

TARTU ÜLIKOOL

Loodus- ja tehnoloogiateaduskond

Teoreetilise füüsika instituut

Ülari Külaots

PROTSESSI $e^-e^+ \rightarrow t\bar{t}$ KIRJELDUS

Bakalaureusetöö

Juhendajad:

Stefan Groote, FI

Tartu 2013

Sisukord

1	Sissejuhatus	4
1.1	Jõud	5
1.2	Osakeste põrgutid	6
2	Kinemaatika	7
3	Fermionide kirjeldus	9
3.1	Lagrange'i tihedus	10
3.2	Elektromagnetvälja sisseviimine	11
3.3	Häiritusteooria ja Feynmani diagrammid	13
3.4	Alg- ja lõppolekud	14
3.5	Spinnide üle summeerimine ja keskmistamine	15
3.6	Verteksid ehk vastasmõju panused	15
3.7	Footonpropagaator	16
4	Mõjuristlõige	18
4.1	Maatrikselemendi absoluutväärtuse ruut	19
5	Elektronõrk teooria	22
5.1	Dubletid ja singletid	22
5.2	Vasaku- ja paremakäelised seisundid	23
5.3	$SU(2)_L \times U(1)_Y$ kalibratsiooniväljad	25
5.4	Füüsikalised väljad (W_μ^+ ja W_μ^-)	25
5.5	$SU(2)_L \times U(1)_Y$ kohandamine kvantelektrodünaamikale	25
5.6	Z-bosoni verteks	27
5.7	Z-bosoni propagaator	27
6	Protsessi $e^-e^+ \rightarrow t\bar{t}$ tõenäosus	29
6.1	Z-bosoni leptontensori arvutamine	29
6.2	Protsessi kogutõenäosus	30
6.3	Sõltuvus hajumisnurgast θ	33
7	Kokkuvõte	36

8	Inquiry into the process $e^-e^+ \rightarrow t\bar{t}$	37
9	Tänuavaldused	38
10	Kasutatud kirjandus	39
11	Lisad	41

1 Sissejuhatus

Osakestefüüsika on füüsika haru, mis uurib osakeste olemasolu ja vastastikmõju, nähtusi, mida sageli nimetatakse mateeriaks ja kiirguseks. Tänapäevase arusaama järgi on osakesed kvantvälja ergastused ning mõjutavad üksteist vastavalt välja dünaamikale. Suurem osa selle valdkonna huvist kuulub nõnda nimetatud fundamentaalsetele väljadele ehk väljadele, mida ei saa kirjeldada kui teiste väljade segu. Hetkeseisu arusaam fundamentaalväljadest võetakse kokku elementarosakeste Standardmudelis.

Kvargid ja leptonid on fundamentaalsed objektid, millest koosneb kogu materia, nad interageeruvad vahebosonite abil. Jõud, mis neid mõjutavad, on ühendatud elektronõrk jõud [1], mille vaheboson on footon ning W^\pm ja Z^0 bosonid, ning tugev jõud. Tugeva jõu vahendajaks on gluuonid.

Kvantväljateooria sisaldab erirelatiivsusteooriat. On toimunud pidev relativistliku kvantväljateooria arendus peale seda, kui see enne 1930ndaid aastaid loodi. On toimunud kindlaid ja erakordseid edusamme osakestefüüsikas, mõistetakse paremini kvantväljateooriat ning on õpitud, mida kaasata lagranžiaani. Teooriad, mis kirjeldavad osakesi ja nende interaktsioone, paistavad olevat vaheosakeste teooriad. See on eriline kvantteooriaklass, kus on olemas invariantse printsiipi, mis tingimata eeldab vastastikmõju vahendamist vahebosonite kaudu. Vahebosonitega teooriates on interaktsioonilagranžiaan pigem vältimatu kui *ad hoc* lahendus, nagu see on kvantteoorias.

Kuigi tehniline töö relativistlikus vaheosakeste kvantväljateoorias võib olla keeruline, on teooria põhimõtteliselt arusaadav kõigile, kes on läbinud klassikalise mehaanika, elektrodünaamika ja sissejuhatava kvantmehaanika kursused. Kuigi teooria on relativistlik, on põhiliseks uuenduseks formalism, millest tuleb aru saada, et teha lihtsamaid arvutusi. Antud töö eesmärk on aru saada Standardmudeli ühest osast, elektronõrgast vastastikmõjust ning teadmisi rakendada spetsiifilise probleemi lahendamiseks.

1.1 Jõud

Newtoni teooria kõrval eksisteerib Lagrange'i teooria, mis on võrdväärne Newtoni teooriaga teises formalismis. Lagrange'i formalismis sisaldab lagranžiaan kogu füüsikalist informatsiooni süsteemi kohta. Kvantteooriates kasutatakse just seda formalismi. Võib võtta mistahes lagranžiaani ja sellest arvutada liikumise, tähendab arvutada ristlõikeid ja lagunemisaegu. Praktikas tähendab see seda, et kasutatakse Feynmani reegleid, et kirjutada välja maatriks-elemente, mille kaudu saame üleminekutõenäosused. See ongi standardne lähenemine relativistlikus kvantmehaanikas [2].

Standardmudeli puhul on teada spetsiifilised lagranžiaanid nii elektronõrga kui tugeva jõu jaoks. Mainitud lagranžiaanid on mõnevõrra keerulisemad kui klassikalisest mehaanikast tuntud jõuvalemid.

Kvantteooria ja relatiivsuse ühendamine viib kvantväljade sissetoomiseni. Kvantväljateooria lahendab mitterelativistliku kvantmehaanika põhjuslikkuse probleemid, tuues sisse antiosakesed ning seletab seose spinni ja statistika vahel. Kõige tähtsam on see, et ta annab töövahendid, millega saame arvutada hajumisristlõikeid, osakeste eluigasid ning teisi vaadeldavaid suurusi. Ennustuste eksperimentaalne kinnitus on põhjus, miks tegeletakse kvantväljateooriaga [3].

Kuna tegemist on kvantteooriaga, kantakse energia kvantidena, mis on seotud kiirgavate osakestega. Nii et kvantteoorias tõlgendatakse osakestevahelist vastastikmõju teistsuguste osakeste vahetusena.

Kalibratsiooniteooriad (ing. *gauge theories*) on erilised kvantväljateooriad, kus eksisteerib invariantsuse printsiip, mis tingimata nõuab vastastikmõju olemasolu osakeste vahel [4].

Kui me räägime vaheosakestega teooriast, siis mõtleme selle all jõude, mis jälgivad teatud sümmeetriat (*gauge symmetry*) ning need jõud on proportsioonis mingi "laenguga". See on tuttav elektrodünaamikast, kus peenstruktuurkonstant α mõõdab elektromagnetilise jõu tugevust. Teiste jõudude jaoks ilmnevad uued konstandid, mis täidavad mõlemat rolli. Osakes-tefüüsikas kasutatakse vastasmõju ja jõu mõisteid sünonüümidena.

Elektrodünaamikas eraldab laetud osake footoni ning pörkub siis. Footon neelatakse teise laetud osakese poolt, mis muudab seetõttu oma liikumist. Diagrammid on kasulik viis juhtunut

piltlikult kirjeldada, kuid need diagrammid on veel enamamat. Kui anda õiged reeglid (Feymani reeglid), mille abil igat osa pildist muuta maatrikselemendiks ning teha üleminekutõenäosuse arvutusi, siis võib öelda, et diagrammid sisaldab endas kogu teooriat (tuleb arvestada kõiki võimalikke diagramme) [5].

1.2 Osakeste põrgutid

Üldine eesmärk, mida püütakse erinevail moel teostada, on leida füüsika, mis võiks olla Standardmudeli taga. On palju eksperimentaalseid põhjusi oodata uut füüsikat, nagu tumeaine [6] ja neutriinode mass [7].

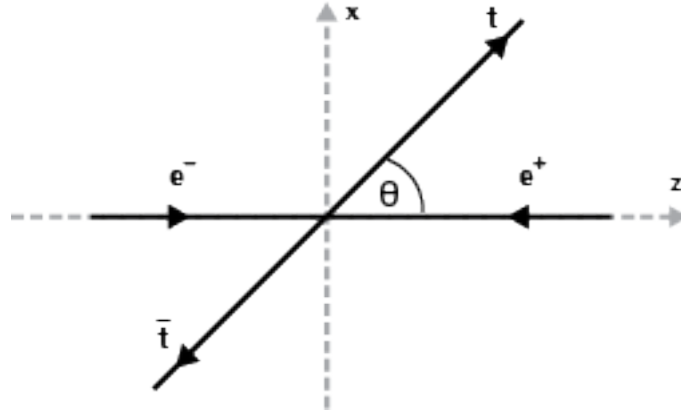
Osakesekiirendi on hea töövahend mikromaailma füüsika uurimiseks ning, kuna erinevalt näiteks kosmilistest vaatlustest on kontroll katsetingimuste üle ning algtingimused on teada. Hetkel maailma suurim füüsika eksperiment ongi põrgutiekperiment CERNis Šveitsi ja Prantsusmaa piiri peal. LHCs (*Large Hadron Collider*) põrgatatakse nagu nimi juba viitab hadroneid, täpsemalt prootoneid.

Antud töös uurime aga leptonpõrguti eksperimenti. Leptonpõrguti eksperimentide eelis on see, et algolek on lihtsam. Erinevalt prootonist, mis koosneb kvarkidest, ei ole elektronil ja positronil sisestruktuuri. Lõppseisundina vaatleme top-kvarki, mis on kõige raskem kvark, $m_t \approx 175 GeV/c^2$. Top-kvark käitub nagu vaba osake, lühikese elueaga, kõigest 5×10^{-25} sekundit, jõuab ta enne laguneda, kui hadroniseeruda [8] [9].

Protsessi vahendavad massitu footon, mis kujutab ennast interaktsiooni elektromagnetväljaga ning massivne Z-boson ($m_Z = 91.1874(21) GeV/c^2$) [10]. Z on nõrga interaktsiooni vaheboson.

2 Kinemaatika

Et oleks võimalik teha arvutisi, tuleb kokku leppida, millises inertsiaalses taustsüsteemis me tegutseme. Taustsüsteemi määrab üldiselt eksperiment. Kõige lihtsam on teha arvutusi massikeskme süsteemis, mis on ka mõistlik, kuna osakesekiirendis kiirendatakse kimbud erisuundades samale kiirusele ning pörgatatakse detektorites.



Joonis 1: Osakeste põrkumine massikeskmesüsteemis.

