸς τὸ τρίγωνον. ὥστε καὶ τὰ ἥμισυ αὐτῶν, ὡς τὸ αβγ τμῆμα πρὸς τὸ δεβ τμῆμα, οὕτως τὸ αζβ τρίγωνον πρὸς τὸ δηβ τρίγωνον. ὥστε καὶ ἐὰν ἀναγράψωμεν τὰ παραλληλόγραμμα διπλάσια τῶν τριγώνων, ἔσται ἰσογώνια διὰ τὸ παραλλήλους εἶναι τὰς δη αζ. ὥστε καὶ λόγον ἕξει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν τῆς αζ πρὸς δη, καὶ τῆς βζ πρὸς βη. ὁ αὐτὸς γὰρ λόγος ἐστὶ τῶν τετραγώνων καὶ τῶν τμημάτων. τὸ ἄρα τμῆμα πρὸς τὸ τμῆμα λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τοῦ τῆς αζ πρὸς δη, καὶ τοῦ τῆς ζβ πρὸς βη. ὁ γὰρ τῆς ζβ πρὸς βη λόγος, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ αζ πρὸς τὸ ἀπὸ δη τετράγωνον. ὁ ἄρα τοῦ τμήματος πρὸς τὸ τμῆμα λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ ἀπὸ αζ πρὸς τὸ ἀπὸ δη τετράγωνον, καὶ τοῦ τῆς αζ πρὸς δη. σύγκειται δὲ καὶ ὁ τοῦ ἀπὸ αζ κύβου πρὸς τὸν ἀπὸ δη κύβον λόγος ἐκ τῶν αὐτῶν, ὡς δέδεικται ἐν τοῖς σχολίοις τοῦ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ τμῆμα πρὸς τὸ τμῆμα, οὕτως ὁ ἀπὸ αζ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ δη κύβον. καὶ ἐπεὶ τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ τῆς αζ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὴν συγκειμένην ἐκ τε τῆς β τῆς δη, καὶ τῆς αζ, πρὸς τὸν ἀπὸ αζ κύβον, λόγον ἔχει ὃν ἡ β τῆς δη μετὰ τῆς αζ πρὸς ζα. ἐπὶ γὰρ τῶν αὐτῶν βάσεων ὄντα πρὸς ἄλληλα, ἐστὶν ὡς τὰ ὕψη. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ δη πρὸς αζ, ἡ ξν πρὸς νμ. καὶ ὡς ἡ β τῆς δη πρὸς αζ, ἡ β τῆς ξν πρὸς νμ. καὶ συνθέντι ὡς ἡ β τῆς νξ μετὰ τῆς νμ πρὸς νμ, ἡ β τῆς δη μετὰ τῆς αζ πρὸς αζ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ὁ ἀπὸ αζ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ δη κύβον, οὕτως ὅτε ἀπὸ μν κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ νξ κύβον, καὶ ἡ μν πρὸς ντ, τέσσαρες εἰσὶν ἀνάλογον. καὶ ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τετάρτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης στερεὸν πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας ὅμοιον, καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένον. ὥστε ὁ ἀπὸ δη κύβος πρὸς τὸ στερεόν, τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ δη τετράγωνον, ὕψος δὲ τὴν συγκειμένην εὐθεῖαν ἐκ τε τῆς β τῆς αζ, καὶ τῆς δη, οὕτως ἡ δη πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β τῆς αζ καὶ τῆς δη. πάλιν γὰρ πρὸς ἄλληλα ἐστὶν ὡς τὰ ὕψη. ὡς δὲ ἡ δη πρὸς τὴν β τῆς αζ μετὰ τῆς δη, οὕτως ἡ τν πρὸς τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῆς β τῆς ον, καὶ τῆς τν. ἔστι γὰρ ὡς ἡ αζ πρὸς δη, ἡ μν πρὸς νξ, καὶ ἡ ον πρὸς ντ. καὶ ἀνάπαλιν, ὡς ἡ δη πρὸς αζ, ἡ τν πρὸς νο. καὶ ὡς ἡ δη μετὰ τῆς β τῆς αζ πρὸς δη, οὕτως ἡ τν μετὰ τῆς β τῆς νο πρὸς νο. γέγονεν οὖν τέσσαρα μεγέθη ἑξῆς ἀλλήλων κείμενα. πρῶτον τὸ στερεὸν τὸ βάσιν ἔχον τὸ ἀπὸ αζ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β τῆς δη, καὶ τῆς αζ, δεύτερον ὁ ἀπὸ τῆς αζ κύβος. καὶ τρίτον ὁ ἀπὸ τῆς δη κύβος. καὶ τέταρτον τὸ στερεὸν τὸ βάσιν ἔχον τὸ ἀπὸ τῆς δη τετράγωνον, ὕψος δὲ τὴν συγκειμένην ἐκ τε τῆς β τῆς αζ, καὶ τῆς δη. καὶ ἄλλαι τινὲς εὐθεῖαι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ σὺν δύο λαμβανόμεναι, ἥ τε συγκειμένη ἐκ τῆς β τῆς νξ, καὶ μόνης τῆς μν, καὶ δευτέρα ἡ μν, καὶ τρίτη ἡ ντ, καὶ τετάρτη ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β τῆς ον, καὶ τῆς ντ. δι' ἴσου ἄρα γενήσεται, ὡς τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ αζ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς διπλῆς τῆς δη, καὶ τῆς αζ μόνης, πρὸς τὸ στερεόν, τὸ βάσιν ἔχον τὸ ἀπὸ δη τετράγωνον, ὕψος τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β τῆς αζ, καὶ μόνης τῆς δη, οὕτως συγκειμένης ἐκ τῆς β τῆς ξν, καὶ μόνης τῆς μν, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β τῆς νο, καὶ μόνης τῆς ντ. ἀλλ' ὡς τὰ εἰρημένα

εἰρημένα στερεὰ πρὸς ἄλληλα, οὕτως ἐδείχθη ἡ θι πρὸς ικ. καὶ ὡς ἄρα ἡ θι πρὸς ικ, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς β τῆς ξν, καὶ μόνης τῆς μν, πρὸς τὴν β τῆς ον, καὶ μόνης τῆς ντ. καὶ συνθέντι ὡς ἡ θκ πρὸς κι, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ συναμφοτέρου τῆς μντ, καὶ τῆς β συναμφοτέρου τῆς ξνο, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β τῆς ον, καὶ μόνης τῆς ντ, καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ ε. ὡς ἡ ηζ πρὸς κι, οὕτως ἡ ε συναμφοτέρου τῆς μντ, καὶ ι συναμφοτέρου τῆς ξνο, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς ε τῆς νο, καὶ μόνης τῆς ντ. καὶ ὡς ἄρα ἡ ζκ πρὸς ζη, οὕτως αὐτῆς δύο πέμπτα. ἑκατέρα γὰρ τῶν ηθ ζκ δύο πεμπτημόριά ἐστι τῆς ηζ. ἐπεὶ δὲ τὸ μέσον πεμπτημόριον ἡ θκ ὑπόκειται, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς ε συναμφοτέρου τῆς μντ, καὶ ι συναμφοτέρου τῆς ξνο, πρὸς τὴν β συναμφοτέρου τῆς μντ, καὶ δ συναμφοτέρου τῆς ξνο. καὶ γὰρ τὰ β τῶν ε, καὶ τὰ δ τῶν ι δύο πεμπτημόριά ἐστιν. ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη ὡς ἡ ζη πρὸς ικ, οὕτως ἡ ε τῆς μντ, καὶ ι τῆς ξνο, πρὸς τὴν ε τῆς νο, καὶ μόνην τὴν ντ. πάλιν δὲ ἐδείχθη ὡς ἡ ζη πρὸς ζκ, ἡ ε συναμφοτέρου τῆς μντ, καὶ ι τῆς ξνο, πρὸς τὴν β τῆς μντ, καὶ δ τῆς ξνο. ἔσται ὡς ἡγούμενον πρὸς τὰ δύο ἑπόμενα, οὕτως ἡγούμενον πρὸς τὰ δύο ἑπόμενα, ὡς ἡ ζη πρὸς ζι, οὕτως ἡ συγκειμένη ἐκ τῆς ε συναμφοτέρου τῆς μντ, καὶ ι συναμφοτέρου τῆς ξνο, πρὸς τὴν συγκειμένην ἐκ τῆς β τῆς ον, καὶ μόνης τῆς ντ, καὶ τῆς β συναμφοτέρου τῆς μντ, καὶ δ τῆς ξνο, ἥ ἐστιν ἴση τῇ συγκειμένῃ ἐκ τῆς β τῆς μν, καὶ δ τῆς νξ, καὶ ς τῆς νο, καὶ γ τῆς ντ. οὕτως γὰρ εἰλῆπται καὶ ἀνωτέρω. ἐπεὶ οὖν τέσσαρες εὐθεῖαι ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν αἱ μν, νξ, ον, ντ, καὶ ἔστιν ὡς μὲν ἡ ντ πρὸς τμ, οὕτως εἰλημμένη τις ἡ ρι πρὸς τὴν ζθ, τουτέστι πρὸς τὰ τρία πέμπτα τῆς ηζ, τουτέστι τῆς μο, καὶ δεδειγμέναι εἰσὶν αἱ ἐν τῷ ῥητῷ ἀναλογίαι. ἔσται διὰ τὸ προειρημένον ἡ ρζ δύο πέμπτα τῆς μν, τουτέστι τῆς ζβ. τρία ἄρα πέμπτα ἐστὶν ἡ βρ τῆς βζ. ἡ βρ ἄρα πρὸς ρζ λόγον ἔχει, ὃν πέντε πρὸς δύο, ὥστε κέντρον βάρους ἐστὶ τοῦ αβγ τμήματος τὸ ρ σημεῖον. ἐὰν δὴ λάβωμεν τὸ τοῦ δβε τμήματος τὸ χ, τρία πέμπτα ἔσται ἡ βχ τῆς βη. γέγονεν ὡς ὅλη ἡ ζβ πρὸς ὅλην τὴν βρ, οὕτως ἀφαιρεθεῖσα ἡ βη πρὸς ἀφαιρεθεῖσαν τὴν βχ. ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν πρὸς ἑκατέραν λόγον ἔχει, ὃν πέντε πρὸς τρία. καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα ἡ ζη πρὸς λοιπὴν τὴν χρ λόγον ἔχει, ὃν πέντε πρὸς τρία. ἐπεὶ οὖν ὑπόκειται ὡς ὁ αδεγ τομεὺς πρὸς τὸ δβε τμῆμα, οὕτως ἡ μτ πρὸς ντ. ὡς δὲ ἡ μτ πρὸς τν, οὕτως τὰ τρία πέμπτα τῆς ηζ, τουτέστιν ἡ ζθ, ἤτοι ἡ χρ πρὸς ρι. ἔσται ἄρα καὶ ὡς ὁ τομεὺς πρὸς τὸ τμῆμα, ἡ χρ πρὸς ρι. καὶ ἀντιπεπόνθασιν, καὶ ἔστι τὸ ρ κέντρον τοῦ ὅλου τμήματος, τοῦ ἄρα τόμου κέντρον ἐστὶ τὸ ι.

ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΑΣΚΑΛΩΝΙΤΟΥ ΥΠΟΜΝΗΜΑ ΕΙΣ ΤΟ Β τῶν ἰσοῤῥοπικῶν ἀρχιμήδους.

COMMENTARII EVTOCII ASCALONITAE IN PRIMVM ARCHIMEDIS DE *Sphæra & cylindro.*

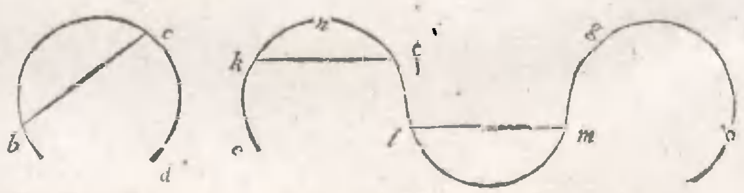
QVVM in Archimedis libro quem de ſphæra & cylindro cōfecit, eorum qui nos præceſſerunt neminem adhuc comperiſſem quippiam dignū cōpoſuiſſe, idq; ab eis prætermiſſum intelligerem non propter theorematum, quæ illic habentur, facilitatem, quæ uti noſtis doctrina indigent exquiſitiſſima, & inſtructiſſima in primis excogitatione, aggreſſus ſum pro uirib. ea quæ in illis obſcura & perſpectu difficilia continentur declarare. adductus ad hoc magis, quod neminem fortè in hanc comprehenſionem deſcenſurum cernerem, quod rerum iſtarū difficultate deterritus ſim. Simul etiam Socraticum illud mecum reputans, Deo coadiutore nos commodè admodum & ad perfectionem ſtudij noſtri peruenturos:

DECLARATIO TERMINORVM.

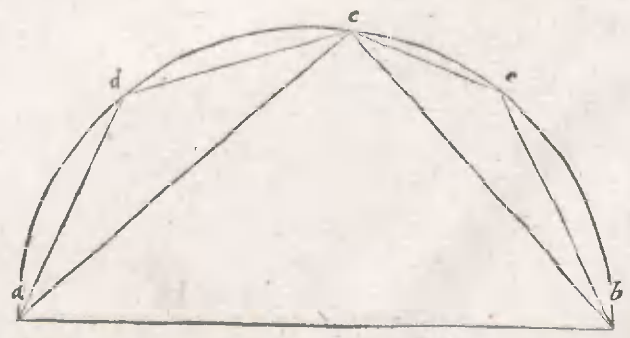
PRAENVMERANS ea quæ ab ipſo exponenda ſunt theoremata, ut conſuetum eſt omnibus Geometris in expoſitione, ſeruans quoq; appellationes quibus ipſe per licentiā uſus eſt: primò terminationes ſuppoſitionum, & ipſas quoq; ſuppoſitiones in initio ſcribendi uult declarare. & ait primū, Quaſdam eſſe in plano curuas lineas, quę lineis rectis earum terminos iungentibus, uel omnis in eandem partem uergūt, uel aliquid in alteram habent. Hoc autem quod dictum eſt, planum erit, ſi intellexerimus quas appellat in plano curuas lineas. Quare aduertendum eſt, curuas ab eo lineas appellari non ſimpliciter circulares, aut conicas, aut eas quæ continuitatem habent non fractam: uerum eas omnis ſimpliciter, quæ in plano cum ſint, nō in directum producantur, curuas uocat. Vnam autem lineam in plano quocunq; modo connexam, quāuis ſiue ex rectis pluribus connectatur, ſiue ex curuis, ſiue ex rectis & curuis, unam tamen eam ex ea connexione poſtulat appellari.

Hic deeſt una charta in exemplari græco.

ipſi a b c d. Verum quoniam uti ſupra dictū eſt, curuas lineas uocat non quæ circumferentiam habent ſolas, uerumetiam eas quæ ex rectis componuntur: ex his erat collectio earum quæ in eadem cauæ habentur. Continget enim in quadam linea, quæ in eadem caua ſit, duo utcunq; puncta notari, ita ut linea recta quæ illa puncta iunxerit, in neutram prioris lineæ partem cadat, ſed ipſi coaptetur. Propterea dixit, lineam in eandē cauam eſſe uocari, in qua lineæ rectæ, per duo quæq; eius puncta ductę, aut omnis in eaſdem partes cadant rectæ lineæ, aut earum quędam in eaſdem partes, quædam ſuper eam, & nulla in alterā partem. Eaſdem uero licet interpretari, & in ſuperficiebus.

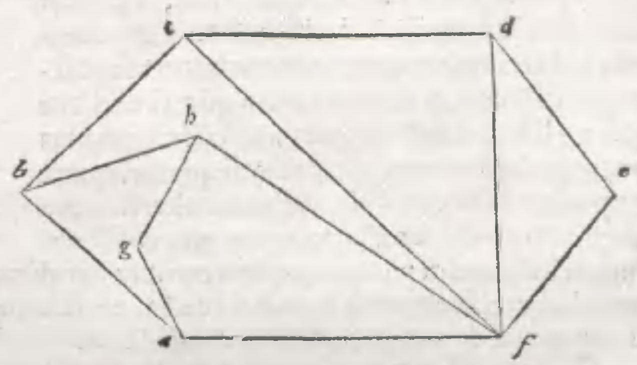


Deinde ex ordine nominat fruſtum ſolidum, & rhombum ſolidū, aperte declarans ſignificationem nominum. Poſt hęc petitiones quaſdam ſumit, quę ſunt ei opportunæ ad demonſtrationes ſequētes, quæ quidem ex ipſo ſenſu confeſſæ habentur: nihilominus tamen demonſtrari ex communibus conceptionibus, & ex his quæ demōſtrata ſunt in Elementis, poſſunt. Eſt autem petitionum prima huiuſmodi: Linearum omnium, quæ eiſdem terminis continentur, rectam eſſe breuiſſimam. Eſto enim in plano linea recta terminata hæc a b: & altera itē linea quædam a c b, eiſdē contenta terminis a b, poſtulat ſibi concedi ipſam a b minorē eſſe ipſa a c b. Dico igitur, quod hoc cū uerum exiſtat, petitū eſt. notetur itaq; in ipſa a c b, utcunq; punctum c: & iūgantur a c, c b, conſtat ergo, ipſas a c, c b eſſe ipſa a b maiores. Item ſumantur in ipſis

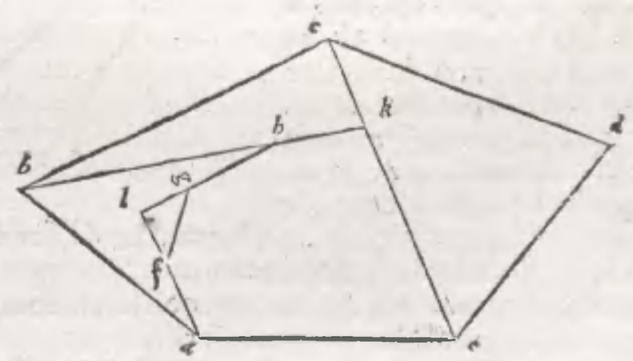


ſis a c, c b lineis alia utcunq; puncta d e, & iungantur a d, d c, c e, e b. ſimiliter iam hic cōſtat duas a d, d c eſſe maiores a c. & duas c e, e b maiores c b. Quare hæ a d, d c, c e, e b multo maiores erunt ipſa a b. Similiter autem & ſi alia puncta intermedia ſumpta notauerimus, & iunxerimus rectas ad puncta nunc ſumpta, inueniemus ipſas item maiores a b. et hoc aſſidue faciendo, quæ magis acceſſerint ad lineam a b rectę maiores inuenientur. quare conſtat ex his, eam a c b eſſe ipſa a b maiorem, cum poſſimus in tota ipſa punctum notare, & ipſam iungentes lineam ex rectis compoſitam, ut eam talem eſſe lineam oſtendamus, quæ eadem ratione ipſa a b probetur maior. neq; enim inconueniens eſt, in demonſtrationibus eorū quæ confeſſa habentur, huiuſmodi aſſumere conceptiones.

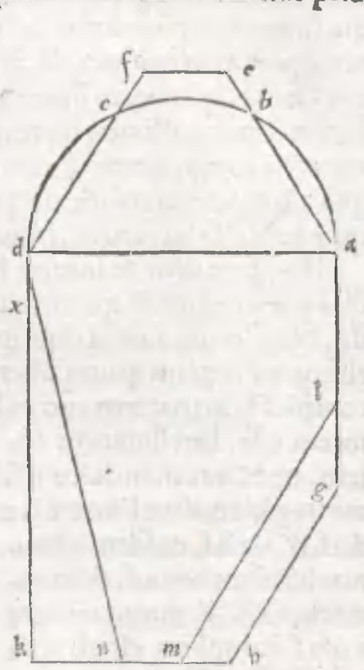
Poſt hæc dicit, ſe ſumere hoc: earum quæ eoſdem terminos habeāt linearum, illas eſſe inæquales, quæ in eaſdem cauas extiterint eo quo ſupra dictum fuit modo. Non ſolum autem dixit in hoc inæquales eſſe, hoc quod eſt in eaſdem cauas eſſe: uerum etiam quum altera alteram, aut totam complectitur, aut eius partem complectitur: partem autem habet communem & complectentem complexa maiorem eſſe. Intelligantur autem, ut & hoc manifeſtum fiat, in plano duæ lineæ a b c d e f, & a g h f, eoſdem terminos habētes hos a, f, & in eadem cauæ. & quoniam tota a g h f complexa eſt ab ipſa a b c d e f eoſdem terminos habēte hos a, f. dico iſtas inæquales eſſe, & quæ comprę hendit comprænhenſa maior eſt. Iungantur itaq; b h, c f, d f. Quoniam igitur ſi intelligatur iuncta h a, ad unum laterum ipſius a b h, intus cōnſtitutæ ſunt hæ a g, g h, his a b, b h, cōmuni poſita h f. Hæ igitur a g, g h, h f, minores ſunt his a b, b h, h f. Verum b h, h f, minores ſunt his b c, e f. nam ſunt intus rurſus ſuper unam b f cōſtitutæ. multo magis ergo a b, b c, c f maiores ſunt his a g, g h, h f. Verum hæ c d, d f, maiores ſunt hac c f. & hæ d e, e f, ſunt ipſa d f maiores. multo magis ergo hæ a b c d e f, ſunt his a g h f maiores.



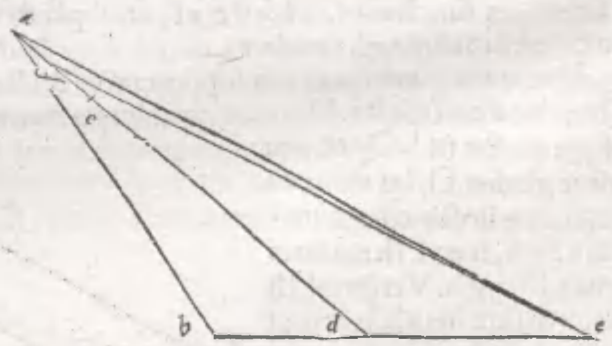
Declarationis enim gratia ſupponantur & aliæ lineæ ſimiliter prædictis, uelu ti hæ a b c d e, a f g h k e. Dico comprænhendentem eſſe maiorē. Intelligantur enim a f, g h erectæ in l. Quoniam igitur rurſus f l, l g maiores ſunt f g, adiectis communibus a f, g h, hæ a l, l h maiores ſunt a f, f g, g h. Verum a l, l h maiores ſunt his a b, b h. multo magis ergo a b, b h maiores ſunt his a f, f g, g h. adiecta communi h k, erunt a b, b k maiores his a f g h k. Verū b h, h k minores ſunt b c, c k. Multo magis ergo maiores a b c k, his a f g h k, adiecta communi k e, erunt hæ a b c k e maiores his a f g h k e. Verum hę c k, k e minores ſunt his c d, d e, multo magis ergo hæ a b c d e, maiores ſunt a f g h k e.



Et si circumferentiæ sint uel comprendentes uel comprensæ, aut utrumque, idem licet inspicere. nam si puncta cōtinuata in eisdem notentur, & in eadem iungantur, recte: sumentur lineæ ex rectis compositæ, quibus accommodabitur prædicta demonstratio, his quæ ex rectis componuntur quales illæ fuerint factis adiectis. unde & omnem lineam in continuatione punctorum existentiā habentem notato. Quod aūt conuenienter inæqualitatem linearum non solum ex hoc quòd in eadem cauæ sint, denotauit: uerum addidit etiam hoc, oportere alteram ab altera compræhendi, & ab ea quæ eosdem habeat terminos recta. nam nisi hoc fuerit, nō erit hoc utiq; uerū, omnino lineas tunc inæquales esse: uti conspicere licet in figuris infrascriptis. nam linea a b c d. & a e f d, eosdem terminos habent, & in eandem cauæ sunt: nec tamen constat, utra earū sit altera maior. nam potest esse ut æquales sint, & possint utræq; in eadem cauæ intelligi, & eosdem terminos habere. ambæ autem contraria inter se positione cōstitutæ, ut utrauis earum quæ sunt dictæ ipsi a g h k d: et ita incognitum est si inæqualitas aut æqualitas earum hoc pacto sequatur. quare opportunè adiectum est, aut totam alteram comprehendi ab altera recta oportere, quæ eosdē terminos habeat: aut partem quidem compræhendi, partem autem cum ea communem habere: sicuti in his a g h k d, & a l m n x d. in his enim quædam compræhenduntur, quædam communes sunt, uti a l m n.

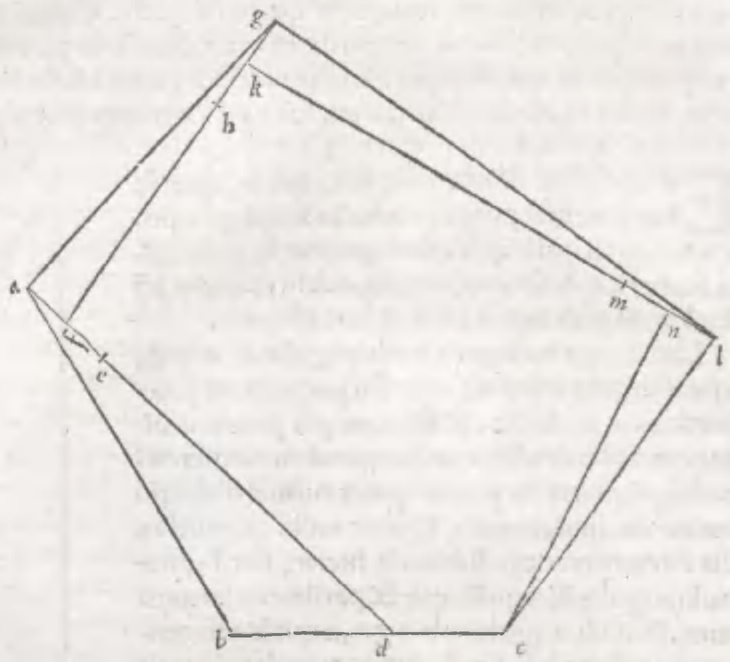


Opportunè autem admodum & illud ad inæqualitatis iudicium assumptum est, oportere lineas eosdem terminos habere. Si enim non fuerit illud, neq; altera alteram compræhendere poterit. Quomodo igitur inæquales erunt, nisi casu. nā quādoq; erunt æquales. & contingit esse comprænhensam aliquando cōprændente maiorem. Vt autē hoc declaretur, intelligantur in plano duæ rectæ, a b, b c, obtusum angulum ad b continentes: & sumatur in b c punctū utcunq; d. iungantur a d, a c. Quoniam igitur a d, maior est ipsa a b, ponatur a b æqualis ipsi d e, & diuidat̄ ae in duo æqua puncto f, & iungatur f c. Quoniā igitur duæ a f, f c maiores sunt a c, & æqualis a f est ipsi f e, erit e f, f c maior ipsa a c, adiecta eorum a b, erunt hæ d f, f c maiores his b a, a c. quare linea b a c intellecta una esse, & in eadem caua, altera uero d f c comprænhensa ab altera quæ eosdem terminos non habeat, non solum comprehendens non est maior cōprænhensa, uerum ostenditur minor esse.



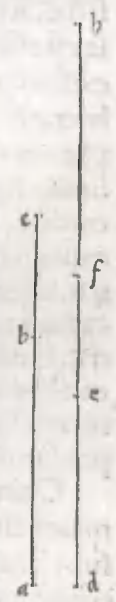
Et in lineis ex pluribus rectis compositis hoc idem licet inspicere. nam intelligantur in plano duæ rectæ hæ a b, b c: & pūctum d quodcunq; contingat, & iungatur a d. Rursus ponatur d e æqualis ipsi a b, & e a diuidatur in duo æqua puncto

cto f, & ducatur a g ad angulos rectos ad ipsam a d, & iungatur f g. & ponatur f h æqualis ipsi a g. & item diuidatur h g in duo æqua puncto k, & ducatur g l ad angulos rectos ad ipsam f g, & iungatur k l. item k m ponatur æqualis ipsi g l, & diuidatur m l in duo æqua puncto n. & item ducatur l c ad angulos rectos, ad ipsam k l, et iūgatur n c. Ex prędemonstratis igitur cōstat, d f maiorem esse ipsa a b, & f k ipsa a g, ipsam k n ipsa g l, ipsam n c ipsa l c. quare et totā lineā d f k n c, maiorem ipsa a b g l c. Opportunè ergo adiectū fuit, eas oportere eosdem habere terminos, in his quæ esse debeant inæquales. Potest autem qui hæc considerarit, idem de superficiebus demonstrare omnibus, quando cum his quæ prædictæ sunt conditionib. superficies sumptæ, eosdem terminos cum planis habuerint.



IN SECVNDVM THEOREMA.

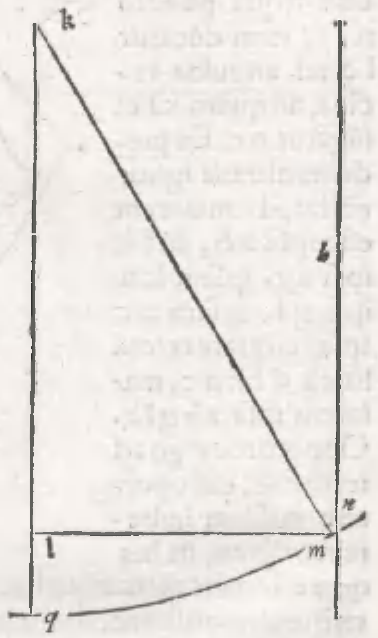
At uero a c sibi ipsi supercompositum, excedet ipsum d, uidelicet sic: cum ipsum a b superparticulare aut superpartiens contigerit esse ipsius d. Si autē sit a b multiplex ipsius d, aut multiplex superparticularis, aut multiplex superpartiens, ablato ab ipso b c æquali d, reliquum c a superabit d, ita ut non amplius necesse sit sumi multiplex ipsi, uerum ut oporteat inde ponere a b æquale ipsi a c, & eandem accommodare demonstrationem. Et componenti ipsi f h ad f g minorem proportionem habet, quàm a b ad b c. nā si primum ad secūdum minorem habeat proportionem, quàm tertiū ad quartum, componendo eadem proportio sequitur. Ostēdetur autem sic. Sūto quatuor magnitudines a b, b c, d e, e f. & a b maiorem ad b c habeat proportionem, quàm d e ad e f. Dico igitur componēdo, a c habere ad b c maiorem proportionem, quàm d f ad e f. Fiat enim sicut c b ad b a, ita f e, ad f h. Ecōuerso igitur, sicut a b ad b c, ita h f ad e f. maiorem aūt habet a b ad b c proportionē, quàm d e ad e f. igit̄ h f habet ad e f maiorem proportionem, quàm d e ad e f. quare h f maior erit ipsa d e, & totum h e maius toto d f. & propterea h e habet ad e f maiorem proportionem, quàm d f ad f e. Verū sicut h e ad e f, ita a c ad c b, per compositionem. igitur a c ad c b maiorem habet proportionem, quàm d f ad e f. At uero a c habeat ad c b maiorem proportionē, quàm d f ad f e. Dico diuidendo, quod a b habebit ad b c maiorem proportionem, quàm d e ad e f. Rursus enim similiter, si faciamus sicut c b ad c a, ita f e ad e h, fiet ut h e sit maior d f. quare communi e f ablata, erit h f maius d e. quare h f habebit ad f e, quę est sicut a b ad b c,



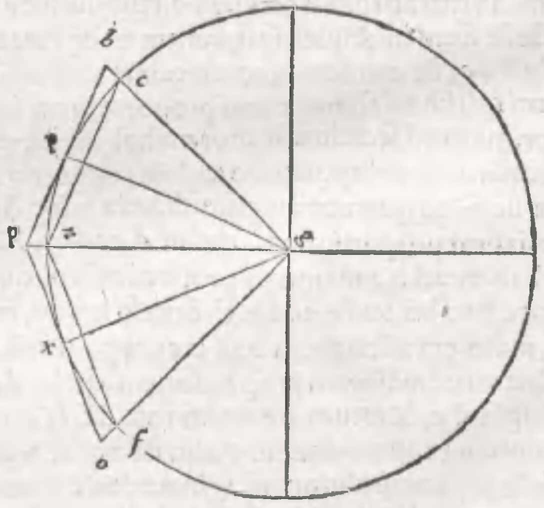
diuidendo maiorẽ proportionẽ, quàm d e ad e f. & cõponendo, & item diuidendo eadem proportio sequet̃. Ex eisdem aũt euersa proportio constat. habeat enim a c maiorem ad b c proportionem, quàm d f ad f e. Dico quod euertendo c a habebit ad a b proportionem minorem, quàm f d ad d e. Quoniã enim a c habet ad b c maiorem proportionem, quàm d f ad f e: & diuidenti a b habebit ad b c maiorem proportionem, quàm d e ad e f. E conuerso b c ad b a habebit minorem proportionem, quàm f e ad e d: & cõponenti, c a ad a b minorem habebit, quàm f d ad d e.

IN TERTIVM THEOREMA.

ET ab ipso k ducatur æqualis ipsi h, quæ sit k m hoc fieri potest producta k l ad q, & posita h æquali ipsi k q: & cẽtro quidem k, interuallo autem k q descripto, circulo uidelicet q m n, cõstat k m æqualem esse ipsi k q. hoc est ipsi h.



Latus ergo n c figuræ multiangulæ, & æquilateræ. Angulo enim recto in sesquiquartam proportionem adducto, & sectione per parem diuisionem facta à recto, constat quod circumferentia sesquiquarta in pariter pares numero distribuetur circumferentias. Quare recta quę uni ex illis circumferentijs subtensa fuerit, fiet figuræ multiangulæ & æquilateræ & parilateræ latus unum. Nam si angulo sub x g n, æqualem fecerimus angulum sub p g d, iungentes ab ipso p in g, & producamus usq; ad g h, ęqualem ipsi angulo sub p g d. constat p h esse æqualem ipsi p o, & attingere circulum. Quoniam enim ipsa x g æqualis est ipsi g d. nam ipsa g communis est: æquales enim complectuntur. Ergo basis x p æqualis est ipsi p d. & angulus sub p x g, rectus cum sit, æquatur angulo p d g. quare contingit ipsum p d. Quoniam enim qui ad d anguli recti sunt & qui sub p g d, d g h æquales: & est communis d g, quare g h æqualis est ipsi g p, & ipsa p d ipsi h d. Item ipsa x p ipsi p d ostẽsa est esse ęqualis. quare ipsa h p existit figuræ multiãgulæ æquilateræ & parilateræ latus, descriptæ circa circulum. Quod autẽ similis figurę inscriptę fiat, inde constat. Cum enim ipsa h g sit æqualis ipsi g p, & ipsa c g ipsi g n, æquedistans est h p ipsi c n. eadem ratione & ipsa p o, ipsi n k. Quare angulus sub c n k, æqualis est angulo sub o p h. quare circũscripta figura est inscriptæ similis.



Cum enim angulus a d k c, maior sit angulo sub c g t, si angulo sub c g t constituamus æqualem angulum sub l k r, ipso k intellecto inter ipsa l m, triangulus l k r similis erit triangulo c g t. erit sicut r k ad k l, sic c g ad g t. quare m k ad k l, maiorem proportionem habet, quàm c g ad g t.

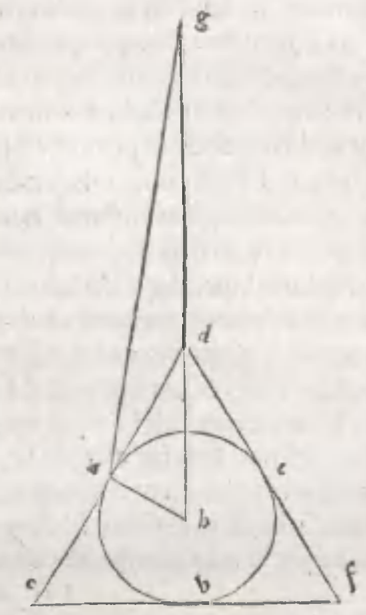
IN

IN SEXTVM THEOREMA.

PRopter hoc minus est circumscriptum utroq; simul. Quoniam enim circumscriptum, ad inscriptum minorem habet proportionem, quàm utrumq; ad circulum, multo magis ergo circumscriptum habet ad circulum minorẽ proportionem, quàm utrumq; simul ad circulum. quare circumscriptum minus est utroque simul circulo, communi ablato, erũt reliqua circum residua spacio b minora.

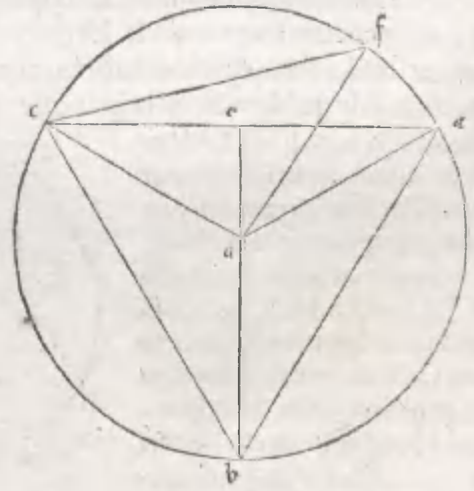
IN OCTAVVM THEOREMA.

PErpẽdiculares igitur à uertice ad a b c ductæ sunt super eas. Intelligatur enim conus seorsum, & esto uertex eius g, centrũ basis eius h, & ab h ad a iungatur h a, & a g, g h. Dico quod g a perpendicularis est ad ipsam d e. quoniam enim g h perpendicularis est ad circuli planum, & omnia secundũ eam plana. quare triangulus g h a erectus est ad basim: & stat erecta super communem sectionem planorum h a, in uno planorum ipsa d e. quare ipsa d e, super ipsam g h a planũ stat, ad angulos rectos: quare & super ipsam, g a. Similiter ostendentur illæ, quæ ad c, b, iunctæ sunt à uertice perpendiculares cũ sint super d f, e f. Sciendum aũt, quod in præmissa opportunè additum fuit hoc, oportere omnino pyramidem inscriptam habere basim æquilateram. non enim aliter à uertice ad basis latera ductæ possent esse æquales. In pręsenti non est additum, esse basim æquilateram. propterea utcunq; fuerit, idem sequetur.



IN NONVM THEOREMA.

MAiores igitur sunt trianguli a b d, b d c, triangulo a d c. Quoniam enim angulus ad d, solidus est, anguli sub a d b, b d c maiores sunt angulo sub a d c, & si à uertice ad sectionem basis in duo æqua iunxerimus d e perpendicularem super a c, erit angulus sub a d b maior angulo sub a d e. Constituatur itaq; angulo sub a d b angulus, sub a d f æqualis: & postea d f æquali ipsi d c, iungatur a f. Quoniam igitur duæ duabus æquales, & angulus angulo, & triangulus a b d triangulo a d f æqualis, qui est maior ipso a d e: quare triangulus a b d ipso a d e maior est. Similiter quoq; triãgulus a b c, ipso d e c maior. Igitur duo a d b, d b c, ipso a d b maiores sunt.



