ТАРТУСКИЙ ГОС.
УНИВЕРСИТЕТ
350

Г.Вайникко

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННЫХ ЗАДАЧ В ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

1982

ТАРТУСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Кафедра вычислительной математики

Г.Вайникко

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННЫХ ЗАДАЧ В ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования Эстонской ССР в качестве учебного пособия для студентов математического факультета

ТАРТУ 1982

Утверждено на заседании совета математического факультета ТГУ 4 октября 1982 года.

Предисловие

Настоящее издание представляет собой учебное пособие по главе спецкурса "Некорректно поставленные задачи", который в Тартуском госуниверситете читается для IУ курса математиков-прикладников. Оно полезно и для аспирантов и специалистов в данной области, так как охватывает свежие материалы, разбросанные в журнальной литературе и тезисах конференций.

С содержанием работы можно ознакомиться по оглавлению. Дадим краткое резюме. Мы с единой точки зрения исследуем широкий класс методов регуляризации линейных некорректно поставленных задач в гильбертовых пространствах. Сюда включаются методы Тихонова, Лаврентьева, разные итерационные схемы и пр. Много внимания уделяется принципу невязки выбора параметра регуляризации, а также оценкам погрешности приближенных решений. Выяснено, что выделенный класс методов имеет оптимальный порядок на классах истокопредставимых решений.

Рассмотрения проводятся в ситуации, когда неточно известен не только свободный член, но и оператор решаемого уравнения. Подобная ситуация наиболее естественна для приложений, ибо неточности в операторе неизбежны - они вызываются приближенностью математических моделей исследуемых явлений, а также дискретизацией задачи в стадии ее подготовки для решения на ЭВМ.

В основной текст мы включили минимум ссылок. Библиографические замечания см. в конце работы.

Оглавление

Введение

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННЫХ ЗАДАЧ

0.I. Корректно и некорректно поставленные задачи. Пусть E и F – метрические пространства, $A: E \to F$ оператор из E в F. Рассмотрим уравнение (задачу отыскания $u \in E$ по $f \in F$)

$$Au = f. \tag{0.I}$$

Задачу (0.I) принято называть корректно поставленной (по Адамару), если выполнены следующие три условия:

I. при любом $f \in F$ существует решение $u \in E$;

2. это решение единственно;

3. решение непрерывно зависит от правой части уравнения: из $f_n \to f$ (по метрике F) следует сходимость соответствующих решений $u_n \to u$ (по метрике E).

Если же нарушается любое из перечисленных трех условий, то задача (0.I) называется некорректно поставленной.

Другими словами, задача (0.I) поставлена корректно, если A имеет непрерывный обратный оператор $A^{-1}: F \to E$, и некорректно поставлена в противном случае.

Задача (0.I) называется условно корректно поставленной на множестве $\mathcal{M} \subseteq E$, или корректно поставленной на $\mathcal{M}$ по Тихонову, если выполнены следующие три условия:

I'. априори известно, что решение уравнения (0.I) существует и принадлежит $\mathcal{M}$, т.е. $f \in A\mathcal{M}$;

2'. решение единственно в $\mathcal{M}$, т.е. существует $A^{-1}: A\mathcal{M} \to \mathcal{M}$;

3'. если $f_n \to f$, $f_n, f \in A\mathcal{M}$, то $u_n = A^{-1}f_n \to A^{-1}f = u$.

При этом $\mathcal{M}$ называется классом корректности задачи (0.I).

Мы больше не будем затрагивать столь общих задач: наши основные рассмотрения (§§ I–7) касаются линейных уравнений в гильбертовых пространствах. Но пока примем, что E и F – банаховые пространства, а $A \in \mathcal{L}(E, F)$, т.е. A линейный непрерывный оператор из E в F. Линейная задача (0.I) называется существенно некорректно поставленной, если область значений

$$\mathcal{R}(A)=\{f\in F:\ f=Au,\ u\in E\}\subseteq F$$

оператора A незамкнута. Для такой задачи нарушены условия I и 3 определения корректной постановки. Задача (0.I) с невырожденным вполне непрерывным оператором поставлена существенно некорректно.

Типичными примерами (существенно) некорректно поставленных задач являются интегральные уравнения первого рода, рассматриваемые в пространстве $E=F=C[a,b]$ или $L^p(a,b)$, $p\geq 1$:

$$\int_a^b \mathcal{K}(t,s)u(s)ds=f(t) \quad \text{(уравнение Фредгольма I рода)},$$

$$\int_a^t \mathcal{K}(t,s)u(s)ds=f(t) \quad \text{(уравнение Вольтерра I рода)}$$

(на ядро накладываются любые условия, гарантирующие полную непрерывность соответствующего интегрального оператора). Дальнейшие примеры некорректно поставленных задач см. в [63, 35, 47, 22, 29].