Kokkuleppeliselt valime elektroni liikumise (ja impulsi p_-) suunaks positiise z-telje ning positron liigub täpselt vastassuunas (impulsiga p_+) nagu tähistatud joonisel 1. Ehk siis $p_{\pm} = (E_{\pm}/c, 0, 0, p_{\pm z})$ tähistab alosakese 4-impulssi. Kehtib $p_- + p_+ = q$, kus $q = (E/c, 0, 0, 0)$ tähistab tekkiva bosoni 4-impulssi. E on protsessi koguenergia. Osakesed liiguvad vastassuunas, $p_{-z} + p_{+z} = 0$. Jääb veel määrata osakeste energiad p_{\pm}^0 seosest $E_- + E_+ = E$. Eri-relatiivsusteooriast oleme tuttavad seosega $p^2 = (E_{\pm}^2/c^2 - p_{\pm z}^2) = (mc)^2$ [11], kus võtame elektroni massi ($m_e = 0,511 MeV/c^2$) võrdeks nulliga põhjendades, et võrreldes protsessi energiaga on see tühine (top-kvargi tekitamiseks on energiat E vaja vähemalt $2 \times 175 GeV$). Niisiis $p_{\pm z} = \mp E_{\pm}/c$, kus märkide suhtes oleme arvestanud kokkulepet, et p_{-z} on positiivne. Kokkuvõttes

$$p_{\pm} = \frac{E}{2c}(1, 0, 0, \mp 1). \quad (1)$$

Kumbki algosake kannab pool protsessi energiast. Tekkiv top-, antitop kvargi paar ei kiirgu tingimata ära samas suunas, kust tulid algosakesed. Lepime kokku, et vaatame xz -tasandit,

siis nurk θ on nurk elektroni ja tekkinud top-kvargi vahel. Antiosake kiiratakse vastassuunas. Seega

$$p_1 = (E_1/c, |\vec{p}_1| \sin \theta, 0, |\vec{p}_1| \cos \theta), \quad p_2 = (E_2/c, -|\vec{p}_2| \sin \theta, 0, -|\vec{p}_2| \cos \theta), \quad (2)$$

kus p_1 on top ning p_2 antitop-kvargi 4-impulss. Analoogselt eelnevaga kehtib $p_1 + p_2 = q$, millest järeledub $E_1 + E_2 = E$ ja $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{0}$ (s.t. $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$) ning $E_1 = E_2 = E/2$. Erinevalt elektronist, ei saa kvargi massi lugeda nulliks, vaid on m_t . Kasutame uuesti relativistlikku seost $m_i^2 c^4 = E_i^2 - |\vec{p}_i|^2 c^2$ ($i = 1, 2$). Jagatis $v = |\vec{p}_i| c^2 / E_i$ määrab top-kvargi (ja antitop-kvargi) kiiruse. Seda kasutades saame massi kui funktsiooni relativistlikkust energiast $m_i^2 c^4 = E^2(1 - v^2/c^2)/4$ ja $|\vec{p}_i|^2 = v^2 E^2 / 4c^4$. Kokkuvõtvalt on tekkivate osakeste impulsid

$$p_1 = \frac{E}{2c^2}(c, v \sin \theta, 0, v \cos \theta), \quad p_2 = \frac{E}{2c^2}(c, -v \sin \theta, 0, -v \cos \theta). \quad (3)$$

Kvarke tegelikult eksperimendis ei näe, vaid tekivad joad (*jetid*), mis umbkaudu määravad kvarkide implusside suunad.

3 Fermionide kirjeldus

Kvantväljateooria kujutab ennast väljade kvantiseerimist nagu kvantmehaanikas kvantiseeritakse osakesed. Tekib küsimus, milleks väljateooria? Kas me ei võiks relativistlikke osakesi kvantiseerida nagu kvantiseerisime mitterelativistlikud osakesed? Tuleb aga välja, et kui panna kirja ühe osakese jaoks relativistlik lainevõrrand, siis tekivad negatiivse energia lahendid ja muud vastuolud. Me ei saa eeldada, et relativistlikke protsess saab kirjeldada ühe osakese kaupa, kuna juba Einsteini seos $E = mc^2$ lubab osakese-antiosakese paari teket [3].

Kvantitatiivsete arvutuste tegemiseks on ikkagi tarvis protsessis osalevaid osakesi kuidagi kirjeldada. Schödingeri võrrand selle jaoks ei kõlba, kuna ta on mitterelativistlik. Kvantväljateoorias on tuntud relativistlik üldistus Schrödingeri võrrandile, Kleini-Gordoni võrrand

$$-\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \nabla^2 \Phi = m^2 \Phi, \quad (4)$$

kus ∇ on ruumiline tuletis ning Φ on lainefunktsioon. Kleini-Gordoni võrrandil aga ei ole vajalikku kahekomponendilist struktuuri, et kirjeldada osakese spinni. Pikka aega arvati, et see on ainus relativistlik üldistus Schrödingeri võrrandile, kuni Dirac leidis sellele alternatiivi [12]

$$(i\hbar \not{\partial} - mc)\psi = 0. \quad (5)$$

Diraci võrrand (antud juhul kovariantsel kujul) kirjeldab vaba spinn-1/2 osakest, fermioni nagu lepton ja kvark. Läbikriipsutamine, nn "*Feynman slash*" tähistab gammamaatriksiga ahendamist, üldiselt

$$\not{a} = \gamma^\mu a_\mu. \quad (6)$$

Diraci võrrand saadakse Kleini-Gordoni võrrandi lineariseerimisest. Selle käigus ilmuvad kordajad, mis ei saa olla arvud, vaid peavad olema maatriksid. Gammamaatriksid on 4×4 maatriksid, mis rahuldavad antikommutaatorseost,

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} := \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \quad (7)$$

kus $g^{\mu\nu}$ tähistab meetrilist tensorit. Esitusi eksisteerib mitmeid ning neid saab üksteiseks teisendada unitaarsete teisendustega. Diraci esituses on

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

kus 2×2 ühikmaatriks $\mathbb{1}_2$ ja Pauli maatriksid σ_i on vastavalt

$$\mathbb{1}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Diraci võrrandis on ahendatud kovariantne osatuletis

$$(\partial_\mu) = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}; \vec{\nabla} \right). \quad (10)$$

3.1 Lagrange'i tihedus

Teoreetilise füüsika üks sügavamaid avastusi on, et interaktsioone dikteerivad sümmeetriaprintsiibid. Tänapäeva arusaam on, et kõik osakeste interaktsioonid võiks alluda nn lokaalsele kalibratsioonisümmeetriale. See on seotud mõttega, et füüsikalised suurused (nagu elektrilaeng, värv jne.) on jäävad lokaalses aegruumi piirkonnas, mitte ainult globaalselt [13].

Seos sümmeetriate ja jäävusseaduste vahel tuleb kõige paremini välja Lagrange'i formalismis.

Teame klassikalisest mehaanikast mõju S , mis on lagranžiaani L ajaline integraal

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) dt. \quad (11)$$

Süsteemi liikumise tee on määratud mõju ekstreemumiga $\delta S = 0$. See viib Euler-Lagrange'i võrrandite ja liikumisvõrrandini [14]

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \quad (12)$$

Diraci võrrandi saab tuletada sarnasest suurusel. Sel juhul aga ei varieerita aegruumi koordinaate q vaid välju ψ ning algsuuruseks on Diraci Lagrange'i tihedus

$$\mathcal{L}_D^0 = c\bar{\psi}(i\hbar\vec{\nabla} - mc)\psi. \quad (13)$$

Kokkuleppeliselt nimetatakse ka Lagrange'i tihedust lagranžiaaniks. Nende suhe on tegelikult defineeritud ruumilise integraaliga $L = \int \mathcal{L} dx_i$. Kui klassikaline Lagrange'i funktsioon sõltub koordinaadist q ja kiirusest \dot{q} , võib-olla ajast t , siis Lagrange'i tihedus sõltub väljast ψ , kaasväljast $\bar{\psi}$ ning osatuletistest $\partial_\mu \psi$ ja $\partial_\mu \bar{\psi}$, võib-olla ka aegruumikoordinaadist x_μ . Kaasväljad tekivad võrrandisse sellest, et üldiselt on tegemist komplekssete väljadega, mida saame ekvivalentselt kirjeldada välja ja kaasväljaga. ψ ja $\bar{\psi}$ pole päris sõltumatud. Kui Schrödingeri võrrandis oli ψ lainefunktsioon, siis kuna Diraci gammamaatriksid on 4×4 maatriksid, on ψ neljakomponendiline nn spiniinor, $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ on aga tema kaasspiniinor,

$$\psi^\dagger = (\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*, \psi_4^*), \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Kvantväljateooria võrrandid on nn. Lorentz-invariantsed, see tähendab relativistlikud, nad ei muutu vastavate teisenduste all. See määrab ka kaasspiniinori erilise kuju, kuna me tahame, et $\bar{\psi}\psi$ oleks Lorentzi skalaar. $\psi^\dagger\psi$ aga seda ei ole, vaid on $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ nullkomponent

$$\psi^\dagger\psi = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^0\psi = \bar{\psi}\gamma^0\psi. \quad (15)$$

Kuna ψ on kompleksne siis saame kaks liikumisvõrrandit. Reaal- ja imaginaarosa võrrandite asemel võib ekvivalentselt esitada võrrandid välja ja kaasvälja jaoks. Lagranžiaaniks võtame Diraci lagranžiaani (13), saame Euler-Lagrange'i võrrandite abil

$$\frac{\partial \mathcal{L}_D^0}{\partial \bar{\psi}} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_D^0}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}_D^0}{\partial \psi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_D^0}{\partial (\partial_\mu \psi)} = 0, \quad (16)$$

Diraci võrrandi ja kaasvõrrandi

$$(i\hbar\vec{\partial} - mc)\psi = \bar{\psi}(-i\hbar\vec{\partial} - mc) = 0. \quad (17)$$

3.2 Elektromagnetvälja sisseviimine

Kvantväljateoorias viiakse interaktsioon elektromagnetväljaga sisse sarnaselt klassikalisele mehaanikale, nn minimaalse asendusega

$$p_\mu \rightarrow p_\mu - eA_\mu. \quad (18)$$

Jälgides kvantiseerimist,

$$i\hbar\partial \rightarrow i\hbar\partial - e\gamma^\mu A_\mu, \quad (19)$$

kus $e = 1.6022 \times 10^{-19}C$ on elementaarlaeng ning A_μ on elektromagnetvälja kirjeldav vektorpotentsiaal.

Kui klassikalises mehaanikas on selline asendus *ad hoc*, siis kvantväljeteoorias saab seda põhjendada kallibratsiooniinvariantsusega. Kui ütleme, et füüsika ei tohi muutuda, kui muudame faasi, siis saame teha teisenduse

$$\psi(x) \rightarrow e^{ie\alpha}\psi(x), \text{ millest järeldub ka } \bar{\psi}(x) \rightarrow e^{-ie\alpha}\bar{\psi}(x) \quad (20)$$

kus α on konstant, mis määrab, kui palju me faasi muudame. Kui α ei sõltu aegruumi koordinaadist, nimetatakse seda globaalseks teisenduseks. Tehes asendus Diraci lagranžiaanis näeme, et kõik jääb samaks. Kehtib aga nõue, et teooria oleks invariantne lokaalsetel teisendustel [15], s.t. $\alpha(x)$ sõltub koordinaadist. Sel juhul annab tuletisega liige uue panuse

$$\partial_\mu\psi(x) \rightarrow \partial_\mu(e^{ie\alpha(x)}\psi(x)) = e^{ie\alpha(x)}(\partial_\mu\psi(x) + ie(\partial_\mu\alpha(x))\psi(x)). \quad (21)$$

Selle liikme kõrvaldamiseks tuuakse sisse väli A_μ , mis teiseneb

$$A_\mu \rightarrow A_\mu - \hbar\partial_\mu\alpha(x). \quad (22)$$

Kui väli lagranžiaani sisse viia, on invariantsus taastatud. Diraci lagranžiaan koos interaktsiooniliikmega on

$$\mathcal{L}_D = c\bar{\psi}(i\hbar\partial - mc)\psi - ce\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi. \quad (23)$$

Täielik kvantelektrodünaamika lagranžiaan sisaldab ka liiget, mis kirjeldab vaba footonit,

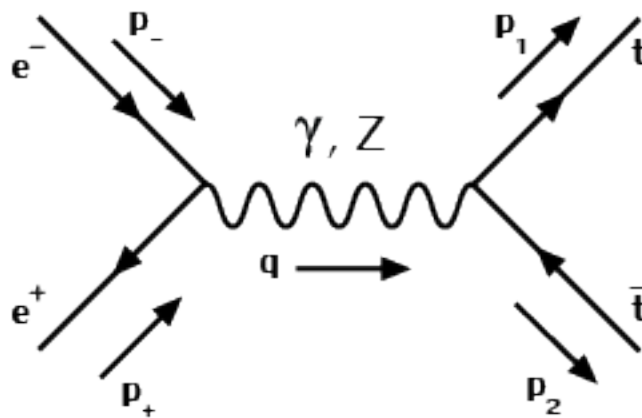
$$\mathcal{L}_{MAXWELL} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (24)$$

kus $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ on Maxwelli tensor, mis kirjeldab elektromagnetvälja [3].

Lähtume sellest, et interaktsioonikonstant on väike suurus ning astume seega häiritusteooriasse.