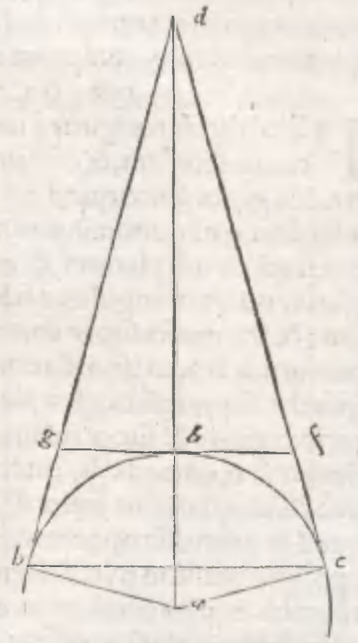
IN DECIMVM THEOREMA.

DVcatur enim g f e contingens circulum, & æquedistans ipsi a c, circumferentia a b c, in duo æqua diuisa puncto b. Quod enim sic ducta æquedistans fiat ipsi a c, ostendetur ductis à centro h, his h a, h d, h c. Quoniam enim a d est æqualis ipsi d c, & d h communis est, duæ duabus æquales, et basis a h basi h c, igitur & angulus angulo æqualis. Sunt autem anguli g b d, d b f recti. nam

à centro

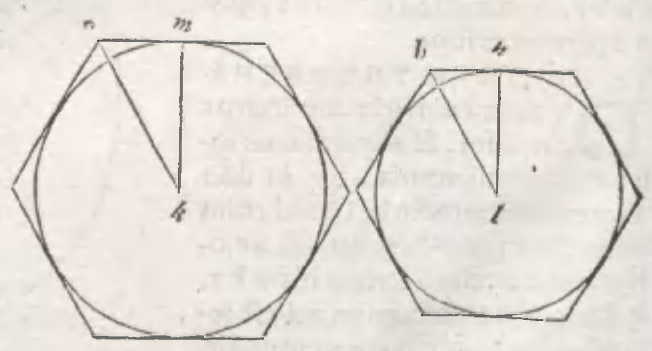
à centro ad contactum ducta est h b. quare reliquus angulus d g b, reliquo d f b æqualis est. idcirco ipsa g d, ipsi d f est æqualis: quare ipsa f g est æquedistans ipsi a c.

Circumscribentes itaque multiangula circa portionem, similiter circumferētijs circumceptis in duo æqua diuisis, ductis lineis cōtingentibus, sumemus quædam residua minora spacio h. de inscriptis quidem ostensum est in Elementis, triangulos portionibus inscriptos maiores esse dimidio portionum illarum. Idcirco possibile fuit, diuidendo in duo æqua circumferentias, & rectas ducendo, relinqui quędam residua spacio dato minora. In circumscriptis autem nondum hoc est ostensum, in Elementatione. Quoniā enim in præmissa hoc dixit, quod est ipsum collegisse per sextum Theorema, colligendum & ostēdendum quod contingens auferat triangulum maiorem dimidia ea in qua fit portione: ueluti in eadem descriptione, quod g d f triangulus maior est dimidio spacio compræhenso sub a d, d c, & circumferentia a b c. ductis enim eisdem, quoniam angulus d b f est rectus, erit ipsa d f maior ipsa b f, & ipsa b f æquatur ipsi f c. nam utraque earum applicatur. Igitur d f maior est ipsa f c, quare triangulus d b f triangulo b f c maior existit, nam in eadem sunt altitudine. multo magis igitur maior est spacio b f c compræhenso. Eadem ratione & d b g maior est b g a. quare totum d f g, maius est dimidio spacio a d c compræhenso.



IN XIII THEOREMA.

INtelligatur itaque circulo b circumscriptum, & inscriptum, & circulo a circūscriptum simile circumscripto ipsi b. quemadmodum autem circulo dato sit figura inscribenda polygonia, similis indescriptæ alteri circulo, à Pappo dictum fuit in Cōmentarijs elementorum. Circulo autem dato circumscribere figuram polygoniam, similem circumscriptæ alteri circulo, nondum habemus ab aliquo traditū: quod nunc dicendum est. Nam circulo b inscriptæ similis circulo a inscripta fuit, & circa a circumscriptæ similis inscripta fuit ipsi a, ueluti in tertio Theoremate. & est similis circumscriptæ ipsi b. Et quoniam figuræ rectilineæ circulis a, b circumscriptæ similes sunt, eandem habebunt proportionem, quam illæ quæ ex centris potentia. tale quidem de inscriptis ostensum est in Elementatione. de circumscriptis autem nondum. Ostendetur autem. sic intelligantur enim seorsum circumscriptæ & inscriptę figurę rectilineę, & à centris circulorum iūgantur k e, k m, l h, l n. Constat iā k m l n, ex centris esse circulorum circa circumscriptas figuras multiangulas descriptorum: & ad se inuicem haberi potentia, sicut figurę circumscriptæ. Et quoniam contenti sub k e m, l h n, sunt dimidij angulorum eorū qui sunt in polygonijs, cum ipsa



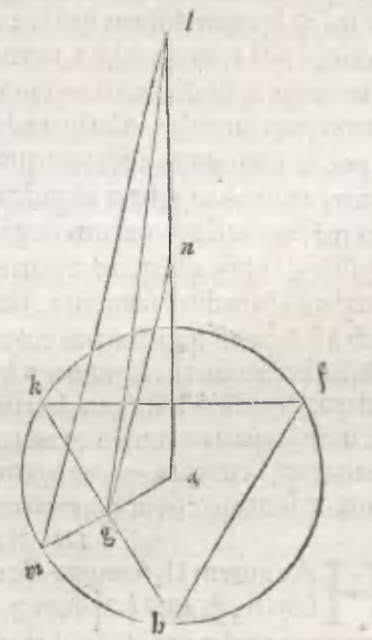
sint

sint similia, constat ipsos quoque æquales esse. At uero qui ad m, n, habentur, anguli recti sunt: quare trianguli k e m, l h n sunt æquianguli. & est sicut quadratum k e ad quadratum h l, sic circumscriptæ inter se figuræ. Ergo sicut quadratum k m, ad quadratum l n, sic figuræ circumscriptæ inter se habent. Triangulus igitur k d t, eandem proportionem habet ad rectilineam figuram circulo b circumscriptam, quam triangulus k d t, ad triangulum f r a. Quoniam enim rectilineæ figuræ circulis a, b inscriptæ se habent ad inuicem, sicuti quæ ex centro potētia, hoc est ipsa t a ad g potentia, hoc est t d ad r f longitudine: hoc est sicut triangulus k d t, ad ipsum f r l. Est autem ipsum k t d æquale circumscripto ad circulū, ad circulum a. Est igitur sicut k t d, ad circa circulum b descriptum, ita triangulus k t d, ad triangulum f r l.

Igitur permutatim prisma habet ad cylindrum minorem proportionē, quàm multiangulum circulo b inscriptum ad circulum b: quod est inconueniens. nam si faciamus sicut superficies prismatis ad superficiem cylindri, sic inscriptum circulo b haberi ad quidpiam aliud, erit id minus circulo b, ad quod inscriptum habet maiorem proportionem, quàm ad circulum. hoc est superficies prismatis ad superficiem cylindri maiorem habet proportionem, quàm inscriptum ad circulum, & ostensum est habere minorem, quod admitti non potest.

IN XIIII THEOREMA.

IPsa c ad ipsam d maiorem proportionem habet, quàm polygonium inscriptū circulo a ad superficiem pyramidis inscriptæ cono. nam quæ ex centro circuli ad latus coni maiorem habet proportionem, quam quæ à centro ad unum latus polygonij ducta perpendicularis, ad perpendicularem ductam à uertice coni ad latus ipsius polygonij. Intelligatur enim seorsum descriptio in rationali, & polygonium f h k inscriptum circulo a, & à centro a ad unum latus h k polygonij ducatur perpendicularis a g. Constat iam quod superficies contenta sub perimetro polygonij, & sub a g, est dupla polygonio. Intelligatur item pūctum l uerticem esse coni, et ab ipso l ad g ducta l g est perpendicularis super h k, uti ostensum est, in limmate octaui Theorematis. Quoniam igitur inscriptum polygonium est æquilaterum, & conus est æquicruris, erunt omnis ductæ ab l ad unumquodque latus polygonij perpendiculares ipsi, æquales l g. nam unaquæque earum potest quadratum axis, & quadratum a g. Et propter hoc contentum sub perimetro polygonij, & sub l g, est duplum superficiei pyramidis. quod enim sub unoquoque latere, & sub perpendiculari ducta à uertice ad latus ipsum, quæ & æqualis ipsi l g, duplum est triangulo secundum ipsam. quare sicut a g ad g l, sic polygonium ad superficiem pyramidis, sumpta cōmuni altitudine perimetri ipsius polygonij ducta g n æquedistāte ipsi m l, fiet sicut a m ad m l, sic a g ad g n. Ipsa uero a g ad g n maiorem proportionem habet, quàm ad g l. nam l g maior est ipsa g n. igitur a m ad m l, hoc est c ad d maiorem proportionem habet, quàm a g ad g l, hoc est quàm polygonium ad pyramidis superficiem.



IN XVI THEOREMA.

ET quoniam contentum sub b a,a g,æquatur cõtento sub b d,d f,& contento sub a d,& sub utraq; simul d f,a g,cũ d f sit æquedistans ipsi a g. quoniã enim d f,est æquedistãs ipsi a g, est sicut b a ad a g, sic b d ad d f,atq; idcirco cõtentũ sub extremis b a,d f,æquatur contento sub medijs b d,a g. Verum cõtentum sub b a, d f,æquatur contento sub b d,d f, & cõtento sub a d, d f, per primum Theorema libri secundi Stoichioseos. Igitur contentum sub b d, a g,æquatur contento sub b d,d f.& contento sub a d,d f,adiecto communi contento sub d a, a g, erit contentum sub b d,& a g,cum contento sub a d,a g:quod est contentum sub b a,a g, æquale erit contento sub b d,d f,& contento sub a d,d f, & itẽ cõtento sub a d,a g.

IN XXIII THEOREMA.

MVltitudo autem laterũ polygonij mensuretur quaternario. Vult latera polygonij numerari quaternario, quia circulo moto circa diametrũ a c, latera omnia ferentur secũdum conicas superficies, cum hoc sit sibi usui in sequentibus. Nam si latera polygonij quaternario non mensuretur, quamuis parilaterum fuerit, non possunt omnia ferri secundum conicas superficies, uti percipi potest in lateribus hexagoni. duo enim ex opposito latera eius, inuicem æquedistãtia, continget ferri secundum cylindricas superficies: quod quidem sibi non est usui ad sequentia, ut dictum est.

IN XXIX THEOREMA.

IPsa uero k h æqualis est diametro circuli a b c d. Si enim a puncto q iunxerimus ad punctum m, quo k f contingit circulum a b c d, quod sit m. similiter autem & ipsam q k: quoniam q k est æqualis ipsi q f, & anguli ad m sunt recti. namq; k m, est æqualis ipsi m f. item ipsa f k ipsi q h est æqualis: igitur q m æquedistans est ipsi k h. & idcirco est sicut h f ad f q, ita k h ad k m. uerum h f dupla est ipsius q f, igitur k h dupla est ipsius q m, quæ est ex centro circuli a b c d.

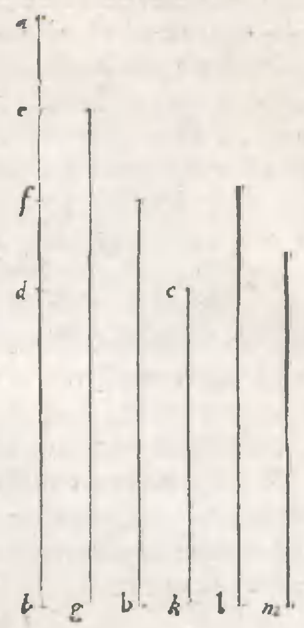
IN XXX THEOREMA.

HAbet autem diameter circuli m, ad diametrum circuli ipsius n proportionẽ, quam habet e l ad a k. nam si iungatur hæ g l, c k, angulis ad k l factis rectis, & ipsa a k æquedistans ipsi l c: triangulus enim g l e est æquiangulus. idcirco est sicut g l ad l e, ita c k ad k a. uerum sicut g l ad l e, sic omnis iungentes angulos circumscriptæ ad diametrum circuli circumscripti. Sicut autem c k ad k a, sic omnis iungentes angulos inscripti ad diametrũ circuli a b c d. Sicut autem diametros ad latus, sic diametros ad latus: quoniam & sicut m e ad e l, sic m a ad a k. & per æquã, sicut omnes iungentes angulos circumscripti ad e l, ita omnes iungentes angulos inscripti ad a k. uerum sicut omnes ad latus e l, sic contentum sub omnibus, & sub e l: hoc est quadratum eius quæ ex centro m, ad quadratum e l, ipsa e l æqualem altitudinẽ sumente. sicut aũt omnes ad a k, sic contentũ sub omnibus, & sub a k, hoc est quadratum eius quæ ex centro n ad quadratum a k, communem altitudinem rursus sumente a k. Est igitur sicut quadratum eius quæ ex centro m ad quadratum e l: ita quadratum eius quæ ex centro n, ad quadratum a k. Igitur sicut ipsa quæ ex centro m ad ipsam e l, ita quæ ex centro n, ad ipsam a k. Et permutatim, sicut quæ ex centro m, ad eam quæ ex centro n, ita e l ad a k. Et duplæ antecedentium: sicut diametros ipsius m ad diametrum ipsius n, sic e l ad a k.

IN XXXII THEOREMA.

HAe autem i h sumptæ, sic ut æqualiter se superent ipsa k ipsam i, & ipsa i ipsam h, & ipsa h ipsam g, propositum est duabus rectis datis duas medias proportionales inuenire in Arithmetica analogia: quod idem est, ut sese æqualiter superent. Hoc autem fiet hoc modo. Sint duæ rectæ datæ a b, c k inæquales, et ablata ab ipsa a b æquali ipsi c k, quæ sit b d, residua d a diuidatur in tria ęqua punctis e, f. & ponatur g æqualis ipsi e b, & h æqualis ipsi b f. Erunt itaq; g h perficientes

tes, id quod propositum est. Dico quod a b, habet ad c k maiorem proportionem quam triplam eius quam habet a b ad g. Fiat enim sicut a b ad g, sic g ad aliam quandam l. Et quoniam qua sui parte a b superat ipsam g: ipsa g superat eadem sui parte ipsam l. pars uero ipsius a b maior est parte illa ipsius g. Igitur a b maiori excedit ipsam g, quam ipsa g ipsam l. Tanto autem ipsa a b superat ipsam g, quanto g ipsam h. Igitur ipsa g maiori excedit ipsam h, quam ipsam l. quare l maior est ipsa h. Si rursus fecerimus sicut g ad l, sic l ad m, multo maior erit ipsa c k. Et quoniam sunt quatuor rectæ a b, g, l, m continuę proportionales, habebit a b ad m proportionem, a b ad g triplicatam. quare a b habet ad c k maiorem proportionem, quam a b ad g triplicatam.



IN XXXV THEOREMA.

VErum contentum sub e h, & sub e f, c d, k a ostensum est æquale esse contento sub e l, k h. In uigesimo enim secũdo Theoremate ostensum est, quod e f, c d, k a ad h k cãdem proportionem habent, quam l e ad e h. quare contentum sub extremis est æquale contento sub medijs. cõtentum autem sub e l, k h minus est quadrato h a. Cum enim contentum sub l h, h k, sit æquale quadrato h a, uti constat, coniuncta a l: propterea quod triangulus h a k factus est similis triangulo h a l. Est enim sicut l h ad h a, sic a h ad h k, & ideo contentum sub extremis æquale quadrato mediæ.

IN XXXVII THEOREMA.

HAbebit iam idem centrum cum circulo a b. Si enim a d e iũgantur rectæ ad h e l, æquales erunt, proptera quod ductæ a d ad contactus rectæ sunt perpendiculares ad aptatas, & diuiduntur adaptatæ in duo æqua ad contactum. aut quando fiat maior enim est superficies superficie: quoniam enim m f secundum superficiem conicam fertur, secundum coluri coni superficiem feretur, quæ est æqualis circulo, cuius quæ ex centro sit media proportionalis inter f m, & dimidiã utriusque simul f g, & m n. Similiter & superficiei coluri coni factæ ab m a, æqualis est circulus, cuius quæ ex centro sit media proportionalis inter rectam m a, & dimidiam utriusq; simul a b & m n. Et ipsa quidem f m maior ipsa m a, & ipsa f g ipsa a b maior, igitur media, quare & superficies superficie. Superficies igitur contenta sub f m, m g, maior est superficie contenta sub m a, n b.

IN XXXVIII THEOREMA.

SVperficies igitur figuræ k f l maior est circulo, & cætera quæ sequũtur, obscure uidetur collegisse quod dictum est. Dicatur autem aperte hoc modo. Quoniam circulus n est æqualis superficiei figuræ. quæ autem ex centro ipsius n, potest contentum sub m h, f g: contentum autem sub m h, f g maius est cõtento sub c d, d x. nam m h ostensa est æqualis ipsi c d, & ipsa f g maior d x. Igitur circulus n maior est circulo cuius quæ ex centro potest contentum sub c d, d x. contentum autem sub c d, d x, æquatur quadrato d a. Igitur circulus n, hoc est superficies circumscripti, maior est circulo cuius quæ ex centro æqualis est ipsi d a.

IN XXXIX THEOREMA.

VErum spacia prædicta sunt ad inuicem, sicut quadratum lateris e k ad quadratum lateris a l. Si enim iungatur d l k, cum e k sit ęquedistans ipsi a l, erit sicut e d ad d a, ita e k ad a l. Sicut autem e d ad d a, sic e f ad a c. igitur sicut e k ad a l, ita e f ad a c, & dimidia ipsius e f ad dimidiam ipsius a c. Similiter & in omnib. iungentibus angulos polygonorum ostendetur, quod eandem inter se habeant proportionem, quam e k ad a l. Igitur sicut unum ad unum, sic omnia ad omnia. quare sicut e k ad a l, sic omnis iungentes angulos polygoni circumscripti, cum dimidia base portionis maioris, ad omnes iungentes, cum dimidia base minoris portionis. quare sicut quadratum e k, ad quadratum a l, sic contentum sub e k, & omnibus, ad contentum sub a l, & omnibus. Figuræ enim rectilineæ similes sunt dupla laterum similium proportione, & proportionis e k ad a l dupla est quadrati e k ad quadratum a l proportio. Cōiungentium autem angulos maioris, ad cōiungentes angulos minoris dupla est ea quæ contenti sub e k, & omnibus, ad cōtentum sub a l, & omnibus. Similia enim & ipsa, cum habeant latera proportionalia. Et est sicut e k, ad eam quæ ex centro minoris sphæræ, sic a l ad ductam à centro ad a l perpendicularem. Si enim à centro ad contactum iungatur, recta erit ducta perpendicularis ad utrasque e k, a l. & est sicut e d ad d a, hoc est e k ad a l: sic quæ ex centro ad contactum ducta, hoc est quæ ex centro minoris sphæræ, ad eam quæ ex centro ad a l ducta est perpendicularis.

Ostensum est autem, sicut e k ad a l, sic quæ ex centro circuli m, ad eam quę ex centro circuli n. Quoniam ostensum est, sicut polygonium ad polygonium, sic circulus m ad circulum n: hoc est quadratum eius quæ ex centro m, ad quadratū eius quæ ex centro n.

IN XL THEOREMA.

VTraq; enim proportio dupla est eius quam habet latus circumscripti polygoni ad latus inscripti. Ostensum est enim in hoc, quod est sicut quæ ex centro circuli æqualis superficiei circumscripti, ad eam quæ ex centro circuli æqualis superficiei inscripti: sic latus circumscripti polygoni, ad latus inscripti. Circuli autem inter se sunt in dupla proportione suarum semidiametrorum. Superficies igitur ad superficiem, duplam habet proportionem eam, quā habet latus ad latus.

IN XLII THEOREMA.

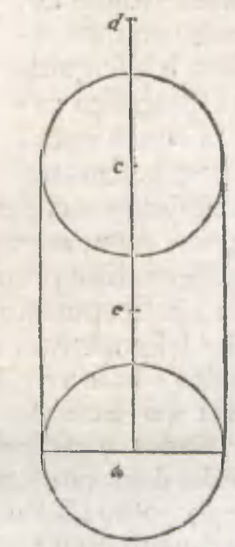
SOlidum igitur circumscriptum, ad inscriptū, minorem habet proportionē, quàm solidum frustum ad conum h. Si enim circumscriptum solidum ad inscriptum minorem habet, quàm triplicatam proportionē, eam quam habet b ad f, & ipsa d habet ad e minorem, quam eam triplicatam. circumscriptum igitur habet ad inscriptum minorem proportionem, quàm d ad e, & d habet ad e minorem proportionem, quàm frustum ad conum. Circumscriptum ergo ad inscriptum, minorem habet quàm frustum ad conum.

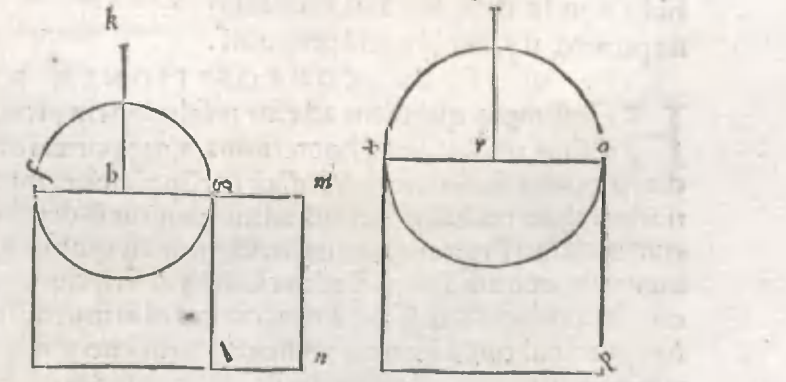
EVTOCII ASCALONITAE COMMENTARIVM, in primum traditionis Archimedis de Sphæra & cylindro, ascriptum Milesio mechanico Isidoro præceptori nostro, finit.

EVTO-

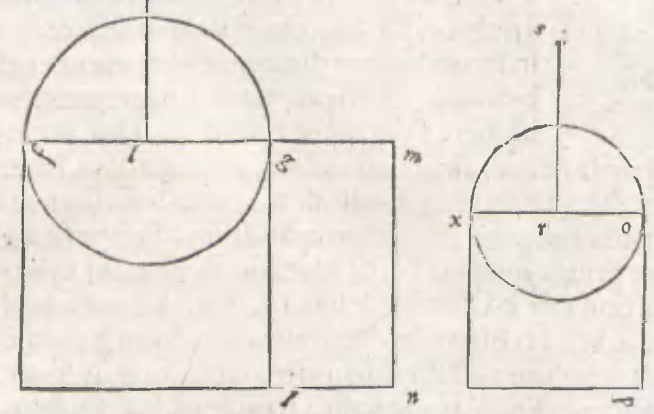
EVTOCII ASCALONITAE COMMENTARIVM IN SECVNDVM *de Sphæra & cylindro.*

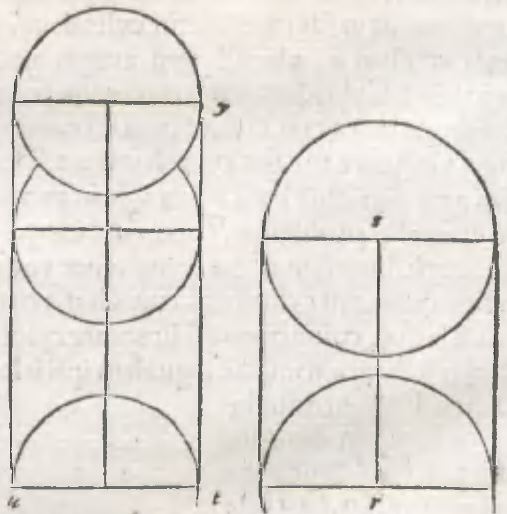
QVVM ea quæ in primo libro continentur Theoremata, satis sint à nobis explicata: consequens inde accedit, ut eodem modo his quę in secundo libro theoremata habentur explicandis, studium adhibeamus. Dicit in primo Theoremate: Sumatur dato cono, uel cylindro, sesquialter cylindrus. Hoc autem dupliciter fieri potest, aut seruata in ambobus base eadem, aut altitudine. Et ut apertius fiat quod dictū est, intelligatur conus, aut cylindrus, cuius basis sit circulus a, altitudo autē a c, & sit inuenire eius sesquialterum cylindrum. Supponatur autem prius cylindrus a c, & educatur à c altitudo cylindri, & ponatur c d dimidia ipsius a c. igitur a d erit sesquialtera ipsius a c. Si iam intelligamus cylindrum habentē basem circulum a, altitudinem uero rectam a d, ipse erit sesquialter cylindri a c propositi. nam coni & cylindri in eadem base constituti, habent se ad inuicem, sicut eorum altitudines. Si autem conus sit a c, diuisa a c in duo æqua puncto e: si rursus intelligatur cylindrus, qui basem habeat circulum a, altitudinem autem a e, erit sesquialter coni a c. Cylindrus enim qui basim habeat circulum a, & altitudinem a c rectam, triplus est coni a c, & duplus cylindri a e. quare constat cylindrum a e sesquialterum esse coni a c: cuius eadē base saluata, & in proposito & in sumpto efficietur problema. Licet autē idem fieri, & si basim contigerit diuersam esse, axe manente eodem. Esto enim rursus conus, aut cylindrus, cuius basis circulus f g, altitudo h k recta, cuius opus est inuenire cylindrū sesquialterū, qui habeat altitudinē æqualem ipsi h k, Describatur quadratū f l ab f g diametro circuli, & producta f g ponatur g m dimidia ipsius, & cōpleatur parallelogrāmū f n. Erit igitur f n sesquialterum ipsi f l, & ipsa f m ipsi f g. Cōstituatur enim parallelogrāmo f n, æquale quadratum x p: & circa diametrum, unum laterum eius x o describatur circulus. Est itaq; x o sesquialter ipsi f g. nam circuli sic se habēt, sicut quadrata suarum diametrorū.





Item si intelligatur cylindrus, qui basim habeat circulum x o, & altitudinem æqualem ipsi h k, erit sesquialter cylindri habentis basim circulum f g, altitudinem uero h k. Si autem sit conus, idem facientes, & constituentes quadratum x p, æquale tertiæ parti perallelogrāmi, & describētes circa unū latus eius x o circulum, intellexerimus ex ipſo cylindrum habentem altitudinem h k: habebimus eum ſeſquialterum coni propoſiti. Quoniam enim parallelogrãmum f n eſt triplum quadrati x p, & ſeſquialterum ipſi f l, erit f l duplum ipſi x p. quare & circulus circulo duplus, & cylindrus cylindro. Verũ cylindrus habens baſem circulum f g, altitudinem uero h k, triplus eſt cono circa eãdem baſim & altitudinẽ cõſtituto. Quare cylindrus baſim habens circulum x o, altitudinem uero æqualem h k, ſeſquialter eſt propoſito cono. Si autem oporteat neq; baſem, neque altitudinem eſſe eandem, rurſus hoc dupliciter fiet, aut enim baſim habebit æqualem datæ, aut axem cylindrus propoſitus. Eſto prius baſis data circulus x o. Et opus eſto cylindrum inuenire ſeſquialterum dato cono, aut cylindro a baſe x o, id eſt qui baſim habeat x o. Sumatur ut prædictum eſt, cylindrus u y ſeſquialter cono, aut cylindro dato, eandem baſim habens cum propoſito: & fiat ſicut quadratũ x o ad quadratum t u, ſic altitudo u y ad ipſam r s. Erit igitur cylindrus ab x o baſe habẽs altitudinem r s, ęqualis u y. nã baſes ſe habent mutuò ut altitudines, & factũ erit imperatũ. Si autem baſis non ſit data, ſed axis, eadẽ ratione prolato u y, fiet id quod proponit.





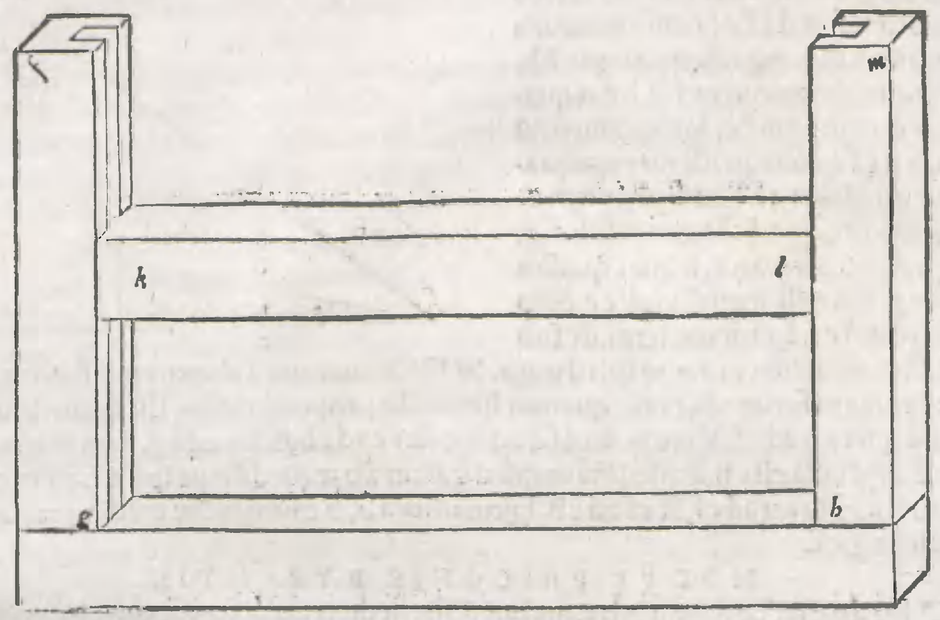
IN COMPOSITIONEM PRIMI.

HOc ſumpto, quoniam ad eius reſolutionem proueniũt ea quæ in problemate ſunt, reſolutiõe ad hoc terminata, ut oporteat duab. rectis datis duas eis medias proportionales inuenire. dixit in cõpoſitione, inueniãtur. Harum aũt inuentionem ab eo traditam nuſquã adhuc penitus inuenimus. multorum autem clarorum uirorum ſcripta in manus inciderunt, in quibus hoc problema tractatum inuenimus, ex quib. ſolam Eudoxi Cnidij deſcriptionẽ repudiauimus. Nam in proœmijs quidem dixit ſe per lineas curuas eam inueniſſe. uerum in demonſtratione, præter id quod non curuis lineis utatur, uerum & diſiunctam proportionalitatem conſtituens, ea uti continua utitur, quod ſanè abſurdum eſt. Sed quid dico de Eudoxo, uerumetiam de quibuſdã qui mediocriter in Geometria uerſati ſunt. Vt autem eorum quæ ad nos peruenerunt hominum ſententiæ planè haberi poſſint, eorum uniuſcuiuſq; inueniendi modum iſtic deinceps deſcribemus.

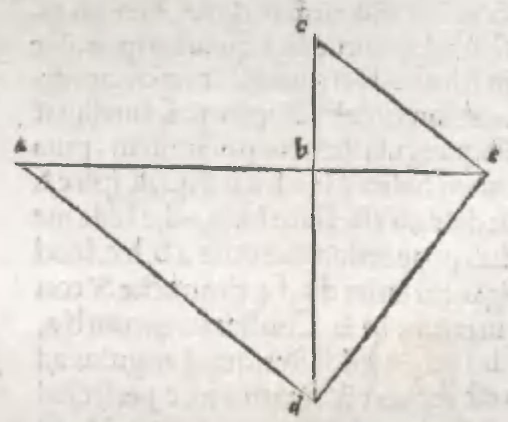
MODVS PLATONIS.

DVabus rectis datis, duas rectas medias illis proportionales in continua proportionalitate inuenire. Sint duæ rectæ datæ a b, b c inuicem perpendiculares-

res, quibus opus ſit duas medias proportionales inuenire. Producantur in directũ ad d, e: & paretur angulus rectus ſub f g h: & in uno eius crure, puta f g, moueatur regula k l, in quodam conſtituto in f g, ita ut permaneat æquediſtans



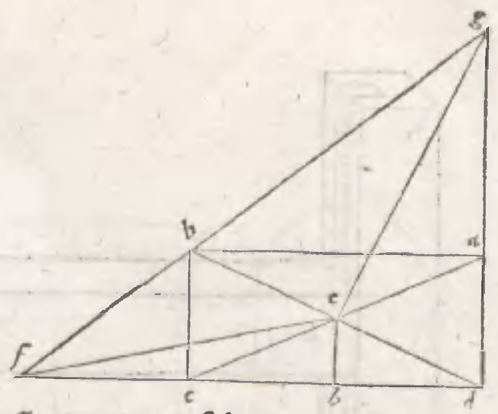
ipſi g h. Fiet autem hoc, ſi intelligamus alteram regulam confixam ipſi h g, æquediſtantem ipſi f g, puta in Superioribus enim ipſarum f g, h m, ſuperficiebus firmatis aſſialibus, & coaptatis ipſi k l, ad dictos erit tunc motus ipſius k, ſemper æquediſtãs ipſi g h. His ita paratis, applicetur unum crus anguli quodcunq;, puta g h, cõtingẽs c: & regula attingat a, ita uti in deſcriptione habetur. fiat angulus rectus, portionem habens, puta c d e, & regula k l poſitionem habeat, puta e a. nam his ita confectis, propoſitum effectum eſt. Cum enim anguli ad d e, ſint recti, erit ſicut c b ad b d, ita b d ad b e, & e b ad b a.



MODVS HERONIS IN MECHANICIS INTRO*ductionibus, & in telis fabricandis.*

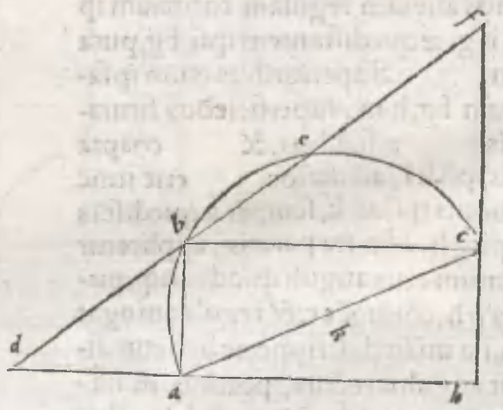
SInt duæ rectæ datæ a b, b c: quibus opus ſit duas medias proportionales cõſtituere. diſponantur ita, ut ambiant angulum rectum ad b, & compleatur b d parallelogrammũ, & iungantur a c, b d. conſtat eas æquales eſſe, & ſe mutuò per æqualia ſecare puncto e. nam circulus circa alteram earum deſcriptus, per terminos alterius tranſibit, cum perallelogrammũ ſit orthogoniũ. producantur hæ d c, d a uſque ad f g, & intelligatur regula, puta f b g, mota circa quendam clauum fixum in b: & moueatur, donec abſcidantur æquales ab e ductæ: hoc eſt e g, e f. & intel-

intelligatur sectio positionem habere, puta f b g, factis e f, e g æqualibus, ut dictū est. Ducatur ab e perpendicularis ad c d, puta e h, constat eam secare ipsam c d in duo æqua. quoniam itaq; c d, in duo æqua secatur puncto h, & additur ei c f, fit ut contentum sub d f, c f, cum quadrato c h, æquetur quadrato h f. quadrato e h communi adiecto erit cōtentum sub d f, f c: cum quadratis harū c h, h e, æquale quadratis f h, h e. quadratis autem f h, h e æquatur quadratum f e. Igitur contentū sub d f, f c, cum quadrato c e, æquatur quadrato e f. Similiter autem ostendetur, quod cōtentum sub d g, g a, cū quadrato a e, æquat quadrato e g. & a e est æqualis ipsi e c, & ipsa g e ipsi e f. Igitur contentum sub d f, f c, æquatur contento sub d g, g a. Si aūt contentum sub extremis fuerit æquale contento sub medijs, erūt quatuor lineæ illæ proportionales. Est igitur sicut f d ad d g, ita a g ad c f. Verum sicut f d ad d g, sic f c ad c b, & b a ad a g. nam in triangulo f d g ducta est c b, æquedistans ipsi d g, item a b æquedistans ipsi d f. Sicut ergo b a ad a g, ita a g ad c f, & c f ad c b. Igitur inter a b, b c sunt factæ mediæ proportionales a g, c f.



MODVS PHILONIS BYSANTII.

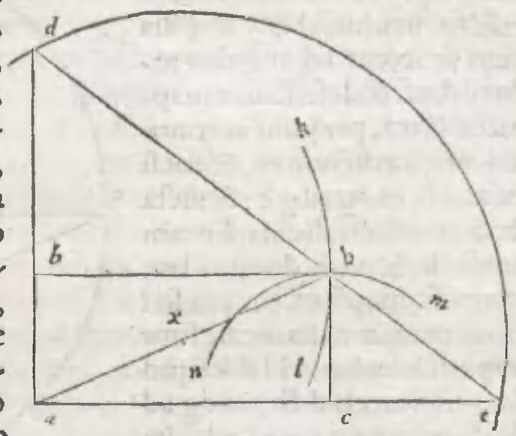
Sint duæ rectæ datæ a b, b c, quibus opus sit duas medias proportionales inuenire. Disponantur ita ut ambiant angulum rectum ad b, & iuncta a c describatur super eam semicirculus a b e c: & ducatur a d secundum angulos rectos ad ipsam b a, & item c f ad ipsam b c. & applicetur regula mobilis ad b, secans a d, c f, & moueatur circa b, donec quæ ab ipso b ad ipsum d sit æqualis ei quæ ab e in f: hoc est, ei quæ est inter circumferentiam circuli, & ipsam c f. Intelligatur itaq; regula habere positionem, puta quam habet d b, e f, d b æquali ipsi e f, ut dictum est. Dico itaq; a d, c f esse medias proportionales inter a b, b c. Intelligantur enim d a, f c protractæ & concurrentes in h. Constat itaq;, cum b a, f h sint ęquedistātes, quod angulus ad h est rectus, & circulus a e c perfectus transibit per h. Quoniam igitur d b est æqualis ipsi e f, igitur contentum sub e d, d b est æquale contento sub b f, f e. Verum contentum sub e d, d b æquatur contento sub h d, d a. nam utrūq; est æquale quadrato cōtingentis à puncto d ductæ. Contentum autem sub b f, f e, æquatur contento sub h f, f c. nam utrumque similiter æquatur quadrato contingentis ductæ à puncto f. quare contentum sub h d, d a, æquatur contento sub h f, f c. Idcirco sicut d h ad h f, sic c f ad d a. Verum sicut h d ad h f, sic b c ad c f, & d a ad a b. nam in triangulo d h f, ducta est b c ęque distans ipsi d h, item b a æquedistans ipsi f h. Est igitur sicut b c ad c f, ita c f ad d a, & d a ad a b: quod erat propositum. Sciendū est autem, quod huiusmodi apparatus est idem ferè cum illo superiori Heronis. nam parallelogramum b h, idem cū eo quod sumptum fuit in apparatu Heronis, & latera producta h a, h c eadem, & regu-



regulà mota ad b. Hoc solum differunt, quod in illo quidem mouebatur regula donec ductæ à sectione ipsius a c, per æqualia, puta ab ipso k separarentur æquales coincidentes ad h d, h f, puta k d, k f. In hac uero mouetur, donec d b sit æqualis e f. in utraq; autem figuratione idem sequitur. Quod autem nunc dictum est, facilius in usu ponitur. nam ipsę d b, e f seruabūtur æquales, diuisa d f regula per æqualia & continua. hoc autem multo facilius est, quàm circino tentare eas quæ ab ipso k ad d & f ductæ fuerint, æquales facere.