Приведем один пример условию корректно поставленной задачи, имеющий отношение к основному материалу (§§ I-7). Пусть E, F – гильбертовы пространства, $A\in\mathcal{L}(E,F)$; обозначим $|A|=(A^*A)^{1/2}$ – это самосопряженный неотрицательный оператор в E (модуль оператора A). Оказывается, что задача (0.I) поставлена условно корректно на каждом множестве "истокопредставимых" элементов

$$\mathcal{M}_{p,\rho}=\{u\in E:\ u=|A|^p w,\ \|w\|\leq\rho\},\quad p>0,\ \rho>0.$$

Эти классы корректности, вообще говоря, некомпактны.

0.2. Понятие о регуляризаторе. Рассмотрим некорректно поставленную задачу (0.I), в которой $A\in\mathcal{L}(E,F)$, E, F – банаховы пространства. Как правило, правая часть этого уравнения известна неточно, т.е. вместо $f\in\mathcal{R}(A)$ в нашем распоряжении некоторое его приближение $f_\delta\in F$, $\|f_\delta-f\|\leq\delta$, где δ – малое положительное число, которое обычно известно. В ряде задач неточно известен и сам оператор A, вместо него в нашем распоряжении некоторое его приближение $A_\eta \in \mathcal{L}(E,F)$, $\|A_\eta - A\| \leq \eta$. Таким образом, вместо "точной" задачи (0.I) мы имеем задачу

$$A u = f_\delta \tag{0.2}$$

или задачу

$$A_\eta u = f_\delta. \tag{0.3}$$

"Точная" задача (0.I) разрешима, так как по предположению $f \in \mathcal{R}(A)$. Приближенные задачи (0.2) и (0.3) необязательно разрешимы, так как необязательно $f_\delta \in \mathcal{R}(A)$ или $f_\delta \in \mathcal{R}(A_\eta)$. Но даже если $f_\delta \in \mathcal{R}(A)$, соответственно $f_\delta \in \mathcal{R}(A_\eta)$, всё-равно решения этих уравнений нельзя принять за приближенные решения уравнения (0.I). Это связано с отсутствием непрерывной зависимости решения от правой части (нарушением условия 3 п. 0.I): сколь угодно малым изменениям f могут соответствовать сколь угодно большие изменения решения u уравнения (0.I).

Выход из положения дается построением регуляризатора задачи (0.I). Регуляризатор задачи (0.I) – это семейство отображений

$$\mathcal{R}_\delta : F \to E \quad (0<\delta\leq\delta_0),$$

таких что

$$\sup_{\substack{f_\delta \in F \\ \|f_\delta - f\|\leq\delta}} \operatorname{dist}(\mathcal{R}_\delta f_\delta, A^{-1}f) \to 0 \text{ при } \delta\to 0 \quad \forall f\in\mathcal{R}(A). \tag{0.4}$$

Здесь $A^{-1}f$ – полный прообраз элемента f, т.е. множество решений уравнения (0.I), а $\operatorname{dist}(\mathcal{R}_\delta f_\delta, A^{-1}f)$ – расстояние от элемента $\mathcal{R}_\delta f_\delta$ до указанного множества. Если нулевое подпространство (ядро)

$$\mathcal{N}(A) = \{u\in E : Au=0\}$$

оператора A тривиально, т.е. состоит только из нулевого элемента, то условие (0.4) можно записать и так:

$$\sup_{f_\delta\in F,\ \|f_\delta - Au\|\leq\delta} \|\mathcal{R}_\delta f_\delta - u\| \to 0 \text{ при } \delta\to 0 \quad \forall u\in E.$$

Регуляризатор позволяет в случае точно заданного оператора A в предельном процессе $\delta\to 0$ восстановить решение u при любом $f\in\mathcal{R}(A)$, известном приближенно $(\|f_\delta - f\|\leq\delta)$.

При достаточно малом $\delta > 0$ элемент $\mathcal{R}_\delta f_\delta$ будет хорошим приближением к точному решению u.

Задача (0.I) называется регуляризуемой, если для нее существует хоть один регуляризатор.