3.3 Häiritusteooria ja Feynmani diagrammid

Elementaariosakeste füüsikas kasutatakse protsesside kirjeldamiseks Feynmani diagramme. Need diagrammid ei ole lihtsalt pildid, vaid vastavate nn Feynmani reeglitega saab igale diagrammi osale vastavusse asetada algebra. Kahjuks ei ole interaktsiooni võimalik arvutada täpselt, vaid tuleb kasutada häiritusarvutust. Igale häiritusarvutusrea liikmele vastab diagramm. Kogu üleminekuamplituudi arvutamiseks tuleb summeerida üle kõigi diagrammide. Antud töös aga vaatame ainult puu-tasandi (*tree level*) interaktsiooni, kujutatud joonisel 2.



Joonis 2. Feynmani diagram protsessi $e^-e^+ \rightarrow t\bar{t}$ jaoks

Feynmani diagramm sisaldab väliseid seisundeid (alg- ja lõppseisundeid), vastastikmõju panuseid (vertekse) ning sisemisi jooni (propagaatoreid). Mis on seos eelnevalt toodud lagranžiaani ja Feynmani reeglitel põhineva häiritusarvutuse vahel? Lagranžiaanist loetakse välja algebra, millega arvutusi tehakse [13]:

1. Seostame lagranžiaani liikmed propagaatorite ja verteksitega.
2. Propagaatorid loetakse välja "ruudulistest" liikmetest, s.t. $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ -liikmest loetakse fotonpropagaator, $\bar{\psi}(i\hbar\cancel{\partial} - mc)\psi$ -liikmest loetakse välja fermionpropagaator, mida me antud juhul ei käsitle.
3. Teised liikmed seonduvad interaktsioonidega, $\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi$ -liige kujutab endast fermioni interaktsiooni A_μ ehk elektromagnetväljaga.

3.4 Alg- ja lõppolekud

Alg- ja lõppseisundid on joonisel 1 fermionide omad. Diagrammi esimene osa kirjeldab elektroni ja positroni kokkupõrget. Antiosakese nool märgitakse diagrammil vastassuunas, nad on Diraci võrrandi negatiivse energia lahendid ning tuleb välja, et positroni kiirgamine on ekvivalentne elektroni neelamisega, ehk siis positron käitub nagu ajas tagurpidi liikuv elektron [13]. Diagrammil vaatame aja suunda siiski vasakult paremale. Feynmani diagrammil panustab

... siseneva elektroni jaoks spiinor $u(p_-, s_-)$

... siseneva positroni jaoks spiinor $\bar{v}(p_+, s_+)$

... väljuva top-kvargi jaoks spiinor $\bar{u}(p_1, s_1)$

... väljuva antitop-kvargi jaoks spiinor $v(p_2, s_2)$.

Põhispiinorid $u(p, s)$ ja $v(p, s)$ tulevad sekundaarsest kvantiseerimisest, $\bar{u}(p, s) = u^\dagger(p, s)\gamma^0$ ning $\bar{v}(p, s) = v^\dagger(p, s)\gamma^0$ on vastavad kaasspiinorid. Kui ülaltoodud gammamaatriksite Diraci esituses spiinor ψ lahti võtta, siis leiame ülemistes komponentides osakese iseloomuga spiinori ning alumistes komponentides antiosakese iseloomuga spiinori. Liikumatu süsteemi jaoks on need spiinorid lihtsad, üks komponent on 1, ülejäänud 0. $u(p, s)$ jaoks on "ülespoole" spinni puhul esimene komponent 1 ja ülejäänud 0 ning "allapoole" spinni juhul teine komponent 1 ning ülejäänud 0. $v(p, s)$ spiinori jaoks on "ülespoole" spinni juhul kolmas liige 1, teised nullid ning kui spinn on "allapoole", siis on neljas komponent 1 ning ülejäänud nullid [3]. Lorentzi teisendustega saab muidugi üle minna suvalisse taustsüsteemi.

Alternatiivses Weyli (ehk kiraalses) esituses leiame ülemistes komponentides vasakukäelise ning alumistes paremakäelise osakese. Selle esituse kasulikkus selgub elektronõrga ineraktsiooni juures, mis eelistab vasakukäelisi osakesi. Piltlikult [16]:

Dirac esitus:

$$\left. \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} \text{spinn } \uparrow \\ \text{spinn } \downarrow \\ \text{-----} \\ \text{spinn } \uparrow \\ \text{spinn } \downarrow \end{array} \right) \right\} \begin{array}{l} \text{osake} \\ \text{antiosake} \end{array}$$

Weyli (kiraalne) esitus:

$$\left. \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} \text{osake} \\ \text{antiosake} \\ \text{-----} \\ \text{osake} \\ \text{antiosake} \end{array} \right) \right\} \begin{array}{l} \text{vasakukäeline} \\ \text{paremakäeline} \end{array}$$

3.5 Spinnide üle summeerimine ja keskmistamine

Arvutuste käigus tekivad meil liikmed $u(p, s)\bar{u}(p, s)$ ja $v(p, s)\bar{v}(p, s)$. Me ei arvesta alg- ega lõppoleku spinnidega, sellepärast keskmistame üle sisenevate ning summeerime üle väljuvate (anti-)osakeste spinnide. Kehtib [3]

$$\sum_s u(p, s)\bar{u}(p, s) = \not{p} + mc, \quad \sum_s v(p, s)\bar{v}(p, s) = \not{p} - mc, \quad (25)$$

kus m on (anti-)osakese mass ja $\not{p} = \gamma^\mu p_\mu$. Tava on jätta ühikmaatriks $\mathbb{1}_4 = (\delta_{ij})$ massi liikmes kirjutamata. Spiinorite tensorkorrutised moodustavad maatriksid. Kui i ja j on vastavad veeru- ja readindeksid siis saame kirjutada

$$\sum_s u_i(p, s)\bar{u}_j(p, s) = \gamma_{ij}^\mu p_\mu + mc\delta_{ij}. \quad (26)$$

3.6 Verteksid ehk vastasmõju panused

Fermion ja antifermion kokkupõrkel annihileeruvad, diagrammil on pörke kohal verteks, mis kirjeldab fermionide vastastikmõju väljaga, kvantelektrodünaamika puhul footoniga. Vastav panus loetakse lagranžiaani liikmest $-ce\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi$. Vertekskordaja on

$$\frac{ieQ_f\gamma^\mu}{\hbar}, \quad (27)$$

kus $q = eQ_f$ on fermioni laeng, e on elementaarlaeng ning Q_f on fermioni laeng selle suhtes (s.t. elektroni jaoks $Q_e = -1$, top-kvargi jaoks $Q_t = 2/3$ jne). Vertekskordaja on maatriksiks. Teades sisse tulevate ja välja minevate fermionide spinooreid ning vertekseid, saame hakata konstrueerima $e^-e^+ \rightarrow t\bar{t}$ amplituudi. Tekib küsimus, kuidas seda kokku panna? Amplituud on skalaar, seega korrutame verteksit vasakult poolt kaasspiinoriga ja paremalt poolt spinooriga. Kehtib reegel, et korrutame Feynmani diagrammil vastupidiselt noole suunale. Defineerime vasaku poole ehk algoleku jaoks *leptonvektori* L^μ

$$\bar{v}(p_+, s_+) \left(\frac{ieQ_e \gamma^\mu}{\hbar} \right) u(p_-, s_-) = \frac{ieQ_e}{\hbar} \bar{v}(p_+, s_+) \gamma^\mu u(p_-, s_-) =: \frac{ieQ_e}{\hbar} L^\mu. \quad (28)$$

Analoogselt defineerime lõppoleku jaoks *hadronvektori* H^μ

$$\bar{u}(p_1, s_1) \left(\frac{ieQ_t \gamma^\mu}{\hbar} \right) v(p_2, s_2) = \frac{ieQ_t}{\hbar} \bar{u}(p_1, s_1) \gamma^\mu v(p_2, s_2) =: \frac{ieQ_t}{\hbar} H^\mu. \quad (29)$$

Footonpropagaatori vahendusel korrutame need vektorid kokku, et saada skalaar.

3.7 Footonpropagaator

Propagaatorid üldiselt kirjeldavad osakese liikumist ühest aegruumipunktist teise. Kuna me siin ei arvesta kõrgemat järku kiirusparandeid, siis jääb fermionpropagaator kirjeldamata. Propagaatori matemaatiliselt range tuletamine käib funktsionaalse integraalide meetodil, mis on läbi tehtud näiteks Peskini ja Schroederi raamatus [3]. Selle meetodi eelis on see, et ta üldistub lihtsalt massiivsele bosonile. Antud töös me seda läbi ei tee, piirdume lihtsama käsitlusega.

Footonpropagaator tuletatakse footoni lainevõrrandist kujul

$$(g^{\nu\lambda} \partial^2 - \partial^\nu \partial^\lambda) A_\lambda = j^\nu, \quad (30)$$

kus j^ν on voolutihedus ja $g^{\nu\lambda}$ on meetriline tensor. Propagaator on $(g^{\nu\lambda} \partial^2 - \partial^\nu \partial^\lambda)$ pöödfunktsioon. Probleem on selles, et seda ei eksisteeri. Footonpropagaator ei ole üheselt määratud, kuna meil on teatud vabadus valida A_μ kalibratsiooniinvariantsuse tõttu. (Füüsika ei muutu teisendusel $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \chi$.) Probleem lihtsustub, kui teha kalibratsioonivalik $\partial_\lambda A^\lambda = 0$. Lainevõrrand saab kuju

$$g^{\nu\lambda} \partial^2 A_\lambda = j^\nu. \quad (31)$$

Kuna $g_{\mu\nu}g^{\nu\lambda} = \delta_\mu^\lambda$, siis saame propagaatori

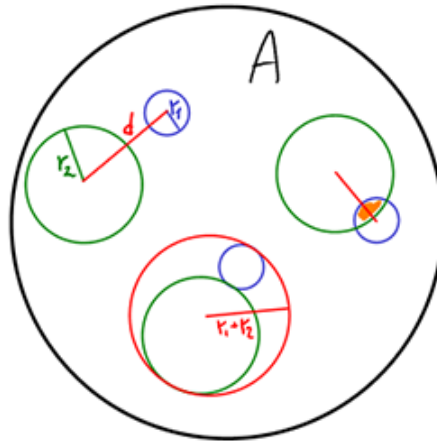
$$\frac{-i\hbar g_{\mu\nu}}{\varepsilon_0 c^2 q^2} = \frac{-i\mu_0 \hbar q_{\mu\nu}}{q^2}, \quad (32)$$

kus oleme lisaks läbi korrutanud $-i$ -ga ning lisanud SI ühikud dielektriline läbitavuse konstandi $\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} C^2 s^2 / kgm^3$, magnetilise läbivuse konstandi $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} kgm / C^2$ ning footoni neliimpulsi q . Sellega on kõik vahendid olemas, et panna kirja protsessi üleminekuamplituud $i\mathcal{M}$ (i on kokkuleppeline)

$$\begin{aligned} i\mathcal{M} &= \bar{v}(p_+, s_+) \frac{ieQ_e \gamma^\mu}{\hbar} u(p_-, s_-) \frac{-\hbar g_{\mu\nu}}{\varepsilon_0 c q^2} \bar{u}(p_1, s_1) \frac{ieQ_t \gamma^\mu}{\hbar} v(p_2, s_2) \\ &= \frac{ie^2 Q_e Q_t}{\varepsilon_0 \hbar c q^2} L^\mu H_\mu = 4i\pi\alpha \frac{Q_e Q_t}{q^2} L^\mu H_\mu. \end{aligned} \quad (33)$$

4 Mõjuritlõige

Kuidas hajumist kvantitatiivselt kirjeldada? Lähtume lihtsast klassikalisest hajumiseksperimentist:



Joonis 3: Ristlõige.