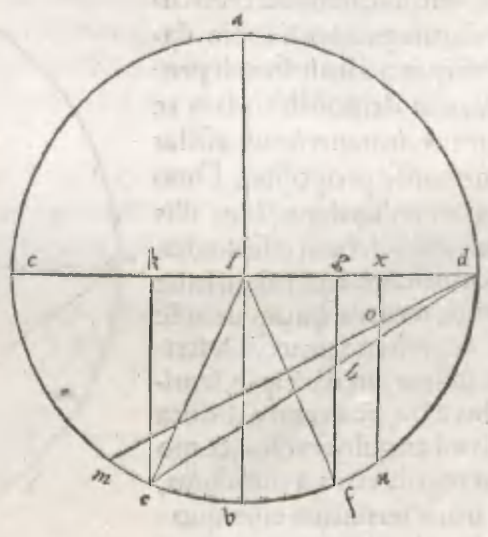
MODVS APOLLONII.

Sint duæ rectæ, quæ a b, a c: quib. opus sit duas medias proportionales inuenire, quæ ita aptentur, ut ambiāt angulum rectū ad a. & centro b, interuallo a c describatur circumferētia circuli k h l. item centro c, interuallo a b, describatur circumferentia circuli m h n, quæ secet ipsam k h l in puncto h. & iungatur h a, h b, h c. Igit̃ b a c h est parallelogrāmū, cuius est h a diametros. diuidatur h a, in duo æqua puncto x, & centro x describatur circulus secans ipsas a b, a c, productas in punctis d e: ita ut puncta d e sint in eadem linea recta cum ipso h. quod utiq; fiet, cum regula mota circa h, & secāte ipsas a d, a e, & diducta, donec ductæ à puncto x ad puncta d e sint æquales. Hoc enim facto habebimus quæsitum. Ita utique figuratio eadem est cum illa Heronis & Philonis, & constat eandem demonstrationem adhiberi.



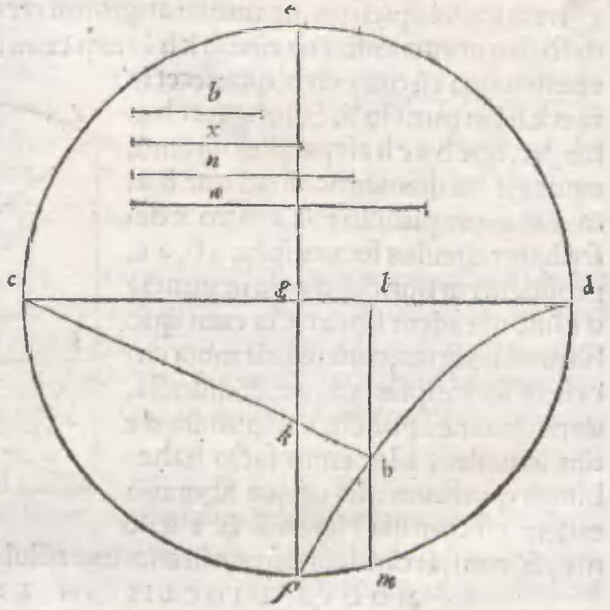
MODVS DIOCLIS IN LIBRO DE PIrijs pulcherrimus.

IN circulo ducantur duæ diametri ad angulos rectos a b, c d, & separentur duæ circumferentiæ æquales utrinq; ad b, hæ e b, b f. & per f ducatur æquedistās ipsi a b, quæ sit f g, & iungatur d e. Dico quod inter c g, g h sint duæ mediæ proportionales hæ f g, g d. Ducatur enim per e linea e k, æquedistans ipsi a b. igitur e k æqualis est ipsi f g, & k c ipsi g d. Hoc autem constat, ductis à puncto l rectis ad e f. nā anguli c l e, f l d sunt ęquales. & recti ad k, g. igitur omnia omnibus, propterea quod l e æquatur ipsi l f. igitur reliqua c k est ęqualis ipsi g d. Quoniam igitur est sicut d k ad k e, sic d g ad g h. item sicut d k ad k e, ita e k ad k c. nā e k est media proportionalis harum d k, k c. Sicut ergo d k ad k e, ita e k ad k c: & sic d g ad g h. & d k est æqualis ipsi c g, & ipsa e k ipsi f g, ipsa k c ipsi g d. Igitur sicut c g ad g f, ita g f ad g d, & d g ad g h. Si item utrinq; ex b sumantur æquales circumferentiæ hæ m b, b n, & per n ducatur n x æquedistans ipsi a b, & iungatur d m, erūt rursus inter c x, x o mediæ proportionales hæ n x, x d. Pluribus itaq; hoc



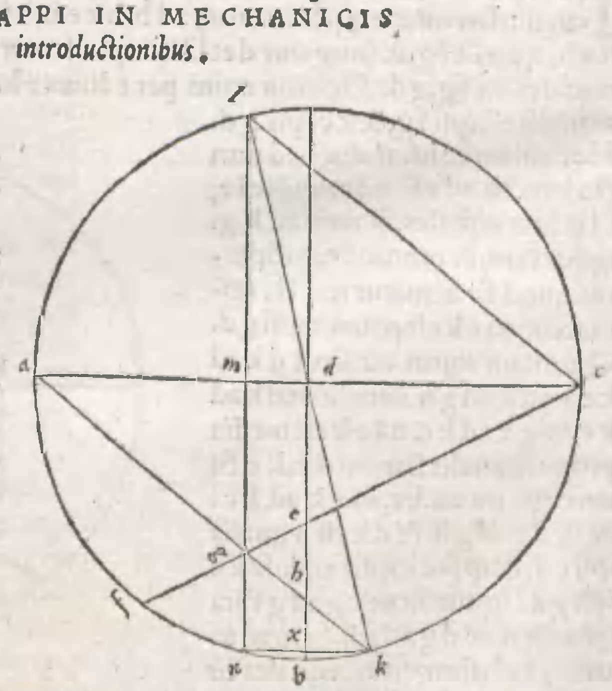
pacto æquedistantibus continuis, productis inter b d, & circumferentijs depræhensis ab illis uersus b, ponendo alias æquales uersus c, & ad puncta facta iungendo rectas lineas à puncto d, ita ut similiter fiant ipsis d e, d m: diuidentur parallelæ quæ sunt inter b d secundum quædam puncta, in proposita descriptione, puncta o h: quibus regula applicata iungentes rectas, habebimus quandam lineam in circulo descriptam. in qua si sumatur quodcunque punctum, & per ipsum ducatur ęquedistans ipsi l b, erunt ipsa ducta, & illa quæ abscinditur ab illa, ex diametro uersus d, mediæ proportionales, inter lineam ab eadem ex diametro uersus c abscisam, & partem eius contentam à puncto in illa signato ad diametrum.

Istis ita constitutis, sint duæ rectæ a, b, quibus opus sit duas medias proportionales inuenire: & sit circulus, in quo duę diametri se secent ad angulos rectos c d, e f. & describatur in ipso d h f linea, per puncta continua, uti prædictum est, & fiat sicut a ad b, ita c g ad g k: & iūcta c k, & producta diuidat lineam puncto h, & per h ducatur l m, æquedistans ipsi e f. per præscripta igitur inter c l, l h medię sunt proportiōales hæ m l, l d. Et quoniam est sicut c l ad l h, ita c g ad g k. Sicut autem c g ad g k, ita a ad b. Si autem in eadem proportione ipsarum c l, l m, l d, l h cōstituamus inter a b, puta istas n, x, illæ sumptæ erunt inter a b mediæ proportionales: quod erat inueniendum.



MODVS PAPPI IN MECHANICIS *introductionibus*.

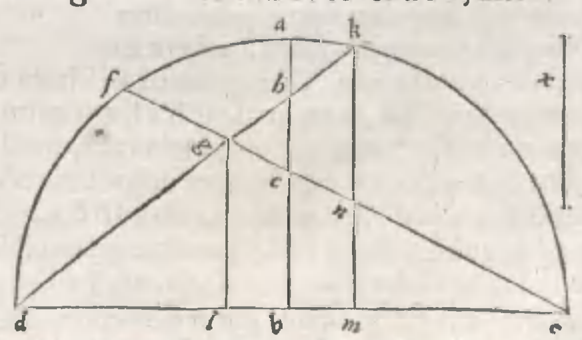
PRoposuit Pappus inuenire cubū, qui haberet ad cubum datum proportionem datā: & si quæ ad huiusmodi proportionem demonstrandam requiruntur, inuenerimus, cōstat nos inuenisse propositū. Duabus enim rectis datis, si ex illis duabus, quæ debent esse mediæ proportionales, secundam inuenerimus, tertiam quoque deinde facile deprehendemus. Describatur itaque, uti dicit ipse, semicirculus a b c, & à centro d ducatur d b ad angulos rectos, & moueatur regula circa a punctum, ita ut unus terminus eius quodam clauulo circumponatur pūcto a. Esto reliqua pars eius uti circa centrū, circa clauulum moueatur inter b c. His constitutis, proponatur duos cubos



cubos inuenire, habentes inter se datam proportionem, & fiat proportio b d ad d e, qualis est proportio data & iuncta c e. producatur ad f. adducat iam regula inter b c, donec pars eius intercepta inter rectas f e, e b, æqualis sit rectę quæ est inter rectam b e, & circumferentiam b k c. Hoc enim tentantes, & regulam dimouentes, facile assequemur. Fiat iam, et positionē habeat, puta a k, ita ut g h, & h k ęquales sint. Dico quod cubus ab ipsa b d, ad cubum ab ipsa d h. proportionem habet propositam: hoc est eam quæ b d ad d e. Intelligatur circulus perfectus, & iuncta k d protendatur ad l, & iungatur l g, cui est æquedistans ipsa b d, quia k h est æqualis ipsi g h, & ipsa k d ipsi d l. iungatur ipsa a l, & l c. Quoniam enim angulus a l c est rectus, quia est in semirculo, & l m est perpendicularis, erit igitur sicut quadratum l m ad quadratum m a, hoc est c m ad m a, sic quadratum a m ad quadratum m g. Proportione igitur ipsius a m ad m g posita cōmuni, erit proportio cōposita ex proportione c m ad m a, & ex proportione a m ad m g: hoc est proportio c m ad m g, eadem est compositæ ex proportione quadrati a m ad quadratum m g, & ex proportione a m ad m g, quæ est eadem ei quam habet cubus ab a m ad cubum ab m g. Igitur proportio c m ad m g eadem est ei, quā habet cubus ab a m ad cubum ab m g. Verum sicut c m ad m g, sic c d ad d e. sicut autem a m ad m g, ita a d ad d h. igitur sicut b d ad d e, hoc est sicut data proportio, ita cubus ex b d ad cubum ex d h. Earum igitur quas opus erat medias proportionales inuenire, secunda fuit d h. & si fecerimus sicut b d ad d h, ita d h ad aliam quandam, erit tertia inuenta. Est autem aduertēdum, quod hæc descriptio eadem est ei quam Diocles suprà tradidit: hoc solum differens ab ea, quod ille solum lineam quādam per continua puncta describit intermedia ipsi a b, in qua sumebat g producta e e, & diuidente dictam lineam. In hoc autem datur g, per regulam a k, motam circa a. quod enim g sit idem, siue sumatur ut hic per regulam motam, siue sicut Diocles, ita discemus: producta m g ad n, iūgatur k n. Quoniam igitur k h est æqualis ipsi h g, & g n est æquedistans ipsi h b, & k x æqualis est ipsi x n, & ipsa x b communis est & ad angulos rectos. nam k n in duo æqua diuiditur, & ad angulos rectos ab ea quæ per centrum. Igitur basis æqualis basi: idcirco & circumferentia k b, ipsi b n. Igitur g est id quod est in linea Dioclis, & demonstratio eadem. Dixit enim Diocles, quod sicut c m ad m n, ita m n ad m a, & m a ad m g. Est autem m n æqualis ipsi m l. nam diametros secat eam ad angulos rectos. Est igitur sicut c m ad m l, sic l m ad m a, & m a ad m g. Igitur harū c m, m g, mediæ proportionales sunt l m, m a. Verum sicut c m ad m g, ita c d ad d e: sicut autē c m ad m l, ita a m ad m g: hoc est c d ad d h. & duarum mediarum, harum c d, d e secunda est d h, quàm Pappus efficiebat.

MODVS SPORI.

SInt duæ rectæ datæ a b, b c: quibus opus est duas medias proportionales inuenire. Ducatur ex b ipsa d b e, ad angulos rectos ad a b: & centro b, interuallo autem b a describatur semicirculus d a e: & ab e ad c iūgatur recta, & ducatur ad f: & ducatur ab ipso d recta quædam ita, ut g h sit æqualis ipsi h k. Hoc enim fieri potest, & ducantur à punctis g, k, perpendiculares ad d e, istæ g l, k m. quoniā igit̄ est sicut k h ad h g, ita m b ad b l, & ipsa k h est æqualis ipsi h g, igit̄ ipsa m b est æqualis ipsi b l: quare & reliqua m e ipsi l d. Tota ergo d m, est

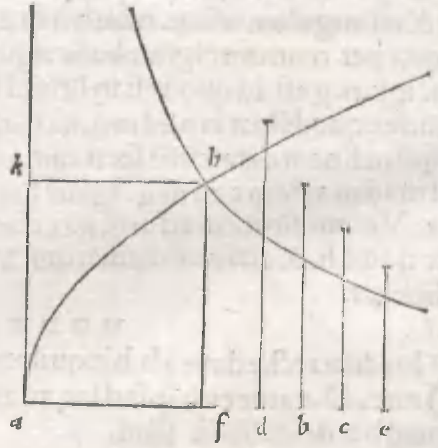


 æqualis

æqualis ipsi l e. et propter hoc sicut m d ad d l, ita l e ad m e. Verum sicut m d ad d l, ita k m ad g l. Sicut autem l e ad m e, ita g l ad m n. Rursus quoniam sicut d m ad m k, ita k m ad m e. Igitur sicut d m ad m e, ita quadratum d b, hoc est quadratum a b ad quadratum h b. nam d b est æqualis ipsi a b. Rursus quoniam sicut m d ad d b, ita l e ad e b. item sicut m d ad d b, ita k m ad h b. Sicut autem l e ad e b, ita g l ad c b. Igiť sicut k m ad h b, ita g l ad c b. & permutatim, sicut k m ad g l, ita h b ad c b. Verum sicut k m ad g l, ita m d ad d l, hoc est d m ad m e: hoc est, quadratum a b ad quadratum h b. Igitur sicut quadratum a b ad quadratum h b, ita b h ad b c. Sumatur harum h b, b c media proportionalis hæc, x. Quoniam igitur sicut quadratum a b ad quadratum b h, ita h b ad b c. Verum quadratum a b ad quadratum h b, habet proportionem a b ad b h duplicatam, & h b ad b c. habet proportionẽ h b ad x duplicatam. Igitur sicut a b ad b h, ita b h ad x. Verum sicut a b ad x, ita x ad b c. Igitur a b ad b h, sicut b h ad ad x, & x ad b c. Cõstat autem, quod hæc quoque eadem est illi quæ à Diocle dicta fuit, & Pappo.

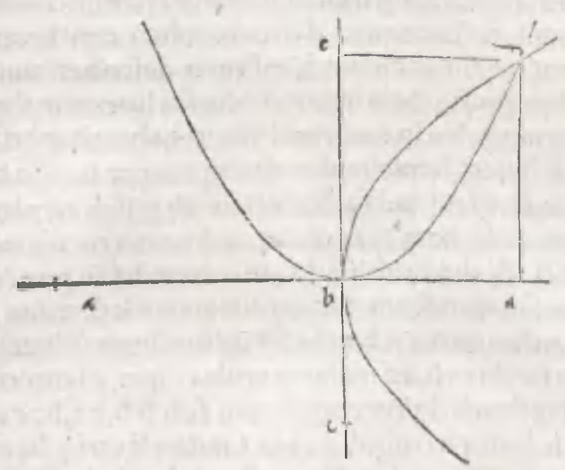
MODVS MENECHMI.

SInt duæ lineæ rectæ datæ a e, quibus iubemur duas medias proportionales inuenire. Esto hoc factum, & sint illæ b c. & ponatur recta positione hæc d g terminata ad d. & uersus d sumatur d f, æqualis ipsi c: & ducatur ad angulos rectos h f, quæ ponatur æqualis ipsi b. Quoniã igitur tres lineæ a b c rectæ sunt proportionales, contentũ sub a c æquatur quadrato b. Contentũ igitur d data, & c, hoc est a f, æquať quadrato b, hoc est quadrato f h. quoniã rectãguli coni, in parabole. igitur punctum h, per punctum a d, secundum primam descripta ducatur æquedistantes h k, a k. & quoniam contentum sub b c est datum, cum sit æquale contento sub d e: contentum igitur sub k h, h f datum, quoniam hyperbole, igitur ipsum h in non coincidentibus cum his k a, a f. igitur h datum: quare & f datum. Componetur autem sic. Sint duæ rectæ datæ hæ d e, & positione ipsa a g terminata ad a, & describatur per a sectio rectanguli coni, cuius axis est a g, & rectũ specie latus d. quæ autem ductæ sint ad ipsam a g ad angulos rectos possint spacia ipsi d, apposita latitudinẽ habẽtia ab scisas ab eis uersus punctum a, describatur & esto a h, et erecta a k. & in non coincidẽtibus cum his k a, a f, describatur sectio obtusianguli coni: à qua ductę ęquedistãtes ipsis k a, a f, facient spaciũ ęquale spacio cõtẽto sub d e. Scindet auť sectionem rectanguli coni. diuidat eam in puncto h, & ducatur h k, h f perpendiculares. Quoniam igitur quadratum f h æquatur contento sub d a, a f, erit sicut d ad f h, ita f a ad e. Verum sicut d ad f h, ita f h ad f a, & f a ad e. Ponatur itaq; g b æqualis ipsi f h, & c æqualis ipsi a f. erit igitur sicut d ad b, ita b ad c, & c ad e. igitur d b c e sunt continuę proportionales, quod erat inueniendũ. Aliter idem.



Sint duæ rectæ datæ ambientes angulum rectum a b, b c: & fiant earũ mediæ proportionales d b, b e, ita ut quæ c b ad b d, ea sit b d ad b e, & b e ad b a: & ducantur ad angulos rectos d f, e f. Quoniam igitur est sicut c b ad d b, ita b d ad b e. Contentum igitur sub c b b e, hoc est cõtentum sub data, & b e, æquatur quadrato b d: hoc est ipsius e f. Quoniam igitur contentum sub data, & b e, æquatur quadrato e f, igitur f applicatur sectioni rectanguli coni circa axem b e constitutæ. Rursus, quoniam sicut a b ad b e, ita b e ad b d. contentum igitur sub a b, b d, hoc est sub da-

sub data, & b d æquať quadrato e b, hoc est ipsius e f. Igiť f applicať sectioni rectãguli coni circa axem b d constitutę. Erat etiam applicatum alteri datæ, circa b f constitutæ. igiť pũctum f datũ, et perpendiculares f d, f e. igitur pũcta d e data. Cõponetur auť sic, sint duæ rectæ datæ angulũ rectũ ambientes a b, b c: & educantur ab ipso b in infinitũ, et describatur circa axem b c sectio coni rectanguli. Rursus circa axem d b describatur sectio rectãguli coni, ita ut ductæ possint iuxta ipsam a b, sectiones ductæ se mutuò secabunt. secent se in puncto f,

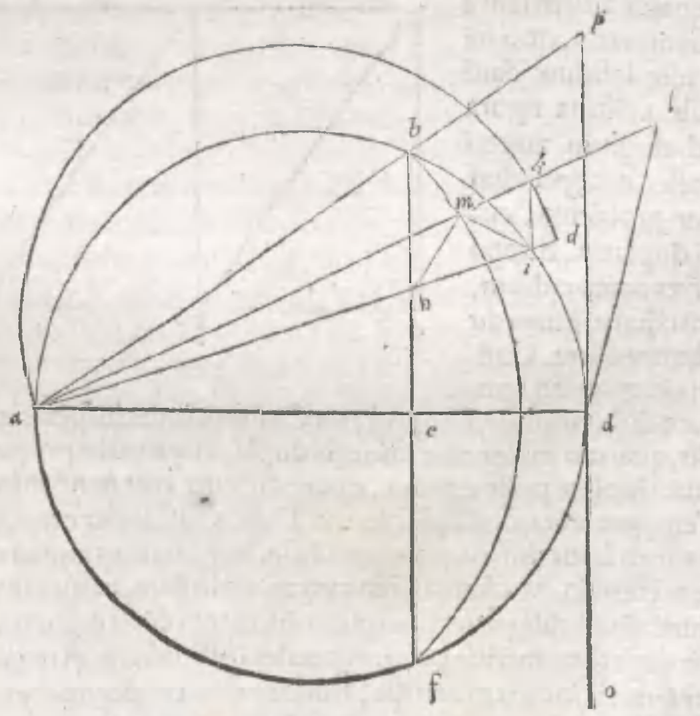


& ab ipso f ducantur perpendiculares f d, f e. Quoniam igitur in sectione rectanguli coni ducta est f e, hoc est d b, cõtentum sub c b, b e erit æquale quadrato b d. Est igitur sicut c b ad b d, ita b d ad b e. Rursus quoniam f d ducta est in sectione rectanguli coni, hoc est ipsa b e: contentum igitur sub d b, b a, est æquale quadrato e b. Est igitur sicut b d ad b e, ita b e ad b a. Verum sicut d b ad b e, ita c b ad b d, est sicut c b ad b d, ita b d ad b e, & e b ad b a, quod erat inueniendum.

Descripta est autem sectio rectanguli coni cum diabeto, inuento à Milesio mechanico Isidoro magistro nostro, cum sit ab eo scriptum in Commentum camaricarum Heronis sibi factum. Diabetum instrumentum est simile elemento græco λ.

INVENTIO ARCHITAE, QVEMADMODVM *Eudemus tradit.*

SVnto duæ rectæ datæ a d, c: quibus oporteat duas medias proportionales inuenire. Describať circa maiorem, puta a d, circulus a b d f, & applicetur a b ipsi c ęqualis, quę educta concurrat in puncto p, cum ea quæ contingit circulum in pũcto d. Ducatur autem b e f æquedistans ipsi p d o, & intelligatur semicylindrus erectus super a b d semicirculo, et super a d semicirculus erectus in parallelogrã mo cylindri descriptus. Hic itaq; semicirculus circumductus,



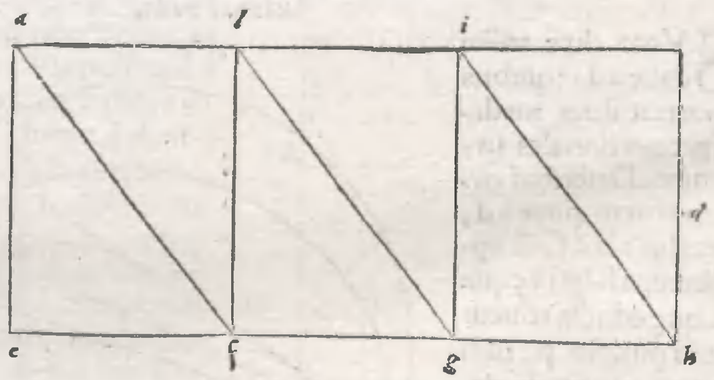
ab ipso d in ipsum b, termino diametri a quiescente, diuidet superficiem cylindri-

cam

cam in circumuolutione, et in ea describet lineam quandam. Rursus si quiescente a d triangulus a p d circumferatur contrario semicirculi motu, faciet superficiē conicam. recta itaque a d circumuoluta concurrat cum linea cylindrica in quodam puncto, simul autem & ipsum b describet semicirculum in superficie coni. habeat iam positionem in loco cōcursus linearum semicirculus motus, hanc puta d k a, & triangulus in contrariū motus habeat hanc d l a. punctum dicti concursus esto k. Est item semicirculus descriptus per b, iste b m f: & esto b f communis sectio eius, & circuli b d f a, & ducatur ab ipso k ad planum semicirculi b d a perpendicularis: cadet itaq; ipsa in circumferentia circuli, cum cylindrus sit erectus. incidat, & sit k i: & ducta ab i ad a, incidat in b f in puncto h, & ipsa a l incidat semicirculo b m f in puncto m. iungantur autem k d, m i, m h. quoniam igitur uterque semicirculorum d k a, b m f, est erectus super subiectum planum, erit eorum communis sectio m h, ad rectos angulos super plano circuli. quare & ad ipsam b f erecta est ipsa m h. Igitur contentum sub b h, h f, hoc est sub h a, h i, est æquale quadrato m h. Igitur triangulus a m i, similis est utriq; horum m i h, m a h: & angulus i m a rectus, item angulus d k a rectus: igitur k d, m i, sunt æquedistantes. & erit sicut d a ad a k, hoc est k a ad a i, ita i a ad a m, propter triangulorum similitudinem. Igitur quatuor hæ d a, a k, a i, a m, sunt consequenter proportionales: & a m est æqualis ipsi c, quia & ipsi a b. Duabus igitur rectis ad c datis, duæ a k, a i mediæ proportionales inuentæ sunt.

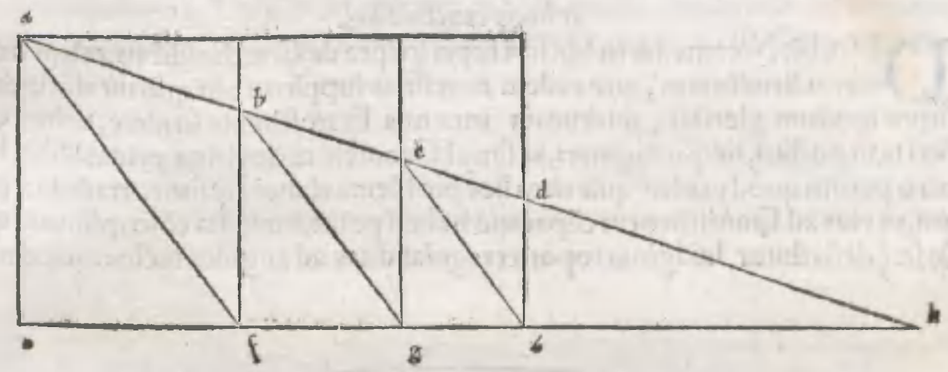
MODVS ERATOSTHENIS.

Regi Ptolemæo Eratosthenes lætari. Vetustissimorū aiunt tragœdum quendam introduxisse Minoa, sepulchrum Glauco extruentem. Cum autem audisset illud centum undiq; pedum ambitu claudi, dixisse, Paruum utiq;. inde subiecisse, Regij ciron sepulchri duplū esto. Videbitur errasse. lateribus enim duplatis, planum fit quadruplum, et solidum octuduplum. Quærebatur autem iam à Geometris, quo nā pacto solidum datū sub pristina figura ad duplum augeri posset. et appellabāt hoc problema, cubi duplatio. Supponētes enim cubum, tentabant ipsum duplum reddere. Cunctis itaq; multo tempore dubitantibus, Hippocrates Chius primus inspexit, quod si duabus lineis rectis, quarum maior esset minoris dupla, duę mediæ proportionales inueniuntur, tunc duplare posse cubum. quare dubium eius in nō minus dubium uersum est. Tempore aūt quodā post ferunt Delios iussos per oraculum, duplare quandam aram, in hanc difficultatem incidisse. implorantes autem eos qui tunc apud Platonem erant in Academia Geometras, postulare, ut quæsitum ab eis inueniretur. Cum aūt illi diligenter sibi ipsis insisterent, & sciutarentur, quo pacto duabus rectis datis duas medias proportionales instituerent, Archita Tarentinus fertur eas per semicylindros inuenisse, Eudoxus autem per lineas quæ curuæ appellantur. Accidit autem omnibus his descripsisse demonstratiuè, uerum non posse, quæ inuenerant, manu efficere, & in usum deducere, præterquā in breuitate Menethmi:



mi

mi: & hæc difficulter. Excogitata autem est à nobis quædam instrumenti structura facilis, per quam inuenire poterimus non solum duabus datis rectis duas medias, uerum quodcunq; quis iusserit. quo inuento, poterimus uniuersaliter solidum quodcunq; datum æquedistantibus lateribus contentum, in cubum reducere, aut ex altera in alteram figuram transformare, & similem ei facere, & ipsum augere retinendo similitudinem. quare & aras & templa poterimus, & humidorum & siccorum mensuras, puta medimnarū metrum in cubum reuocare, & per huius latus dimetiri uasa horum receptiua, quantum capere possint. Vtile autem est excogitatum istud, his qui student impulsiua & expulsiua lapidum instrumēta augere. nam oportet omnia illa proportionaliter augeri: & crassitudines, & magnitudines, & perforationes, & chienicidas, & neruos iniectos, si debeat & statuatur proportionaliter augeri. Hæc autem absq; mediarum inuentione fieri non possunt. Demonstrationem autem & structuram dicti instrumenti tibi descripsi.



Dentur itaq; duæ rectæ a e, d h inæquales: quibus duas medias proportionales inuenire oporteat. & statuamus a e ad angulos rectos super aliquam rectam, puta e h: & super e h cōstituantur tria parallelogramma deinceps a f, f i, i h. & ducantur diametri in eis a f, l g, i h, quæ erunt æquedistantes. manente autem parallelogrammo medio f i, compellatur a f supra medium & i h infra, ueluti in secunda figura donec puncta a b c d fiant in una linea recta. & ducatur per puncta a b c d linea recta, quæ coincidat cū e h, educta ad k. Erit itaq; sicut a k ad k b, in parallelis a e, f b, ita e k ad k f. in parallelis autem a f b g, sicut f k ad k g. Sicut igitur a k ad k b, ita e k ad k f. & k f ad f g. Rursus quoniam b k ad k c in parallelis b f, c g, sicut f g ad k g: in parallelis autē b g, c h, sicut g k ad k h. Sicut ergo b k ad k c, ita f k ad k g, & g k ad k h. Verum sicut f k ad k g, ita e k ad k f. Igitur sicut e k ad k f, ita f k ad k g, & k g ad k h. Verum sicut e k ad k f, ita a e ad b f. Sicut autem f k ad k g, ita b f ad c g, & c g ad d h. Inuentæ igitur sunt duabus a e, d h, duæ mediæ b f, c g proportionales.

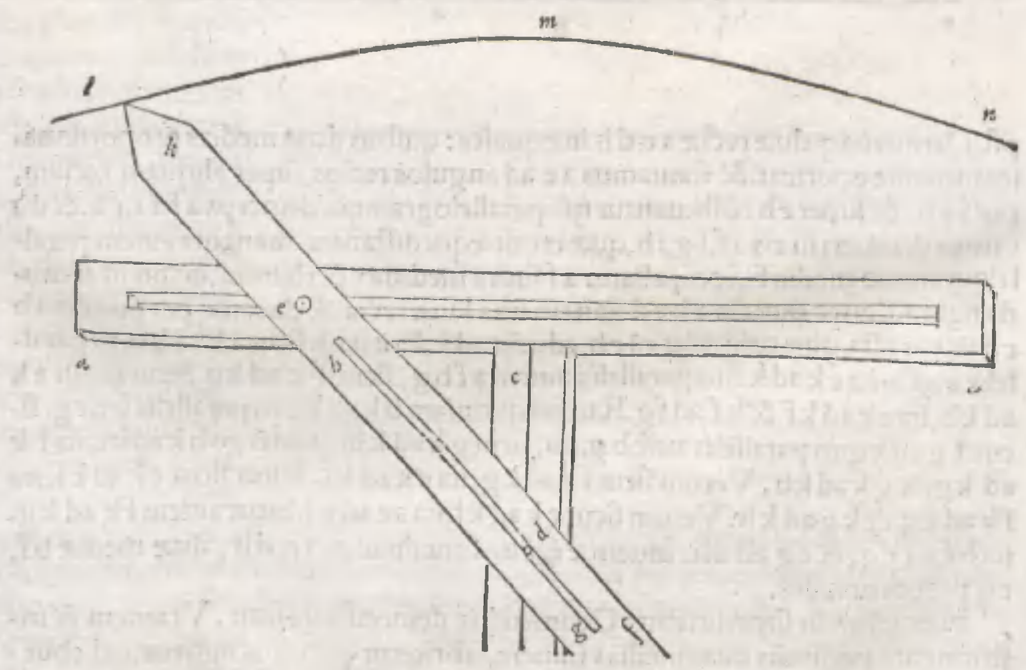
Hæc igitur in superficiebus Geometricis demonstrata sunt. Vt autem & instrumento possimus duas medias sumere, fabricetur plinthus ligneus, uel eburneus, uel æreus, habens tres tabellas æquales, & quam leuissimas, quarum media confixa sit, reliquæ duæ pelli possint magnitudinibus & commensurationibus omnes sibijpsis consentiētes. Demōstratio autem similiter perficietur. Ad lineas uero certius sumendas, arte incumbendum est, ut inducta tabellarum omnia retineantur parallela, & non hiantia, et regulariter inuicem coaptata. In anathemate autem est instrumentum ęreum, & aptatum est sub coronam ipsius colūnæ.

næ.

næ adnexum plumbo, ſub ipſo eſt demonſtratio compendioſius expreſſa, & figura, poſt ipſum uero ſuperſcriptio epigramma. Hęc autem tibi ſcribuntur, ut habeas ea ſicut in anathemate habentur. Duarũ aũt figurarum ſecũda eſt in columna deſcripta: duabus rectis datis, duas medias proportionales in proportione continua inuenire. Dentur duæ a e, d h. conduco itaqꝫ tabellas in organo, donec pũcta a b c d ſint in recta una. intelligantur ſicut ſe habent in ſecunda figura. Eſt igitur ſicut a k ad k b, in parallelis a e, b f, ita e k ad k f. in ipſis uero a f b g, ita f k ad k g. igitur ſicut e k ad k f, ita k f ad k g Sicut autem illę inter ſe, ita a e ad b f, & b f ad c g. Similiter autem oſtendemus, quod ſicut f b ad c g, ita c g ad d h. Igitur iſtæ a e, b f, c g, d h ſunt proportionales. Igitur duabus datis, duę mediæ inuentæ ſunt. Quod ſi datæ nõ ſint æquales ipſis a e d h, facientes illis proportionales has a e, d h, harũ medias ſumemus, & inducemus ad illas, & fecerimus illud quod imperatũ fuit. Si autem plures medias iubeamur inuenire, ubi tabellas cõſtituerimus in inſtrumento una plures, quàm ſint mediæ inueniendæ, idem conſequemur, & demonſtratio prorſus eſt eadem.

MODVS NICOMEDIS IN LIBRO
de lineis conchoidibus.

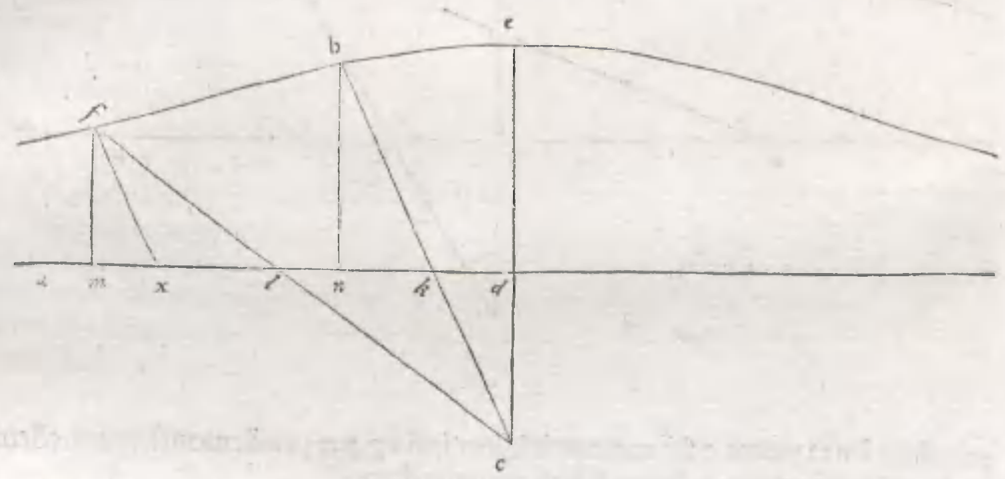
DEſcribit Nicomedes in lib. ſibi ſuperſcripto de Conchoidibus, talem inſtrumenti ſtructuram, quo eadem neceſſitas ſuppletur: in quo uir iſte uidetur ſupra modum gloriari, multumqꝫ inuentis Eratoſthenis irridere, ueluti quæ fieri non poſſint, neqꝫ imaginari, ac ſimul Geometrica doctrina priuata ſint. Hæc uero partim quòd explete quæ circa hoc problema elaborata ſunt, tradidit: partim, ut eius ad Eratoſthenem cõparatio haberi poſſit, inter iſta cõſcripſimus, quæ ſic ferè deſcribitur. Imaginari oportet regulas duas ad angulos rectos inuicem cõ-



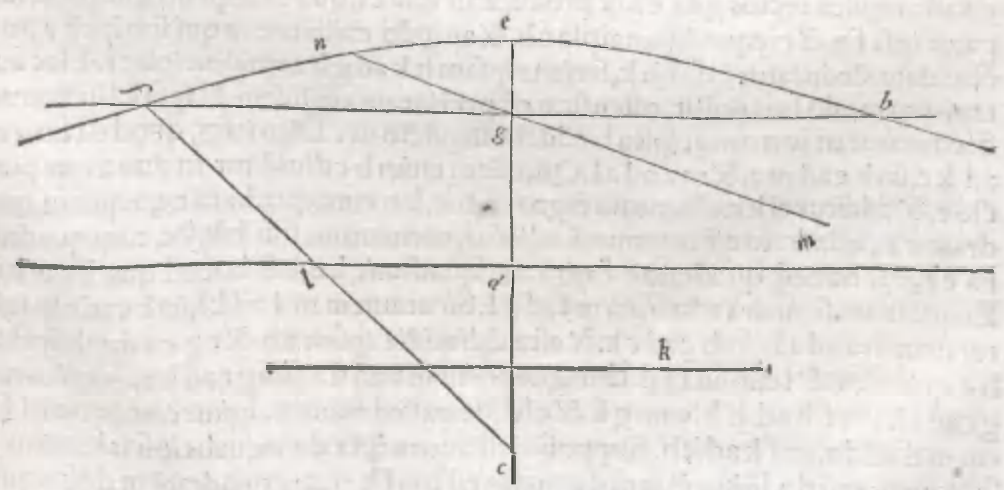
pactas, ita ut una ſit earum ſuperficies: ueluti ſunt a b, c d, & in a b aſſialem, in quem percurrere poſſit. in ipſa uero c d, ad partem d, ad rectam quæ diuidit latitudinem eius, cylindrulus configatur regulæ, & parum excedat ſuperficiẽ ſuperiorem regulæ. alterã item regulam, puta e f poſt breue quoddam interuallũ ad terminum f, inſecturam habentem, puta g h, quæ poſſit cylindrulo d inſerto circum

circumuerti. ad ipſum e uero quæ incumbat in axem confixum percurrenti in ſolmo aſſiali exiſtente in regula a b. inſita itaqꝫ regula e f per inſecturã g h, in cylindrulo ad f ſtatuto, & per e in axe confixo ipſi chelonario, ſi quis comprendens k extremum regulæ ipſam mouerit in partes a, deinde in partes d, punctum e ſemper in regula a b continebitur. ac uero g h in ſectura mouebit, uerſus cylindrulum d, ſemper recta regulæ e f media in motu intellecta ſecũdum axem qui eſt ad cylindrum d, & ipſa c k ſupereminentia regulæ ſemper manente eadem. Si itaqꝫ intelligamus ad k graphium quoddam attingens pauimentum, deſcribet quædã linea qualis eſt l m n, quã Nicomedes appellat conchilem primã lineam. & interuallum quidẽ eius lineæ eſt e k, magnitudo regulæ, polus uero d.