- Võtame kaks palli raadiustega r_1 ja r_2 .
- Viskame nad teineteise suunas mööda z-telge vastasuunas.
- Olenevalt pallide nihkest liikumistelje suhes, nad kas põrkuvad ($d < r_1 + r_2$) või mööduvad üksteisest ($d > r_1 + r_2$). See on visualiseeritud joonisel 3.
- Kui pallid põrkuvad, siis nad lendavad eri suundadesse. Kvantmehaanika aga on tõenäosuslik, seega ei saa eksisteerida sellist deterministlikku tulemust. Tuleb korrata katset mitmeid kordi või tuleb teha katse suure arvu identsete osakestega ja tulemused kokku lugeda.

Kiirendite puhul toimitakse järgnevalt:

- Kiirendame kaht osakeste kimpu n_1 ja n_2 .
- Mõlemad kiired fokuseerida ristlõikele A .

- Korrata katset n_{ex} korda.
- Loendada hajumiste arv N .

Oodatav N väärtus on seega

$$N = \frac{n_{ex}n_1n_2\sigma}{A}, \quad (34)$$

kus karakteristik suurus on hajumise ristlõige σ . Kahe klassikalise palli jaoks oleks $\sigma = \pi(r_1 + r_2)^2$. See tähendab, et kui teame esimese palli asendit, siis teine pall peab olema pindala σ sees, et pallid põrkuksid [17].

Põrgutiekperimentides mõõdetakse just ristlõiget. Kuid mitte mehaanilist ristlõiget vaid nn. mõjuristlõiget, kuna elementaariosakesed on siiski punktosakesed, (kuigi ulatuva mõjuga). Kuidas mõjuristlõige täpselt kujuneb, on näha vaid kvantväljateooria raames. Piirdun diferentsiaalse mõjuristlõike $d\sigma$ lõpptulemusega,

$$d\sigma = |\mathcal{M}|^2 dPS, \quad (35)$$

kus dPS on faasiruumi (diferentsiaalne) element. dPS sisaldab protsessi kinemaatikat, kui $|\mathcal{M}|^2$ sisaldab füüsikat.

Räägime diferentsiaalsest mõjuristlõikest, kui mõni faasiruumi parameetritest on jäänud integreerimata. Jätame integreerimata üle hajumisnurga θ , mis on nurk sissetuleva elektroni ja väljamineva top-kvargi vahel. Seega avaldub diferentsiaalne mõjuristlõige kujul

$$d\sigma = \frac{\hbar^2 v}{32\pi c q^2} |\mathcal{M}|^2 d(\cos \theta). \quad (36)$$

4.1 Maatrikselemendi absoluutväärtuse ruut

Faasiruumi kordaja on triviaalne, seega jätame ta edasiste arvutuste juures ära. Protsessi füüsika toimub maatrikselemendi \mathcal{M} sees. Selle ruut annab meile protsessi toimumise tõenäosuse

$$|\mathcal{M}|^2 = \mathcal{M}\mathcal{M}^* = 16\pi^2 \alpha^2 \frac{Q_e^2 Q_t^2}{q^4} L^\mu H_\mu L^{\nu*} H_{\nu*}. \quad (37)$$

Polarisatsioone mitte arvestades keskmistame üle algolekute ning summeerime üle lõppolekute spinnide [13]

$$|\mathcal{M}|^2 \rightarrow |\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{1}{(2s_- + 1)(2s_+ + 1)} \sum_{\text{spinnid}} |\mathcal{M}|^2, \quad (38)$$

kus s_{\mp} on sissetulevad spinnid. Seega

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = 16\pi^2 \alpha^2 \frac{Q_e^2 Q_t^2}{q^4} L^{\mu\nu} H_{\mu\nu}. \quad (39)$$

Arvutan nii lepton- kui hadrontensorid. Selle juures kasutan gammamaatriksite jäljeomadusi, mis on välja toodud Lisas 1. Leptontensoril on ülevaatlikkuse mõtte sisse jäetud elektroni mass.

$$\begin{aligned} L^{\mu\nu} &= \frac{1}{4} \sum_{s-, s+} L^\mu L^{\nu*} = \frac{1}{4} \sum_{s-, s+} \bar{v}(p_+, s_+) \gamma^\mu u(p_-, s_-) \bar{u}(p_-, s_-) \gamma^\nu v(p_+, s_+) = \\ &= \frac{1}{4} \sum_{s-, s+} \bar{v}_i(p_+, s_+) \gamma_{ij}^\mu u_j(p_-, s_-) \bar{u}_k(p_-, s_-) \gamma_{kl}^\nu v_l(p_+, s_+) = \\ &= \frac{1}{4} \gamma_{ij}^\mu \sum_{s-} u_j(p_-, s_-) \bar{u}_k(p_-, s_-) \gamma_{kl}^\nu \sum_{s+} v_l(p_+, s_+) \bar{v}_i(p_+, s_+) = \\ &= \frac{1}{4} \gamma_{ij}^\mu (\not{p}_- + m_e c)_{jk} \gamma_{kl}^\nu (\not{p}_+ - m_e c)_{li} = \\ &= \frac{1}{4} \text{tr}(\gamma^\mu (\not{p}_- + m_e c) \gamma^\nu (\not{p}_+ - m_e c)) = \\ &= \frac{1}{4} \text{tr}(\gamma^\mu \not{p}_- \gamma^\nu \not{p}_+ - \gamma^\mu \not{p}_- \gamma^\nu m_e c + \gamma^\mu \not{p}_+ \gamma^\nu m_e c - \gamma^\mu \gamma^\nu (m_e c)^2) = \\ &= \frac{1}{4} \text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\sigma p_{-\rho} p_{+\sigma} - \gamma^\mu \gamma^\nu (m_e c)^2) = \\ &= \frac{1}{4} [p_{-\rho} p_{+\sigma} \text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\sigma) - (m_e c)^2 \text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu)] = \\ &= \frac{1}{4} [4p_{-\rho} p_{+\sigma} (g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\rho\nu}) - 4(m_e c)^2 g^{\mu\nu}] = \\ &= p_-^\mu p_+^\nu - p_-^\sigma p_{+\sigma} g^{\mu\nu} + p_-^\nu p_+^\mu - (m_e c)^2 g^{\mu\nu} = \\ &= p_-^\mu p_+^\nu + p_-^\nu p_+^\mu - (p_- p_+ + m_e^2 c^2) g^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned}
H_{\mu\nu} &= \sum_{s_1, s_2} H_\mu H_\nu^* = \sum_{s_1, s_2} \bar{u}(p_1, s_1) \gamma_\mu v(p_2, s_2) \bar{v}(p_2, s_2) \gamma_\nu u(p_1, s_1) = \\
&= \sum_{s_1, s_2} \bar{u}_i(p_1, s_1) \gamma_{\mu ij} v_j(p_2, s_2) \bar{v}_k(p_2, s_2) \gamma_{\nu kl} u_l(p_1, s_1) = \\
&= \sum_{s_1} u_l(p_1, s_1) \bar{u}_i(p_1, s_1) \gamma_{\mu ij} \sum_{s_2} v_j(p_2, s_2) \bar{v}_k(p_2, s_2) \gamma_{\nu kl} = \\
&= (\not{p}_1 + m_t c)_{li} \gamma_{\mu ij} (\not{p}_2 - m_t c)_{jk} \gamma_{\nu kl} = \\
&= \text{tr}((\not{p}_1 + m_t c) \gamma_\mu (\not{p}_2 - m_t c) \gamma_\nu) = \\
&= \text{tr}(\not{p}_1 \gamma_\mu \not{p}_2 \gamma_\nu - \not{p}_1 \gamma_\mu \gamma_\nu m_t c + \gamma_\mu \not{p}_2 \gamma_\nu m_t c - \gamma_\mu \gamma_\nu (m_t c)^2) = \\
&= \text{tr}(\gamma_\rho \gamma_\mu \gamma_\sigma \gamma_\nu p_1^\rho p_2^\sigma - \gamma_\mu \gamma_\nu (m_t c)^2) = \\
&= p_1^\rho p_2^\sigma \text{tr}(\gamma_\rho \gamma_\mu \gamma_\sigma \gamma_\nu) - (m_t c)^2 \text{tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu) = \\
&= 4 p_1^\rho p_2^\sigma (g_{\rho\mu} g_{\sigma\nu} - g_{\rho\sigma} g_{\mu\nu} + g_{\rho\nu} g_{\mu\sigma}) - 4 (m_t c)^2 g_{\mu\nu} = \\
&= 4 [p_{1\mu} p_{2\nu} - p_1^\sigma p_{2\sigma} g^{\mu\nu} + p_{1\nu} p_{2\mu} - (m_t c)^2 g_{\mu\nu}] = \\
&= 4 [p_{1\mu} p_{2\nu} + p_{1\nu} p_{2\mu} - (p_1 p_2 + m_t^2 c^2) g_{\mu\nu}] \tag{41}
\end{aligned}$$

Nagu näha, on hadrontensor identne leptontensoriga, kui välja arvata kordaja $\frac{1}{4}$. Seda arvestada jätan edaspidi hadrontensori arvutamata, tuues ta välja vaid lõpptulemuses.

Z-bosoni aretamiseks on vaja mõningaid algteadmisi elektronõrga teooria kohta.

5 Elektronõrk teooria

Elektronõrk teooria ühendab endas nõrga ja elektromagnetilise vastasmõju. Kaks näiliselt väga erinevat jõudu on ühendatavad sümmetriaprintsiipide alusel. Meil on tarvis mõningaid teadmisi sellest teoriast, et arvestada $e^+e^- \rightarrow t\bar{t}$ protsessis tekkivat Z-bosoni panust, mis on nõrga interaktsiooni boson. Elektronõrga teooria aluseks on spiraalsuse säilimise põhimõte ning spontaanne sümmeetria rikkumine, mida kirjeldab Higgsi mehhanism [18]. Viimast me põhjalikult ei käsitle, piirdume mõne kommentariga arutluse käigus.

Et nõrk interaktsioon peab eksisteerima, sellele viitavad näiteks mesonite lagunemisajad. Värvinteraktsiooni lagunemised on suurusjärgus 10^{-23} sekundit, elektromagnetiline suurusjärgus 10^{-16} sekundit, $\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}$ lagunemisaeg $\tau = 2.6 \times 10^{-8} s$ viitab sellele, et midagi on siin veel [13].

Peale selle nähakse eksperimentides elektroni muutumist neutriinoks ning up-kvargi muutumist down-kvargiks.

5.1 Dubletid ja singletid

Elektronõrka teooriat kirjeldab Shelton Lee Glashow, Steven Weinbergi ja Abdus Salami poolt välja pakutud GWS teooria. Kui Glashow kirjutas sellest, kuidas nõrk interaktsioon võiks tuleneda sümmeetriast [19], siis Weinberg tuli mõttele, et kalibratsiooniväljad võiks tuleneda rühmast $SU(2)_L \times U(1)_Y$ [1]. Sümmeetria, mis kirjeldab elektronõrka teooriat on täpne, kuid selle rikub ära vaakum. Vaakumi rikkumine on seotud Higgsi mehhanismiga.

$U(1)$ -rühmale vastav teisendus on $\psi(x) \rightarrow \exp(ig_1\beta(x)Y)\psi(x)$, mis sarnaneb kvantelektrodünaamikale, kuna ka toda kirjeldab sama rühm. Kordaja g_1 on vastav laeng, $\beta(x)$ on parameeter, mis määrab, kui palju faasi pööratakse ning Y on pööramist teostav generaator, mille määrame hiljem.

$SU(2)$ teisendus on kujul $\psi(x) \rightarrow \exp(ig_2\vec{\omega}(x)\vec{\tau})\psi(x)$, g_2 on jälle vastav laeng, $\vec{\omega}(x)$ parameeter, ning $\tau_i = \sigma_i/2$ vastava rühma generaator, kus tunneme ära Pauli maatriksid.

$SU(2)_L$ -rühma teisendused mõjuvad ainult vasakukäelistele seisunditele ja seda mitte eraldi vaid nn. dubletina. Nii võetakse kokku näiteks vasakukäelised neutriino ja elektron ning up-

ja down-kvargid

$$L = \begin{pmatrix} \nu \\ e^- \end{pmatrix}_L \quad \text{ja} \quad \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L \quad (42)$$

Iga dubleti komponent on jälle neljakomponendiline spiinor. Analoozne retsept üldistub teistele fermionide generatsioonidele. Paremakäelised seisundid jäävad singlettideks e^-_R, u_R, d_R . Paneme tähele, et GWS mudelis puudub paremakäeline neutriino. Kui mudel koostati, siis tolle aja parimate teadmiste järgi oli neutriino massitu. Tänapäevaks oleme kindlaks teinud, et neutriinodel on küll väike, kuid nullist erinev mass [7]. Nullist erinev mass viitab paremakäelise osakese olemasolule, kuid ei eksisteeri paremakäelisi välju. Sellega seoses on palju vastamata küsimusi, mida me siin ei käsitle.

Rõhutamaks üldist, on järgneval arutluskäigul aluseks võetud up- ja down-kvark, millel on olemas paremakäeline komponent.

5.2 Vasaku- ja paremakäelised seisundid

Käelisus (kiraalsus, spiraalsus) on määratud selle järgi, kuhupoole on suunatud osakese spinn—liikumise suunas spinniga osake on paremakäeline, vastassuunas spinniga on vasakukäeline. Käelisus on seotud paarsuse mõistega. Öeldakse, et paarsus on säilitatud, kui käelisus ei muutu. Footon on pime käelisuse suhtes, nõrk interaktsioon aga paistab eelistavat vasakukäelisi osakesi. Käelisuse eraldamiseks spiinorist kasutatakse projektsioonioperaatoreid

$$P_L = \frac{1}{2}(\mathbb{1} - \gamma_5) \quad \text{ja} \quad P_R = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \gamma_5), \quad (43)$$

mis rakendatuna spiinorile annavad tulemuseks

$$\psi_L = P_L \psi \quad \text{ja} \quad \psi_R = P_R \psi. \quad (44)$$

Maatriks $\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ teeb teooria "tundlikuks" spiraalsuse suhtes. Weyli esituses nullib P_L kaks alumist ning P_R kaks ülemist spiinori neljast komponendist. Analoogia Diraci esitusega on silmatorkav, kus me järeldasime et spiinori pooleks jagades saame kaks erinevat

objekti: osakese ja antiosakese. Samamoodi võib järeldada, et näiteks elektron pole fundamentaalne objekt, vaid vasakukäeline elektron ja paremakäeline elektron on fundamentaalsed. Projektorid on reaalsed, kehtib

$$\begin{aligned}
P_L^\dagger &= P_L, & P_R^\dagger &= P_R \\
P_L^2 &= P_L, & P_R^2 &= P_R \\
P_L P_R &= P_R P_L = 0 \\
P_L + P_R &= \mathbf{1}
\end{aligned} \tag{45}$$

Kaasspiinorid on seotud vastupidise projektoriga,

$$\bar{\psi}_L = (P_L \psi)^\dagger \gamma^0 = \psi^\dagger P_L \gamma^0 = \psi^\dagger \gamma^0 P_R = \bar{\psi} P_R \quad \text{ja} \quad \bar{\psi}_R = \bar{\psi} P_L, \tag{46}$$

kus on kasutatud antikommutaatorit $\{\gamma^\mu, \gamma_5\} = 0$ ehk $\gamma^\mu \gamma_5 = -\gamma_5 \gamma^\mu$ ($\mu = 0, 1, 2, 3$). Kui lähtuda sellest, et antiosake käitub nagu ajas tagurpidi liikuv osake, siis vastab ka impulsi suunas spinniga osakesele impulsi vastassuunas spinniga antiosake.

Sisestades sobivasse kohta ühikmaatriksi, saab lagranžiaane jagada parema- ja vasakukäelisteks osadeks

$$\begin{aligned}
\bar{\psi} \gamma^\mu \psi &= \bar{\psi} (P_L + P_R) \gamma^\mu (P_L + P_R) \psi = \bar{\psi} P_R \gamma^\mu P_L \psi + \bar{\psi} P_L \gamma^\mu P_R \psi = \\
&= \bar{\psi}_L \gamma^\mu \psi_L + \bar{\psi}_R \gamma^\mu \psi_R.
\end{aligned} \tag{47}$$

Nii jaguneb \mathcal{L}_{KED} kineetiline panus

$$c\bar{\psi} i \hbar \gamma^\mu \partial_\mu \psi = c\bar{\psi}_L i \hbar \gamma^\mu \partial_\mu \psi_L + c\bar{\psi}_R i \hbar \gamma^\mu \partial_\mu \psi_R. \tag{48}$$

Massiliikmega aga tekib probleeme kuna

$$\bar{\psi} \psi = \bar{\psi} (P_L^2 + P_R^2) \psi = \bar{\psi}_R \psi_L + \bar{\psi}_L \psi_R \tag{49}$$

rikub paarsust. Sellest hädast aitab välja alles Higgsi mehhanism.

5.3 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ kalibratsiooniväljad

Toimime sarnaselt elektromagnetvälja sissetoomisega ning lisame lagranžiaani väljaliikmed. Peame meeles, et $SU(2)_L$ mõjub ainult vasakukäelistele olekutele.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{EN} = & c\bar{L}(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - g_1\gamma^\mu B_\mu Y_L - g_2\gamma^\mu W_\mu^i\tau_i)L + \\ & + c\bar{R}(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - g_1\gamma^\mu B_\mu Y_R)R \end{aligned} \quad (50)$$

5.4 Füüsikalised väljad (W_μ^+ ja W_μ^-)

Eelnev lagranžiaan on aga mudeli lagranžiaan. Tahame saada kirjeldust füüsikaliste väljade kaudu. Kirjutame lahti

$$W_\mu^i\tau_i = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} W_\mu^3 & W_\mu^1 - iW_\mu^2 \\ W_\mu^1 + iW_\mu^2 & -W_\mu^3 \end{pmatrix} =: \frac{1}{2} \begin{pmatrix} W_\mu^0 & -\sqrt{2}W_\mu^+ \\ -\sqrt{2}W_\mu^- & -W_\mu^0 \end{pmatrix}, \quad (51)$$

kus W^- ja W^+ esindavad juba füüsikalisi bosoneid. Märk näitab ka elektrilaengut. Saame lagranžiaaniks

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{EN} = & c\bar{d}_L i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu d_L + c\bar{u}_L i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu u_L + c\bar{d}_R i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu d_R + c\bar{u}_R i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu u_R + \\ & - cg_1[Y_L\bar{d}_L\gamma^\mu d_L + Y_L\bar{u}_L\gamma^\mu u_L + Y_{dR}\bar{d}_R\gamma^\mu d_R + Y_{uR}\bar{u}_R\gamma^\mu u_R]B_\mu + \\ & - c\frac{g_2}{2}[(\bar{u}_L\gamma^\mu u_L - \bar{d}_L\gamma^\mu d_L)W_\mu^0 - \sqrt{2}(\bar{u}_L\gamma^\mu d_L W_\mu^+ + \bar{d}_L\gamma^\mu u_L W_\mu^-)]. \end{aligned} \quad (52)$$

Nagu näha siis kineetilises liikmes ja interaktsiooniliikmes B_μ -ga ei mängi käelisus roll, küll aga liikmetes W_μ^0 ja W_μ^\pm bosonitega. W_μ^\pm vahendavad nn. laetud voole. Näiteks $\bar{u}_L\gamma^\mu d_L W_\mu^+$ kirjeldab vasakukäelise down-kvargi muutumist up-kvargiks intarktsioonil W_μ^+ -ga.

5.5 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ kohandamine kvantelektrodünaamikale

Kalibratsioonväljad B_μ ja W_μ^0 ei ole füüsikalised väljad. Nad korraldavad nn neutraalseid voole. Kuna B_μ tuleb rühmast $U(1)_Y$ ja W_μ^0 rühmast $SU(2)_L$, siis võiks arvata, et esimene on elektromagnetväli ja teine neutraalne nõrk väli. See pole aga päris nii. Võrdleme elektronõrga

lagranžiaani elektrodünaamika omaga

$$\mathcal{L}_{KED} = i\hbar\bar{d}\gamma^\mu\partial_\mu d + i\hbar\bar{u}_L\gamma^\mu\partial_\mu u_L - cq_d\bar{d}\gamma^\mu dA_\mu - cq_u\bar{u}\gamma^\mu uA_\mu, \quad (53)$$

kus $q_d = eQ_d$ ($Q_d = -1/3$) ja $q_u = eQ_u$ ($Q_u = 2/3$) on down- ja up-kvarkide laengud. Näeme seoseid

$$\begin{aligned} g_1 Y_L B_\mu + \frac{g_2}{2} W_\mu^0 &= eQ_u A_\mu, & g_1 Y_{uR} B_\mu &= eQ_u A_\mu, \\ g_1 Y_L B_\mu - \frac{g_2}{2} W_\mu^0 &= eQ_d A_\mu, & g_1 Y_{dR} B_\mu &= eQ_d A_\mu. \end{aligned} \quad (54)$$

Vasaku- ja paremakäelisi osakesi eristab hüperlaeng.

$$Y_L = \frac{1}{2}(Q_u + Q_d) = \frac{1}{6}, \quad Y_{uR} = Q_u = \frac{2}{3}, \quad Y_{dR} = Q_d = -\frac{1}{3}. \quad (55)$$

Üldine seos on laengu Q ja hüperlaengu vahel on

$$Q = T^3 + Y, \quad (56)$$

kus T^3 on isospinni kolmas komponent. Selgub, et nii elektromagnetväli kui neutraalne nõrk väli on kahe välja lineaarkombinatsioon, mille leiame katses $A_\mu = B_\mu \cos \theta_W + W_\mu^0 \sin \theta_W$ ning vastavalt $Z_\mu = -B_\mu \sin \theta_W + W_\mu^0 \cos \theta_W$. Weinbergi nurk [19] θ_W kirjeldab, kui palju väljad on välja "keeratud" mudeli väljadest. Selle nurga kaudu leiame ka $U(1)$ ja $SU(2)$ laengud

$$g_1 = \frac{e}{\cos \theta_W}, \quad g_2 = \frac{e}{\sin \theta_W}. \quad (57)$$

Lõpuks saame väljendada elektronõrga lagranžiaani läbi füüsikaliste väljade

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{EN} &= i\hbar\bar{u}\gamma^\mu\partial_\mu u + i\hbar\bar{d}\gamma^\mu\partial_\mu d - ceQ_u\bar{u}\gamma^\mu uA_\mu - ceQ_d\bar{d}\gamma^\mu dA_\mu + \\ &- \frac{ec}{\sin \theta_W \cos \theta_W} \left(\left(\frac{1}{2} - Q_u \sin^2 \theta_W \right) \bar{u}_L \gamma^\mu u_L + \left(-\frac{1}{2} - Q_d \sin^2 \theta_W \right) \bar{d}_L \gamma^\mu d_L + \right. \\ &- \left. Q_u \sin^2 \theta_W \bar{u}_R \gamma^\mu u_R - Q_d \sin^2 \theta_W \bar{d}_R \gamma^\mu d_R \right) Z_\mu + \\ &+ \frac{ec}{\sqrt{2} \sin \theta_W} (\bar{u}_L \gamma^\mu d_L W_\mu^+ + \bar{d}_L \gamma^\mu u_L W_\mu^-). \end{aligned} \quad (58)$$

5.6 Z-bosoni verteks

Kogu eelnev arutus oli sellks, et saaks koostada lagranžiaani, millest vertekskordaja välja lugeda. See kordaja on

$$\frac{ie\gamma^\mu}{\hbar \sin \theta_W \cos \theta_W} \left(T_f^3 \frac{1 - \gamma_5}{2} - Q_f \sin^2 \theta_W \right). \quad (59)$$

Fermioni nõrk isospinni kolmas komponent T_f^3 on null singleti jaoks, dubleti ülemise komponendi jaoks on $1/2$ ning alumise komponendi jaoks $-1/2$. Arvutuste tegemiseks on mõistlik verteks kirja panna kujul

$$\frac{ieg_Z}{4\hbar} (v_f \gamma^\mu + a_f \gamma_5 \gamma^\mu), \quad (60)$$

kus oleme tähistanud $g_Z = (\sin \theta_W \cos \theta_W)^{-1}$. Ilmneb, et Z-bosoni verteksil on kaks panust, vektorpanus (γ^μ liige) ja aksiaalvektropanus ($\gamma_5 \gamma^\mu$ liige). Oleme tähistanud vastavad kordajad $v_f = 2T_f^3 - 4Q_f \sin^2 \theta_W$ ja $a_f = 2T_f^3$.