Hac itaqꝫ linea contingit oſtendere eam perpetuò minus accedere ad a b regulam, & quod omnis recta inter regulam a b, & ipſam lineam ſecat ipſam lineam. Primũ quidem accidens facile compręhenditur in altera deſcriptione, intelligendo regulam a b polo c, interuallo d e, linea cõchili f e h. procedãt ab ipſo c duæ c h, c f, æqualibus uidelicet factis his k h, l f. Dico quod f m perpendicularis minor eſt perpendiculari h g. Cum enim angulus m l c, ſit maior angulo m k c, reliquus relictus in duos rectos, puta angulus m l f, reliquo m k h minor eſt. Propterea cũ an-



guli ad m, g ſint recti, angulus ad f maior eſt angulo ad h conſtituto. & ſi angulus m f x, fiat æqualis angulo ad h, ipſa k h, hoc eſt ipſa l f ad h g, eãdem habebit proportionem, quam x f ad f m. quare f l ad h g, habet minorẽ proportionem, quàm ad f m. quare h g maior eſt ipſa f m.

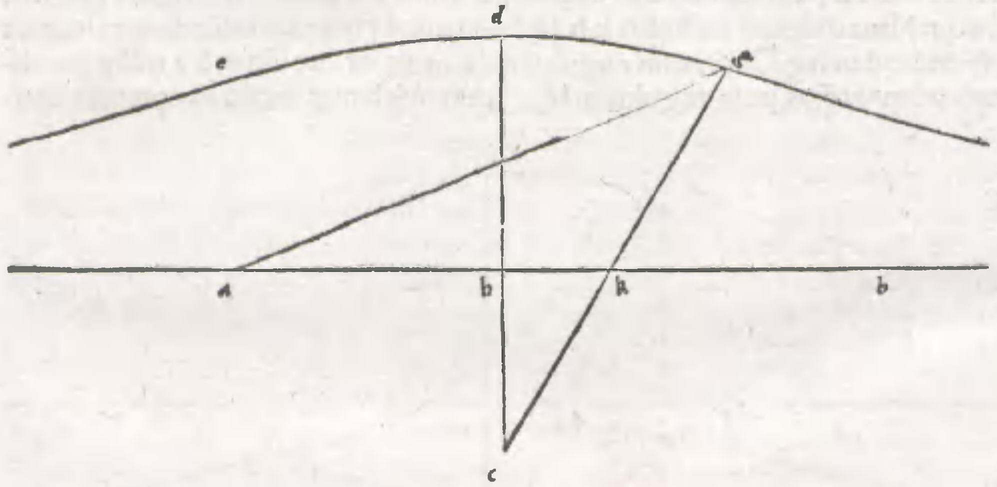


Secundum autem fuit, lineam rectam ductam inter a b & lineam ſecare ipſam

Dd

lineã.& hoc quoq; sic patebit.Ipsa enim ducta aut est æquedistãs ipsi a b,aut non. Esto prius æquedistãs,puta f g h:& fiat sicut d g ad g c,ita d e ad aliam quandã,puta k.& cẽtro c,interuallo k,circumferentia descripta secet f g,in puncto f,& iungatur c f. Est igitur sicut d g ad g c,ita l f ad f c .uerum sicut d g ad g c,ita erat d e ad k: hoc est ad ipsam c f.Igit̃ d e est æqualis ipsi l f, quod esse nõ potest . oporteret enim f esse ad lineam . At uero non sit ipsa ducta æquedistans, puta m g n , & ducatur per g æquedistans ipsi a b, puta f g. ipsa igitur f g concurret cum linea:quare multò magis ipsa m n.Cũ igitur hæc in instrumento accidentia colligantur,eius ad propositum utilitas ita demonstrabitur.

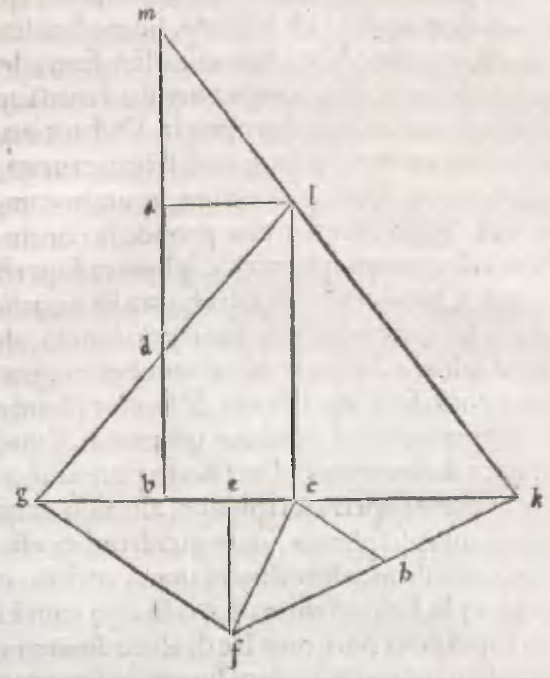
Rursus angulo a dato, & puncto extra c ducere c g, & facere eam equalem datæ. ducatur perpendicularis a puncto c ad ipsam a b, quæ sit c h. & educatur, & esto d h æqualis datæ,& polo c,interuallo d h dato. regula uero a b describatur



conchilis linea prima e d f.concurrit igitur ipsi a g,per prædemonstratum.cõcurrat in g,& iungatur c g. Igitur k g est æqualis datæ.

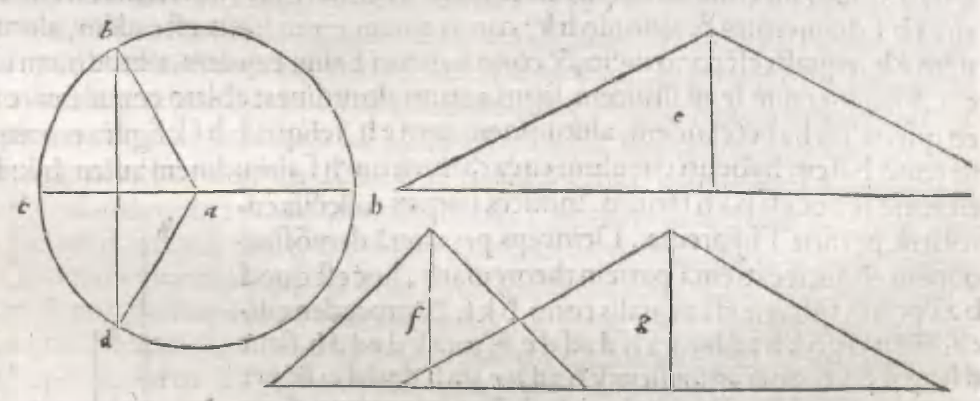
His demonstratis, dentur duæ rectæ c l,l a,ambientes angulum rectum, quibus oporteat duas medias continuè proportionales inuenire, & compleatur parallelogrammum a b c l, & diuidatur utraq; harum a b,b c in duo æqua punctis d,e.& iuncta d l educatur , & cõcurrat cum ipsa b c, educta in puncto g,& sit ipsi c b ad angulos rectos ipsa e f.& producatur ipsa c f,quæ sit æqualis ipsi a d,& iungatur ipsa f g,& ei ęquedistans ipsa c h,& angulo existente eo qui sub k c h a puncto f dato,deducatur ipsa f h k,faciens ipsam h k ad g k æqualem ipsi c f. Hoc autem quo modo fieri possit, ostensum est per lineam cõchilem,& ipsa k l iungatur, & educatur ut concurrat ipsi a b eductæ in pũcto m . Dico itaq;, quod est sicut c l ad k c,ita k c ad m a,& m a ad a l.Quoniam enim b c diuiditur in duo æqua puncto e,& additur ei k c:cõtentum ergo sub b k,k c, cum quadrato c e,æquatur quadrato e k , quadrato e f communi adiecto, contentum sub b k,k c, cum quadratis e c , e f, hoc est quadrato c f,æquatur quadratis k e ,e f: hoc est quadrato k f. Et quoniam sicut m a ad a b,ita m l ad k l.Sicut autem m l ad k l,ita b c ad c k .igitur sicut m a ad a b,ita b c ad c k.& est a d dimidia ipsius a b,& c g est dupla ipsius b c.quoniam & l c,ipsius a d.Erit igitur sicut m a ad d a, ita g c ad k c. Verũ sicut g c ad c k ,ita f h ad h k.cum g f, & c h sint æquedistantes . Igitur componenti sicut m d ad d a,ita f k ad k h. Supposita est autem ipsa d a æqualis ipsi h k, cum c f sit æqualis ipsi d a.Igitur ipsa m d æqualis est ipsi f k.quare quadratũ m d est æqua

le quadrato f k.Est autem contentum sub b m, & m a, cum quadrato d a,æquale quadrato m d . quadrato autem f k ostensum est æquale esse contentum sub b k,k c , cum quadrato c f: quoniam quadratum a d, æquatur quadrato c f . nã ipsa a d supposita est æqualis esse ipsi c f . Igitur quod sub b m,m a æquatur contento sub b k.k c. Sicut ergo m b ad b k, ita k c ad a m . Verũ sicut b m ad b k, ita c l ad c k. Igitur sicut l c ad c k.ita c k ad a m. Est autem sicut l c ad c k , ita m a ad a l. Igitur sicut l c ad c k, ita c k ad a m , & a m ad a l, quod erat demonstrandũ. Duab. igitur rectis datis, duæ mediæ continuæ proportionales inuentæ sunt.

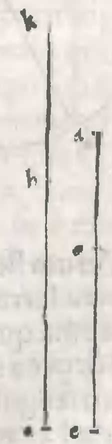


IN SECVNDVM THEOREMA.

ET componenti sicut ipsa d h ad h c,ita c a ad a e . hoc est quadratũ c b,ad quadratũ b e. Sicut enim in rationalis descriptione, quoniam in triangulo rectangulo c b a,ab angulo recto ad basem ducta est b e perpẽdicularis, distincti trianguli ad perpendicularẽ sunt inuicẽ similes, & toti, iccirco sicut c a ad a b, ita b a ad a e, & c b ad b e. quare sicut quadratũ c a ad quadratũ a b,ita quadratũ c b ad quadratum b e. Verum sicut quadratũ c a ,ad quadratũ b a,ita ipsa c a ad ipsam a e. Sicut enim prima ad tertiam ,ita quadratum primæ ad quadratum secundæ. Sicut ergo c a ad a e,ita quadratum c b ad quadratum b e. Eadem autem ratione ostenditur ,quod sicut c a ad c e,ita quadratum a b,ad quadratum b e.Propter similitudinem enim triangulorum est rursus,sicut a c ad c b,ita b c ad c e : hoc est,sicut quadratum a c,ad quadratum c b,ita ipsa a c ad ipsam c e. Sicut autem quadratum a c ad quadratum c b,sic quadratum a b,ad quadratum b e . Igitur sicut a c ad c e, ita quadratum a b,ad quadratum b e. Postea deinceps tentãs ostendere conũ b k f,



æqualem esse portioni sphæræ b a f, exponens conũ n, qui basim habeat æqualem superficiei portionis, & altitudinẽ æqualem ei quæ ex centro sphæræ, dixit conũ n esse æqualem frusto f a b h solido, sicut ostensum fuit in primo libro. Verum sciendum est, in primo libro non esse ostensum tale frustum esse æquale cono taliter sumpto, sed illi qui esset compræhensus à coni superficie, & superficie sphęrica, minore hæmisphærio, quod proprie in Diffinitionib. uidebatur frustũ solidum appellare. Dixit enim: Frustum autẽ solidum uoco, cum sphærã conus secet, qui habeat uerticem ad sphæræ centrum, figuram compræhensam à superficie coni intra conum. Figura enim nunc proposita continetur à conica superficie, habente uerticem ad centrum sphæræ, & sphærica superficie, sed non à compræhensa intus à cono. Quod autem & talis figura sit æqualis cono habenti basim æqualem superficiei sphæricæ complectenti portionem, altitudinem uero æqualem ei quæ ex centro sphæræ, sic demonstrabitur per ea quæ in primo libro ostensa sunt. Intelligatur enim seorsum sphæra, & secetur plano quodam non per centrum circulo circa diametrum b d, centrum sphæræ a: & intelligatur conus basem habens circulum circa diametrum b d, uerticem punctum a. Exponatur item conus e: cuius basis, sit æqualis superficiei sphæræ, altitudo ea quæ ex sphæræ centro. Igiť conus ille est æqualis ipsi sphæræ. nam quadruplus est coni basem habentis maximum in sphæra circulum, altitudinem uero eandem, cuius quidem sphæra est ostensa esse quadrupla. Exponantur item aliĵ duo coni hi f g, quorum f basem habeat æqualem superficiei portionis b c d, altitudinem uero eam quæ ex centro sphæræ. g uero basem habeat æqualem superficiei portionis b h d, & altitudinem eandẽ. Conus igitur f est æqualis frusto cuius uertex est a, & superficies sphærica quę est secundum b c d. Quoniam igitur basis e est æqualis basibus conorum f g, & sunt in eadem altitudine: igitur e conus, hoc est ipsa sphæra, est æqualis conis f g. Verũ conus f ostensus est æqualis esse frusto, quod est secundum b c d solido, uerticem habenti a. Igitur reliquus g conus æqualis est reliquæ portioni, basem habenti superficiem quæ secundum b h d portionem, altitudinem uero eam quæ ex centro. Deinde rursus dixit, Aequalis est igitur conus n, hoc est frustum b h f d, figuræ b h f d. quoniam enim adductus est conus n æqualis cono cuius basis est circulus circa b f, diametrum & altitudo h k: conus autem cuius basis est eadem, altitudo uero e k, æqualis est cono dicto, & cono habenti basim eandem, altitudinem uero e h. Habent enim se ad inuicem, sicuti eorum altitudines: ablato communi cono, eo qui basim habet eandem, altitudinem uero e h, reliqua b h f k figura erit æqualis cono basem habenti circulum circa diametrum b f, altitudinem autem h k: hoc est cono n, hoc est b a h f frusto. Inducẽs itaq; ex collectis corollariũ, perficit Theorema. Deinceps per alterã demõstrationem cõducit extremã partem theorematis, hoc est quod b a f portio sphæræ est æqualis cono b k f. & procedens dicit, Sicut ergo k h ad h c, ita h d ad d c, & tota k d ad d h, sicut d h ad d c. Quoniã enim sicut k h ad h c, ita h d ad d c: & permutatim, sicut k h ad h d, ita h c ad c d, & componenti, sicut k d ad h d, ita h d ad d c. hoc est k h ad h a. Erat enim sicut k h ad h c, ita h d ad d c. Est autem h c æqualis ipsi h a. Et paulum pôst: Sicut ergo k h ad h d, ita a e ad e c. Sicut ergo quadratum k d ad contentum sub k h, h d: ita quadratũ a c, ad cõtentum sub a e, e c. Intelligantur enim seorsum positæ hæ k d, a c: & sit sicut k h ad h d, ita a e ad e c. Dico quod est sicut quadratum k d, ad cõtentum sub k h, h d, ita quadratum a c ad contentum sub a e, e c. Quoniã enim est sicut k h ad h d, ita a e ad e c, & componenti, sicut k d ad d h, ita a c ad c e. quare est quadratum k d



ad

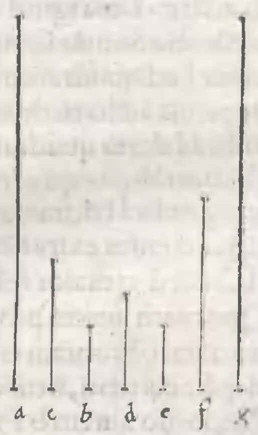
ad quadratum h d, sicut quadratum a c, ad quadratum c e. Rursus quoniam est sicut k h ad h d, ita a e ad e c. Verum sicut k h ad h d, ita contentum sub k h, h d ad quadratum h d, sumpta h d altitudine communi. Sicut autem d e ad e c, ita contentum sub a e, e c, ad quadratum e c, sumpta rursus altitudine cõmuni e c. Sicut ergo contentum sub k h, h d, ad quadratum h d, sic contentum sub a e, e c, ad quadratũ e c. Ostensum est autem, sicut quadratum h d, ad quadratum d k, sic quadratum e c ad quadratum a c. Igitur per æquam, sicut contentum sub k h, h d, ad quadratum k d, sic contentum sub a e, e c ad quadratum a c: & econuerso, quod erat demonstrandum.

IN TERTIVM THEOREMA.

Sicut autem dicti circuli ad inuicem, ita quadratum a d, ad quadratum d b, hoc est ipsa a c ad ipsam c b. Sicut enim in ipsa rationalis descriptione, quoniã in triangulo rectangulo a d b ducta est perpendicularis, ab angulo recto d c media proportionalis, inter basis partes & trianguli ad perpedicularem inuicẽ sunt & toti similes. quare sicut b c ad c d, ita b d ad d a. igitur & earum quadrata. Verũ sicut quadratum b c, ad quadratum c d, ita prima b c ad tertiam c a. Sicut ergo b c ad c a, ita quadratum b d ad quadratũ d a. Proportio autem a c ad c b est data, quare punctum c est datum. quoniam supponitur sphæra, igitur diametros eius a b data, & proportio a c ad c b est data. Si magnitudo data in proportionẽ datam diuidatur, utraq; partium est data. quare ipsa a c data, & a datum. nam in communi sectione lineis positione datis, datum est c punctum.

IN QVARTVM THEOREMA.

Eadẽ ratione qua supra ex apparatu, sicut l d ad d k, ita k b ad b r, & d q ad q b. in præcedenti enim collectũ fuerat hoc modo: Quoniã est sicut utraq; simul k d, d q ad d q, ita r q ad q b. & diuidenti, sicut k d ad q d, ita r b ad b q: & permutatim, sicut k d, hoc est k b ad b r, ita d q ad q b. Rursus quoniam est sicut l q ad q d, ita utraq; simul k b, b q ad q b. Diuidenti, & permutatim, sicut l d ad d k, ita d q ad q b. Erat autem & sicut d q ad q b, ita k b ad b r. Sicut ergo l d ad d k, ita d q ad q b, & k b ad b r. Tota igitur r l ad k l, sicut k l ad l d. Sicut enim unum ad unum, ita antecedentia omnia simul, ad sequentia simul omnia. Sicut ergo r l ad l d, ita quadratum r l ad quadratum l k. Quoniam enim est sicut r l ad l k, ita k l ad l d. Sicut igitur prima ad tertiam, ita quadratum primæ ad secundæ quadratum. Est igitur sicut r l ad l d, ita quadratum r l ad quadratum l k. Verum sicut quadratum r l ad quadratum l k, ita quadratum l k ad quadratum l d. Sunt enim proportionales. Sicut ergo r l ad l d, ita quadratum l k ad quadratum l d. ponatur b f æqualis ipsi k b. Quod enim extra r cadet, manifestũ est. Quoniam sicut d q ad q b, ita k b ad b r. Est autẽ d q maior ipsa q b. igiť ipsa k b maior est ipsa b r. igitur f extra r cadet. Quoniam autem proportio d l ad l q, & ipsius r l ad l q, & ipsius r l ad l d proportio data. Quoniam enim sicut utraq; simul k b, b q ad b q, hoc est f q ad q b, ita l q ad q d: euertenti, sicut q f ad f b, ita q l ad l d. Et econuerso, sicut b f ad f, ita l d ad l q. Proportio autem b f ad f est data, quoniam ipsa f b æqualis est ei quæ ex centro sphæræ datæ. ipsa uero b q terminis eius b q datis, per suppositionẽ sphæra diuisa à plano per a c ducto, & ipsa d b ad angulos rectos ipsi a c existẽte. Data est & idcirco tota q f, & proportio q f ad f b data, quare & proportio d l ad l q data. Rursus quoniam proportio portionum est data, erit coni l a c, ad conum a r c proportio data. quare & proportio l q ad q r data. nam se habent inuicem, sicut eorum altitudines. Totius ergo r l ad l q proportio est data. Quoniam igitur utriusq; harũ r l, l d ad l q est proportio data, erit r l ad l d proportio data. nam quæ habent ad idem proportionem datam, habẽt quoque inter se proportionem datam. Quoniã igitur proportio r l ad l q coniungitur, ex proportione r l ad l d, & l d ad l q. quod quidem cõpositio proportionũ sumatur, sumpta media l d, ueluti & in Stoichiosi sumebatur, constat. Quoniam autem indearticulatè quodammodo, & non ita ut mentem expleat dictum est, uti compræhendi potest his qui in Pappum & Theonem & Archadium inciderunt, in multis compositionibus non demonstratiuè, sed inductione hoc dictum constituunt. Nullum igitur inconueniens, si perpaululum in ratione uersati hoc ipsum manifestius fecerimus. Dico igitur, quod si sumantur duo numeri, uel duæ magnitudines, quibus aliquis medius terminus cōstituatur, proportio prius sumptorum numerorum, uel magnitudinum componitur ex proportione primi ad medium, & medij ad tertium proportione. Cōmemorandum tamē prius, quomodo proportio dicatur ex proportionibus componi. Sicut enim in libro Elementorum, quando quantitates proportionum in seipsas multiplicatę faciant quandam quantitatem, quātitate uidelicet dicta, secūdum eū numerū quo & denominatur proportio data, uti dicunt alij, & Nicomachus in primo de Musica, & Heronas in Commentario in Arithmeticam introductionem. Idem autem est, ac si dicatur eodem numero multiplicato in terminum sequentem proportionis produci antecedentem, & proprie magis in multiplicibus sumetur quantitas. In superparticularibus autem & superpartientibus non iam quātitatem sumi datur, cum sit unitas indiuisibilis. Quare in illis unitas est diuidenda quanquā hoc minimè cōueniat Arithmeticæ, sed ratiocinatiuæ, & computatiuæ attribuatur. Diuiditur autem unitas in partem, aut partes, à quibus proportio denominabitur: quemadmodum fit, ut apertius dicatur, sesquialteræ quantitas ad unitatem addit unitatis dimidium, & sesquitertiæ ad unitatem tertiam. Quare sicuti suprà dictum est, constat proportionis quantitatem in terminū sequentem multiplicatā producere antecedentē. Nouem enim ad sex cum sit proportio sesquialtera, cuius quātitas est unitas & dimidium, hæc multiplicata in senarium, producit nouenariū. & in alijs quoq; licet hoc inspicere. His autem ita declaratis, redeundum est ad propositum. Sunto igitur duo dati numeri a b. sumatur medius inter eos c, ostendēdum quod proportio a ad b componitur ex proportione a ad c, & proportione c ad b. Sumatur enim quantitas a ad c, quæ sit d, & eius quæ est c ad b sit e. igitur c multiplicans d, producit a: et ipse b multiplicans e producit c. ipse uero d multiplicans e producat f. Dico quod f est quantitas proportionis a ad b: id est f multiplicans b producit a. nam b multiplicans f, faciat g. Quoniam igitur b multiplicans f facit g. & multiplicans e producit c: erit sicut f ad e, ita g ad c. Rursus quoniā d multiplicans e facit f, & multiplicans c facit a: erit sicut e ad c, ita f ad a. Igitur permutatim, sicut e ad f, ita c ad a: & econuerso sicut f ad e, ita a ad c. Verum sicut f ad e ostensum est esse, ita g ad c. Igitur sicut g ad c, ita a ad c. quare a est æquale ipsi g. Verum b multiplicans f producit g, igitur b multiplicans f producit a.



quare erit f quātitas proportionis a ad b. Et est f productus ex d in e multiplicato, hoc est ex quantitate proportionis a ad c, in quantitatem proportionis c ad b. Igitur proportio a ad b componitur ex proportione a ad c, & ex proportione c ad b. Quod erat demonstrandum. Vt autem exemplo quoq; hoc quod dictum est fiat manifestum, incidat inter duodenum & binū medius quaternus. Dico itaq;, quod duodecim ad duo proportio est composita ex proportione duodecim ad quatuor, & quatuor ad duo. Id est proportio sextupla componitur ex tripla, duodecim ad quatuor, & dupla quatuor ad duo. Si enim quantitates proportionum inuicem multiplicemus, hoc est tria in duo, fient sex, qui est quantitas duodecim

ad

ad duo proportionis quæ est sextupla, quod propositum fuerat declarare. Si autē qui incidit non fuerit maior minore, & minor maiore, sed aut econuerso, aut maior aut minor utroq;, & hoc modo prædicta compositio consequetur. Nam inter nouem & sex cadat medius duodecim, utroq; illorum maior. Dico igitur quod ex subsesquitertia, quæ est nouem ad duodecim proportione, & ex dupla quæ est duodecim ad sex, componitur sesquialtera, quę est nouem ad sex. Quantitas enim quæ est nouem, ad duodecim est tres quartæ, hoc est dimidium & quarta. Quātitas autem quæ est duodecim ad sex, est binarius. Si igitur multiplicauerimus binarium in dimidium & quartam, fit unitas & dimidium, quæ quantitas est sesquialterę proportionis, quam habent nouem ad sex. Similiter autem si inter nouē & sex quatuor medius incidat, ex dupla sesquiquarta & subsesquialtera componitur sesquialtera. Rursus enim quantitatem duplæ sesquiquartæ, quæ est nouem, ad quatuor multiplicemus, in quantitatem subsesquialteræ, quæ est duæ tertiæ, & habebimus unum & dimidium, quod est quantitas sesquialteræ, ut dictum est. & similiter in omnibus eadem ratio accommodatur. Constat autem ex dictis, quod si duorum numerorum datorū aut magnitudinum non fuerit unus medius, sed plures medij termini sumantur, extremorum proportio componitur ex omnium intermediorum proportionibus, incipiendo à primo, & procedendo ad ultimum, secundum ordinem se sequentium. Duobus enim terminis a b incidant plures uno c d. Dico quod proportio a ad b cōponitur ex proportione a ad c, & c ad d, & d ad b. Quoniam enim a ad b componitur ex a ad d, & d ad b, uti dictum est suprà: & a ad d componitur ex a ad c, & c ad d. Igitur a ad b, proportio componitur ex ea quæ est a ad c, c ad d, d ad b. Similiter autem & in reliquis ostendetur.

Item in rationali dixit: Verū sicut r l ad l d ostēsum est, ita esse quadratum b d ad quadratū d q. Quoniam enim ostensum est, sicut r l ad l d, ita quadratum l k ad quadratum l d. Sicut autem quadratum l k ad quadratum d l, sic quadratum b d ad quadratum b q. Ostensum est enim, sicut k l ad l d, ita b d ad d q, propter compositionem. Igitur sicut r l ad l d, ita quadratum b d ad quadratum d q. Fiat autem sicut r l ad l q, ita b f ad f h, utcunq; punctum h ceciderit, quomodocunq; quidem si positum sit, quantum ad consequentiam demonstrationis nullum affert rationi impedimentum. Quod autem si quemadmodum in descriptione fit ponatur, semper cadet inter b r, sic declaratur. Quoniam enim sicut l k ad d k, hoc est ad k b, ita k r ad r b. Sicut ergo unum ad unū, ita omnia ad omnia: sicut r l ad r k, ita k b ad r b. Maiorem autem proportionem habet r l ad r q, quàm r l ad r h. igitur l r ad r q maiorem habet proportionem, quàm k b ad b r, hoc est f b ad b r. Euertēti r l ad l q, minorem habet proportionem, quàm b f ad f r. Si enim fecerimus sicut r l ad l q, ita b f ad quandam aliam maiorem f r, manifestū inde est quod f h maior est ipsa h b. Quoniā enim ostensum est, sicut l d ad d k, ita d q ad q b, & k b ad b r. Est autem d q maior ipsa q b. igitur l d maior est ipsa d k, & k b ipsa b r. quare & l d ipsa b r. Tota igitur l q maior est ipsa q r. quare & h f maior ipsa h b.

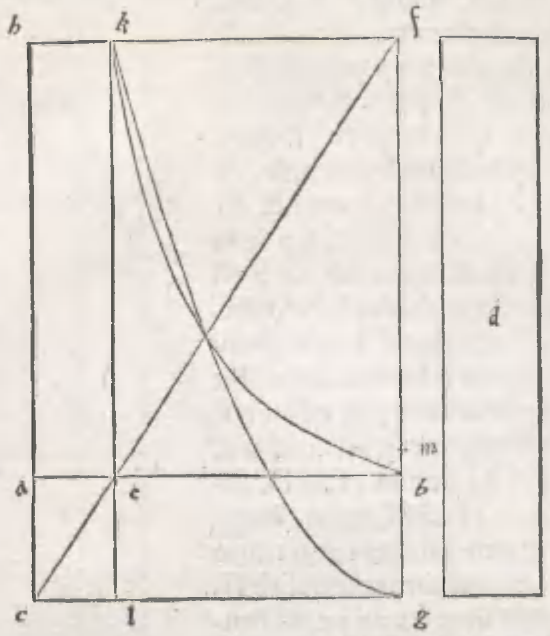
Reliquum igitur est, sicut quadratum b d, quod est datum, ad quadratum d q, ita f q ad f h. Quoniam enim portioni b f ad f h ostensum est eandem proportionem componi ex proportione quadrati b d ad quadratum d q, & ipsius b f ad f q. Eadem uero ei quæ est b f ad f h est, & composita ex proportione b f ad f q, & ex q f ad f h. Composita igitur ex proportione quadrati b d ad quadratum d q, & ex b f ad f q, est eadem proportioni compositæ ex b f ad f q, & ex q f ad f h. Si igitur

tur communem in ambabus proportionem b f ad f q auferamus, reliqua quadrati b d ad quadratum d q proportio eadem eſt ei quæ eſt q f ad f h. & eſt datū d f diuidere puncto q, & facere ſicut q f ad datam, hoc eſt ad f h, ſic datum, hoc eſt quadratum b d ad quadratum d q. Hoc autem ſic ſimpliciter dictum, habet determinationem, adhibitis quæ iſtic habentur problematis: hoc eſt, ipſam d b duplam eſſe ipſius b f, & ipſam b f maiorem eſſe ipſa f h. Quātum autem ad reſolutionem, nō habet determinationem, & eſt problema tale.

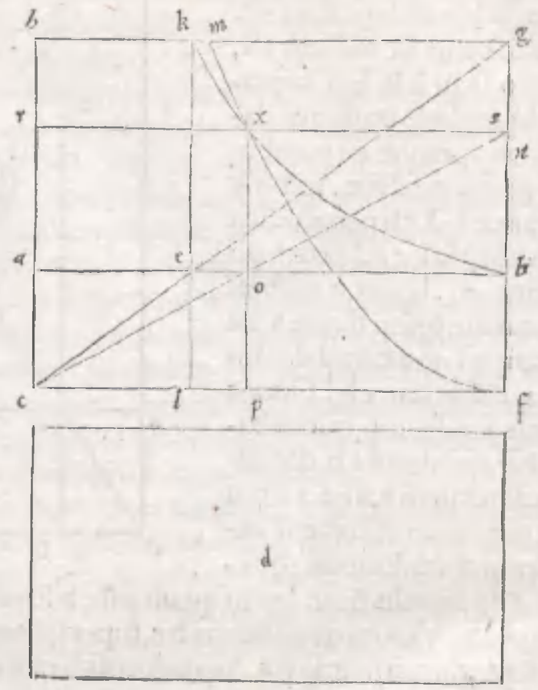
Duabus rectis datis d b, b f, & ipſa d b dupla ipſius b f, & puncto h ſumpto, in b f diuidere ipſam d b puncto q, & facere ſicut quadratum d b ad quadratum d q, ita q f ad f h. Vtraq; enim hæc in fine reſoluentur, & componentur. In fine quidē antedictum pollicebatur ſe oſtenſurū, in nullis autem ſcriptis hoc promiſſum inueniri poteſt. Nihil etiam inuenimus Dionyſodorū, ne quidpiam quidem horū attigiſſe, uerum putare fieri non poſſe, ut in limma aſſumptum perueniatur, atq; idcirco alteram totius problematis uiam ingreſſum eſſe, quam deinceps conſcribemus. Diocles quidem & ipſe in libro de Pirijs confecto ab ipſo, pollicitum fuiſſe exiſtimans Archimedem non feciſſe pollicitationē, & ipſe perficere aggreſſus eſt, & eius epicherima deinceps deſcribemus. nam & ipſum nullum habet ad aſſumptā rationem. Similiter autem euenit Dionyſodoro, qui alia demonſtratione conſtruit problema. In quodam utiq; uetuſto libro (non enim à multorum abſtinuimus inquiſitione) incidimus in Theoremata ſcripta, quæ quidem ex pteſmatibus obſcuritate magna tenebantur: in figuratione errore multiplici conſtituta, quæſitorum quidem habebant ſuppoſitionem, in parte autem gratam Archimedi linguam doricam ſeruabant, & conſuetis Archeo rerum nominibus erant inſcripta, ubi parabole ſectio rectanguli coni nominata eſt, & hyperbole ſectio coni ambligonij, ita ut ex ipſis intelligatur. Non igitur ipſe fuerit, qui quæ in fine promiſſa ſunt, deſcribi ſit proſecutus. Vnde ſtudioſius incumbentes, ipſum quidem rationale, uti ſcriptum fuit, propter errorum multitudinem, ut ſuprà dictum fuit, difficile inuenientes, ipſam ferè mentem denudantes, communius & apertius quantum fieri potuit dictio, conſcripſimus. Vniuerſaliter autem primū Theorema ſcribetur, ut quod de eo dictū eſt, declaret circa diffinitiones. Deinde & his quæ in problemate reſoluta ſunt, accommodabuntur.

Recta data a b, item altera a c, & ſpacio d, proponatur in a b ſumendum punctum, puta e, ita ut ſit ſicut a e ad a c, ita ſpacium d ad quadratum e b. Factum ſit, & ponatur a c ipſi a b ad angulos rectos, & iuncta c e producat in f, et ducatur per c æquediſtans ipſi a b, ipſa c g, & per b ducatur æquediſtans ipſi a c ipſa f b g, cōcurrens cum utraque harum c e, c g, & compleatur g h parallelogrammum. Et per e ducatur k e l, æquediſtans utriuis harū c h, g f. Et ſit contentum ſub c g, g m æquale ipſi d. Quoniam igitur ſicut e a ad a c, ita d ad quadratum e b. Sicut autē e a ad a c, ita c g ad g f. Sicut autem c g ad g f, ita quadratum c g ad contentum ſub c g, g f. Igitur ſicut quadratum c g ad contentum ſub c g, g f, ita d ad quadratum e b, hoc eſt ad quadratum k f. & permutatim. ſicut quadratum c g ad d, hoc eſt ad contentum ſub c g, g m, ita contentum ſub c g, g f ad quadratum f k. Verum ſicut quadratū c g ad contentū ſub c g, g m, ita c g ad g m. Igitur ſicut c g ad g m, ita contentum ſub c g, g f ad quadratū f k. Verum ſicut e g ad g m, ipſa f g ſumpta cōmuni altitudine, ita contentū ſub c g, g f, ad contentū ſub m g, g f. Sicut igit̄ contentū ſub c g, g f ad contentū ſub m g, g f, ita contentū ſub c g, g f ad quadratum f k. Igitur quadratū f k, eſt æquale contento ſub m g, g f. Si igitur circa axem f g deſcribatur parabole per g, ita ut ductæ æquediſtantes ipſi c g poſſint ſecundum g m, ipſa ibit per k: & erit poſitione data, cum g m ſit data magnitudine, quæ cum g c data continet datum d. Igitur punctum k aptatur poſitione datæ parabolæ. Deſcribatur igitur uti dictum eſt, & eſto ſicuti g k. Quoniam rurſus ſpacium h l, æquatur

tur ſpacio c b: hoc eſt contentum ſub h k, k l, contento ſub a b, b g. Si per b circa inconcurrentes has h c, c g deſcribatur hyperbole, tranſibit per k ex conuerſo octaui theorematis libri ſecundi Elementorum conorum Apollonij: & erit poſitione data, cum utraq; harū h c, c g ſit data. amplius quidem, & b poſitione datū eſt. Deſcribatur ut dictum eſt, & eſto ſicut b k. Igit̄ k aptatur hyperbolę poſitione datę. Item aptatum eſt parabolæ, poſitione datæ. igitur k datum eſt, & eſt perpendicularis ab ipſo k e ad datam poſitione a b. Igitur e datum. Quoniam igitur ſicut e a ad datam ipſam a c, ita d datum ad quadratum e b. Duorū igitur ſolidorum, quorū baſes hæ, quadratū e b, & d: altitudines uero hæ e a, a c, mutua proportione habent baſes cum altitudinibus. quare ſolida æqualia ſunt. Igitur quadratū e b ſuper ipſam e a, eſt æquale d dato ſuper ipſam c a. Verum quadratum b e, ſuper ipſam e a, eſt maximum omnium ſimiliter ſumptorum in ipſa b a. quando ipſa b e eſt dupla ipſi e a, uti demonſtrabitur. Oportet igitur datum ſuper datam non maius eſſe quadrato b e ſuper ipſam e a.