Antud protsessi jaoks on tähtsad elektroni ja top-kvargi kordajad

$$\begin{aligned} v_e &= -1 + 4 \sin^2 \theta_W, & a_e &= -1, \\ v_t &= 1 - \frac{8}{3} \sin^2 \theta_W, & a_t &= +1. \end{aligned} \quad (61)$$

5.7 Z-bosoni propagaator

Viimane osa, mida meil veel vaja on Z-bosoniga arvutuste tegemiseks, on tema propagaator. Kuju poolest on ta väga sarnane footoni propagaatoriga

$$\frac{i\mu_0 \hbar g^{\mu\nu}}{q^2 - m_Z^2 c^2 + im_Z \Gamma_Z}, \quad (62)$$

kus m_Z tähistab Z-bosoni massi ning $\Gamma_Z = 2.4952(23) GeV$ arvestab osakese elueaga, kuna Z ei ole stabiilne [10]. Soov on kirja panna Z-bosoni propagaator sarnaselt footoni omaga [20],

$$\frac{i\mu_0 \hbar g^{\mu\nu}}{q^2} \chi_Z(q^2), \quad (63)$$

kus oleme tähistanud

$$\chi_Z(q^2) = \frac{gq^2 m_Z^2 c^4}{q^2 - m_Z^2 c^2 + im_Z \Gamma_Z}, \quad g = \frac{G_F}{8\sqrt{2}\pi\alpha(\hbar c)^3}, \quad (64)$$

kus $G_F/(\hbar c)^3 = 1.16637(1) \times 10^{-5} GeV^{-2}$ on Fermi konstant. Kuna igas verteksis seisab kordaja g_Z , siis kaasame selle ruudu ka $\chi_Z(q^2)$ sisse. Kokkuvõttes on footoni ja Z-bosoni verteksid

$$\frac{ie}{\hbar} Q_f \gamma^\mu \quad \text{ja} \quad \frac{ie}{\hbar} (v_f \gamma^\mu + a_f \gamma_5 \gamma^\mu) \quad (65)$$

ning footoni ja Z-bosoni propagaatorid on

$$\frac{-i\mu_0 \hbar g_{\mu\nu}}{q^2} \quad \text{ja} \quad \frac{-i\mu_0 \hbar g_{\mu\nu}}{q^2} \chi_Z(q^2). \quad (66)$$

6 Protsessi $e^-e^+ \rightarrow t\bar{t}$ tõenäosus

Nüüd on kõik vajalik koos, et teha arvutused protsessis $e^-e^+ \rightarrow t\bar{t}$ jaoks, kus vahetatakse Z-boson. Lõpuks saame tulemused ühendada footoni vahetuse jaoks ning tulemuseks ongi protsessi tõenäosus.

6.1 Z-bosoni leptontensori arvutamine

Z-bosoni jaoks on arvutus analoogne footoni juhuga, tarvis on välja vahetada verteks. See verteks on aga keerulisem, kui footonil — Z-bosonil on nii vektorpanus γ^μ (mis ilmneb ka footoni puhul) kui ka aksiaalvektorpanus $\gamma_5\gamma^\mu$. Uue panuse ilmumine teeb arvutused keerulisemaks. Panen kirja leptontensorid Z-bosoni jaoks. Neid on neli komponenti. Arvutused on analoogsed eelnevalt tehtud footoni leptontensoriga.

Esimene, VV liige on identne footoni jaoks arvutatud tulemusega, kuna on puhtalt vektorisloomuga verteks.

$$\begin{aligned} L^{VV\mu\nu} &= \frac{1}{4} L^{V\mu} L^{V\nu*} = \frac{1}{4} \sum_{s-,s+} \bar{v}(p_+, s_+) \gamma^\mu u(p_-, s_-) \bar{u}(p_-, s_-) \gamma^\nu v(p_+, s_+) = \\ &= p_-^\mu p_+^\nu + p_-^\nu p_+^\mu - (p_- p_+ + m^2 c^2) g^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (67)$$

Järgnevad liikmed sisaldavad aksiaalvektori komponenti, $\gamma^\mu\gamma_5$ panusest. Teine, AA liige on:

$$\begin{aligned} L^{AA\mu\nu} &= \frac{1}{4} L^{A\mu} L^{A\nu*} = \frac{1}{4} \sum_{s-,s+} \bar{v}(p_+, s_+) \gamma_5 \gamma^\mu u(p_-, s_-) \bar{u}(p_-, s_-) \gamma_5 \gamma^\nu v(p_+, s_+) = \\ &= \frac{1}{4} \text{tr}[\gamma_5 \gamma^\mu (\gamma^\rho p_{-\rho} + mc) \gamma_5 \gamma^\nu (\gamma^\sigma p_{+\sigma} - mc)] = \\ &= \frac{1}{4} \text{tr}(\gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma_5 \gamma^\nu \gamma^\sigma) p_{-\rho} p_{+\sigma} - \text{tr}(\gamma_5 \gamma^\mu \gamma_5 \gamma^\nu) (mc)^2 = \\ &= p_{-\rho} p_{+\sigma} (g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\rho\nu}) + (mc)^2 g^{\mu\nu} = \\ &= p_-^\mu p_+^\nu + p_-^\nu p_+^\mu - (p_- p_+ - m^2 c^2) g^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (68)$$

kus esimeses jäljes on kaks korda ja teises jäljes on üks kord kasutatud antikommutaatorseost $\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0$ ning $(\gamma_5)^2 = \mathbb{1}$. Nagu ka VV osas, kaovad kaks liiget, kuna jälg paaritust arvust

gammamaatriksitest on null. Kolmas, VA liige on:

$$\begin{aligned}
L^{VA\mu\nu} &= \frac{1}{4}L^{V\mu}L^{A\nu*} = \frac{1}{4}\sum_{s-,s+}\bar{v}(p_+,s+)\gamma^\mu u(p_-,s_-)\bar{u}(p_-,s_-)\gamma_5\gamma^\nu v(p_+,s_+) = \\
&= \frac{1}{4}\text{tr}[\gamma^\mu(\gamma^\rho p_{-\rho} + mc)\gamma_5\gamma^\nu(\gamma^\sigma p_{+\sigma} - mc)] = \\
&= \frac{1}{4}\text{tr}(\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma_5\gamma^\nu\gamma^\sigma)p_{-\rho}p_{+\sigma} = \text{tr}(\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\sigma)p_{-\rho}p_{+\sigma} = \\
&= -i\epsilon^{\mu\rho\nu\sigma}p_{-\rho}p_{+\sigma},
\end{aligned} \tag{69}$$

kus ϵ on Levi-Civita sümbol. Kasutasin ka jälje omadust $\text{tr}(\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu) = 0$. Jälg on ka null siis, kui peale γ_5 on jälje all paaritu arv gammamaatrikseid.

Jääb veel arvutada viimane, AV liige:

$$\begin{aligned}
L^{AV\mu\nu} &= \frac{1}{4}L^{A\mu}L^{V\nu*} = \frac{1}{4}\sum_{s-,s+}\bar{v}(p_+,s+)\gamma_5\gamma^\mu u(p_-,s_-)\bar{u}(p_-,s_-)\gamma^\nu v(p_+,s_+) = \\
&= \frac{1}{4}\text{tr}[\gamma_5\gamma^\mu(\gamma^\rho p_{-\rho} + mc)\gamma^\nu(\gamma^\sigma p_{+\sigma} - mc)] = \\
&= \frac{1}{4}\text{tr}(\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\sigma)p_{-\rho}p_{+\sigma} = -i\epsilon^{\mu\rho\nu\sigma}p_{-\rho}p_{+\sigma}
\end{aligned} \tag{70}$$

Hadronvektorid on analoogsed leptonvektoritega. Ülejäänud erinevused tulevad top-kvargi erinevast impulsist, kui see välja kirjutada ilmutatud kujul.

6.2 Protsessi kogutõenäosus

Paneme kirja üleminekuamplituudi interaktsiooni jaoks, kus vahetatakse Z -boson.

$$i\mathcal{M}_Z = \frac{4i\pi\alpha}{q^2}\chi_Z(q^2)(v_e v_t L^{V\mu} H_\mu^V + v_e a_t L^{V\mu} H_\mu^A + a_e v_t L^{A\mu} H_\mu^V + a_e a_t L^{A\mu} H_\mu^A) \tag{71}$$

Olles teinud vastavad arvutused Z -bosoni jaoks, tuleks need tulemused kokku panna eelnevalt leitud tulemustega footoni jaoks. Selle jaoks lihtsalt summeerin maatrikelemendid:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_\gamma + \mathcal{M}_Z &= \frac{4\pi\alpha}{q^2}[Q_e Q_t L^{V\mu} H_\mu^V + \chi_Z(q^2)(v_e v_t L^{V\mu} H_\mu^V + \\
&\quad + v_e a_t L^{V\mu} H_\mu^A + a_e v_t L^{A\mu} H_\mu^V + a_e a_t L^{A\mu} H_\mu^A)]
\end{aligned} \tag{72}$$

Kokkuvõttes otsime tõenäosust ehk amplituudi ruudu keskvaärtust (spinne ei arvesta):

$$\begin{aligned}
|\overline{\mathcal{M}_\gamma + \mathcal{M}_Z}|^2 = & \frac{16\pi^2\alpha^2}{q^4} [(Q_e Q_t)^2 L^{VV\mu\nu} H_{\mu\nu}^{VV} + \\
& + (\chi(q^2))^2 ((v_e v_t)^2 L^{VV\mu\nu} H_{\mu\nu}^{VV} + (v_e a_t)^2 L^{VV\mu\nu} H_{\mu\nu}^{AA} + \\
& + (a_e v_t)^2 L^{AA\mu\nu} H_{\mu\nu}^{VV} + (a_e a_t)^2 L^{AA\mu\nu} H_{\mu\nu}^{AA}) + \\
& + v_e^2 v_t a_t (L^{VV\mu\nu} H_{\mu\nu}^{VA} + L^{VV\mu\nu} H_{\mu\nu}^{AV}) + v_e a_e v_t a_t (L^{VA\mu\nu} H_{\mu\nu}^{AV} + \\
& + L^{AV\mu\nu} H_{\mu\nu}^{VA}) + a_e^2 v_t a_t (L^{AA\mu\nu} H_{\mu\nu}^{VA} + L^{AA\mu\nu} H_{\mu\nu}^{AV}) + \\
& + v_e a_e v_t a_t (L^{AV\mu\nu} H_{\mu\nu}^{AV} + L^{VA\mu\nu} H_{\mu\nu}^{VA}) + v_e a_e v_t^2 (L^{VA\mu\nu} H_{\mu\nu}^{VV} + \\
& + L^{AV\mu\nu} H_{\mu\nu}^{VV}) + v_e a_e a_t^2 (L^{VA\mu\nu} H_{\mu\nu}^{AA} + L^{AV\mu\nu} H_{\mu\nu}^{AA}) + \\
& + Q_e Q_t \chi_Z(q^2) (v_e v_t L^{VV\mu\nu} H_{\mu\nu}^{VV} + v_e a_t L^{VV\mu\nu} H_{\mu\nu}^{AV} + \\
& + a_e v_t L^{AV\mu\nu} H_{\mu\nu}^{VV} + a_e a_t L^{AV\mu\nu} H_{\mu\nu}^{AV}) + \\
& + Q_e Q_t \chi_Z^*(q^2) (v_e v_t L^{VV\mu\nu} H_{\mu\nu}^{VV} + v_e a_t L^{VV\mu\nu} H_{\mu\nu}^{VA} + \\
& + a_e v_t L^{VA\mu\nu} H_{\mu\nu}^{VV} + a_e a_t L^{VA\mu\nu} H_{\mu\nu}^{VA})]. \tag{73}
\end{aligned}$$