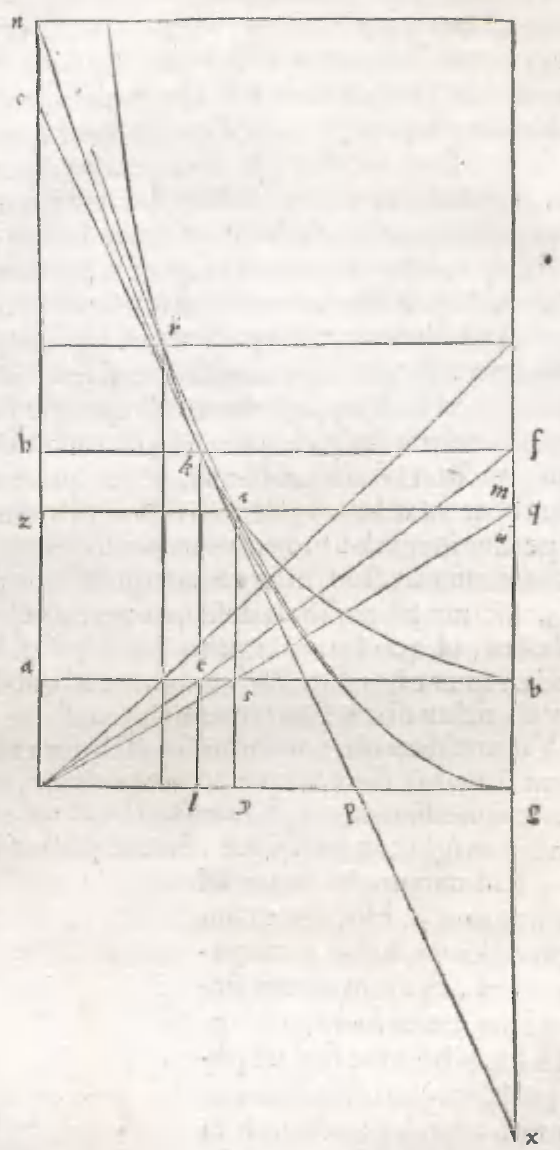


Componetur autem ſic. Eſto data recta a b, & alia item data a c. & ſpacium datum d, & opus ſit ſecare ipſam a b, ita ut ſicut una pars habeat ad datam a c, ita datum ſpacium d ad quadratum reliquæ partis. Sumatur ipſius a b tertia pars a e. Igitur d ſuper ipſam a c, aut maius eſt quadrato b e ſuper ipſam e a, aut æquale ei, aut minus eo. Siquidem igitur maius eſt, non componetur, ut in reſolutione oſtenſum eſt. Si autem æquale punctum e, efficiet problema. nam ubi ſolida ſunt æqualia, baſes altitudinibus habent mutuæ: & erit ſicut e a ad a c, ita d ad quadratum b e. Si autem minus eſt d ſuper a c, quadrato b e, ſuper e a componetur, hoc pacto. Statuatur a c ad angulos rectos ad ipſam a b, & ducatur per c æquediſtans ipſi a b ipſa c g. Et per b ducatur b f æquediſtans ipſi a c. educat ad g, & compleatur parallelogrammum f h, & per e ducatur k e l æquediſtans ipſi f g. Quoniam igitur d ſuper ipſam a c minus eſt quadrato e b ſuper ipſam e a: erit ſicut e a ad a c, ita d ad minus quidpiam quadrato e b, hoc eſt quadrato g k. Eſto igitur ſicut e a ad a c, ita d ad quadratum g m, & ipſi d ſit æquale contentum ſub c f, f n. Quoniam igitur ſicut e a ad a c, ita d, hoc eſt contentum ſub c f, f n ad quadratum g m. Verum ſicut e a ad a c, ita c f ad f g. Sicut autem c f ad f g, ita quadratum c f ad contentum ſub c f, f g. Ergo quadratum c f, ad contentum ſub c f, f g, ita contentum ſub c f, f n ad quadratum g m: & permutatim, ſicut quadratum c f ad contentum ſub c f, f n, ita contentum ſub c f, f g, ad quadratum g m. Verum ſicut quadratum c f ad contentum ſub c f, f n, ita c f ad f n. Sicut autem c f ad f n, f g communi altitudine ſumpta, ita contentum ſub c f, f g, ad contentum ſub n f, f g. Sicut igitur contentum ſub c f, f g, ad contentum ſub n f, f g, ita contentum ſub c f, f g ad quadratum m g. Igitur quadratum g m æquatur contento ſub g f, f n. Si igitur per f circa axem f g deſcribamus parabolam, ita ut ductæ poſſint iuxta ipſam f n tranſibit per m, deſcripta ſit, & eſto puta m x f. Et quoniam am h l æquatur ipſi a f, hoc eſt contentum ſub h k, k l, contento ſub a b, b ſ: ſi per b circa incoincidentes h c, c f deſcripſerimus hyperbolem, ipſa tranſibit per k, per conuerſionem octaui theorematis ſecundi Elementorum conicorum Apollonij. Deſcribatur, & eſto puta b k ſecans parabolem puncto x, & ab ipſo x ducatur x o p perpendicularis ad a b, & per x ducatur æquediſtās ipſi a b, ipſa r x ſ. quoniā itaq; b x k eſt hyperbole, & ipſe h c, c f incoincidentes, & ductæ æquediſtantes r x, x p ipſis a b, b f: contentum ſub r x p eſt æquale cōtento ſub a b, b f. quare r o eſt æquale o f. Si igitˉ ab ipſo c iungatur ad s recta, tranſibit per o. peruenerit, & eſto c o ſ. Quoniam igitur ſicut o a ad a c, ita o b ad b ſ: hoc eſt c f ad f ſ. Sicut autem c f ad f ſ, ita f n cōmuni altitudine ſumpta contentum ſub c f, f n, ad contentum ſub ſ f, ſ n. Igitur ſicut o a ad a c, ita contentum ſub c f, f n ad contentum ſub ſ f, f n. Sed contentum ſub c f, f n eſt æquale ſpacio d, & cōtento ſub f f, f n æquatur quadratum ſ x, hoc eſt quadratum b o, propter parabolam. Vt igitˉ o a ad a c, ita ſpacium d ad quadratum b o. Sumptum eſt igitur punctum o, quo problema perficitur.



Quod autem ipſa b e exiſtēte dupla ipſius a e, quadratum b e ſuper ipſam e a maximū ſit omniū ſimiliū ſumptorū ſuper ipſam b a, hoc pacto demonſtrabitur. Eſto enim ſicut in reſolutione rurſus recta data ad angulos rectos ipſa a c ipſi a b, & iuncta c e educatur, & concurrat lineæ æquediſtanti ductæ per b ipſi a c in pūcto f: & per puncta c, f ducantur h f, c g, æquediſtātes ipſi a b: & producatur c a ad h, & huic ducatur æquediſtans k e l per punctum e, & fiat ſicut e a ad a c, ita contentum ſub c g, g m ad quadratum e b. Igitur quadratum e b ſuper ipſam e a erit æquale contento ſub c g, g m ſuper ipſam a c, eo quod duorum ſolidorum baſes altitudinibus mutuò afficiūtur. Dico igitur, contentum ſub c g, g m ſuper ipſam a c maximū eſſe omnium ſimilium ſuper ipſam b a ſumptorū. Deſcribatur enim per g, circa axem f g parabole, ita ut ductæ poſſint iuxta ipſam g m, ipſa tranſibit per k, ſicut in reſolutione oſtenſum eſt, & ipſa educta concurret ipſi h c æquediſtanti diametro ſectionis ex uigeſimoſeptimo theoremate primi libri Apollonij Elementorū conicorū. Educatur itaq;, & concurrat in puncto n, & per b circa incoincidentes has n c, c g deſcribatur hyperbole, quæ trāſibit per k, ſicuti in reſolutione dictum eſt. Peruenerit igitur, puta b k, & ipſi f g productæ ponatur g x æqualis, & iungatur x k, & producatur in o. Conſtat igitur, quod cōtingit parabolam ex conuerſione trigeſimi quarti theorematis primi libri Elementorum conicorum Apollonij: quoniam b e dupla eſt ipſius e a. ſic enim ſuppoſitum eſt: hoc eſt ipſa k f ipſius k h, & triangulus o h k ſimilis eſt triangulo x f k, & ipſa x k dupla erit ipſius k o, & eſt ipſa x k dupla ipſius k p: quia ipſa x f dupla ipſius x g. & quia

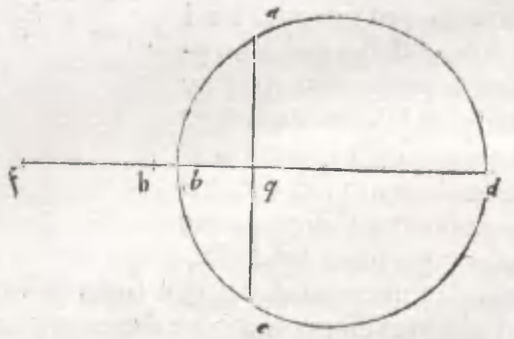
p g eſt æquediſtans ipſi k f, igitur o k eſt æqualis ipſi k p. Igitur o k p contingens hyperbolem, & coniuncta & collibrata cum incoincidentibus in duo æqua diuiditur. applicatur igitur ipſi hyperbolæ, per conuerſionē tertij theorematis ſecundi libri Elementorum conicorū Appollonij. Applicabatur autem & ipſi parabolæ ſecundum idem k. Igitur parabola applicatur ipſi hyperbolæ in pūcto k. Intelligatur igitur & hyperbole producta, puta ad r, & ſumatur in a b quodlibet punctum ſ, & ducatur per ſ ipſa τ ſ y æquediſtans ipſi k l, & concurrat cum hyperbole in pūcto τ, & ducatur per τ ipſa z τ q æquediſtans ipſi c g. propter hyperbolen igitur & incoincidētes, erit z y æquale ipſi c b: ablato c ſ communi, fit z ſ æquale f g: & idcirco recta ab ipſo c ad q producta permeabit per ſ. permearit, & ſit puta c ſ q: & quoniam quadratum u q eſt æquale contento ſub q g, g m propter parabolen: quadratum t q minus eſt contento ſub q g, g m. Fiat igitur quadrato t q æquale cōtentum ſub c g, g ω. Quoniā igitur eſt ſicut s a ad a c, ita c g ad g q. Item ſicut c g ad g q, ipſa g ω cōmuni altitudine ſumpta, ita cōtentū ſub c g, g ω ad cōtentum ſub q g, g ω: & ad ęquale illi quadratum q t, hoc eſt ipſius b ſ. Cōtentum ergo ſub q g, g ω ſuper ipſam ſ a, eſt æquale contento ſub c g, g ω ſuper ipſam c a. Cōtentum uero ſub c g, g ω ſuper ipſam c a, minus eſt contento ſub c g, g m ſuper ipſam c a. Quadratum igitur b ſ ſuper ipſam ſ a, minus eſt quadrato b e ſuper ipſam e a. Similiter autem oſtendetur in omnibus punctis ſumptis inter puncta, e, a. Verum ſumatur inter puncta e b punctum s. Dico quod & hoc modo quadratū b e ſuper ipſam e a, maius eſt quadrato b s, ſuper ipſam s a. Eiſdem enim præparatis, ducatur per s ipſa s r æquediſtās ipſi k l, & concurrat cum hyperbole in R. concurrit enim ei propterea, quod æquediſtans eſt incoincidenti: & ipſa r b ducta æquediſtans ipſi a b per r cōcurrat ipſi f g eductæ in pūcto b. & quoniā rurſus propter hyperbolem ipſum c h eſt æquale ipſi a g, recta ab ipſo c ad b iuncta permeabit per s. Permearit, et ſit puta c s, b. Et quoniā rurſus propter parobolen quadratū a b æquatur cōtento ſub b g, g m: erit quadratum r b minus contento ſub b g, g m. Fiat contentum ſub b g,



g ω æquale quadrato r b. Quoniã igitur eſt ſicut s a ad a c, ita c g ad g b. Verum ſicut c g ad g b, ita communi g ω altitudine ſumpta, contentum ſub c g, g ω ad contentum ſub b g, g ω, hoc eſt ad quadratum r b, hoc eſt ad quadratũ b s. Igitur quadratum b s ſuper ipſam s a, æquatur contento ſub c g, g ω ſuper ipſam c a, & contentum ſub c g, g m maius contento ſub c g, g ω. Igitur quadratum b e ſuper e a maius eſt quadrato b s ſuper s a. Similiter autem oſtendetur in omnibus punctis inter e b puncta ſumptis. Oſtenſum eſt autem & in omnibus ſumptis inter e a, & in omnibus ſumptis inter e b. Omnium igitur in ipſa a b ſimiliter ſumptorum maximum eſt quadratum b e, ſuper ipſam e a, quando ipſa b e dupla ſit ipſius e a.

Cognoſcere aũt eſt opus, & ea quæ ſequuntur ſecundum dictam deſcriptionem. Quoniam enim oſtenſum fuit quadratum b ſ ſuper ſ a, & quadratum b s ſuper s a, minus eſſe quadrato b e ſuper e a, fieri poteſt, ut ſpacio dato, quod ſit ſuper datam minus quadrato b e ſuper e a, per duo puncta diuiſa ipſa a b, problema fiat ex principio. Hoc autem fiet, ſi intellexerimus circa diametrum q g deſcriptã parabolam, ita ut deductæ poſſint iuxta ipſam g ω. talis enim parabola tranſit omnino per r. & quoniam neceſſario ipſam incidit in c n æquediſtãtem diametro, conſtat quod ſecat hyperbolen in alio puncto ſuperiore ipſo k, ſicuti iſtic in τ, & perpendicularis ducta ab ipſo r ad ipſam a b, uti iſtic r s ſecat ipſam a b puncto s, ita ut punctum s faciat problema, & fiat quadratum b s ſuper s a æquale quadrato b s ſuper s a ueluti ex prædictis demonſtrationibus patet. Quare cũ duo puncta poſſint in ipſa b a ſumi quibus perficeretur quæſitũ, licet utrum libuerit cuiq; accipere, aut punctum inter e b, aut quod ſit inter e a. Siquidem enim quod inter e b, ut dictum eſt, parabola deſcripta per puncta g t in duobus punctis ſecante hyperbolen, id quod propinquius fuerit ipſi g, hoc eſt axi parabolæ, inueniet id quod eſt inter e b: ueluti iſtic r inuenit s. id quod remotius eſt, inuenit id quod eſt inter e a, ueluti iſtic ipſum t inuenit ipſum ſ.

Vniuerſaliter quidem igitur ſic reſolutum eſt, & compoſitum problema. Vt autem & uerbis Archimedis accommodetur, intelligatur ut in ipſa determinati deſcriptione diametros ſphæræ iſta d b, & quæ ex centro iſta b f, & data f h. Deſcendimus igitur in hoc, dixit, Secare ipſam d f ſecundum q, hoc pacto, ut ſicut q f ad datam, ita datum ad quadratum q d. Hoc autem ſimpliciter dictum, habet determinationem. Si enim datum ſuper datam maius fuerit quadrato d b ſuper b f, tunc fieri nõ poteſt problema, uti oſtenſum eſt. Si autem æquale punctum b faciebat problema, & hoc modo nihil pertinebat ad Archimedis ex principio propoſitionem. Sphæra enim hoc modo non diuideretur in proportionem datam. Simpliciter enim dictam habebat determinationem. Additis autem his problematibus iſtic exiſtentibus, ſcilicet duplam eſſe ipſam d b ipſius b f, & hoc, ipſam b f maiorem eſſe ipſa f h, non habet amplius determinationem. nam quadratum d b datum, ſuper f h datam, minus eſt quadrato d b ſuper b f, quia b f maior eſt ipſa f h. quod cum eſſet, oſtendimus tunc poſſe problema, & inde tunc prouenire. Animaduertendum eſt autem, & hæc quæ ab Archimede dicta ſunt, conſonare his quæ nos reſoluimus. Primum quidem poſt ſuam reſolutionẽ uniuerſaliter id in quod incidit proferens, dixit, Oportet datam d f ſecare, & facere ſicut q f ad

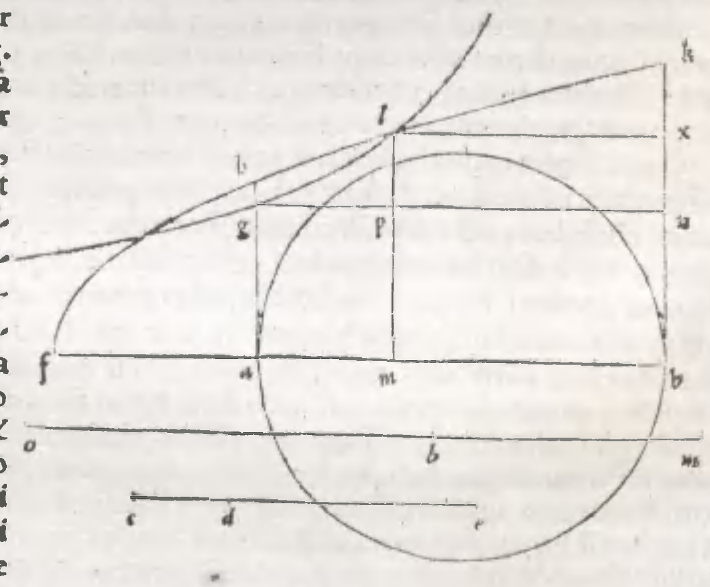


ad datam, ita datum ad quadratum d q. Deinde dicens tanquam uniuerſaliter dictum habeat determinationem: adiectis autem problematibus ab eo inuentis, hoc eſt ipſam d b duplam eſſe ipſius b f, & ipſam b f maiorem ipſa f h, non amplius habet determinationem magis particularẽ. Reſumit problema, & dicit, quod eſt tale problema hoc: Duabus rectis datis his d b, b f, & ipſa d b dupla ipſius b f, & puncto in b f ipſo h, ſecare ipſam d b pũcto q, non iam ſicut prius ipſam d f dicens, ſed d b oportere diuidi, propter id quod nos ſupra demonſtrauimus, quod ipſe inſpiciebat duo puncta ſumpta eſſe in d f, quæ facerent problema: unum quidem inter d b, alterum uero inter b f, quorum quod eſt inter d b ad propoſitionem ex principio pertinebat.

Hæc igitur conſentanea uerbis Archimedis, prout potuimus, apertẽ deſcripſimus. Quoniam autem, ut prędictũ eſt, Dionyſodorus nullo pacto deſcriptis in fine ab Archimede prænunciatis incidens: adnixus autem ad inuenienda, quæ non expoſita eſſent, aliam uiam ingreſſus totius problematis, conſcripſit haud indignum inuentionis modum neceſſarium: quem exiſtimaui oportere iſtis connectere fideliter, quantum potuimus. nam & ipſe nimia hominum negligentia magnam demonſtrationum partem multitudine errorum deletam habens, in omnibus quibus nos incidimus ſcriptis ferebatur.

MODVS DIONYSODORI.

DAtam ſphæram plano ita ſecare, ut portiones eius habeant inuicem proportionem datam. Eſto data ſphæra, cuius diametros a b, & proportio data quam habeat c d ad d e. Oportet igitur ſphęram plano erecto ad ipſam a b ſecare, ita ut portio cuius uertex a, ad portionem cuius uertex b, habeat proportionem, quam habet c d ad d e. producatur b a in f, & ponatur a f dimidia ipſius a b. & quã proportionem c e habet ad d e, habeat eam f a ad a g, & ſit ipſa a g ad angulos rectos ad ipſam a b, & ſumatur a h media proportionalis iſtarum a f, a g. Igitur a h maior eſt ipſa a g, & circa axem f b per f deſcribatur parabole, ita ut deductæ poſſint iuxta ipſam a g, quæ ibit per h, quoniam contentum ſub f a, a g eſt ęquale quadrato a h. Deſcribatũ itaq;, & ſit puta f h k, & per b ducatũ k b æquediſtans ipſi a h, & ſecet parabolam pũcto k, & per g circa incoincidentes has f b, b k deſcribatur hyperbole, quæ diuidet parabolen inter h k: ſecet in puncto l, &



ducatur ab l perpendicularis ad a b ipſa l m: & per puncta g, l ducantur ipſi a b æquediſtantes g n, l x. Quoniam igitur ipſa g l eſt hyperbole, & incoincidentes iſtę a b, b k, et æquediſtantes ipſis a g, g n, iſtæ m l, l x, erit contentũ ſub a g, g n æquale contento ſub m l, l x, ex octauo theoremate libri ſecundi Elementorum conicorum Apollonij. Verum ipſa g n eſt æqualis ipſi a b, & ipſa l x ipſi m b. Contentum igitur ſub l m, m b, eſt æquale contento ſub g a, a b. Et quia contentum ſub extremis æquatur contento ſub medijs, quatuor rectæ proportionales ſunt: Erit igitur ſicut quadratum l m ad quadratū g a, ita quadratum a b ad quadratum b m. Et quoniam propter parabolen quadratum l m æquatur contento ſub f m, a g. erit ergo ſicut f m ad m l, ita m l ad a g. Sicut ergo prima ad tertiam, ita quadratum primæ ad quadratum ſecundæ, & quadratum ſecundæ ad quadratum tertiæ. Sicut ergo f m ad a g, ita quadratum l m ad quadratum g a. Verum ſicut quadratum l m ad quadratum a g, ita oſtenſum eſt quadratum a b ad quadratū b m. Igitur ſicut quadratum a b ad quadratum b m, ita f m ad a g. Verum ſicut quadratum a b ad quadratum b m, ita circulus cuius quæ ex centro eſt ęqualis ipſi a b ad circulum cuius quæ ex centro eſt æqualis ipſi b m. & ſicut circulus cuius quæ ex centro eſt ęqualis ipſi a b, ad circulum cuius quæ ex centro eſt æqualis ipſi b m, ita f m ad a g. Conus ergo baſem habens circulum cuius quæ ex centro eſt æqualis ipſi a b, altitudinem uero ipſi a g, æqualis eſt cono habenti baſem circulum, cuius quæ ex centro æqualis eſt ipſi b m, altitudinem uero ipſi f m. Nam coni quorum baſes contrario altitudinibus afficiūtur, ſunt æquales. Verum conus habens baſem circulum cuius quæ ex centro æqualis eſt ipſi a b, altitudo autem ipſi f a, ad conum baſim habentem eandem, & altitudinem ipſam a g, ſe habet ſicut f a ad a g, hoc eſt c d ad e d. Quoniam enim baſes eaſdem habent, ad inuicem ſe habebunt ſicut altitudines eorum. Conus igitur baſim habens circulum, cuius quæ ex centro æqualis eſt ipſi a b, altitudinem uero æqualem ipſi f a, ad conum habentē baſem circulum cuius quæ ex centro æquatur ipſi b m, altitudinem uero ipſam f m, eſt ſicut c e ad e d. Verum conus habens baſem circulum cuius quæ ex centro æqualis eſt a b, altitudinem uero ipſam f a, eſt æqualis ſphæræ: & conus baſim habens circulum cuius quæ ex centro eſt æqualis ipſi b m, altitudinem uero f m, eſt æqualis portioni ſphæræ cuius uertex eſt b: altitudo uero b m, ſicuti deinceps oſtendetur. igitur ſphęra habet ad dictā portionem, eam proportionē, quam habet c e ad e d. & diuidenti portio cuius uertex eſt a, altitudo autem a m, ad portionem cuius uertex eſt b, altitudo uero b m, eam habet proportionem, quam c d ad d e. Planum igitur perductum per ipſam l m erectum ad a b ſecat ſphæram in proportionem datam: quod erat faciendum.

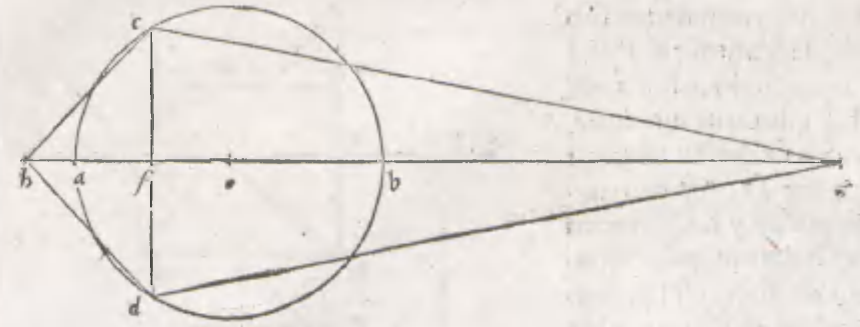
Quod autem conus baſem habens circulum, cuius quæ ex centro eſt æqualis ipſi b m, altitudinem uero ipſam f m, æquatur portioni ſphæræ cuius uertex b, et altitudo m b, hoc pacto demōſtrabitur. Fiat enim ſicut f m ad m a, ita o m ad m b. Igitur conus baſem habens eandem cum portione, altitudinem uero ipſam o m, æquatur portioni. Et quoniam ſicut f m ad m a, ita o m ad m b. & permutatim, ſicut f m ad m o, ita a m ad m b. Verum ſicut a m ad m b, ita quadratum p m ad quadratum m b: & ita circulus cuius quæ ex centro eſt æqualis ipſi p m, ad circulū cuius quæ ex centro eſt æqualis ipſi m b. Sicut igitur circulus cuius quæ ex cētro eſt æqualis p m, ad circulum cuius quæ ex centro eſt æqualis ipſi b m, ita m f ad m o. Sic igitur conus baſem habens circulum, cuius quæ ex cētro æqualis eſt ipſi m b, altitudinem uero ipſam m f, æquatur cono habenti baſim circulum, cuius quæ ex centro eſt æqualis ipſi p m, altitudinem uero ipſam m o. nam baſes eorum altitudinibus contrario afficiuntur. quare & portioni eſt æqualis.

MODVS DIOCLIS.

SCribit autem & Diocles in libro de Pirijs, primum hæc dicēs: In libro de ſphæra & cylindro Archimedes demonſtrauit, quod omnis ſphæræ portio æquatur cono baſem habenti eandem cum portione, altitudinem uero rectam quandā habentem proportionem ad perpendicularem ductam à uertice ipſius portionis ad baſem, quā utraq; ſimul ea quæ ex centro, & quæ permutatim habetur, ad portionem perpendicularis, ad perpendicularem permutatæ portionis. Vt ſi ſphæra ſit a b c, & ſecetur plano quodam circulo circa diametrum c d conſtituto, & diame

tro

tro a b, exiſtente centro e: & fecerimus ſicuti utraq; ſimul e a, f a ad f a, ita g f ad f b. Item ſicut utraque ſimul e b, b f ad f b, ita h f ad f a. Oſtenſum eſt portionem c b d ſphæræ, æqualem eſſe cono, cuius baſis quidem circulus circa diametrum c d con

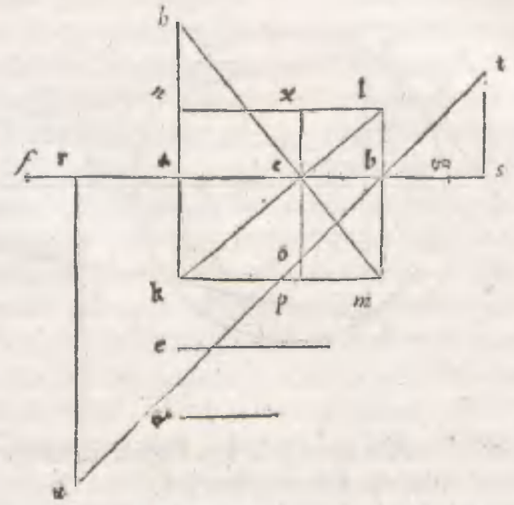


ſtitutus, altitudo uero ipſa f g. Et portionem c a d æqualem eſſe cono habenti eādem baſem, altitudinem uero h f.

Propoſito itaq; ſibi hoc, datam ſphæram plano ſecare, ita ut portiones ſphæræ ad inuicem habeant proportionem datam, cōſtruens ea quæ ſunt dicta, ait: Proportio igitur data eſt coni baſis, cuius eſt circulus circa diametrum c d, altitudo uero ipſa f h, ad conum cuius baſis eſt eadem, altitudo uero ipſa f g. Etenim hoc demonſtratum eſt: coni, qui in eadem baſe conſiſtunt adinuicem ſe habent ſicut eorum altitudines: igitur proportio h f ad f g data. & quia eſt ſicut h f ad f a, ita utraq; ſimul e b, b f ad f b: diuidēti, ſicut h a ad a f, ita e b ad f b. Eadem ratione ſicut g b ad f b, ita ipſa eadem recta ad ipſam f a. Factū eſt igitur problema tale: Recta a b poſitione data, & duobus punctis a b datis, & data e b, ſecare ipſam a b pūcto f, & adijcere has h a, b g, ita ut portio h f ad f g ſit data. Item ſicut h a ad a f, ita data recta ad ipſam f b. Sicut autem g b ad b f, ita ipſa data recta ad ipſam f a. Hoc autem deinceps eſt demonſtratum. Archimedes enim longius hoc oſtendens, & ſic in alterum problema abigit, quod nō demonſtrat in libro de ſphæra & cylindro.

Recta a b poſitione data, & duobus punctis a b datis, & proportione quā habet ipſa c ad ipſam d, diuidere ipſam a b pūcto e, & adijcere ei has f a, g b, ita ut ſit ſicut c ad d, ita f e ad e g. Item ſit ſicut f a ad a e, ita quędam recta data ad b e: & ſicut g b ad b e, ita eadem recta data ad e a factum ſit. et ipſi a b ad angulos rectos addātur h a k, l b m, & ipſi rectæ datæ ponatur utraq; æqualis a k, b m, & iunctæ hæ k e, e m educantur ad l, h. Iungatur autem & k m, & ducatur per l ipſa l n æquediſtans ipſi a b, & per e ducatur x e o p, æquediſtans ipſi n k. Quoniam igitur eſt ſicut f a ad a e, ita m b ad b e, hoc enim ſupponitur. ſicut autem m b ad b e, ita h a ad a e, propter ſimilitudinem triangulorū. Sicut ergo f a ad a e, ita h a ad a e. Igitur f a eſt æqualis ipſi h a: eadem ratione & b g ipſi b l. Et quoniam eſt ſicut utraq; ſimul h a, a e, ad utrāq; ſimul m b, b e, ita utraq; ſimul k a, a e, ad utramq; ſimul l b, b e. utraque enim earum proportionum eadem eſt ei quę eſt a e ad e b. Contentum igitur ſub utraq; ſimul h a, a e, & ſub utraq; ſimul l b, e b, æquatur contento ſub utraque ſimul k a, a e: & utraq; ſimul m b, b e. Ponatur ipſi k a æqualis harū utraq; a r, b ſ. Quoniam igitur utraque ſimul h a, a e, æqualis eſt ipſi f e: utraq; autem ſimul l b, b e æqualis ipſi e g: & utraq; ſimul k a, a e æqualis ipſi r e: & utraq; ſimul m b, b e æqualis ipſi ſ e. Et oſtenſum eſt, contentum ſub utraq; ſimul h a, a e, & utraque ſimul l b, b e, eſſe æquale contento ſub utraq; ſimul k a, a e, & utraq; ſimul m b, b e. Contentum igitur ſub f e, e g æquatur contento ſub r e, e ſ. Propter hoc quando

r ca-r cadit inter a f, tunc ſ exterius ipſo g cadet, & ecōuerſo. Quoniam igitur ſicut c ad d, ita f e ad e g. Sicut autem f e ad e g, ita contentum ſub f e, e g ad quadratum e g. Sicut ergo c ad d, ita contentum ſub f e, e g ad quadratum e g. Contentum autem ſub f e, e g oſtenſum eſt eſſe æquale ſub r e, e s. Eſt igitur ſicut c ad d, ita contentum ſub r e e s ad quadratum e g. Ponatur ipſi b e æqualis ipſa e o, & iuncta b o educatur utrinque, & a punctis ſ, r ductæ ad angulos rectos hæ ſ t, r y concurrant ei in pūctis y t. Quoniam igitur per b datum, ad poſitione datam a b ducta eſt t y, faciens angulum datū hunc e b o dimidium recti, ipſa t y erit poſitione data. Et a datis r ſ poſitione, hæ r y, t ſ ductæ ſecant eā punctis t y. Igitur & puncta t, y data. quare et ipſa t y data, poſitione & magnitudine.

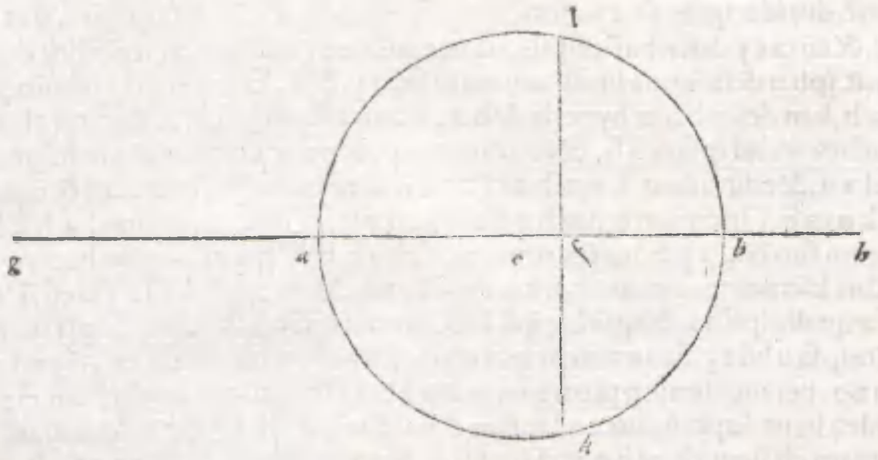


& quia propter ſimilitudinem triangulorum e o b, ſ t y eſt, ſicut t b ad b o, ita ſ b ad b e: & cōponenti, ſicut t o ad o b, ita ſ e ad e b. Verum ſicut b o ad o y, ita b e ad e r. Igitur per æquam ſicut t o ad o y, ita ſ e ad e r. Verum ſicut t o ad o y, & ſ e ad e r, ita contentum ſub t o y, ad quadratum o y. Sicut autem ſ e ad e r, ita contentum ſub ſ e, e r ad quadratum e r. Sicut ergo contentum ſub t o, o y ad quadratum o y, ita contentum ſub e ſ, e r, ad quadratum e r. Et ſicut ergo contentum ſub t o, o y ad quadratum o y, ita contentum ſub ſ e, e r, ad quadratum e r. Et permutatim, ſicut contentum ſub t o, o y ad contentum ſub ſ e, e r, ita quadratum o y, ad quadratum e r. Quadratum autem o y duplum eſt quadrato e r. quandoquidem & quadratum o b duplum ad quadratum b e. Igitur contentum ſub t o, o y, duplum eſt contento ſub ſ e, e r. Contentum autem ſub ſ e, e r oſtenſum eſt habere ad quadratum e g eam proportionem, quam habet ipſa c ad ipſam d. Et quadratum e g æquatur quadrato x o. nam utraq; e g, x o eſt æqualis utriq; ſimul l b, b e. Igitur contentum ſub t o, o y habet ad quadratum x o eā proportionem, quam habet dupla ipſius c ad ipſam d. Proportio autem duplæ ipſius c ad ipſam d data eſt. Igitur contenti ſub t o, o y, ad quadratum x o proportio data. Si igitur fecerimus ſicut d ad duplam ipſius c, ita t y ad aliam quādam, puta u. & circa ipſam t y deſcribamus ellipſim, id eſt ſectionē coni acutiāguli, ita ut deductæ in angulo ſub x o b, hoc eſt in dimidio recti poſſint ea quæ iuxta u deficientia, ſimili contento ſub t y, & u tranſibit per x per conuerſionem uigeſimi theorematis primi libri Elementorū conicorum Apollonij, deſcribatur, & ſit puta y x t. Punctum igitur x applicatur ellipſi poſitione datæ. Et quoniam ipſa l k eſt dragonialis ipſius n m, parallelogrammum erit contentum ſub n x p æquale contento ſub a b, b m Si igitur per b circa incoincidentes has h k, k m deſcripſerimus hyperbolen, ipſa tranſibit per x, & erit poſitione data, quia b punctum poſitione datum eſt. & utraq; harum a b, b m. Et quia hæ h k m incoincidentes deſcriptę ſunt, & eſto puta x b. igitur punctum x aptatur hyperbolæ poſitione datæ. Aptabatur autem & ellipſi poſitione datæ. Igitur punctum x datum, & perpendicularis ab ipſo x e. igitur e datum. Et quoniam eſt ſicut m b ad b e, ita f a ad a e. & a e data eſt: igitur a f data, & eadem ratione ipſa g b data.

Componitur autem hoc modo. Sicut enim in eadem deſcriptione, eſto data recta

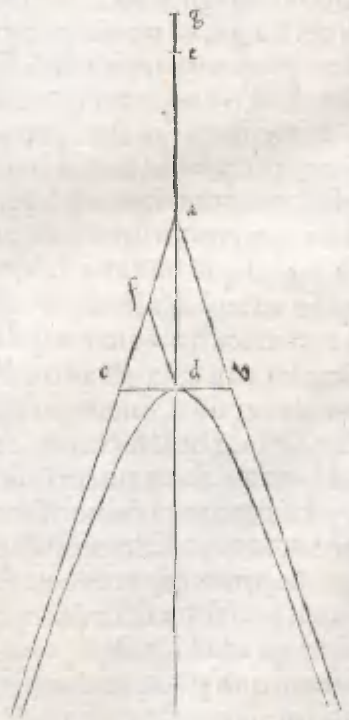
cta a b, quam oporteat diuidere, et altera data a k: proportio data ſit c ad d. ducatur ipſi a b ad angulos rectos ipſa b m, æqualis ipſi a k: & iungatur k m, & ponatur utraq; a r, b s æqualis ipſi k a. a punctis r ſ ducantur ad angulos rectos hæ r y, ſ t. Et ad punctum b conſtituatur dimidium recti anguli ſub a b o, & educta b o in utrāq; partē, diuidat ipſas ſ t, r y, punctis t y: & fiat ſicut d ad duplā ipſius c, ita t y ad ipſam u. & circa t y deſcribat ellipſis, ita ut eductæ in dimidio recti poſſint ea quæ adiaceant ipſi u deficientia ſimili contento ſub t y, & u. Et per b circa incoincidentes has a b, k m deſcribatur hyperbole b x, ſecans ellipſim in x: & ducatur ab x perpendicularis x e ad ipſam a b, & educatur in p, & per x ducatur æquediſtans ipſi a b ipſa l x n, & educantur k a, m b ad l, h: & ipſa m e iuncta, educatur & concurrat ipſi k n in h. Quoniam igitur b x eſt hyperbole, & incoincidentes hæ h k, k m, contentum ſub n x, x p æquatur contento ſub a b, b m, per octauum theorema ſecundi libri Elementorum conicorum Apollonij. Idcirco ipſa k e l recta eſt. Ponatͣ itaq; a f æqualis ipſi h a, & ipſa b g ipſi l b. Quoniā igitͣ eſt ſicut dupla ipſius c ad ipſam d, ita ipſa u ad t y. Sicut autem ipſa u ad t y, ita contentum ſub t o, o y ad quadratum x o, per uigeſimum theorema primi libri Elementorū conicorum Apollonij. Et ideo ſicut dupla ipſius c ad ipſam d, ita cōtentū ſub t o, o y, ad quadratū x o. Et quoniam eſt ſicut t b ad b o, ita ſ b ad b e: & componenti, ſicut t o ad o b, ita ſ e ad e b. Verum ſicut b o ad o y, ita b e ad e r. Per æquam igitur, ſicut t o ad o y, ita ſ e ad e r. Sicut ergo contentum ſub t o, o y ad quadratum o y, ita contentum ſub ſ e, r e ad quadratum e r: & permutatim, ſicut contentum ſub t o, o y ad contentū ſub ſ e, e r, ita quadratum o y ad quadratum e r. Verum quadratum o y ad quadratum e r duplum eſt, quia & quadratum b o ad quadratum b e. nam b e æqualis eſt ipſi e o, quia uterq; angulorum ad b & o eſt dimidium recti. Igitur cōtentum ſub t o, o y duplum eſt contento ſub ſ e, e r. Quoniam igitur oſtenſum eſt, ſicut dupla ipſius c ad ipſam d, ita contentum ſub t o, o y, ad quadratum x o, & antecedentium dimidia. Sicut ergo c ad d, ita contentū ſub r e, e ſ, ad quadratū x o, & ad quadratū e g, cum x o æqualis ſit ipſi e g, quia utraq; earum eſt æqualis utriq; ſimul l b, b e. Quoniam igitur eſt ſicut utraq; ſimul h a, a e, ad utramq; ſimul m b, b e: ſic utraq; ſimul k a, a e, ad utramq; ſimul l b, b e. Vtraq; enim earum proportionum eſt eadem proportioni a e ad e b. Contentum igitur ſub utraq; ſimul h a, a f, & utraque ſimul l b, b e æquatur contento ſub utraq; ſimul k a, a e, & utraq; ſimul m b, b e. Verum utriq; ſimul h a, a e æqualis eſt ipſa f e: & utriq; ſimul l b, b e æqualis eſt ipſa e g. utriq; ſimul k a, a e æqualis eſt ipſa r e: utriq; ſimul m b, b e æqualis eſt ipſa e ſ. Contentum igitur ſub f e, e g æquatur contento ſub r e, e s. Verum ſicut c ad d, ita contentum ſub r e, e s ad quadratum e g. Et ſicut c ad d, ita contentum ſub f e, e g, ad quadratum e g. Verum ſicut contentum ſub f e, e g ad quadratum e g, ita f e ad e g, & ideo ſicut c ad d, ita f e ad e g. Et quoniam eſt ſicut m b ad b e, ita h a ad a e, & h a æquatur ipſi f a. Sicut ergo m b ad b e, ita f a ad a e. eadem ratione ſicut k a ad a e, ita g b ad b e. Recta igitur data ipſa a b, & altera itē data k a, & proportione c ad d, ſumptum eſt in ipſa a b quoddam punctum, puta e, & adiectæ rectæ hæ f a, g b: & facta eſt f e ad e g in data proportione. Item ſicut data m b ad b e, ita f a ad a e. Sicut autem ipſa k a data ad a e, ita g b ad b e: quod fuerat faciendum.

His igitur ita demonſtratis, poteſt data ſphæra ſecari in proportionem datam, hoc modo. Eſto enim datæ ſphæræ diametros a b, proportio autem quam opus ſit partes ſphæræ inter ſe habere, ſit c ad d, centrum ſphæræ ſit c: & ſumatur in a b punctum f, & adijciantur g a, h b, ita ut ſicut c ad d, ita ſit g f ad f h. Item ut ſit ſicut g a ad a f, ita e b data ad b f. ut autem h b ad b f, ita eadem data e a ad a f. Hoc autem quo pacto fieri poſſit, prius demonſtratum eſt. & per ipſum f ducatur k f l ad angulos rectos ipſi a b, & per k l planum perductum erectum ad ipſam a b ſecet ipſam ſphæram. Dico itaq;, eas ſphęræ portiones habere inuicem proportionem quæ eſt c ad d. quoniam enim eſt ſicut g a ad a f, ita e b ad b f. componenti, ſicut f g ad f a, ita utraque ſimul e b, b f, ad b f. Conus igitur baſem habẽs circulum circa diametrum k l, & altitudinem f g, æquatur portioni ſphæræ baſem eandem



habenti, altitudinem autem f a. Rurſus quoniam ſicut h b ad b f, ita e a ad a f. & componenti, ſicut h f ad b f, ita utraq; ſimul e a, a f ad a f. Igitur conus baſem habens circulum circa diametrum k, altitudinem ipſam f h, æquatur portioni ſphæræ eandem baſem habenti, & altitudinem ipſam b f. Quoniam igitur dicti coni eadem in baſe conſtantes, habentur inuicem ſicut eorum altitudines, hoc eſt ſicut h f ad f g, hoc eſt c ad d. Portiones igitur ſphæræ inuicem habent proportionem datam, quod initio fuerat faciendum.

Quo autem pacto per punctum datum deſcribi circa datas incoincidentes hyperbole debeat, hoc modo oſtendemus: quoniã non inde ponitur in conicis Elementis. Sint duæ rectæ c a, a b complexæ quemcunq; angulum ad a, & detur punctum quoddam puta d, & proponatur per d circa incoincidentes has c a, a b deſcribere hyperbolen. iungatur a d, & ducatur a d e, & ponatur ipſa d a ęqualis ipſi a e, & educatur per d ipſa d f æquediſtans ipſi a b, & ponatur f c æqualis ipſi a f, & iungatᷓ c d, & educatur ad b: & quadratũ c b ſit æquale contento ſub d e, e g: & educta a d circa cam deſcribatᷓ hyperbole per d, ita ut deductæ poſſint ea quæ iuxta e g addẽtia ſimile cõtento ſub d e, c g. Dico quod hyperbolæ deſcriptæ ſũt incoincidẽtes c a, a b. Quoniã em̃ d f eſt æquediſtãs ipſi b a, & ipſa c f æqualis ipſi f a: igiᷓ c d eſt ęqualis ipſi d b. Igiᷓ quadratũ c b quadruplũ eſt quadrato d c, & quadratũ c b æquatᷓ contento ſub d e, e g. Igiᷓ hæ c a, a b ſunt incoincidentes ipſi hyperbolæ, per primum theorema ſecũdi libri Elementorum conicorum Apollonij.



IN COMPOSITIONEM QVARTI.

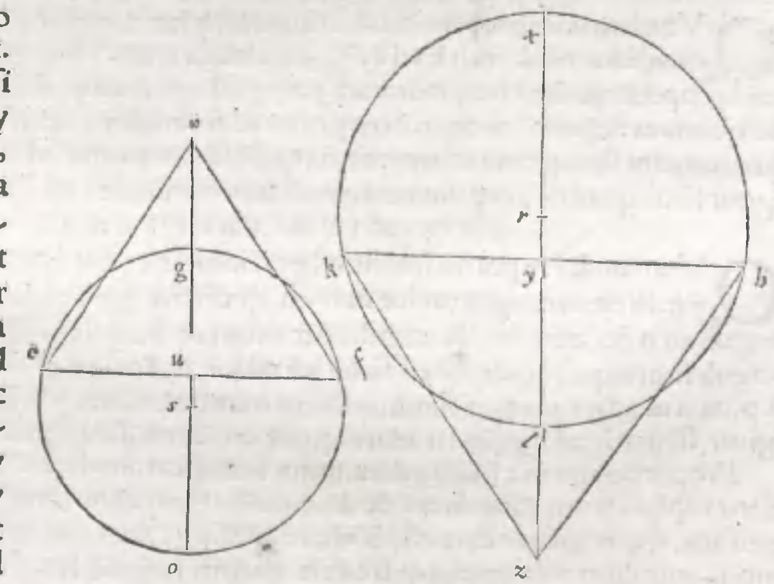
IN compoſitione autem producens diametrũ ſphæræ ipſam d b, & ponens dimidium eius æquale ipſi b f, & diuidens eam in datam proportionem puncto h, & in d b ſumens

mens q, ita ut ſit ſicut q f ad h f, ita quadratum b d ad quadratum d q, & eadem apparans quæ prius dicit, quod fiat ſicut utraq; ſimul k d, d q ad d q, ita r q ad q b, & ponit ipſum r inter h f. Quod autem hoc ſic habeatur, eſt oſtendendum. Quoniam enim ſicut utraque ſimul k d, d q ad d q, ita r q ad q b, diuidenti erit k d ad d q, ſicut r b ad q b. Et permutatim, ſicut k d ad r b, ita d q ad q b. Verum d q maior eſt ipſa q b. igitur k b maior r b, hoc eſt f b ipſa b r: quare punctum r inter ipſum b & f cadet. Quod autem & extra h, ſimiliter oſtendetur eis quæ in reſolutione præceſſerunt, in tota theorematis compoſitione. Colligitur enim, quod eſt ſicut r q ad q l, ita f h ad h b. Quare componenti, & propterea fit conſequens ſupradictis, & his quæ ſunt iſtic dicta demonſtratio.

Et per æquam in proportionalitate perturbata, &c. Perturbatã proportionalitatem in Elementis didicimus, quando tribus magnitudinibus, & alijs numero totidem ſit, ſicut antecedens ad conſequens in primis magnitudinibus, ita in ſecundis antecedens ad conſequens. Sicut autem conſequens ad aliud quoddam in primis, ita in ſecundis aliud quoddam ad antecedens. & iſtic igitur oſtenſum eſt, ſicut antecedens r l ad conſequens l d, ita antecedens q f ad conſequens f h. Sicut autem conſequens l d ad aliud quoddam d q, ita aliud quoddam a f ad antecedens q f. Sequitur igitur, ut oſtenſum eſt per æquam in quinto Elementorum, ſicut r l ad l q, ita b f ad f h.

IN QVINTO.

ET quoniam portio e f g eſt ſimilis portioni h k l, conus igitur e f o ſimilis eſt cono z h k. Intelligãtur enim deſcriptiones ſeorſum poſitæ, & iunctæ e g, g f, e o, o f, h l, l k, h x, x k. Quoniam igitur portiones e f g, h k l ſimiles ſunt inter ſe, erũt anguli e g f, h l k æquales: quare & eorum dimidia. & recti ſunt hi, qui ad u, y. Igitur reliquus reliquo æqualis. igitur triangulus g u f eſt æquiangulus triangulo l y k. & eſt ſicut g u ad u f, ita l y ad y k. Eadem ratione cum trianguli u f o, y k x ſint inuicem æquianguli, erit ſicut f u ad k y, ita f o ad k x, & u o ad y x. per æquam igitur ſicut g u ad u o, ita l y ad y x. & cõponẽti, ſicut g o ad o u, ita l x ad x y. & antecedentiũ dimidia ſũt ſo, & r x. quare per ęquam. et cõponenti, ſicut utraq; ſimul ſo, o u, ad o u, hoc eſt ω u ad u g: ſic utraq; ſimul r x, x y ad x y, hoc eſt z y ad y l. Verum ſicut g u ad u f, ita l y ad y k. per æquam ergo, ſicut ω u ad u f, ita z y ad y k: & conſequentium dupla ſunt e f, & h k. Sicut ergo ω u ad f e, ita z y ad h k. Conorum igitur ω e f, z h k axes ſunt proportionales, et diametri baſium. igitur coni ſunt ſimiles, quod fuerat demonſtrandum.



Proportio autem ω u ad e f data. Quoniam enim portiones ſphærarum datæ ſunt, & diametri baſium datæ, & altitudines portionum. quare e f data, & g u. Igitur

tur eorum dimidia data erunt: quare & quadrata earum, & quadratum e u æquatur contento ſub g u, u o. Si autem datum iuxta datam applicetur, facit latitudinẽ datam. igitur u o data. Verum & u g, igitur tota diametros ſphæræ data: idcirco & eius dimidia s o data. uerum & o u data: igitur proportio s o ad o u data. & cõponẽti, utriuſq; ſimul ſ o, o u ad ipſam o u, proportio data, hoc eſt ω u ad u g. & ipſa u g data. igitur & ω u data. Verum & e f data. quare & proportio ω u ad e f data. Eadem autem utiq; dicerentur in portione a b c, & colligetur proportio q t ad a b data. Et quia a b data eſt, igitur & q t data.

Quod autem ſi portiones datæ ſunt, earum altitudines ſint datæ, antea quidẽ conſtat. Verum ut hoc quoque coordinationi datorum conſequenter colligi uideatur, dicetur. Quoniam enim portiones ſunt datæ poſitione & magnitudine, & e f data, erit angulus in portione datus. Quare & eius dimidium. & ſi intelligamus iunctam e g, dato eo qui ad u recto, erit reliquus datus, & triangulus e g u datus ſpecie. quare & proportio e u ad u g data erit. & e u data eſt, cum ſit ipſius e f dimidia, igitur u g data. Licet autem & aliter dicere quoniã e f eſt poſitione data, & a puncto u dato cum ſit in duo æqua diuidens e f, educta eſt u g ad angulos rectos ipſi poſitione datæ, & circumferentia portionis poſitione data. Igitur g datũ eſt. Erat autem & u datum. quare & ipſa u g data.

Quoniam eſt ſicut z y ad q t, hoc eſt quadratum b a ad quadratum h k, ita k h ad ipſam d. Quoniam enim factum fuit, ſicut z y ad h k, ita q t ad d: erit permutatim ſicut z y ad q t, ita h k ad d. Verum ſicut z y ad q t, ita quadratum a b ad quadratũ h k. Conis enim exiſtentibus æqualibus, baſes eorum altitudinibus ecõtrario afficiunt. Sicut aũt baſes ad inuicẽ, ita quadrata diametrorũ. Sicut ergo quadratum b a ad quadratũ h k, ita h k ad d. Et permutatim, ſicut a b ad h k, ita 9 ad d. Quandoquidem proportio b a ad 9, oſtenſa eſt eadem proportioni quadrati a b ad quadratum h k, et item k h ad d, et b a ad 9, eadem eſt proportioni k h ad d. Quare permutatim, ſicut b a ad h k, ita 9 ad d.

IN COMPOSITIONEM QVINTI.

QVoniam itaq; proportionales ſunt a b, h k 9 d, erit ſicut quadratum a b ad quadratum h k, ita h k ad d. Vniuerſaliter enim ſi ſint quatuor rectæ continuę proportionales, erit quadratum primę ad quadratum ſecundæ, ſicut ſecunda ad quartam. Quoniam enim ſicut prima ad ſecundam, ita tertia ad quartam, erit permutatim ſicut prima ad tertiam, ita quadratum primæ ad quadratum ſecũdæ. igitur ſicut quadratum primæ ad quadratum ſecundæ, ita ſecunda ad quartam.

IN SEXTVM THEOREMA.

QVoniam k l m portio ſimilis eſt portioni a b c, erit ſicut r l ad r n, ita b p ad p h. Si enim iungantur hæ m n, c h, quoniam portiones ſunt ſimiles, erunt anguli ad b & l æquales: & anguli ad m c ſunt recti, igitur reliquus reliquo, & trianguli ſunt æquianguli, & eſt ſicut b h ad h c, ita l n ad n m. Verum ſicut h c ad h p, ita n m ad n r, propter ſimilitudinem triangulorum c p h, & m r n. per æquam igitur, ſicut b h ad h p, ita l n ad n r. quare diuidenti, ſicut l p ad p h, ita l r ad r n.

Proportio autem e f ad b c data, igitur utraq; earum data. Quoniam enim portiones ſphærarum datæ ſunt, & diametri baſium datæ ſunt, & altitudines portionum. quare ipſa a c data eſt, & eius dimidia p c data erit. & b p data eſt, & ambiunt angulum rectum: igitur b c data. Eadem ratione & e f data. quare & proportio b c ad e f data.

IN COMPOSITIONEM SEXTI.

POrtiones ergo circulorum quæ in k m, a c inſiſtunt, ſimiles exiſtunt. Si enim ſicut in reſolutione, iungantur hæ c h, m n, quia anguli ad c m ſunt recti: & c p, & m r ſunt perpendiculares: erunt mediæ proportionales inter partes baſium. quare erit ſicut prima b p ad tertiam p h, ita quadratũ primæ b p ad quadratum

dratum ſecundæ c p. Eadem ratione ſicut l r ad r n, ita quadratum l r ad quadratũ r m. Sicut ergo b p ad p c, ita l r ad r m, & latera circa angulos æquales ſunt proportionalia: igitur trianguli æquianguli. igitur anguli ad b l ſunt æquales: & eorum dupli, qui ſunt in portionibus. igitur portiones ſunt ſimiles.

IN SEPTIMVM THEOREMA.

PRoportio igitur utriuſque ſimul e d, d f ad d f data. Quoniam enim proportio utriuſq; ſimul e d, d f ad d f eſt data, ſi magnitudo data habeat ad aliquam ſui partem proportionem datam, & ad reliquam habebit proportionem datam: quare utraq; ſimul e d, d f ad e d habet proportionem datam. Quoniam igitur utraque e d, d f ad utramq; ſimul e d, d f, habent proportionem datam, habebunt etiam inter ſe proportionem datam. Proportio igitur data e d ad d f, & e d data. quare reliqua f e dabitur. Quare & contentum ſub d f, f b, hoc eſt quadratum a f, & ideo a f data erit. quare & tota ipſa a c. Aliter autem, dixeris ipſam a c datam eſſe. Quoniam enim diametros data eſt d b poſitione, & punctum f datum, ut petitũ eſt: & a dato f ducta eſt a c ad angulos rectos, erit ipſa a c poſitione data. uerum & circuli circumferentia: quare ipſa a c puncta data, & ipſa a f c data eſt.

Et quoniam utraque ſimul e d, d f ad d f maiorem proportionem habet, quàm utraq; ſimul e d, d b ad d b. Quoniam enim e d maior eſt quàm dimidia ipſius d f, erit utraque ſimul e d, d f, maior quàm ſeſquialtera ipſius d f. Verum utraque ſimul e d, d b eſt ipſius d b ſeſquialtera: igitur e d, d f ad ipſam d f maiorem proportionẽ habet, quàm e d, d b ad d b. Aut aliter, quoniam ipſa d b eſt maior ipſa d f, alia autem quædam e d: igitur e d habet ad d f maiorem proportionem, quàm e d ad d b. componenti utraq; ſimul e d, d f ad d f, habet maiorem proportionem, quàm utraq; ſimul e d, d b ad d b. Cõpoſitio theorematis manifeſta eſt per ea quę iſtic dicta ſunt.

IN OCTAVVM THEOREMA.

IPſa h f ad ipſam f g minorem habet proportionem quàm duplicatam eam quã habet quadratum b a ad quadratum a d: hoc eſt ipſa b f ad f d. Quoniam enim in triangulo rectangulo ducta eſt ab angulo recto a f perpendicularis, cum trianguli ad perpendicularem ſimiles exiſtant, erit ſicut f b ad b a, ita a b ad b d. Et ſicut prima ad tertiam, ita quadratum primæ ad quadratum ſecundæ, & quadratum ſecundæ ad quadratum tertiæ, uti ſuperius oſtenſum fuit. Sicut ergo f b ad b d, ita quadratum a b ad quadratum b d. Verum ſicut b d ad d f, ita quadratum b d ad quadratum d a. Sicut enim prima ad tertiam, ita quadratum primæ ad quadratũ ſecundæ. Et per æquam ſicut quadratum b a ad quadratũ d a, ita b f ad f d. Colligetur autem idem & aliter hoc modo. Quoniam enim ſicut b f ad f d, ita cõtentum ſub f b, b d ad contentum ſub b d, d f, ipſa b d cõmuni altitudine ſumpta. Eſt autem contentum ſub f b, b d æquale quadrato b a. Cõtento autem ſub b d, d f ęquatur quadratum d a. Sicut ergo quadratum b a ad quadratum a d, ita b f ad f d. Et quoniam h f habet ad f k minorem proportionẽ, quàm h b ad b k. Vniuerſaliter enim ſi ſint duæ magnitudines inæquales, quibus aliæ æquales addantur, maior habet ad minorem maiorem proportionem, quàm compoſitum ad compoſitum. Sunt enim duæ rectæ inęquales a b, c d: quibus addantur b e, d f æquales. Dico quod a b ad c d maiorem proportionem habet, quàm a e ad c f. Quoniam enim maior eſt a b ipſa c d, a b ad b e maiorem habet proportionem, quàm c d ad b e, hoc eſt ad d f. Igitur & componenti, a e ad e b maiorem habet proportionem, quàm c f ad f d, ex prædemonſtratis. & euerſim, a e ad a b minorem, quàm c f ad c d. quare permutatim conſtabit res ipſa.

Contentum igitur ſub h f, f g minus eſt quadrato f k. Si enim ſint tres rectæ continuæ, ſicuti hæ a b c, ita ut a habeat ad b minorem proportionem, quàm b ad c, contentum ſub extremis minus erit quadrato mediæ. Si enim fecerimus ſicut a ad b, ita b ad quandam aliam, ipſa erit maior ipſa c, ſiquidem debeat ad eam habere minorē proportionem, quàm c: & tunc erit cōtentum ſub a, & ſub maiore ipſa c, æquale quadrato k. quare contentū ſub a c minus eſt quadrato b.

Contentum igitur ſub h f, f g ad quadratum f g, minorem proportionem habet, quàm quadratum k f ad quadratum f g. Sicut enim h f ad f g, ita contentum ſub h f, f g ad quadratum f g. Contentum autem ſub h f, f g, quadrato f g minus eſt: maius autem ad idem maiorem habet proportionem, quàm minus.

Et quoniam b e eſt æqualis ipſi d e, erit igitur contentum ſub b f, f d minus contento ſub b e, e d. contentum autem ſub b e, e d æquatur quadrato e d. contentum autem ſub b f, f d, cum quadrato e f, æquatur eidem. Et cōſtat, quod quanto abfuit à bipertitione ipſum f maiori minus eſt, contento ſub æqualibus. Cum maiore enim eo quod fit ab intermedia diuiſionum, æquatur cōtento ſub æqualibus. quare recta, & ſi per ęqualia diuidatur, per punctum aliud atq; aliud, contentum ſub partibus propinquioribus bipertitioni, maius eſt cōtento ſub partibus remotioribus. Igitur f b ad b e minorē proportionem habet, quàm e d ad d f. Vniuerſaliter autem ſi ſint quatuor termini, puta a b, b c, c d, d e: et contentū ſub a b, d e minus ſit cōtento ſub b c, c d. tunc a b ad b c habet minorem proportionem, quàm c d ad d e. Eſto enim contentum ſub b c, c d, æquale contēto ſub a b, d f. Eſt igitur ſicut a b ad b c, ita c d ad d f: & d f eſt maior d e: igitur c d habet ad d e maiorem proportionem, quàm ad d f. Quare a b habet ad b c minorem proportionem, quàm c d ad d e.

Eſt igitur ſicut h b ad b k, ita quadratum h n ad quadratum n k. Quoniam enim quadratum b n æquatur cōtento ſub h b, b k. erūt tres rectæ proportionales, ſicut h b ad b n, ita b n ad b k. & ſicut prima h b ad tertiam b k, ita quadratum ſecundæ ad quadratum tertiæ, hoc eſt quadratum b n ad quadratum b k, uti ſuperius demonſtratū fuit. Rurſus quoniam eſt ſicut h b ad b n, ita b n ad b k. Componenti, ſicut h n ad b n, ita k n ad b k: & permutatim, ſicut h n ad n k, ita b n ad b k. Igitur ſicut quadratum h n ad quadratum n k, ita quadratum n b ad quadratum b k. Verū ſicut quadratum n b ad quadratum b k: ita eſſe oſtenſum eſt h b ad b k. Igitur ſicut h b ad b k, ita quadratum h n ad quadratum n k.

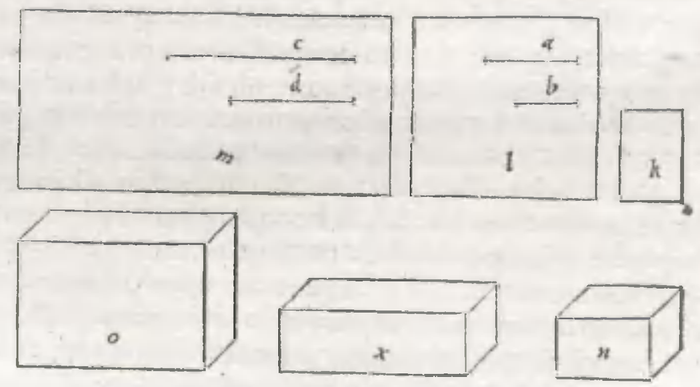
Quadratum autem h f, ad quadratum f k, maiorem habet proportionē, quàm quadratum h n ad quadratum n k. Rurſus duabus inæqualibus h f, k f adijciatur n f, & per ſupradictum habet h f ad f k, maiorem proportionē, quàm h n ad n k. quare & earum duplæ. igitur quadratum h f ad quadratum f k, maiorem habet proportionem, quàm quadratum h n ad quadratum n k, hoc eſt h b ad b k, hoc eſt h b ad b e, hoc eſt k f ad f g.

Igitur h f ad f g maiorem habet proportionem, quàm ſeſquialteram eius, quæ eſt k f ad f g. Intelligantur enim ſeorſum poſitæ rectæ, puta a b, c, d: ita ut quadratum

tum a b ad quadratum c maiorem habeat proportionē, quàm c ad d. Dico quod a b ad d maiorem habet, quàm ſeſquialteram eius quam habet c ad d. Sumatur enim media inter c & d proportionalis e. Quoniam igitur quadratum a b ad quadratum c maiorem proportionem habet, quàm c ad d. Verum quadrati a b ad quadratum c, eſt proportio dupla, eius quæ eſt à b ad c. Illa uero quæ eſt c ad d, dupla eſt eius quę eſt c ad e. Igitur a b habet ad c maiorem proportionem, quàm c ad e. Fiat autem ſicut e ad c, ita c ad b f. Et quoniam quatuor rectæ conſequenter ſunt proportionales b f, c, e, d: igitur b f habet ad d proportionem, quæ eſt b f, ad c triplicatam. Idem eſt c ad e. Habet autem & c ad d proportionē, quæ eſt c ad e duplicatam. Igitur b f ad d habet proportionem ſeſquialteram, eius quæ eſt c ad d. Quare a b ad d maiorem proportionem habet, quàm ſeſquialteram eius, quam habet c ad d.

LIMMA AD SEQVENTIA.

SVnto quatuor termini, a b c d. Dico quod proportio compoſita ex his, ex contento ſub a b, ad quadratum c, & ex proportione b ad d, eadem eſt proportioni collectæ ex contento ſub a b, ſuper ipſam b ad quadratum c, ſuper ipſam d. Eſto itaque contento ſub a b æquale k, & quadrato c æquale l, & fiat ſicut b ad d, ita l ad m. Igitur proportio k ad m componit ex k ad l, hoc eſt contenti ſub a b ad quadratum c: & l ad m, hoc eſt b ad d. Etenim k multiplicans b faciat n, ipſa uero l multiplicans b faciat x, & multiplicans d faciat o. Quoniam igitur contentum ſub a b eſt k, & k multiplicans b facit n: igitur n erit contentum ſub a b, ſuper b. Rurſus quoniam quadratum c eſt l, & l multiplicans d facit o, & multiplicans b facit x: igitur o eſt quadratum c ſuper d. quare proportio contenti ſub a b, ſuper b, ad quadratū c ſuper d, eadem eſt proportioni n ad o. Oportet igitur oſtendere, quod proportio k ad m eſt ſicut n ad o. Quoniam uterq; k l multiplicans b, produxit utrumq; n x. Eſt igitur ſicut k ad l, ita n ad x. Rurſus quoniam l multiplicans utrumq; b d produxit, utrumq; x o erit ſicut b ad d, ita x ad o. Verum ſicut b ad d, ita l ad m. Igitur ſicut l ad m, ita x ad o. Igitur hi k l m ſunt bini, & bini cum his n x o, in eadem proportione. Per æquam igitur ſicut k ad m, ita n ad o. Et eſt k ad m proportio eadem compoſitæ ex cōtento ſub a b ad quadratū c, & ex ea quam habet b ad d. Itē n ad o eſt eadem proportio proportioni contenti ſub a b, ſuper b, ad quadratum c ſuper d. Igitur proportio compoſita ex proportione contenti ſub a b ad quadratum c, & ex b ad d, eadē eſt proportioni contenti ſub a b ſuper b ad quadratum c ſuper d. Manifeſtum autem eſt, quod cōtentum ſub a b ſuper b, æquatur quadrato b ſuper a. Quoniam enim ſicut a ad b, ita contentum ſub a b ad quadratum b, ſumpta b communi altitudine



tudine: ſi quatuor termini fuerint proportionales, contentum ſub extremis æquatur contento ſub medijs. Contentum igitur ſub a b ſuper b, æquatur quadrato b ſuper a.

IN ALITER OCTAVI.

DIctum eſt in præaſſumptis, quod ſi duarum magnitudinū medium quoddam ſumatur, proportio extremitatum componitur ex proportione primi ad medium, & medij ad tertium. Similiter fiet, & ſi multa media ſumātur extremitatum, proportio componitur ex proportionibus quas habent media conſequenter collecta inter ſe. Et iſtic dicit, quod proportio portionis b a d ad portionē b c d cōponitur ex ea quam habet portio b a d ad conū cuius baſis circulus circa diametrum b d, uertex uero punctum a. Et idem conus ad conum baſem eandem habētem uerticem punctum c. Et dictus conus ad portionem b c d, portione uidelicet d a b, & ipſa d c b extremis, ſumptis medijs dictis conis. Verum portionis b a d ad conum b a d eſt proportio g h ad h c, per corolarium ſecundi theorematis ſecundi libri. Dicebatur enim, portionem ad conum in ſeipſa conſtitutum habere eā proportionem, quam habet utraq; ſimul quæ ex centro ſphæræ, & altitudo reliquæ portionis ad altitudinem reliquæ portionis. Proportio autem coni b a d ad conum b c d eſt, quæ a h ad h c. Quoniam enim eiuſdem baſis exiſtentes inuicem ſe habent ſicut eorum altitudines: coni autem b c d ad portionem b c d, ſicut a h ad h f, propter corolarium dictum conuerſim ſumptum. Quare proportio portionis b a d, ad portionem b c d, componitur ex proportione g h ad h c, & a h ad h c, & a h ad h f. Proportio autem compoſita ex g h ad h c, & a h ad h c, eſt ſicut proportio contenti ſub g h, h a ad quadratum h c. nam parallelogramma æquiangula habent inuicem proportionem compoſitam ex proportione laterum. Proportio autem compoſita ex proportione contenti ſub g h, h a ad quadratum c h, & ex proportione a h ad h f eadem eſt proportioni contenti ſub g h, h a in h a, ad quadratū c h in h f, ut oſtenſum eſt in limmate præaſſumpto. Proportio autem contenti ſub g h, h a in h a, ad quadratum c h in h f, eadem eſt proportioni quadrati a h in h g, ad quadratum c h in h f. Et hoc quoq; demonſtratum fuit in præaſſumpto. Proportio igitur portionis ad portionem, eadem eſt proportioni quadrati a h in h g, ad quadratum c h in h f. Quoniam igitur oſtendere oportet, quod portio ad portionem minorem habet proportionem, quàm duplam eam quæ eſt ſuperficiei ad ſuperficiem: oportet igitur oſtendere, quod proportio quadrati a h in h g, ad quadratum c h in h f minorem habet proportionem, quàm duplicatam eam quā habet ſuperficies portionis b a d ad ſuperficiem b c d, hoc eſt quam habet quadratum a b ad quadratum b c. Verum ſicut quadratum a b ad quadratum b c, ita a h ad h c. Oſtenſum eſt enim hoc in theorematibus præcedentibus. Oportet igitur oſtendere, quod quadratum a h in h g, ad quadratum c h in h f, minorem habet proportionem, quàm eam duplicatam quam habet a h ad h c. Verum proportionis a h ad h c dupla eſt proportio quadrati a h ad quadratum h c. Oſtendere igitur oportet, quod quadratum a h in h g, ad quadratū c h in h f, habet minorem proportionem, quàm quadratum a h ad quadratum h c. Verum ſicut quadratum a h ad quadratum h c, ſumpta h g communi altitudine, ita quadratum a h in h g ad quadratum c h in h g. Igitur oſtendere oportet, quod quadratum a h in h g, ad quadratum c h in h f, minorem habeat proportionem, quàm idem quadratū a h in h g, ad quadratum h c in h g. Ad quod autem habet idem minorem proportionem, ipſum eſt maius. Oportet igitur oſtēdere, quod quadratum c h in h f, maius eſt quadrato c h in h g, hoc eſt quod maior ſit h f quàm h g. Eſt autem hoc manifeſtum. inæqualib. enim his a h, h c æquales ſunt additæ f a, c g. Hęc dicens ipſe quidem non induxit compoſitionem, nos autem eam apponemus. Quoniam f h maior eſt ipſa h g, erit quadratum c h in h f, maius eodem in h g. Quare quadra

ti

ti a h in h g ad quadratum c h in h f minorem habet proportionem, quàm idem ad quadratum c h in h g. Verum ſicut quadratum a h in h g, ad quadratum c h in h g, ita quadratum a h ad quadrarum h c. Igitur quadratum a h in h g, ad quadratum c h in h f, minorem proportionem habet, quàm quadratū a h ad quadratum h c. Verum proportio quadrati a h, ad quadratum h c, dupla eſt eius quæ eſt a h ad h c. Quadratum igitur a h in h g, ad quadratū c h in h f minorem habet proportionem, quàm eam duplicatam quæ eſt a h ad h c. Verum portionum proportio eſt oſtenſa eadem ei quæ eſt quadrati a h in o g h, ad quadratū c h in h f. Et proportio ſuperficierum ea eſt, quam habet a h ad h c. Portio igitur ad portionem habet minorē proportionē, quàm ſit ea duplicata, quæ eſt ſuperficiei ad ſuperficiē.

Deinceps autem reſoluens reliquam partem theorematis, inducit: Dixi iam quod portio maior habet ad minorem, maiorem proportionem, quàm ſeſquialteram eius quæ eſt ſuperficiei ad ſuperficiem. Verum portionum quidem proportio oſtēſa eſt eadem illi quam habet quadratum a h in h g, ad quadratum c h in h f. Proportionis igitur ſuperficiei ad ſuperficiem illa eſt ſeſquialtera, quā cubus a b habet ad cubum b c. nam eius quę eſt a b ad b c, illa dupla eſt quæ eſt quadrati a b ad quadratū b c. tripla uero quę eſt cubi a b, ad cubum b c. Sicut enim a b ad b c, ita a h ad h b, propter ſimilitudinem triangulorum a h b, a b c. Si autem ſint quatuor proportionales rectæ, ſolida quoq; ab eis ſimilia inter ſe & ſimiliter deſcripta ſunt proportionalia. quare cubus a h ad cubum h b habet proportionē ſeſquialteram eius quam habet quadratum a b ad quadratum b c. hoc eſt ſuperficies ad ſuperficiem. Verum ſicut portio ad portionem, ita quadratum a h in h g, ad quadratum c h in h f. Dico igitur, quod quadratū a h in h g, ad quadratum c h in h f, maiorem proportionem habet, quàm cubus a h ad cubum h b, hoc eſt quàm quadrati a h ad quadratum h b, & ipſius a h ad h b. nam proportio quadrati a h ad quadratum h b, aſſumpta ea quæ eſt a h ad h b, eadem eſt ei quæ eſt cubi a h ad cubū h b. nam utraq; eiuſdem eſt tripla. Proportio autem quadrati a h ad quadratum h b, cum proportione a h ad h b, eſt ea quæ eſt quadrati a h ad contentum ſub c h, h b. Quoniā enim proportio a h ad h b eadem eſt proportioni b h ad h c, ipſa b h media proportionali exiſtente, proportio quadrati a h ad quadratum h b, cū proportione a h ad h b eadem eſt proportioni quadrati a h ad quadratum h b, cum portione b h ad h c. uerum proportio b h ad h c eadem eſt proportioni quadrati b h ad contentum ſub b h, h c, ſumpta b h communi altitudine. quare proportio quadrati a h ad quadratum h b, cum proportione a h ad h b, eadem eſt proportioni quadrati a h ad quadratum h b, cum proportione quadrati b h ad contentum ſub b h, h c. Verum proportio quadrati a h ad contentum ſub b h, h c, eſt compoſita ex proportione quadrati a h ad quadratum h b, & quadrati b h ad contentum ſub b h, h c, quadrato b h ſumpto medio. quare proportio quadrati a h ad quadratū h b, cum proportione a h ad h b, eadem eſt proportioni quadrati a h ad contentū ſub b h, h c. quadrati aūt a h ad contentum ſub b h, h c, proportio eadem eſt proportioni quadrati a h in h g, ad contentū ſub b h, h c in h g, ſumpta cōmuni altitudine h g. Dico item, quod quadratū a h in h g, ad quadratum c h in h f, maiorē habet proportionem, quàm quadratum a h in h g, ad contentū ſub c h, h b in h g. Ad quod aūt idem maiorem habet proportionem, illud minus exiſtit. Oſtendendum igitur, quadratū c h in h f eſſe minus contento ſub b h, h c in h g. Idē eſt ac ſi oſtendatur, quod quadratū c h ad contentū ſub c h, h b minorem habeat proportionē, quàm h g ad h f. Si enim fuerint quatuor termini, ueluti iſtic ſunt, quadratum c h contentum ſub c h, h b, & h g, et h f: & contentū ſub extremis minus ſit contento ſub medijs, tunc primus ad ſecundū minorem proportionem habet, quàm tertius ad quartum, uti ſuprà oſtenſum fuit. Rationabiliter autē oportuerat oſtendere, quadratum c h in h f maius eſſe contento ſub c h, h b in h g. quod idem eſt ac ſi demō-

Gg ſtretur

ſtretur quod quadratum c h ad contentum ſub c h, h b minorem habeat proportionem, quàm h g ad h f. Verum ſicut quadratum c h ad contentum ſub c h, h b, ita c h ad h b. Oportet oſtendere quod c h ad h b minorem habeat proportionem, quàm h g ad h f: hoc eſt h g ad h f maiorem habet proportionem, quàm c h ad h b. Ducatur ab e k ad angulos rectos ipſi e c, & ab ipſo b perpendicularis ſupra eam b l. Reliquum nobis eſt oſtendere, quod g h ad h f maiorem proportionem habeat, quàm c h ad h b. Eſt autem ipſa h f æqualis utriq; ſimul h a, k e. nam a f equatur ei quæ ex centro. Oſtendendũ eſt ergo, quod g h ad utramq; ſimul h a, k e maiorẽ habeat proportionem, quàm c h ad h b. Et ablata ab ipſa g h ipſa c h, & ab ipſa k e ipſa e l, æquali ipſi b h, oportebit oſtendere quod reliqua c g ad reliquam utráq; ſimul a h, k l maiorem proportionem habet, quàm c h ad h b. Quoniam enim oportet oſtendere, quod g h ad utramq; ſimul h a, k e maiorem proportionem habeat quàm c h ad h b. Et permutatim, g h ad h c maiorem habeat proportionem, quàm utraq; ſimul h a, k e ad h b, hoc eſt ad l e. Et diuidenti g c ad c h maiorem habet proportionem, quàm utraq; ſimul h a, k l ad l e, hoc eſt b h. Permutatim quoque g c ad utramq; ſimul h a, k l maiorem habet proportionem, quàm c h ad b h. Item ſicut c h ad b h, ita b h ad h a, hoc eſt l e ad a h. Quoniam igitur g c ad utramque ſimul h a, l k maiorem habet proportionem, quàm l e ad a h. Et permutatim, quoniam c g, hoc eſt k e ad e l maiorem habet proportionem, quàm utraque ſimul k l, h a ad h a. diuidenti, k l ad l e maiorem proportionem habet quàm ipſa k l ad h a, hoc eſt quod minor eſt l e ipſa h a.