On näha, et saadud tulemus on väga keerulise kujuga, ei esine mitte ainult footoni ja Z üleminekuamplituutide ruudud \mathcal{M}_γ^2 ja \mathcal{M}_Z^2 , vaid ka nende interferentsiliikmed $\mathcal{M}_\gamma \mathcal{M}_Z^*$ ja $\mathcal{M}_Z \mathcal{M}_\gamma^*$. Soov oleks see kokku võtta lihtsamalt ja ülevaatlikumalt. Kordajad tuleks kuidagi kokku võtta. Arvestades Z -bosoni vektor- ja aksiaalvektorpanuseid γ^μ ja $\gamma_5 \gamma^\mu$ muutub diagrammiga kirjeldatud maatrikselement $\mathcal{M} = L_\mu H^\mu$ vastavalt:

$$\mathcal{M} = \tilde{g}_{VV} L_\mu^V H^{V\mu} + \tilde{g}_{VA} L_\mu^V H^{A\mu} + \tilde{g}_{AV} L_\mu^A H^{V\mu} + \tilde{g}_{AA} L_\mu^A H^{A\mu} = \sum_{\alpha, \beta=V}^A \tilde{g}_{\alpha\beta} L_\mu^\alpha H^{\beta\mu}, \tag{74}$$

kus kordaja $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ sisaldab kordajaid Q_f , v_f ja a_f verteksitest ja $\chi_Z(g^2)$ Z -bosoni propagaatorist. Ära on jäetud kordaja $\frac{4\pi\alpha}{q^2}$, kuna see on triviaalne, lõpptulemuses tuleb ka taas sisse tuua.

Oleme aga endiselt huvitatud maatrikselemendi ruudust

$$\begin{aligned}
\sum_{spinnid} |\mathcal{M}|^2 &= \sum_{spinnid} \sum_{\alpha, \alpha', \beta, \beta' = V}^A \tilde{g}_{\alpha\beta} L_\mu^\alpha H^{\beta\mu} \tilde{g}_{\alpha'\beta'}^* L_\nu^{\alpha'*} H^{\beta'\nu*} = \\
&= \sum_{\alpha, \alpha', \beta, \beta' = V}^A \tilde{g}_{\alpha\beta} \tilde{g}_{\alpha'\beta'}^* \sum_{spinn} L_\mu^\alpha L_\nu^{\alpha'*} \sum_{spinn} H^{\beta\mu} H^{\beta'\nu*} = \\
&= \sum_{\alpha, \alpha', \beta, \beta' = V}^A g_{(\alpha\alpha')(\beta\beta')} L_{\mu\nu}^{\alpha\alpha'} H^{\beta\beta'\mu\nu}. \tag{75}
\end{aligned}$$

$g_{(\alpha\alpha')(\beta\beta')}$ olen kokku võtnud Lisas 2 kogudes kokku lepton- ja hadrontensori ees olevad kor-
dajad võrrandist (11). Selgub aga, et mõistlikum on tulemused kokku võtta kujul

$$|\mathcal{M}|^2 = \sum_{i,j=1}^4 g_{ij} L_{\mu\nu}^i H^{j\mu\nu}. \tag{76}$$

Selle jaoks on defineeritud

$$\begin{aligned}
L_{\mu\nu}^1 &:= \frac{1}{2}(L_{\mu\nu}^{VV} + L_{\mu\nu}^{AA}), & L_{\mu\nu}^2 &:= \frac{1}{2}(L_{\mu\nu}^{VV} - L_{\mu\nu}^{AA}), \\
L_{\mu\nu}^3 &:= \frac{i}{2}(L_{\mu\nu}^{VA} - L_{\mu\nu}^{AV}), & L_{\mu\nu}^4 &:= \frac{1}{2}(L_{\mu\nu}^{VA} + L_{\mu\nu}^{AV}). \tag{77}
\end{aligned}$$

Vastavalt sellele on ka tarvis defineerida g_{ij} . Selle jaoks võtsin $(\alpha\alpha'), (\beta\beta') \in \{VV, VA, AV, AA\}$ indeksiteks $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ võttes aluseks definitsioonid võrrandeist (77). Tulemus on välja kirjutatud Lisas 3. Uued leptontensorid $L^{i\mu\nu}$ on seega

$$\begin{aligned}
L^{1\mu\nu} &= \frac{1}{2}([p_-^\mu p_+^\nu + p_-^\nu p_+^\mu - (p_- p_+ + m_e^2 c^2)g^{\mu\nu}] + \\
&\quad + [p_-^\mu p_+^\nu + p_-^\nu p_+^\mu - (p_- p_+ - m_e^2 c^2)g^{\mu\nu}]) = \\
&= p_-^\mu p_+^\nu + p_-^\nu p_+^\mu - p_- p_+ g^{\mu\nu} \tag{78}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L^{2\mu\nu} &= \frac{1}{2}([p_-^\mu p_+^\nu + p_-^\nu p_+^\mu - (p_- p_+ + m_e^2 c^2)g^{\mu\nu}] - \\
&\quad - [p_-^\mu p_+^\nu + p_-^\nu p_+^\mu - (p_- p_+ - m_e^2 c^2)g^{\mu\nu}]) = \\
&= m_e^2 c^2 g^{\mu\nu} \tag{79}
\end{aligned}$$

$$L^{3\mu\nu} = \frac{i}{2}(-i\epsilon^{\mu\rho\nu\sigma}p_{-\rho}p_{+\sigma} - (-i\epsilon^{\mu\rho\nu\sigma}p_{-\rho}p_{+\sigma})) = 0 \quad (80)$$

$$L^{4\mu\nu} = \frac{1}{2}(-i\epsilon^{\mu\rho\nu\sigma}p_{-\rho}p_{+\sigma} - i\epsilon^{\mu\rho\nu\sigma}p_{-\rho}p_{+\sigma}) = -i\epsilon^{\mu\rho\nu\sigma}p_{-\rho}p_{+\sigma} \quad (81)$$

Analoogselt hadrontensorid $H^{i\mu\nu}$:

$$H^{1\mu\nu} = 4(p_2^\mu p_1^\nu + p_2^\nu p_1^\mu - p_2 p_1 g^{\mu\nu}) \quad (82)$$

$$H^{2\mu\nu} = 4m_t^2 c^2 g^{\mu\nu} \quad (83)$$

$$H^{3\mu\nu} = 0 \quad (84)$$

$$H^{4\mu\nu} = -4i\epsilon^{\mu\rho\nu\sigma}p_{2\rho}p_{1\sigma} \quad (85)$$

6.3 Sõltuvus hajumisnurgast θ

Lõpuks oleme jõudnud sinnamaale, et saame arvutada protsessi sõltuvust hajumisnurgast θ .

Selle jaoks arvutan välja $L^i H^j$:

$$\begin{aligned} L^1 H^1 &= 4(p_-^\mu p_+^\nu + p_-^\nu p_+^\mu - p_- p_+ g^{\mu\nu})(p_{2\mu} p_{1\nu} + p_{2\nu} p_{1\mu} - p_2 p_1 g^{\mu\nu}) = \\ &= 4(2(p_- p_-)(p_+ p_+) + 2(p_- p_+)(p_+ p_-) - 4(p_+ p_-)(p_- p_+) + 4(p_- p_+)(p_+ p_-)) = \\ &= 8((p_- p_+)(p_+ p_-) + (p_- p_+)(p_+ p_-)) = \frac{E^4}{2c^6} ((c - v \cos \theta)^2 + (c + v \cos \theta)^2) = \\ &= \frac{E^4}{c^6} (c^2 + v^2 \cos^2 \theta) = \frac{E^4}{c^4} \left(1 + \frac{v^2}{c^2} \cos^2 \theta\right) \\ L^1 H^2 &= 4(p_-^\mu p_+^\nu + p_-^\nu p_+^\mu - p_- p_+ g^{\mu\nu})m_t^2 c^2 g_{\mu\nu} = 4m_t^2 c^2 (2(p_{-\nu} p_{+\mu}) - 4(p_{-\nu} p_{+\mu})) = \\ &= -8m_t^2 c^2 (p_- p_+) = -4E^2 m_t^2 = -4 \frac{E^4}{c^4} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \\ L^4 H^4 &= -4\epsilon_{\mu\rho\nu\sigma} p_-^\rho p_+^\sigma \epsilon^{\mu\tau\nu\omega} p_{2\tau} p_{1\omega} = 4(\delta_\rho^\tau \delta_\sigma^\omega - \delta_\rho^\omega \delta_\sigma^\tau) p_-^\rho p_+^\sigma p_{2\tau} p_{1\omega} = \\ &= 4((p_- p_-)(p_+ p_+) - (p_- p_+)(p_+ p_-)) = \frac{E^4}{4c^6} ((c + v \cos \theta)^2 - (c - v \cos \theta)^2) \\ &= \frac{E^4}{c^4} cv \cos \theta. \end{aligned} \quad (86)$$

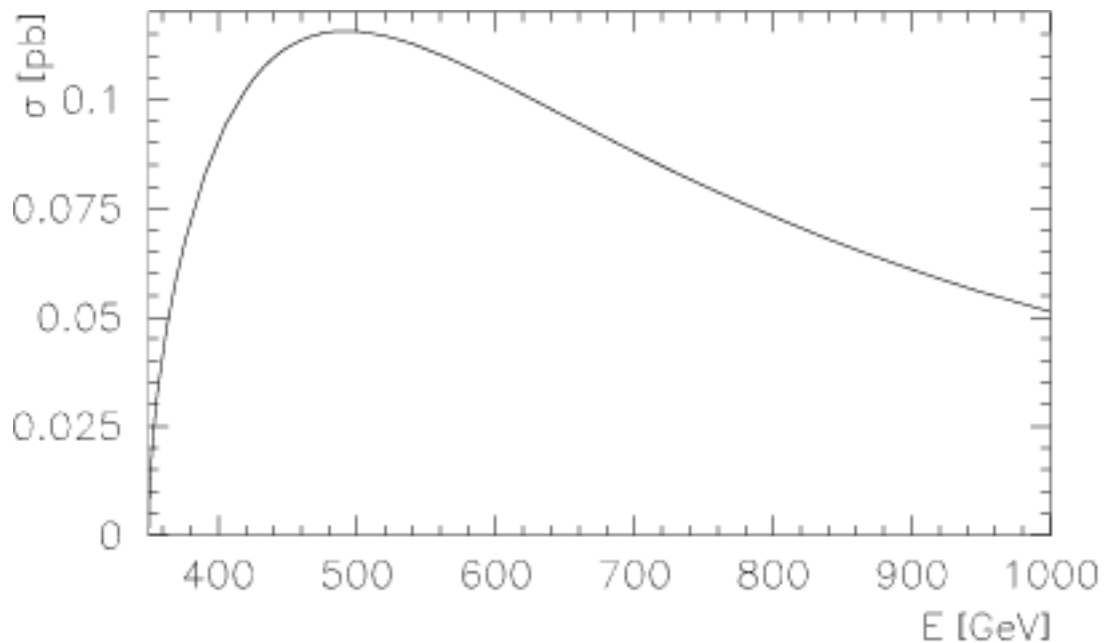
arvutada kolm integraali

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{+1} d(\cos \theta) &= [\cos \theta]_{-1}^{+1} = +1 - (-1) = 2 \\ \int_{-1}^{+1} \cos \theta d(\cos \theta) &= \frac{1}{2}[\cos^2 \theta]_{-1}^{+1} = 0 \\ \int_{-1}^{+1} \cos^2 \theta d(\cos \theta) &= \frac{1}{3}[\cos^3 \theta]_{-1}^{+1} = \frac{1}{3}((+1)^3 - (-1)^3) = \frac{2}{3}.\end{aligned}\quad (88)$$

Protsessi koguristlõige on seega

$$\sigma = \frac{\pi\alpha^2\hbar^2c^2v}{2q^2} \left(g_{11} \left(2 + \frac{2v^2}{3c^2} \right) - 2g_{12} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \right). \quad (89)$$

Graafiliselt on kujutatud ristlõike ja energia suhe joonisel 5.