Deinceps autem nos compoſitionem adijciemus. quoniam l e minor eſt a h, habebit k l ad l e maiorem proportionem, quàm k l ad a h. Componenti habet k e ad l e maiorem proportionem, quàm utraq; ſimul k l, h a ad h a. Ipſa uero l e eſt æqualis ipſi b h. Igitur g c ad b h maiorem habet proportionem, quàm utraque ſimul k l, a h ad a h. Permutatim igitur, g c ad utramq; ſimul k l, a h maiorem proportionem habet, quàm b h ad h a, hoc eſt c h ad h b. Permutatim ergo g c ad c h maiorem proportionem habet, quàm utraq; ſimul k l, a h ad h b. Componenti igitur g h ad h c maiorem proportionem habet, quàm utraque ſimul k l, a h, h b ad h b, hoc eſt utraq; ſimul a h. k e ad h b. Eſt autem k e æqualis ipſi a f, igitur permutatim g h ad h f maiorem proportionem habet quàm c h ad h b. Sicut autem c h ad h b, ita quadratum c h ad contentum ſub c h, h b. Igitur ipſa g h ad h f maiorem habet proportionem, quàm quadratum c h ad contentum ſub c h, h b. Et per prius dicta quadratum c h in h f minus eſt cõtento ſub c h, h b. Igitur quadratum a h in h g, ad quadratum c h in h f, maiorem proportionem habet, quàm ipſum quadratum a h in h g, ad contentum ſub c h, h b in h g: hoc eſt quadratum a h ad contentum ſub c h, h g. Proportio autem quadrati a h ad contentum ſub c h, h b, ſumpto medio quadrato b h, cõponitur ex proportione quadrati a h ad quadratum h b, & quadrati b h ad contentum ſub b h, h c. Proportio autem quadrati b h ad contentum ſub b h, h c, eadem eſt proportioni b h ad h c, hoc eſt a h ad b h. Igitur quadratum a h in g h, ad quadratum c h in h f, maiorem habet proportionem, quàm quadratum a h ad quadratum h b cum proportione a h ad h b. Proportio autem compoſita ex proportione quadrati a h ad quadratum h b, & ipſa a h ad h b, eadẽ eſt proportioni cubi a h ad cubum h b, hoc eſt cubi a b ad cubum b c. Quadratũ igitur a h in h g, ad quadratum c h in h f, maiorem habet proportionem, quàm cubus a b ad cubum b c. Verum proportio quadrati a h in h g, ad quadratum c h in h f, eſt oſtenſa eadem eſſe proportioni portionum. Proportio uero cubi a b ad cubum b c oſtenſa eſt eſſe ſeſquialtera proportioni ſuperficierũ. Portio igitur ad portionem habet maiorem proportionem, quàm ſeſquialteram eius quæ eſt ſuperficiei ad ſuperficiem.

IN NONVM THEOREMA.

COnſtat autem, quod ipſa b a minor eſt ipſa a k, quàm dupla potẽtia. ea uero quę ex centro, maior quàm dupla. Coniũcta enim ab ipſo b ad cẽtrum b o, & angulo ad centrum facto obtuſo b o a, erit quadratum a b maius quadratis laterum angulum obtuſum complexorum. cumq; ſint ęqualia, quadrato unius eorũ, puta quæ ex centro eius, maius erit quàm duplum. Item cum quadratum a b ſit æquale quadratis a k, b b, & quadratum a k ſit maius quadrato k b, erit quadratũ a b minus quàm duplum quadrati a k. Et hæc quidem in figura in qua eſt ſignũ tale θ. In altera uero figura contraria iſtis conuenienter dicentur.

Eſto e n æqualis ipſi e l, & à circulo circa h f diametrũ conus eſto uerticem habens punctum n. Iſte autem æquatur hemiſphærio ſecundum circumferentiam h e f. Quoniam enim cylindrus baſem habens circulum circa diametrum h f, altitudinem d e, eſt triplus coni baſim eandem & altitudinem æqualem habentis, & ſeſquialter hemiſphærij, erit tale hemiſphærium duplum eiuſdem coni. Eſt autẽ conus baſem habens circulum circa diametrum h f, et altitudinem l n, duplus eiuſdem coni. Igitur hemiſphærium ęquatur cono, baſem habenti circulum circa diametrum h f, & altitudinem l n.

Contentum autem ſub r c, a r, maius eſt contento ſub a k, k c, quia habet latus ſuum minus latere minore alterius maius. Dictum eſt enim ſuperius, quod ſi recta diuidatur in duo inæqualia, alio & alio puncto, contentum ſub partibus propinquioribus bipertitioni, maius eſt contento ſub remotioribus. Ac ſi dicat, quia latus minus ſuum habeat latere minore alterius maius. nam quanto minus habuerit, tanto diſcedet ab æquipartitione.

Quadratum aũt a r æquatur contento ſub a k, c x. nam dimidiũ eſt quadrati a b. Si enim iungatur b c, quia in triangulo rectangulo ducta eſt à recto angulo perpendicularis b k, & trianguli circa cathetum ſunt ſimiles inuicem & toti, quod ſub c a, a k continetur, æquatur quadrato a b. quare & contentum ſub dimidia ipſius e a & a k, hoc eſt c x, a k, æquatur dimidio quadrati a b, hoc eſt quadrato a r. Maius eſt igitur utrumq; ſimul utroq; ſimul. quoniam contentum ſub c x, a k, æquatur quadrato a r: & contentum ſub a r, r c, maius eſt contento ſub a k, k c. Si autem inæqualibus æqualia addantur, tota fient inæqualia, & maius id quod antea fuerit maius. Contento igitur ſub a r, r c ſi addatur quadratum a r, & cõtento ſub a k, k c contentum ſub c x, a k: fiet contentum ſub a r, r c cum quadrato a r, maius contento ſub a k, k c, cum contento ſub c x, a k. Verum contentum ſub a r, r c cum quadrato a r, æquatur contento ſub c a, a r, per ſecundum theorema ſecundi libri Elementorũ. Et contentũ ſub a k, k c, cũ contento ſub c x, a k, æquatur contento ſub a k, k x per primum theorema ſecũdi libri eiuſdem. Igitur contentum ſub c a, a r, maius eſt contento ſub a k, k x. Cõtento autem ſub x k, k a, æquatur contentũ ſub m k, k c. Supponitur enim, ſicut x c ad c k, ita m a ad a k. quare componenti ſicut x k, k c ad k c, ſic m k ad k a: & contentum ſub extremis, æquatur contento ſub medijs. Cõtentum igitur ſub x a, a k, æquatur contento ſub m k, k c. Verum contento ſub x k, k a, maius eſt cõtentum ſub a c, a r. Igitur contentum ſub a c, a r, maius eſt contento ſub m k, k c. quare maiorem proportionem habet ipſa a c ad c k, quàm m k ad a r. Quoniam enim lineæ quatuor rectæ a c, c k, k m, a r ſunt, & contentum ſub prima c a, & quarta a r, maius eſt contento ſub ſecunda c k, & tertia k m: habebit prima a c, ad ſecundam c k, maiorem proportionem, quàm tertia k m ad quartam a r. Quam autem c a habet ad c k, hanc habet quadratum a c ad quadratum b c. iuncta enim b c. Quia itaq; in triangulo rectangulo ab angulo recto eſt ducta cathetus, fit ſicut a c ad c b, ita c b ad c k. Quare ſicut prima a c ad tertiam c k, ita quadratum primæ a c ad quadratum c b. Sicut autem quadratum a c ad quadratum c b, ita quadratum a b ad quadratum b k, nam triangulus a b k similis est triangulo a b c. Est igitur sicut a c ad c k, ita quadratum a b ad quadratū b k. At uero a c habet ad c k maiorem proportionem, quàm m k ad a r, & antecedentium dimidia, dimidium quadrati a b, quod est quadratum a r, ad quadratum b k, maiorem habet proportionem quàm dimidia ipsius m k ad ipsam a r, hoc est ipsa m k ad duplam ipsius a r. Verū quadratum f l æquatur quadrato a r. quoniā ipsa a b posita est æqualis ipsi e f, & ipsa e f est ipsi r a potentia dupla. nam ipsa e l æqualis est ipsi a r. Et ipsa n l dupla est ipsius a r, quia & ipsius l f. Quare quadratum f l ad quadratum b k maiorem habet proportionem, quàm m k ad duplam ipsius a r, quæ est æqualis ipsi l n. maiorē ergo proportionē habet circulus circa diametrum h f constitutus, ad circulum circa diametrum b k, quàm m k ad n l. quare conus habens basem circulum circa diametrum h f, uerticem uero pūctum n, maior est cono basem habente circulum circa diametrum b d, uerticem uero m punctum. Si enim fecerimus sicut circulus circa diametrum f h, ad circulum circa diametrum b d, ita ipsam k m ad aliam quandam, erit ad minorem ipsa l n. Et erit conus habens basem circulum circa diametrum f h, altitudinem uero rectam minorem inuentam, æqualis ipsi cono m b d: quia eorum bases altitudinibus contrà afficiuntur. Et erit minor cono n h x, quia in eadem base ambo constituti habentur inuicem, uti eorum altitudines. Constat igitur, quod hemisphærium quod est secundum circumferentiam e f h, maius est portione quæ est secundum circumferentiam b a d.

EVTOCII ASCALONITAE COMMENTARII in secundum librum Archimedis de Sphæra & cylindro: expositione discursa Milesio Mechanico Isidoro nostro præceptori

EVTOCII ASCALONITAE COMMENTARII IN MENSVRATIONEM *circuli Archimedis.*

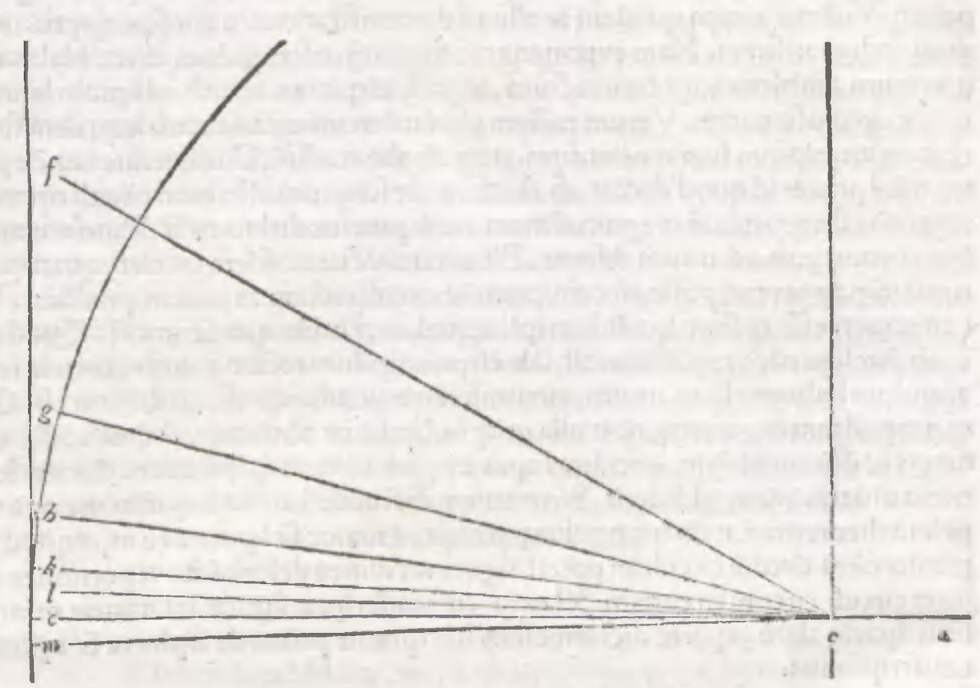
CONSEQVENS igitur fuit mihi, intentum meum prosequenti, qui ex his quæ ab Archimede scripta fuerūt, clarioribus & breuiori disciplina indigentibus inciderim, & ea quæ utcunque in eis discussione indiguerint, pro uirib. continua reddere eis, quæ à nobis in libro de Sphæra & cylindro scripta sunt. Cū uotum sanè dignū obtigerit, ut & maioribus, & quib. ampliori cura opus erit, nobis sit insistendū: erit utiq; propositus nobis deinceps Archimedis libellus, cuius inscriptio est Circuli mensuratio, in quo uiri propositionem ex ipsa superscriptione percipimus. Vult enim ostendere, cui spacio rectilineo sit circulus æqualis, rem longè ante ipsum à clarissimis philosophis quæsitam. Constat enim hoc, id quæsitum esse quod Hippocrates Chius, & Antiphon cum studiosè inuestigassent, eos nobis paralogismos inuenerunt, quos illis exquisitè cognitos existimo qui Geometricam Eudemi historiam inspexerunt, & Ceria Aristotelica acceperūt. Verū est quidem hic libellus, uti ait Heraclides in Archimedis uita, ad usum uitæ necessarius. Ostendit enim circumferentiam diametro triplam & minus septima parte, plus uero quantum sunt decem septuagesimæprimæ. Hoc autem, dicit, proximè demōstratum est: inuenta quidem uera est talis per quasdam spirales recta linea, quæ sit æqualis circumferentiæ dati circuli.

IN PRIMVM THEOREMA.

PRimum theorema his qui aliquantulum in mathematicis sint uersati, nullam uidetur habere difficilem perquisitionem, cum ipsa Archimedis uerba palàm exposita sint, & conclusionem propositioni restituant nulla parte neglecta parem. Videtur autem quadam re esse ad demonstrationem abusus, quę res nondum sit demonstrata. Nam exponens triangulum rectangulum, dicit: Habeat latus unum, ambiens angulum rectum, æquale ei quæ ex centro reliquum latus æquale circumferentiæ. Verum rectam circumferentiæ dati circuli æqualem sumere, neq; ante ipsum fuerat ostensum, neq; ab alio traditū. Considerare tamē oportet, nihil præter id quod deceat, ab Archimede scriptum esse. nam circuli circumferentiam esse quandam magnitudinem, nulli prorsus dubium est. Puto autem, & hoc eorum quæ ad unum distant. Est autem rectæ eiusdem speciei, quanquam non utiq; appareat, posse circumferentiæ circuli rectam æqualem præstare. Verumtamen esse rectam quandam ipsi æqualem, à nullo quæsitum est. Quod igitur et ab Archimede propositum est, tale est, triangulum rectangulum qui circa rectū angulum habuerit latus unum, circumferētiæ circuli æquale, uti dictum est. Quare propositum exponens, non ulla utiq; iudicabitur abusione. Admirabilis autē magis & istis uidebitur, quod ita supra magnitudinem quæsitorum claram & facilem inuentionem addiderit. Sicut autem dictum est, nulla inquisitione opus est primo theoremati. nam triangulus p o r, quod maior sit figura a f o m, et quod simpliciter circa datum circulum potest figura rectilinea describi, ita ut portiones quę inter circuli circumferentiam & latera circumscriptæ figuræ rectilineæ minores sunt spacio dato, apertè dictum est in his quæ in primo de Sphæra & cylindro conscripsimus.

IN TERTIVM THEOREMA.

IN hoc theoremate continenter iubemur, numero quocunq; dato radicem quadratam inuenire. Hanc autem in numero nō quadrato præcisam inueniri non est possibile. Numerus enim in se multiplicatus producit quendam numerū quadratum: partes autem in se multiplicatæ, non explent numerū, sed partes. Quemadmodum uero oporteat radicem proximè producentem datum numerum inuenire, dictum est ab Herone in metricis, dictum & à Pappo & Theone, & à multis alijs, qui magnam Claudij Ptolemæi compositionem exposuerunt. Quare nō est opus in hoc nos laborare, cū liceat studiosis illud ab illis petere. Et angulus c e f, est tertia pars recti. Si enim hexagoni circumferentiā bipertientes, eius dimidium ad tertiæ separantes iunxerimus ipsam e f, erit angulus c e f, tertia recti. nam circūferentia ad c assumpta, cum sit dimidia circūferentiæ hexagoni, est duodecima circuli pars. quare & angulus c e f, qui est ad centrum, est duodecima pars quatuor rectorum. quare est tertia unius recti. Igitur e f habet ad f c proportionem, quam 306 ad 153. Quod autem e f sit ipsius c f dupla, hinc manifestum est. Si enim exproducentes ipsam f c in c, & æqualem ei constituentes iunxerimus ab ipso e, erit angulus apud e duæ tertiæ recti, & angulus ad f duæ tertiæ recti. Igitur trianguli æquilateri est dimidium triangulus c e f, & quia basis æquilateri æquatur ipsi e f, bipertietur puncto c. igitur e f est dupla ipsius f c. Habet autem ipsa e c ad c f proportionem, quam 265 ad 153. quia enim e f ponitur 306. Si ipsa in seipsam multiplicetur, fient 93636. Ipsa autem c f est 153. quare quadratum eius erit 23409. Quoniam igitur quadratum e f æquatur quadratis harum e c, c f, si à quadrato e f quod est 93636. auferamus quadratum ipsius c f, 23409. relinquetur quadratum e c, quod est 70227. Cuius latus quadratum est 265. Et item pars quædam minima & insensibilis. Deficit enim potentia horum 265, à præciso duab. unitatibus. Multiplicationes autem subijciuntur. Diuidatur itaq; angulus e f c in duo æqua, ducta e g. Est igitur sicut f e ad e c, ita f g ad g c, per tertium theorema sexti libri Elementorũ Euclidis: & cõponẽti, ſicut utraq; ſimul f e, e c ad e c, ita f c ad c g. Et permutatim, ſicut utraq; ſimul f e, e c ad f c, ita e c ad c g. Eſt autem utraq; ſimul e f, f c maior, quàm 571. Eſt autem f c, 153. Igitur utraque ſimul f e, e c ad e c, maiorem ha



bet proportionem, quàm 571 ad 153. quare e c ad c g maiorem proportionem habet, quàm 571 ad 153. Igitur e c ad g c potentia habet maiorem proportionem, quàm 349450 ad 23409. Concludetur autem hoc ita. quoniam enim oſtenſum eſt, quod e c ad c g maiorem habet proportionem, quàm 571 ad 153. ſi quis poſuerit ipſam e c eſſe 571, & ipſam c g 153, erit quadratum ipſius e c 326041. & quadratũ c g 23409, cum utraq; ſimul ſint æqualia, quadrato ipſius e g, quod eſt 349450. huius radix quadrata eſt 591, & $\frac{1}{8}$ proxime. nã quadratus huius $591\frac{1}{8}$ deeſt à præciſo una & uiginti unitatibus & 59 ſexageſimis quartis. Igitur e c ad c g habet potentia proportionẽ, quam 349450 ad 23409. longitudine uero, quam 591, & $\frac{1}{8}$ proxime ad 153 Multiplicationes autem ſubijciuntur.

Rurſus in duo æqua diuidatur angulus g e c ducta h e, eadem ratione ipſa e c habebit ad c h maiorem proportionẽ, quàm $1162\frac{1}{8}$ ad 153. Fit enim per bipertitionem anguli, ſicut e g ad e c, ita g h ad h c. Et componenti, ſicut utraq; ſimul g e, e c ad e c, ita g c ad c h: & permutatim, ſicut utraq; ſimul g e, e c ad g c, ita e c ad c h. Et eſt quidem e c, 571, & pars quædam. At uero e g 591, & amplius quædã pars maioris. igit̃ ſunt $1162\frac{1}{8}$. Eſt aũt g c 153. igitur utraq; ſimul g e, e c ad g c maiorem proportionem habet, quàm $1162\frac{1}{8}$ ad 153.

Item h e, habet ad h c maiorem proportionem, quàm $1173\frac{1}{8}$ ad 153. quoniam enim oſtenſum eſt e c habere ad h c maiorem proportionem, quàm $1162\frac{1}{8}$ ad 153. Si quis ſuppoſuerit eas ſic habere, erit quadratum e c 1350534, & $\frac{33}{64}$. quadratum uero c h 23409. Quadratum ergo e h æquale quadratis harũ e c, c h erit 1373943, $\frac{33}{64}$ cuius latus eſt $1172\frac{1}{8}$ proxime. nam deeſt à præciſa potentia ipſius unitatibus 66, multiplicationes uero ſubijciuntur.

Item angulus h e c diuidatur in duo æqua, ducta e k. Igitur e c ad e k maiorem proportionẽ habet, quàm $2304\frac{1}{4}$ ad 153. Rurſus enim propter bipertitionem an gu-

guli h e c erit ſicut h e ad e c, ita h k ad c k. Et componenti, ſicut utraque ſimul h e, e c ad e c, ita h c ad c k. Et permutatim, ſicut utraque ſimul h e, e c ad h c, ita e c ad c k. Et quia oſtenſum eſt ipſam h e eſſe $1172\frac{1}{8}$. utraque ergo ſimul h e, e c, maior erit iſto $2334\frac{1}{4}$. & h c ponitur 153. Igitur utraque ſimul h e, e c ad h c maiorem habet proportionem, quàm $2334\frac{1}{4}$ ad 153. Igitur e k ad c k maiorem habet proportionem, quàm $2339\frac{1}{4}$ ad 153. Item quoniam ſupponit̃ e c $2334\frac{1}{4}$, erit quadratum ipſius e c $5448723\frac{3}{16}$. Quadratum uero ipſius c k 23409. Iſtis autem æquatur quadratum k e, quod erit $5472232\frac{3}{16}$. cuius latus quadratum eſt proxime $2339\frac{1}{4}$. deeſt ab eius præciſo quadrato unitatibus $41\frac{1}{2}$. multiplicationes uero ſubijciuntur.

Item diuidatur angulus k e c in duo æqua, ducta e l. Igitur e c ad e l maiorẽ habet proportionem, quam $4600\frac{1}{2}$ ad 153. Rurſus enim propter bipartitionem anguli ſicut k e ad e c, ita k l ad l c. Et componenti, ſicut utraq; ſimul k e, e c ad e c, ita k c ad l c. Et permutatim, ſicut utraq; ſimul k e, e c ad k c, ita e c ad l c. & k e eſt $2339\frac{1}{4}$. & pars inſuper quædam. & e c, $2334\frac{1}{4}$, & particula inſuper quædam. Igitur utraque ſimul k e, e c ad k c maiorem proportionem habet, quàm $4673\frac{1}{2}$ ad 153. Sicut autem utraq; ſimul k e, e c ad k c, ita e c ad c l. Igitur e c ad c l maiorem proportionẽ habet, quàm $4673\frac{1}{2}$ ad 153. Quoniam igitur angulus f e c exiſtens tertia pars recti, eſt duodecima pars quatuor rectorum, eius dimidium erit g e c pars uigeſimaquarta, cuius item dimidium h e c erit quadrageſimaoctaua, atque item huius dimidium k e c erit nonageſimaſexta. rurſus huius dimidium centeſima nonageſimaſecunda. Ponatur, uti dicit, angulus c e m æqualis ei, & educatur f c ad m. Angulus igitur l e m exiſtens duplus anguli l e c, erit nonageſimaſexta rectorum quatuor. quare ipſa l m erit latus polygoni habentis latera 96 circa circulum deſcripti. Quoniam igitur e l ad c l oſtenſa eſt habere maiorẽ proportionem, quàm $4673\frac{1}{2}$ ad 253. & eſt ipſa a c dupla ipſius e c, & l m ipſius l c. Igitur a c ad l m habet maiorẽ proportionem, quàm $4673\frac{1}{2}$ ad 153. Econuerſo igitur l m ad a l minorem habet proportionem, quàm 153 ad $4673\frac{1}{2}$. Et quoniam l m eſt latus polygoni habentis latera 96, igitur ambitus polygoni erit 14688. nam 96 multiplicatus in 153 dictum numeri producit. Igitur ambitus polygoni habet ad diametrum a c minorem proportionem, quàm 14688 ad $4673\frac{1}{2}$. Ambitus ergo polygoni erit triplus diametro circuli, & inſuper $667\frac{1}{2}$. hic autem minor eſt, quàm pars ſeptima ipſius diametri. Hic enim ſepties ſumptus producit $4672\frac{1}{2}$ qui minor eſt diametro unitate. Quoniam igitur polygoni ambitus minor eſt quam triplus ſeſquiſeptimus diametro, & circuli ambitus ſit minor ambitu polygoni: multo magis igitur circuli circumferentia eſt minor, quàm tripla ſeſquiſeptima.

Deinceps uero conſtruens reliquam partem theorematis, dicit: Eſto circulus circa diametrum a c, & tertia pars recti angulus b a c. Hoc autem erit, ſi à puncto c ſumpta c b, æquali lateri hexagoni iungamus a b. Nam angulus in circumferentia hexagoni ad centrum factus eſt duæ tertiæ recti, in circumferentia uero trigoni eſt quatuor tertiæ recti. Quoniã igitur angulus a b c eſt rectus, & angulus b a c eſt tertia recti, erit angulus a c b duæ tertiæ recti. Si ergo educentes ipſam c b ad b, & æqualem ei ſumpſerimus, & ab a iunxerimus e a, fiet triangulus æquilaterus. Et quia a b cathetus eſt, & bipertitur baſim, erit a c æqualis ipſi c b. Si rurſus ſumpſerimus ipſam a c 1560, erit ipſa c b 780. Et quadratum a c 2433600. & quadratum ipſius c b 608400. Et ſi auferamus quadratum c b à quadrato a c, relinquetur quadratum a b 1825200. cuius latus quadratum 1351 proxime. excedit enim præciſum ſola unitate. propterea dixit ipſam a b minorẽ habere ad b c proportionem, quàm 1351 ad 780. multiplicationes uero ſubijciuntur.

Diuidatur in duo ęqua angulus b a c, angulo a f g. Quoniã igitur angulus b a g æqua-

æquatur angulo g c b, nam in eadem circumferentia consistunt: item æquatur angulo g a c: igitur angulus g c b est æqualis angulo g a c. & angulus a g c communis est rectus: igitur reliquus g f c, reliquo a c g æqualis. igitur triāguli a g c & c g f sunt inuicem equianguli, & similes. Igitur sicut a g ad g c, ita c g ad g f, & a c ad c f. Nam triangulorum similiū latera æquos angulos complexa, sunt proportionalia. Verum sicut a c ad c f, ita utraque simul c a, a b ad c b, & a g ad g c. quia enim angulus b a c in duo æqua diuiditur, ducta a f erit sicut b a ad a c, ita b c ad c f. Et permutatim, sicut utraq; simul b a, a c ad b c, ita a c ad c f. Et est a b minor ꝗ 1351, & a c 1560, & b c 780. igitur utraq; simul a b, c b minorem habet ad b c proportionem, quàm 2911 ad 780. igitur a c ad c f habet minorem proportionem, quàm 2911, & 780. sicut autem a c ad c f, ita a g ad g c. igitur a g ad g c minorem habet proportionem, quàm 2911 ad 780. Ex his igit̄ erit quadratum a g 8473921. quadratum g c, 608400. Et quadratum a c est eis æquale. Erit igitur ipsum 9082321, cuius latus est tetragonicum proxime. nam excedit præcisum quadratum unitatibus $368\frac{1}{6}$. Eadem ratione dicit a c ad c g minorem habere proportionem, quàm $3390\frac{1}{4}$ ad 980. multiplicationes autem subijciuntur.

Diuidatur in duo æqua angulus c a g, ducta a h. propter bipartitionem igitur anguli & similitudinem triangulorum, & proportionalitatem laterum & componenti, & permutatim, sicut utraq; simul g a, a c ad g c, ita a h ad h c. & supponebatur a c minor quàm 2911. & ipsa a c minor quàm $3013\frac{3}{4}$. igitur utraq; simul g a, a c minor est quàm $5924\frac{3}{4}$. ipsa uero g c est 780. igitur utraq; simul g a, a c ad g c minorem habet proportionē, quàm $5924\frac{3}{4}$ ad 780. quare & a h ad h c minorem proportionem habet, ꝗ $5924\frac{3}{4}$ ad 780. quare a h ad h c minorē proportionem habet quàm $455\frac{3}{4}$ ad 60. nam utraq; utriusq; est pars, & horum quadrupli ipsa a h ad h c minorem proportionem habet, quàm 1823 ad 240. propter hoc enim dicit, quod utraque utriusq; est $\frac{4}{13}$. Et quoniam a h est 1823, erit quadratum eius 3323429. Est autem h c 240, & eius quadratum 57600. & est istis quadratis a h, h c æquale quadratū a c. Erit igitur 3380429, cuius latus quadratum est $1838\frac{9}{11}$. nam huius quadratum excedit, uerum quadratum unitatibus 321 propè. quare a c ad h c minorē habet proportionem, quàm $1838\frac{9}{11}$ ad 240. multiplicationes uero subijciuntur.

Item in duo æqua diuidatur angulus h a c ducta k a. Rursus propter bipartitionem anguli, & similitudinē triangulorū, & proportionalitatem laterū, et componēti, & permutatim, sicut utraq; simul h a, a c ad c h, ita a k ad k c. Verū utraq; simul h a, a c minor est, quàm $3661\frac{9}{11}$. Quoniam enim h a supponit̄ 1823, & a c $1838\frac{9}{11}$. Est autem h c 240. Igitur utraq; simul h a, a c ad h c habet minorem proportionem, quàm $3661\frac{9}{11}$ ad 240. quare & a k ad k c minorem habet proportionem, quàm $3661\frac{9}{11}$ ad 240.

igitur a k ad k c minorem proportionem habet, quàm 1007 ad 66. & quadratum a k 1014049. quadratum uero k c est 4356: quibus æquatur quadratum a c. igitur erit 1018405, quorum latus quadratum est $1009\frac{1}{6}$ proximè. nam eius quadratum superat præcisum unitatibus 12 & $\frac{3}{63}$. Igitur a c ad c k minorem proportionē habet, quàm $1009\frac{1}{6}$ ad 66. multiplicationes autem subijcientur.

Item diuidatur in duo æqua angulus k a c ducta a l eadem ratione, sicut utraq; simul k a, a c ad k c, ita a l ad c l. & est a k minor quàm 1007, & a c minor quàm $1009\frac{1}{6}$, & k c 66. Igitur utraq; simul k a, a c, ad k c minorem proportionē habet, ꝗ $2016\frac{1}{6}$ ad 66. Igitur a l ad l c minorem proportionem habet, quàm $2016\frac{1}{6}$ ad 66. Et quoniam a l supponitur esse $2016\frac{1}{6}$ erit eius quadratum $4064928\frac{1}{36}$. Et ipsa l c est 66, cuius quadratū est 4356: æquale uero ipsis ambobus simul quadratum

a c $4069284\frac{1}{36}$. cuius radix quadrata est $2017\frac{1}{4}$ proximè. nam quadratum eius excedit præcisum unitatibus $13\frac{6}{20}$. quare a c ad c l habet minorem proportionem, quàm $2017\frac{1}{4}$ ad 66. multiplicationes autem subijcientur.

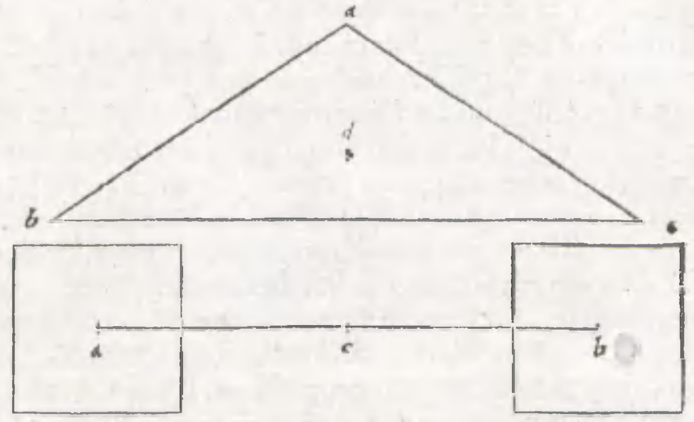
Quoniam igitur a c habet ad c l minorē proportionem, quàm $2017\frac{1}{4}$ ad 66. Ecōuerso igitur c l ad c a habet maiorem proportionem, quàm 66 ad $2017\frac{1}{4}$. et quoniā circūferētia c b est sexta pars circuli: erit igit̄ ipsa g c pars duodecima, et ipsa h g uigesimaquarta, & ipsa k c quadragesimaoctaua, & ipsa l c nonagesimasexta. Ambitus ergo polygoni ad diametrum circuli maiorem proportionem habet, quàm 6336 ad $2017\frac{1}{4}$. Hæc autem sunt tripla. etiam supererant $284\frac{1}{4}$, qui quidem minor est decem septuagesimis primis, quarum una est $27\frac{2}{3}$ proximè. Harum decuplus est 277 multo magis ergo circumferētia circuli maior est diametro sua, quàm tripla super decies partiens septuagesimas primas. Quemadmodum igitur numeri ab eo positi partiuntur, mediocriter declarati sunt. Sciendum quod Apollonius Pergeus Mocyntocio demonstrauit idē, per alios numeros ducens ad maiorem propinquitatem. id quidem diligētius factum & exquisitius uidetur, nihil autem confert ad Archimedis propositum. Diximus enim, eum in hoc libello proposuisse, se inuenturum propè propter uitæ utilitates. Quare neque Sporus Nicenus percipitur opportunè Archimedem accusare, quod non exquisitè ab eo traditum sit cui rectæ lineæ circuli circumferentia sit æqualis. Ex quib. ipse in Ceriis dicit, præceptorem suum Philonem Apogadarum ad numeros diligentiores rem hanc adduxisse, quàm Archimedes. Omnes enim ex ordine habentur, & uidentur eius propositum nō cognouisse. Vtuntur tamē multiplicationibus myriadū, & diuisionibus, quibus non est facile assequi inductum, & rationibus magnis. Si quis uero uoluerit omnino ad minuta magis hāc rem adducere, utatur licet his quæ in compositione mathematica à Claudio Ptolemæo tradita sunt, uel quæ sequuntur ex illis per partes & minutissimum calculum, & per rectas in circulo sitas. Et ego utiq; hoc iam fecissem, nisi quod sæpe dixi, intellexissem, quòd per ea quæ dicta sunt, non potest ad exquisitissimū perueniri, ut inueniatur recta linea, quæ sit circūferentiæ circuli dati equalis. Quanquam proximè quis ac ferè habuerit eam. Et quæ ab Archimede sunt hic dicta, sufficiant.

EVTOCII ASCALONITAE COMMENTARII in Circuli mensurationem, editione ascripta Milesio Mechanico Isidoro nostro præceptori.

EVTOCII IN PRIMVM

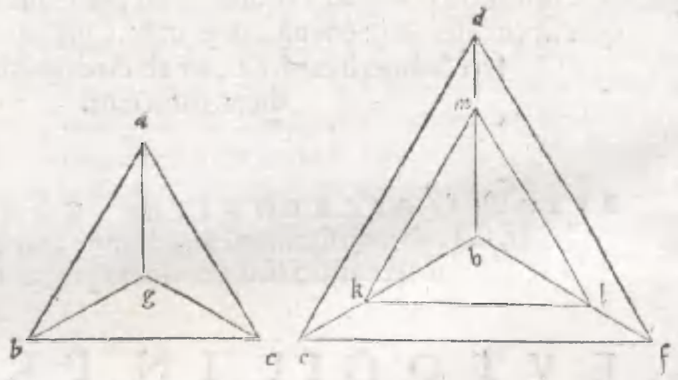
THEOREMA AEQVEPONDERAlium *Archimedis.*

MOMENTVM ipsum, ô generosissime Petre, commune grauitatis & leuitatis esse genus, & Aristoteles asserit, & Ptolemeus eum sequutus. Timæus uero apud Platonem, momētum omne dicit grauitate produci. nā existimat leuitatem priuationē quandam esse. quorum opiniones licet disciplinarū studiosis legere, & ex Ptolemæi libro quem de Momentis conscripsit, & ex naturalibus negocijs Aristotelis, & ex Timæo Platonis, & ex his qui illos exposuerūt. Archimedes uero in hoc libro cētrum ponderis figuræ planæ existimat id, ex quo suspensa manet æquedistãs horizonti, duorum uero uel plurium planorũ centrũ ponderis, hoc est grauitatis, à quo libra suspensa stat horizonti æquedistãs: ut puta sit triangulus a b c, & in medio eius punctum quoddam d, à quo suspensum maneat æquedistãs horizonti. Constat igiť quod partes a b c sibi ipsis æquepõderabunt, & nulla tẽdit altera magis ad horizõtem. Similiter autem & posita libra a b, & suspensis ex ea magnitudinib. a b, si suspẽsa libra ex c habeat partes a b æqueponderantes, manebit æquedistãs horizonti, & erit centrum suspensionis magnitudinum a b pũctum c.