Joonis 5. Mõjuristlõike sõltuvus energiast.

7 Kokkuvõte

Käesoleva bakalaureuse töö eesmärgiks oli tutvuda kvantväljateooria ning tema formalismiga. Selle jaoks on uurimise alla võetud kiirendiekspimenti kirjeldus. Praktilise tulemusena sai selle tarbeks arvutatud protsessi $e^-e^+ \rightarrow t\bar{t}$ mõjuristolõige. Töö käigus tutvuti kvantväljateooria lähenemisega probleemide lahendamisel. Tuli selgeks teha teooria erinevad elemendid ning vastav matemaatiline kirjeldus.

Töö esimeses osas nägime, et kvantväljateoorias kasutatakse protsesside kirjeldamiseks Feynmani diagramme, mis visualiseerivad häiritusarvutuse liikeid. Sisenevad ja väljuvad osakesi kirjeldavad vastavad spiinorid. Verteks iseloomustab osakeste interaktsiooni väljaga ning propagaator vastava välja levimist. Antud juhul annihileeruvad elektron ja positron, nad interakteeruvad elektromagnetvälja ja nõrga väljaga ning lõpuks tekib top- ja antitop-kvargi paar. Verteksite ja propagaatorite algebra loetakse välja lagranžiaanist. Selle jaoks tutvusime kvant-elektrodünaamika lagranžiaaniga ning teises osas ka elektronõrga teooriaga. Nägime, et GWS teooria ühendab endas kahte eelnevalt nimetatud vastastikmõju ning tutvusime põhimõtetega, mille alusel nõrk teooria eristab vasku- ja paremakäelisi olekuid.

Mahuka arvutuse tulemusena leidsime protsessi üleminekutõenäosust kirjeldava lihtsa kujuga avaldise, kus süstematiseerisime arvutuse käigus tekkivad kordajad maatriksisse, mille elemendid on selgesõnaliselt kirjas lisas 3. Seega on lihtne leida protsessi sõltuvus hajumisnurgast.

8 Inquiry into the process $e^-e^+ \rightarrow t\bar{t}$

Ülari Külaots

Summary

The purpose of this bachelor's thesis was to become familiar with quantum field theory and its methods. For this a particle collision experiment was chosen, namely the process $e^-e^+ \rightarrow t\bar{t}$. It was the intention to calculate the cross section for the process to occur, which is the standard approaching. To be able to carry out this calculation, concepts and algebra had to be introduced.

In the first part of the thesis Feynman diagrams were introduced as means to visualize the perturbative series. External lines represent fermions, which are described by spinors in the theory. They interact with the field in vertices and the internal lines describe the propagation of the corresponding boson. In this particular case we started with an electron-positron collision, which then interacted with the electromagnetic and weak fields, creating a photon or Z-boson, which then splits into a top, anti-top quark pair.

The vertices and propagators are read from the corresponding lagrangians. First the lagrangian for quantum electrodynamics was introduced which, later on also the lagrangian of the electroweak theory. Electromagnetism and the weak interaction are unified in the GWS theory. This theory is unique in that it distinguishes between left and right-handed states.

After lengthy calculations a neat formula was derived for the probability of the process to occur. The coefficients that appear during calculation were gathered in a matrix, making it simple to find the scattering angle dependence of this process.

9 Tänuavaldused

Soovin avaldada sügavaid tänuavaldusi juhendajale Stefan Grootele. Tema jätkuv juhendamine ja tugi on olnud ülimalt motiveeriv ja julgustav.

10 Kasutatud kirjandus

Viited

- [1] S. Weinberg, “A model of leptons,” *Physical Review Letters* **19**, 1264 (1967).
- [2] D. Kaiser, “Richard Feynman’s Diagrams,” *American Scientist* **93**, 156.
- [3] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory* (Addison-Wesley Publishing Company, 1997).
- [4] W. Pauli, “Relativistic field theories of elementary particles,” *Reviews of Modern Physics* **13**, 203 (1941).
- [5] G. Kane, *Modern elementary particle physics*, vol. 2 (Addison-Wesley Reading, 1987).
- [6] G. Bertone, D. Hooper, and J. Silk, “Particle dark matter: evidence, candidates and constraints,” *Physics Reports* **405**, 279–390 (2005).
- [7] H. Murayama, “The origin of neutrino mass,” *Physics World* (2002).
<http://hitoshi.berkeley.edu/neutrino/PhysicsWorld.pdf>.
- [8] A. Brandenburg, M. Flesch, and P. Uwer, “Spin density matrix of top quark pairs produced in electron-positron annihilation including qcd radiative corrections,” *Phys. Rev. D* **59**, 014001 (1998).
- [9] J. Beringer *et al.*, “Review of particle physics,” *Phys. Rev. D* **86**, 010001 (2012).
- [10] J. Erler and P. Langacker, “Electroweak model and constraints on new physics,” arXiv preprint hep-ph/0407097 (2004).
- [11] A. Einstein, *The meaning of relativity* (Psychology Press, 2003).
- [12] P. A. Dirac, “The quantum theory of the electron,” *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character* **117**, 610–624 (1928).

- [13] F. Halzen and A. D. Martin, “Quarks and leptons: an introductory course in modern particle physics,” (1984).
- [14] D. Tong, “Lectures on quantum field theory,” (2012).
<http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/qft/prelim.pdf>.
- [15] B. Q. de Wit, “Field theory in particle physics,” (2009).
<http://www.staff.science.uu.nl/wit00103/ftip/Ch11.pdf>.
- [16] M. Boers, “Neutrino masses,” (2011).
- [17] P. N. Beisert, *Quantum Field Theory I*.
<http://www.itp.phys.ethz.ch/research/qftstrings/archive/12HSQFT1/QFT1HS12Notes.pdf>.
- [18] P. W. Higgs, “Broken symmetries and the masses of gauge bosons,” *Phys. Rev. Lett.* **13**, 508–509 (1964).
- [19] S. L. Glashow, “Partial-symmetries of weak interactions,” *Nuclear Physics* **22**, 579–588 (1961).
- [20] S. Groote, M. Tung *et al.*, “Polar angle dependence of the alignment polarization of quarks produced in e^+e^- -annihilation,” arXiv preprint hep-ph/9601313 (1996).

11 Lisad

Lisa 1. Jälgedega arvutamine

$$\text{tr}(\mathbb{1}_4) = 4$$

$$\text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}$$

$$\text{tr}(\gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu) = 0$$

$$\text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = 4(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho})$$

$$\text{tr}(\gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = -4i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$$

$$\text{tr}(\text{paaritu arv } \gamma\text{-sid}) = 0$$

$$\text{tr}(\gamma_5 \cdot \text{paaritu arv } \gamma\text{-sid}) = 0$$

Lisa 2. Kordajad $g_{(\alpha\alpha')(\beta\beta')}$, kus $(\alpha\alpha'), (\beta\beta') \in \{VV, VA, AV, AA\}$

$$g_{(VV)(VV)} = (v_e v_t)^2 |\chi_Z|^2 + (Q_e Q_t)^2 + 2Q_e Q_t v_e v_t \text{Re} \chi_Z$$

$$g_{(VV)(VA)} = v_e^2 v_t a_t |\chi_Z|^2 + Q_e Q_t v_e a_t \chi_Z$$

$$g_{(VV)(AV)} = v_e^2 a_t v_t |\chi_Z|^2 + Q_e Q_t a_t v_e \chi_Z^*$$

$$g_{(VV)(AA)} = (v_e a_t)^2 |\chi_Z|^2$$

$$g_{(VA)(VV)} = v_e a_e v_t^2 |\chi_Z|^2 + Q_e Q_t a_e v_t \chi_Z$$

$$g_{(VA)(VA)} = v_e a_e v_t a_t |\chi_Z|^2 + Q_e Q_t a_e a_t \chi_Z$$

$$g_{(VA)(AV)} = v_e a_e a_t v_t |\chi_Z|^2$$

$$g_{(VA)(AA)} = v_e a_e a_t^2 |\chi_Z|^2$$

$$g_{(AV)(VV)} = a_e v_e v_t^2 |\chi_Z|^2 + Q_e Q_t a_e v_t \chi_Z^*$$

$$g_{(AV)(VA)} = a_e v_e v_t a_t |\chi_Z|^2$$

$$g_{(AV)(AV)} = a_e v_e a_t v_t |\chi_Z|^2 + Q_e Q_t a_e a_t \chi_Z^*$$

$$g_{(AV)(AA)} = a_e v_e a_t^2 |\chi_Z|^2$$

$$g_{(AA)(VV)} = a_e^2 v_t^2 |\chi_Z|^2$$

$$g_{(AA)(VA)} = a_e^2 v_t a_t |\chi_Z|^2$$

$$g_{(AA)(AV)} = a_e^2 a_t v_t |\chi_Z|^2$$

$$g_{(AA)(AA)} = a_e^2 a_t^2 |\chi_Z|^2$$

Lisa 3. Kordaja $g_{i,j}$, kus $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$

$$g_{11} = (Q_e Q_t)^2 + 2Q_e Q_t v_e v_t \operatorname{Re} \chi_Z + (v_e^2 + a_e^2)(v_t^2 + a_t^2) |\chi_Z|^2$$

$$g_{12} = (Q_e Q_t)^2 + 2Q_e Q_t v_e v_t \operatorname{Re} \chi_Z + (v_e^2 + a_e^2)(v_t^2 - a_t^2) |\chi_Z|^2$$

$$g_{13} = -2Q_e Q_t v_e a_t \operatorname{Im} \chi_Z$$

$$g_{14} = 2Q_e Q_t v_e a_t \operatorname{Re} \chi_Z + 2(v_e^2 + a_e^2) v_t a_t |\chi_Z|^2$$

$$g_{21} = (Q_e Q_t)^2 + 2Q_e Q_t v_e v_t \operatorname{Re} \chi_Z + (v_e^2 - a_e^2)(v_t^2 + a_t^2) |\chi_Z|^2$$

$$g_{22} = (Q_e Q_t)^2 + 2Q_e Q_t v_e v_t \operatorname{Re} \chi_Z + (v_e^2 - a_e^2)(v_t^2 - a_t^2) |\chi_Z|^2$$

$$g_{23} = -2Q_e Q_t v_e a_t \operatorname{Im} \chi_Z$$

$$g_{24} = 2Q_e Q_t v_e a_t \operatorname{Re} \chi_Z + 2(v_e^2 - a_e^2) v_t a_t |\chi_Z|^2$$

$$g_{31} = -2Q_e Q_t a_e v_t \operatorname{Im} \chi_Z$$

$$g_{32} = -2Q_e Q_t a_e v_t \operatorname{Im} \chi_Z$$

$$g_{33} = -2Q_e Q_t a_e a_t \operatorname{Re} \chi_Z$$

$$g_{34} = -2Q_e Q_t a_e v_t \operatorname{Im} \chi_Z$$

$$g_{41} = 2Q_e Q_t a_e v_t \operatorname{Re} \chi_Z + 2a_e v_e (a_t^2 + v_t^2) |\chi_Z|^2$$

$$g_{42} = 2Q_e Q_t a_e v_t \operatorname{Re} \chi_Z + 2a_e v_e (v_t^2 - a_t^2) |\chi_Z|^2$$

$$g_{43} = -2Q_e Q_t a_e a_t \operatorname{Im} \chi_Z$$

$$g_{44} = 2Q_e Q_t a_e a_t \operatorname{Re} \chi_Z + a_e v_e a_t v_t |\chi_Z|^2$$