Bene uidetur Geminus de Archimede dicere, quod dignitates petitiones appellat. nam æqualia grauia ex æqualibus distantijs aut lõgitudinibus æqueponderare dignitas est, & quæ sunt conuenienter. Et sunt clara omnia, his qui ea moderatè inspiciunt.

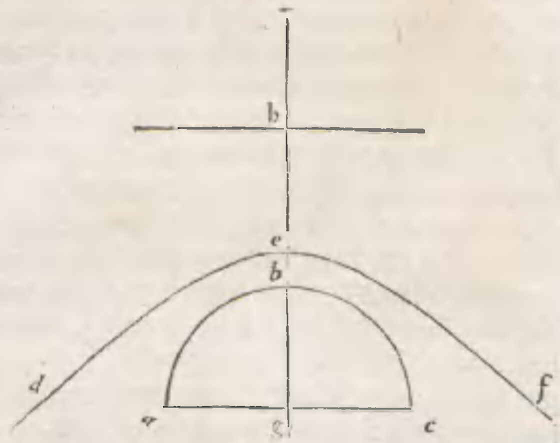
Aequalibus inquit, & similibus planis inuicem coaptatis, & eorũ centra grauitatis inuicem coaptabuntur. Omnes enim eorũ partes coaptabũtur: inæqualiũ uero & similium centra grauitatis erunt similiter sita. Intelligantur autem, uti in subiecta descriptione trianguli a b c, d e f inæquales & similes. & centrum grauitatis ipsius a b c sit g, ipsius uero d e f sit h: & iungantur a g, b g, c g, d h, e h, f h. Dico igitur, quod per æqualia diuidant angulos lineæ ductæ ab ipso g uel h puncto ad angulos. Fiat enim sicut e f ad b c, ita e h ad h k, & f h ad h l, & d h ad h m. Et iungãtur m k k l, l m. erit iam k l m triangulus similis triangulo d e f. Quoniam enim est sicut e h ad h k, ita h f ad h l: erit e f æquedistans ipsi k l, & similiter m k ipsi e d, & ipsa d f ipsi l m.



Igitur triangulus d e f similis est triangulo k l m. Est igitur sicut d e ad m k: ita e f ad k l, & f d ad l m. Supponitur autem propter similitudinem triangulorũ, esse sicut d e ad a b, ita e f ad b c, & d f ad a c. Sunt igiť latera a b c æqualia lateribus k l m. quare aptatur unumquodq; unicuiq;. Igitur triangulus a b c, est similis & æqualis triangulo k l m. quare coaptabitur centrum ipsius a b c, in centrũ ipsius k l m. Ipso autem g coaptato in h, & latera a b c coaptabuntur in k l m, & ipsæ a g, b g, c g in ipsas h k, h l, h m: & facient angulos ad k l m æquales angulis in triangulo a b c. quare & in ipso d e f. Sunt enim eædem rectæ, quæ à puncto h ad d e f, & ad k l m iunctæ fuerunt.

Cuiuscunq; figuræ cuius ambitus in eadem caua consistit, centrum grauitatis intra figuram contineri necesse est. Quas appellat in eadem cauas lineas, iam dictum est à nobis in proœmijs de Sphæra & cylindro. Quoniam enim figura quæ ha-

habet ambitum in eadem cauum, partes omnis plani inter ambitum suum complectitur, & angulos. Constat quod & centrum grauitatis intra ipsam figuram continetur. in quibusdam enim figuris centrum est extrà, in quibusdam in limbo. In semicirculo enim a b c centrum figuræ est g. in hyperbole autem d e f, cẽtrum figuræ est extrà, ubi diametri concurrunt inuicem, sicut habet h. Hęc enim dicta sunt in secundo libro Conicorum Apollonij. Verũtamen et in figura a b c, & in d e f, centrum grauitatis, à quo uidelicet figura suspensa maneat æquedistans horizõti,



est intra ambitum. nam si foret in ambitu, aliquid extrà in alteram partem tenderet, quod non supponitur.

IN SECVNDVM.

Esto centrũ grauitatis d, si esse potest. Quod enim sit in a b, ostensum est. nam suprà dictum est, quod duarum magnitudinum centrum est, à quo libra suspensa partes habet ęqueponderantes: & æquedistãs manet horizonti. quare centrum magnitudinum a b est in ipsa a b.

IN QVINTVM.

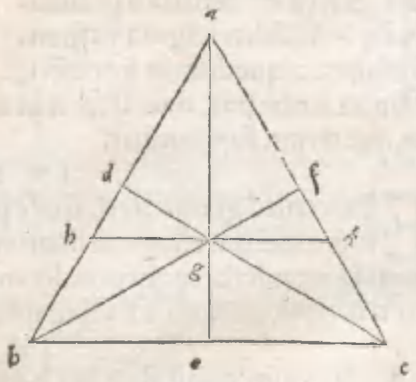
Aut enim quod ab ipso a b maius est ipso c, ita ut æqueponderet, aut non. Hoc dictũ rectè intelligere oportet, non utputa quod magnitudo a b sit omnino maior c: sed posita maior, aut secundum æqueponderatiam. Potest enim fieri, quod minor magnitudo magis ponderet quàm maior, per longitudinem libræ quæ maior admodum existat, & proportionem faciat inæqualem. Et auferatur ab ipso a b minus excessu, quo a b maius est ipso c, ita ut æqueponderent: ita ut reliquum, puta a sit cõmensuratum ipsi c. Oportet, inquit, auferre ab ipso a b magnitudinem quandam b: puta quod faciat reliquum a commensuratum ipsi c, & maius ipsum a ipso c secundum æqueponderationem. Hoc autem fieri potest per ea quæ in principio libri decimi Elementorum Euclidis dicta fuerunt, & in tertio Sphæricorum Theodosij.

IN VNDECIMVM.

Et iungantur hæ, e f, g k, l m. cadent iam ipsæ iuxta ipsam b c. Quoniã enim ipsa b o est æqualis ipsi z c, & ipsa d b ipsi d c, erit sicut d b ad o b, ita d c ad z c. & diuidenti, sicut d o ad o b, ita d z ad z c. Verum sicut d o ad o b, ita a e ad e b. nã e o est iuxta ipsam a d. Sicut autem d z ad z c, ita a f ad f c. Igitur sicut a e ad e b, ita a f ad f c. Igitur e f est æquedistans ipsi b c. Similiter autem ostendetur & reliquæ.

Ipsæ a d c ad omnis triangulos ab ipsis a m, m k, k f, f c descriptos, similes ipsi a d c eam habent proportionem, quam habet c a ad a m. eoq; rectæ sunt æquales. Quoniam enim trianguli a d c, a f m sunt similes, habebunt inuicem proportionem a c ad a m duplicatam. Quoniam uero nunc supponitur, ipsam a c ipsius a m quadruplam esse, triangulus a d c habebit ad triangulum a f m, sicut sexdecim ad unum, & ad triangulos omnis ab a m, m k, k f, f c descriptos, proportionẽ habet, quam sexdecim ad quatuor. Igitur proportionaliter est, sicut triangulus a b c, ad triangulos ab a m, m k, k f, f c, similes ipsi a d c, ita ipsi trianguli ad ipsum a f m. Hoc est c a ad a m. Sunt enim similes, & in basibus æqualibus, & propterea inuicem æquales, quia habent ad inuicem sicut eorum bases. Verum c a ad a m maiorem proportionē habet, q̃ u r ad r h. Proportio enim a c ad a m eadem est proportioni u r ad r p. Si enim intelligantur u r, c d eductæ & concurrentes in parallelas, erit sicut u r ad r p, sic c d ad d ω. Verum sicut c d ad d ω, ita c a ad a m. sicut ergo c a ad a m, ita u r ad r p. Habet autem u r ad r p maiorem proportionē, quàm u r ad r h. Igitur c a ad a m habet maiorem proportionem, quàm u r ad r h. Quod sane esse non potest. nam lineæ rectæ ductæ per q iuxta ipsam d a, in eadem erunt centra hęc scilicet in alterā partē, & tendēt uidelicet in illud omnis magnitudines, & non æqueponderabunt: quod est commune positum. nam centrum parallelogrammorum positum est r, & triangulorum q.

Si enim educas istas c d g, f e g, b a g, constat quod in idem punctū ueniunt. eductis enim b a g, f e g, & concurrentibus inuicem in puncto g, & ipsa c d concurret in idem. Est autem sicut b g ad g a, ita f g ad g e, & b f ad a e, & f c ad e d, & c g ad d g. Erit iam trianguli b d c centrum grauitatis in ipsa h m. quoniam ipsa a b est tertia pars b h. Esto triangulus a b c, & iūgantur ab angulis ad bipartitiones laterū rectæ a e, b f, c d. Igitur centrum grauitatis trianguli a b c est g. Et manifestū, quod omnes trianguli sunt inuicem æquales. quoniam omnes rectæ ab angulis ad bipartitiones laterum iunctæ per g transeunt, ne eiusdē plura centra existant. Quoniam autem a d, d b, b e, e c, c f, f a equales sunt, trianguli erunt æquales, qui habent uerticem punctum g, bases uero dictas rectas. Quare a g b triāgulus, duplus est triangulo g b e. quare & a g ipsius g e. Si igitur per g iuxta ipsam b c duxerimus ipsam h k, erit a h dupla ipsius h b. Quare uniuersaliter, si unū latus trianguli secetur, ita ut portio ad uerticem sit dupla portioni ad basim, & per sumptum punctum ducatur æquedistans ipsi basi: in ipsa ducta erit centrum grauitatis trianguli illius.



FINIS PRIMI EVTOCII.

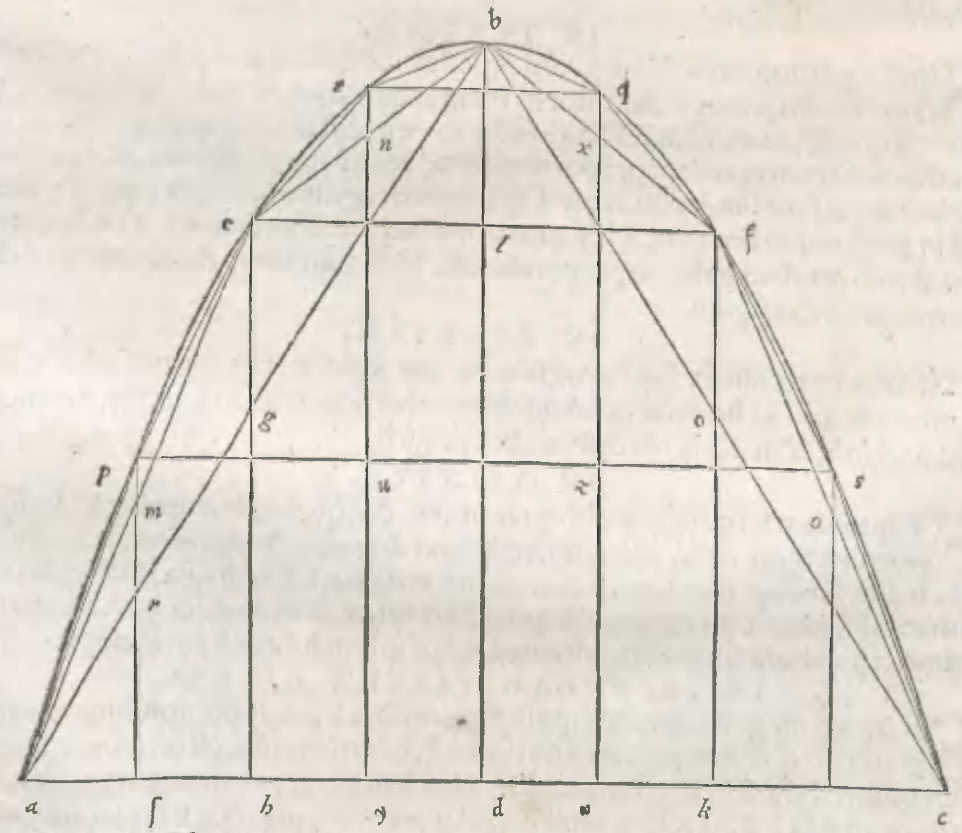
EVTOCII IN SECVNDVM AEQVEPONDERANTIVM *Archimedis*.

CVM diligenter ea quæ in primo libro habentur percurrimus, & inspectu difficilia satis declarauerimus: necessariū duximus, & quæ in libro secūdo obscurè dicta sunt, pro modo explicare. Dicit itaq; in propositione primi theorematis: Supponatur spacia a b, c d contenta à recta & sectione rectanguli coni, quæ possimus iuxta rectam datam applicare. hoc aūt non licet inde per ea quæ istic demonstrata sunt inuenire. Quoniā aūt ostensum est sibi, ueluti in libro de Sphera & cylindro dixit, quod figura huiusmodi est sesquitertia triāgulo habēti basem, & altitudinem cum portione eandem: plano uero existēte rectilineo sesquitertio, trianguli æquale possumus iuxta rectā datam applicare, constat quod & figuris huiusmodi. Quæ uero in apparatu dicta sunt, omnia clara per quartum theorema primi istorum libri.

In

IN SECVNDVM.

IN secundo theoremate prædicit quædam declarantia, quo pacto in sectione rectanguli coni figura cognitæ possit inscribi. Et dicit, hæc ostendenda sunt in ordinibus. Quoniam igitur dictum obscurū est, necesse est pauca quædam de eo dicere ex Conicis Apollonij inuēta. Esto figura cōtenta sub parabola a b c, & recta a c, cuius sit diameter b d. Constat quod uertex portionis est punctum b. Vertices uero appellat Apollonius, terminos, qui sunt ad rectas diametrorum. Si iam iunxerimus has a b, b c, erit triāgulus a b c, qui basem habeat cū portione eandē, & altitudinem æqualem: ductā à puncto b ad ipsam a c perpendicularē. Sic enim omnino b d est axis, si sumentes uertices portionū a b b c, ipsos e, f, & per ipsos duxerimus parallelas ipsi b d, puta e g, f o, erūt ipsę diametri portionū a b, b c. Ostēsum est enim in parabola, quod omnes ductæ æquedistātes iuxta diametrū sunt diametri sectionis. erūt iam e, f uertices portionū: & quæ per e, f applicatę æquedistātes ipsis a b, b c: erit & e l f iuxta ipsam a c. Quoniam itaq; e h, f k sunt inuicē æque distātes, & existentes diametri æquales æqualiū portionū, & coaptatæ inuicē uti in sexto Conicorū ostēsum est: & quoniā e g h est æquedistās ipsi b d, erit sicut b g ad g a, ita d h ad h a. Est aūt b g ęqualis ipsi g a. nā e g secat eā in duo æqua æquedistātem applicatę cōtingenti. igitur d h est ęqualis ipsi h a. Et eadem ratione d k ipsi k c est æqualis. Tota uero a d est æqualis toti d c. igitur d h est ęqualis ipsi d k: et ex hoc e l ipsi l f. Quare uerissimè dictū est, quod recta iūgēs uertices portionū, æque distās erit basi portionis, & in duo æqua diuidet à diametro portionis. Iungant



quoq; a e, e b, b f, f c. & diuidātur in duo æqua pūctis m, n, x, o, & ducant per pūcta m, n, x, o iuxta ipsam b d istæ p m r s, t n , q x z ω s o iungātur a p, p e, e t, t b, b q, q f, f s, s c: & hę t a q, p b c d z s. Cōstat iā ex istis ante demōstratis, quod t q, et e f, & p s sunt æquedistantes ipsi a c: & quod t a est qualis a q & p d ipsi d s. Dico quod hæ secāt ipsam b d in numeros consequenter impares: hoc est, cuius b a sit

unum,

unum, eius erit a l tria, & l d quinque, & d d septem: quoniam a g est æqualis
ipsi g b, & e h est æquedistans ipsi b d, erit a h æqualis h d. igitur d a dupla est ipsi-
us d h: quare & ipsius e l. Igitur quadratū a d quadruplum erit quadrato e l. Sicut
autem quadratum a d ad quadratum e l, ita ostensum est esse b d ad b l. quare b d
quadrupla est ipsius b l. igitur d l tripla est ipsius b l. Cuius igitur b l est unum, eius
erit d l tria: & eadem ratione cuius b l fuerit quatuor, eius erit ipsa d l duodecim. &
quoniam e n est æqualis ipsi n b, & e f ipsi f l, & h u ipsi u d, igitur e l dupla est ip
sius l f, hoc est ipsius t a. igitur quadratum e l quadruplum est quadrato t a. igitur
b l quadrupla est ipsius b a. quare l a tripla est ipsius a b. quorum igitur ipsa l b est
quatuor, erit ipsa b a unum: et quorum ipsa l a tria, erit ipsa l d duodecim. Rursus
quoniam a m est æqualis ipsi m c, & a k ipsi k g, & a s ipsi s h: erūt igitur a s, s h, h u,
u d inuicem æquales: quorum igitur a d est quatuor. eorum s d est tria, hoc est ipsa
p d. quorum igitur quadratum a d est sexdecim, horum quadratum p d est no-
uem: quorum igitur b d est sedecim, eorum est nouem b d, & residua d d septem.
Quoniā igitur ostensum est, quorum b d est sedecim, eorū b a esse unum, & a l
tria, & d d septem: erit igitur residua l d quinq;. Diuiditur ergo ipsa b d ab æque-
distantibus in numeros consequenter impares, ea quæ ad uerticem portionis est
parte ab unitate denominata. Cōstat igitur ex descriptione, quod ductæ à diame
tris in numeros ab unitate cōsequenter dispositos excrescunt. Cuius enim est t a
unum, eius est e l duo, & p d tria, & a d quatuor. Cum enim sint omnes æquedi-
stantes, secatur in æqualia. Appellatur autem ab Archimede figura a p e t b q f s c,
cognitæ inscripta.

IN TERTIVM.

SImiles portionum sectiones coni Apollonius diffiniuit in sexto libro Conico
rum illas, in quibus si ducantur in unaquaque æquedistantes basi æquales nu
mero æquedistantes, & bases ad abscisas ab ęquedistantibus uersus uerticem par
tes diametrorum in eadem proportione erūt, & abscisæ ad abscisas, & quod para
bolæ omnes sunt similes inuicem. Figura uero cognitæ inscripta, quid sit, dictū
est in præsumpto limmate. Hoc autem similiter diuidere diametros est, ut portio
nes earum eandem habeant proportionem. Residuum uero theorematis est cla-
rum ex prædicta figura.

IN QVARTVM.

INscribatur rectilinea figura cognitæ in portione, ita ut circumcisæ partes sint
minores ipso k. hoc autem manifestum est ex prædictis, in secundo Stichiosis
ordinationis, & in primo de Sphæra & cylindro.

IN QVINTVM.

ET quoniam h f g i est parallelogrammum, &c. quoniam enim hæ k f, l g sunt
æquales. Sunt enim portionū æqualium diametri, & æqualiter ab axe distā-
tes a b d, & similiter diuiduntur à centris h i, erit sicut k h ad h f, ita l i ad i g, & per-
mutatim. & idcirco h f est æqualis ipsi g i. est autem & æquedistans ei. nā omnes
diametri parabolæ sunt æquedistantes: igitur ipsum h f g i est parallelogrammū.

IN SECVNDAM PARTEM QVINTI.

ERit itaq; magnitudinis compositæ ex utrisq; a k b, b l c portionibus centrum
grauitatis q. & compositæ ex utrisq; a k b, b l c triangulis, est centrum c, &c.
Ostensum est enim in præsumpto, quoniam h m iungens centra portionum, bi-
partitur ab ipsa b d puncto q, cum sit ipsi f g æquedistans: & g h bipartitur pun-
cto t. quare t est centrum grauitatis magnitudinis, compositæ ex triangulis a k b,
b l c. Quoniam igitur triangulus b a c maiorem proportionem habet ad triangu
los a k b, b l c, q; ad portiones, & reliqua. Quoniam enim ostensum est, triangu-
li a b c centrum grauitatis esse e: & triangulorum a b k, b l c centrum t, manifestū
est quod rectilinei a k b l c centrum grauitatis est in t e, diuisa puncto R secundū
mu-

tuam proportionē, quam habet triangulus a b c, ad triangulos a k b, b l c. quo
niam aūt triangulus a b c maiorem proportionē habet ad triangulos a k b, b l c, q;
ad portiones: nam portiones sunt triangulis maiores: cōstat quod si secuerimus
ipsam et in proportionē quam habet triangulus ad portiones, punctū sectionis
cadet superius q; sit R: quod erit centrū totius portiōis, propter mutuā affectionē.

IN SEXTVM.

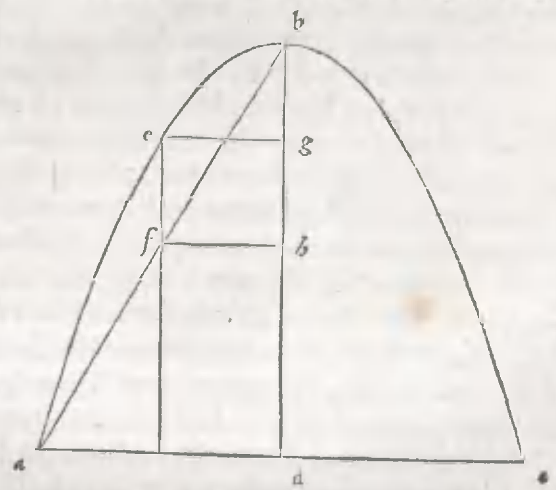
CEntrum portionis est omnino unum, & propinquius uertici portionis, q;
centra inscriptarum rectilinearum. Nam trianguli a b c centrum grauitatis
est, si contingat e, ipsa b d, ita diuisa ut e b sit dupla ipsius e d. Cōstat quod omnia
centra inscriptarum rectilinearum cadent inter puncta h e. & quanto plurium la-
terum fuerit inscriptum cognitæ, tanto magis ipsi h appropinquat. Constat itaq;
quod esse non potest, ut linea inter centrum inscripti cognitæ rectilinei, & centrū
portionis intercepta sit maior e h. potest autem minor esse non solum ipsa h e, ue-
rum omni alia data.

IN SEPTIMVM.

INscribatur itaq; in portione a b c rectilineū, simile ei quod est in portione d e f,
hoc est similiter cognitæ. Similiter enim cognitæ inscribitur, quando sectiones
parabolæ a b c æquales fiant ipsi e f g, ita ut latera cognitæ inscripti ipsi portioni
a b c, sint numero æquales rectilinei laterib. inscripti ipsi e f g. quoniam enim pun
cta b & f, sunt uertices similium portionum, erunt ita cognitæ inscripta similia.

IN OCTAVVM.

ET quoniam est sicut b h ad h d, ita k m ad m f. nam portiones cum sint simi-
les, habebunt centra diuidentia diametros in easdem portiones. & componē
ti, sicut b d ad d h, ita k f ad f m: & permutatim, sicut b d ad k f, ita d h ad m f. Est au
tem b d quadrupla ipsius k f. hoc
enim in fine ostenditur, ubi est si-
gnum hoc ✐. Cōsequenter autē
illud nos ostendemus. Esto para
bola a b c, cuius diametros b d, &
ducatur ordinate a d, & iunga-
tur a b: & diuidatur a b in duo æ-
qua puncto f, & ducatur per f æ-
quedistans ipsi b d ipsa e f. igitur
ipsa e f est diametros portionis a
b: & à punctis e f ducantur ordi-
nate hæ e g f h. Quoniam itaque
a f est æqualis f b, erit a b dupla ip
sius f b, & a d ipsius f h: hoc est ip-
sius e g. Quare quadratum a d est
quadruplum ad quadratum e g:



quare d b quadrupla est ipsius b g longitudine. Quoniam igitur b d est dupla ip
sius b h, erit b h dupla ipsius b g, & ipsa h g æqualis ipsi g b: & ipsa h g æqualis eti-
am ipsi e f. quia ipsum e g f h est parallelogrammum. Igitur ipsa b d est quadrupla
ipsius f e. & quoniam ipsa b d est quadrupla ipsius b s, etenim hoc est
ostensum. nam ostensum est in sumpto, ipsam b d utriq; harum b g, e f esse qua-
druplam: quare b g est æqualis ipsi e f: & idcirco istic ipsa b s ipsi k f æqualis, & b d
utriq; earum quadrupla: igitur ipsa b s est tertia pars ipsius s d. quoniam enim b d
est quadrupla ipsius b s. Quorum igitur ipsa b d est quatuor, eorum ipsa b s est u-
num: & quorum b d est duodecim, eorum ipsa b s est tria. Est autem b s tripla ipsi
us s x. quorum igitur b s est tria, ipsa s x est unum. Tota igitur b x est quatuor: ho-
rum autem erat b d duodecim: igitur b x est tertia pars ipsius b d. Triplus autem
tri-

triangulus a b c portionum. Oſtenſum enim eſt ab eo, in eo quod ſcripſit de Coni rectanguli ſectione, quod omnis figura cōtenta à recta, & ſectione rectanguli coni, eſt ſeſquitertia trianguli baſem eandem habentis, & altitudinē æqualem. quare portio a b c, eſt ſeſquitertia triāguli a b c: & diuidenti, triangulus a b c eſt triplus portionū a k b, b l c. & eſt d b tripla ipſius e d. igitur ipſa b h eſt ſeſquitertia ipſius h d, quod erat demoſtrandum. quoniam enim b d eſt tripla ipſius d e. Quorum igitur b d eſt quindecim, eorum e d eſt quinqꝫ: quorum uero d e eſt quinqꝫ, eorum h e eſt unum: & tota h d ſex, ſcilicet ſexcupla ipſius h e. Quorū igitur b d quindecim, eorum d h eſt ſex: & reliqua h b, nouem. quare b h eſt ſeſquialtera ipſius h d.

IN NONVM THEOREMA.

NOnum theorema ualde obſcurū, exponemus iuxta loquentes quàm clarè poterimus. Quoniam enim iſtæ a b, b c, b d, b e ſunt proportionales, & diuidenti, & permutatim, erūt a c, c d, d e in eadem proportione. Quoniam igitur a b, b c, b d, b e in eadem ſunt proportione, & iſtæ a c, c d, d e. eſt ſicut in primis magnitudinibus antecedens, & medium ad ſequens: ita in ſecundis magnitudinib. antecedens, & medium ad ſequens. Sicut ergo utreqꝫ ſimul a c, c d: hoc eſt, d a ad d e: ita utraqꝫ ſimul a b, b c ad d b. Sicut aūt utraqꝫ ſimul a b, b c ad d b: ita dupla utriuſque ſimul a b, b c ad duplam ipſius b d: quia partes eandem ſuis multiplicibus habent proportionem. Sicut ergo a d ad d e, ita duplum utriuſqꝫ ſimul a b, b c ad duplum d b. Rurſus quoniam iſtæ c b, b d, b e in eadem ſunt proportione & iſtę a c, c d, d e. eſt autem per prædicta ſicut a d ad d e, ita utraqꝫ ſimul e b, b d ad b e. Erat autē ſicut a d ad d e, ita duplum utriuſqꝫ ſimul a b, b c ad duplum ipſius b d. Sicut ergo unum ad unū, ita omnia ad omnia. Sicut ergo a d ad d e, ita antecedētia ad ſequentia. Sunt autem antecedentia duplū utriuſqꝫ a b, b c: et utraqꝫ c b, b d, hoc eſt duæ a b, tres c b, & una b d: ſequētia uero duplum, b d, & ſola b e. Eſt igitur ſicut a d ad d e, ita recta compoſita ex dupla ipſius a b, & tripla c b, & ſola d b ad compoſitam ex dupla b d & ſola b e. Et quoniam compoſita ex duplo a b, & quadruplo c d, & quadruplo d b, et duplo b e, maior eſt compoſita ex duplo a b, & triplo c b, & ſola d b: maius autem habet ad idem maiorem proportionem, quàm minus: maiorem ergo proportionem habet compoſita ex duplo utriuſque ſimul a b, b e, & quadruplo utriuſque ſimul c b, b d, ad compoſitam ex duplo d b, & ſola e b, ꝙ compoſita ex duplo a b, & ex triplo c b, & ſola d b, ad compoſitam ex duplo b d, et ſola e b. Verum ſicut cōpoſita ex duplo a b, & tripla c b, & ſola b d, ad compoſitā ex duplo b d, & ſola e b: ita oſtēſum eſt eſſe a d ad d e. Igitur cōpoſita ex dupla utriuſqꝫ ſimul a b, b e, & quadrupla utriuſqꝫ ſimul c b, b d, ad compoſitam ex dupla b d, & ſola e b, maiorē proportionem habet, ꝙ ad ad d e. Si igit̄ uoluerimus facere eādem proportionē ipſius a d ad quandā aliam, erit illa minor ꝙ d e. ſit aūt d o. Eſt igit̄ ſicut a d ad d o, ita compoſita ex dupla a b, b e, & quadrupla utriuſqꝫ ſimul c b, b d, ad compoſitam ex dupla b d, & ſola e b. Et ecōuerſo, igitur eſt ſicut o d ad d a, ita compoſita ex dupla b d, & ſola e b, ad compoſitam ex dupla utriuſqꝫ ſimul a b, b e, & quadrupla utriuſqꝫ ſimul c b, b d: & componēti, ſicut o a ad d a, ita compoſita ex dupla a b, & quadrupla c b, & ſexcupla ipſius b d, & tripla ipſius b e, ad cōpoſitā ex dupla utriuſqꝫ ſimul a b, b e, & quadrupla utriuſqꝫ ſimul c b, b d. Ipſa enim b d ſexies ſumpta eſt, quater in primis, bis in ſecundis, & ipſa b e ter ſumpta: bis inter primas, ſemel inter ſecundas. Supponitur autem & a d habere ad g h, eam proportionem, quam habet compoſita ex quincupla utriuſque ſimul b e, & decupla utriuſque ſimul c b, b d, ad compoſitam ex dupla a b, & quadrupla c b, ſexcupla b d, & tripla b e, & eſt proportionalitas indirecta. Per æquam igitur, ſicut o a ad g h, ita cōpoſita ex quincupla utriuſqꝫ ſimul a b, b e, & decupla c b, b d, ad compoſitam ex dupla utriuſque ſimul a b, b e, & quadrupla c b, b d. Huius autem deſcriptæ proportionalitatis conditio ſic fiet manifeſta. Quoniam enim in primis

o a ad g h proportionem habet eam quam quinqꝫ ad duo, & o b ad f g eandē proportionem, erit ipſa f h duæ quintæ ipſius totius a b.

IN DECIMVM THEOREMA.

COnſtat iam quod fruſti a d e c diametros eſt ipſa f g,,. quoniā enim ſupponitur ipſa f b diametros ipſius portionis, & iſtæ a c, d e bipartitæ ab ea punctis f g ſunt æquediſtantes ei quæ in b contingit ſectionem, conſtat quod omnes ſimiliter ab illis ductæ æquediſtantes ſiue inter illas, ſiue inter ipſam d e, & uerticem b bipertientur ab ipſa g f. & ideo dixit ipſam f g eſſe diametrum fruſti.

Verū ſicut cubus a f ad cubū ipſius d g, ita portio a b c ad portionē d e b,,. Quoniā em̄ oſtēſum eſt, ab eo quod portio a b c eſt ſeſquitertia triāgulo a b c. et portio d e b eſt trinagulo d e b. itē ſeſquitertia erit ſicut portio a b c ad triangulū a b c, ita portio d e b ad triangulū d e b. & permutatim ſicut portio ad portionem, ita triangulus ad triangulū, & ita quoqꝫ dimidia eorū: ſicut portio a b c ad portionē d e b, ita triāgulus a f b ad triāgulū d g b. quare, ſi deſcribamus parallelogrāma, erūt dupla triangulorū æquiangula, propterea quod d g & a f ſunt ęquediſtantes. quare & pro portionem habebunt compoſitam ex proportione laterū a f d g, & f b ad b g. eadem aūt proportio triangulorum & portionū. Portio igitur habet ad portionem proportionem compoſitā, ex proportione a f ad d g, & ex f b ad b g. Proportio autem f b ad b g eſt eadem ei quæ eſt quadrati ex a f ad quadratum ex d g. Proportio igitur portionis ad portionem, componitur ex proportione quadrati ex a f ad quadratum ex d g, et ex a f ad d g. proportio quoqꝫ cubi ex a f, ad cubum ex d g, componitur ex eiſdē, uti oſtenſum eſt in expoſitionibus de Sphæra & cylindro. Eſt ergo ſicut portio ad portionem, ita cubus ex a f ad cubū ex d g. Et quoniam ſolidum quod baſim habet quadratum ex a f, altitudinem uero lineam cōpoſitam ex dupla ipſius d g, & ipſa a f habet eam proportionem ad cubum ex a f quam dupla ipſius d g cum ipſa a f habet ad f a,,. Nam in eiſdem baſibus exiſtentia habent inuicem ueluti altitudines. Eſt autem ſicut d g ad a f, ita x n ad m n. & ſicut dupla ipſius b g ad a f, ita dupla ipſius n x ad n m: & cōponenti, ſicut dupla n x cum n m, ita dupla d g cum a f ad a f. Oſtēſum eſt autem, ſicut cubus ex a f ad cubum ex d g, ita cubus ex m n ad cubum ex n x. & m n ad n t, ſunt quatuor proportionales. & ſicut prima ad quartam, ita ſolidum ex prima ad ſolidū ſibi ſimile ex ſecunda & ſimiliter figuratum. Sicut autem cubus ex d g ad ſolidū quod baſim habeat quadratum ex d g, altitudinē uero rectam, compoſitam ex dupla a f, & ipſa d g, ita d g ad compoſitam ex dupla ipſius a f & ipſa d g. Rurſus enim habentur inuicem ſicut eorum altitudines. Sicut autem d g ad duplam ipſius a f, cū ipſa d g: ita t n, ad compoſitam ex dupla ipſius o n cū ipſa t n. eſt enim ſicut a f ad d g, ita m n ad n x, & o n ad n t. & è conuerſo ſicut d g ad a f, ita t n ad n o. Factę igitur ſunt quatuor magnitudines continenter inuicem poſitæ: prima quidem ſolidum quod habet baſim, quadratum ex a f, altitudinem uero rectam compoſitā ex dupla d g & ipſa a f, & ſecunda cubus ex a f, tertia cubus ex d g: quarta ſolidū quod habet baſim quadratum d g, altitudinem uero rectam compoſitam ex dupla a f & ex ipſa d g. & aliæ quædam rectæ in eadem proportione binæ & binæ ſumptæ, ipſa compoſita ex dupla n x, & ſimpla m n, & ſecunda m n: & tertia n t, & quarta compoſita ex dupla o n & ex n t. igitur per æquam fiet ſicut ſolidum baſim habens quadratum ex a f, & altitudinem rectam compoſitam ex dupla d g & ipſa a f, ad ſolidum baſim habens quadratum ex d g, & altitudinem compoſitam rectam ex dupla a f & ſimpla d g: ita ipſa compoſita ex dupla n x, cum m n, ad cōpoſitam ex dupla n o cum ſimpla n t. Verum ſicut ſolida prædicta inuicem, ita oſtenſum eſt eſſe h i ad i k. Sicut ergo h i ad i k, ita compoſita ex dupla x n, & ſimpla m n, ad duplam n o, & ſimplum n t. & componenti, ſicut h k ad k i, ita compoſita ex utraqꝫ ſimul m n, n t, & dupla utriuſqꝫ ſimul x n, n o, ad compoſitam ex dupla ipsius n o, & simpla n t. Sicut autem f g, ad f k, scilicet duas eius quintas: utraque enim harum g h, f k, est duæ quintæ ipsius g f, quoniam media quinta ponitur ipsa h k: ita composita ex quincupla utriusq; simul m n, n t, & decupla utriusque simul x n, n o, ad duplam utriusq; simul m n, n t, et quadruplam utriusq; simul x n, n o. duo enim ex quinq; & quatuor, ex decem duæ quintæ exisiunt. Quoniã igitur ostensum est, sicut f g ad i k, ita quincupla ipsius m n, n t, & decupla ipsius x n, n o, ad duplam ipsius n o & simplam n t. Rursus ostensum est, quod sicut f g ad f k, ita quincupla utriusq; m n, n t, & decupla x n, n o ad duplã ipsius m n, n t, & quadruplam ipsius x n, n o: erit sicut antecedẽs ad duo sequentia, ita antecedens ad duo sequentia: sicut f g ad f i, ita composita ex dupla ipsius o n, & simpla n t, et dupla utriusq; simul m n, n t, & quadrupla ipsius x n, n o: quæ est ęqualis compositę ex dupla m n, et quadrupla x n, et sexcupla ipsius n o, & tripla ipsius n t. sic enim sumptum est superius. Quoniam igitur quatuor rectę sunt cõtinuę proportionales hę m n, n x, o n, n t: & est sicut n t ad t m, ita quædam sumpta, hoc est r i ad f h, hoc est ad tres quintas ipsius g f, hoc est ipsius m o, & ostensæ sunt in rationali proportionalitate proportionales, erit per prædictũ r f duæ quintæ ipsius m n, hoc est ipsius f b. igitur b r est tres quintæ ipsius b f. igitur b f ad r f proportionem habet, quam quinq; ad duo. quare punctum r est centrum grauitatis portionis a b c. Si iam sumpserimus centrũ grauitatis portionis b d e in puncto q, erit b q tres quintæ ipsius q g. Factum est itaq; sicut tota f b ad totam b r, ita ablata b g ad ablatam b q. utraque enim earum ad utramque proportionem habet, quam quinq; ad tria. Igitur residua f g ad residuam q r proportionem habebit, quam quinq; ad tria. Quoniã igitur supponitur, sicut frustũ a d, e c ad portionẽ d e b, ita m t ad t n: & sicut m t, ad t n, ita tres quintę ipsius f g, hoc est ipsa f h uel q r ad r i. erit ergo sicut frustum ad portionem, ita q r ad r i. & mutuo afficiuntur, & r est centrum totius portionis, igitur ipsum i d est centrum frusti.

EVTOCII ASCALONITAE COMMENTARII in secundum æquelibrantium Archimedis Finis.

SERIES CHARTARVM.

* α β γ δ ε ζ η θ ι κ λ μ ν ξ ο π ϱ. †† a b c d e f g h i k l m n o p q r s t u. Α Β Γ Δ Ε Ζ Η Θ Ι. Aa Bb Cc Dd Ee Ff Gg Hh Ii. Omnes duerniones, præter ϱ & u terniones.

BASILEAE, PER IOANNEM HERVAGIVM, ANNO AB ORBE REdempto, M.D.XLIIII. mense Martio.