Рассмотрим теперь целый класс задач (0.I), определяемый некоторым множеством $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{L}(E,F)$ операторов A. Пусть $\mathfrak{A}' \subseteq \mathcal{L}(E,F)$ – некоторое множество, в котором могут меняться операторы A_η $(\|A_\eta - A\| \leq \eta)$. Назовем $(\mathfrak{A},\mathfrak{A}')$-регуляризатором семейство отображений

$$\mathcal{R}_{\delta,\eta} : F \times \mathfrak{A}' \to E \quad (0<\delta\leq\delta_0,\ 0<\eta\leq\eta_0),$$

обладающих свойством

$$\sup_{\substack{f_\delta \in F,\ A_\eta \in \mathfrak{A}' \\ \|f_\delta - f\| \leq \delta,\ \|A_\eta - A\| \leq \eta}} \operatorname{dist}\left(\mathcal{R}_{\delta,\eta}(f_\delta, A_\eta),\ A^{-1}f\right) \to 0 \text{ при } \delta\to 0,\ \eta\to 0 \quad \forall A \in \mathfrak{A} \quad \forall f \in \mathcal{R}(A). \tag{0.5}$$

Класс задач (0.I) называется $(\mathfrak{A},\mathfrak{A}')$-регуляризуемой, если существует хоть один $(\mathfrak{A},\mathfrak{A}')$-регуляризатор.

Если $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$ состоит только из одного оператора A, то определение $(\mathfrak{A},\mathfrak{A}')$-регуляризатора равносильно определению (0.4) регуляризатора задачи (0.I).

Оказывается, что задача (0.I) не всегда регуляризуема. Формулируемые ниже две теоремы дают некоторое представление о том, какие задачи регуляризуемы; их доказательства можно найти в специальной литературе (см. [55], а также [23, 24]).

Теорема 0.I. Пусть $\mathcal{N}(A) = 0$. Для регуляризуемости задачи (0.I) необходимо, а в случае сепарабельного пространства E и достаточно, чтобы

$$\|u\|_E \leq c \sup_{u^* \in A^*F^*,\ \|u^*\|=1} |\langle u, u^* \rangle| \quad \forall u \in E \quad (c = \mathrm{const}). \tag{0.6}$$

Здесь F^* – сопряженное к F пространство, $A^* \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$ –сопряженный к A оператор, $A^*F^* = \mathcal{R}(A^*) \subseteq E^*$; через $\langle u, u^* \rangle$ обозначено значение функционала $u^* \in E^*$ на элементе $u \in E$. Заметим, что при выполнении условия (0.6)

$$|||u||| := \sup_{u^* \in A^*F^*,\ \|u^*\|=1} |\langle u, u^* \rangle|$$

является нормой, эквивалентной норме пространства E.

Теорема 0.2. Для того, чтобы задача (0.I) была регуляризуемой при каждом $A\in\mathcal{L}(E,F)$, необходимо и достаточно, чтобы пространство E было квазирефлексивным, т.е.

$$\dim E^{**}/E<\infty.$$

Каждое рефлексивное пространство квазирефлексивно. Известны примеры квазирефлексивных нерефлексивных пространств, но эти примеры несколько искусственны.

Теорема 0.3. Пусть пространство E рефлексивно. Тогда существует $(\mathfrak{A},\mathfrak{A}')$-регуляризатор с $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}'=\mathcal{L}(E,F)$.

Набросок доказательства. Известно (см. [71]), что в рефлексивном банаховом пространстве существует эквивалентная норма, относительно которой E локально равномерно выпукло, т.е. из соотношений $\|u_n\|=\|u\|=1$, $\|u_n+u\|\to 2$ следует $\|u_n-u\|\to 0$. Такая норма обладает H-свойством, т.е. из слабой сходимости $u_n \rightharpoonup u$ и $\|u_n\|\to\|u\|$ следует $\|u_n-u\|\to 0$. Не ограничивая общности, можно с самого начала считать, что E локально равномерно выпукло и, значит, норма пространства E обладает H-свойством. Рассмотрим функционал А.Н.Тихонова

$$\Phi_\alpha(u)=\|A_\eta u-f_\delta\|^2+\alpha\|u\|^2,\quad \alpha>0,\ u\in E.$$

Минимизирующие последовательности этого функционала сильно сходятся к единственной точке минимума $u_\alpha\in E$ (см. [8]). Согласуем $\alpha=\alpha(\delta,\eta)$ с δ и η таким образом, что

$$\alpha\to 0,\ (\delta+\eta)^2/\alpha\to 0\quad \text{при } \delta\to 0,\ \eta\to 0,$$

и положим $\mathcal{R}_{\delta,\eta}(f_\delta,A_\eta)=u_{\alpha(\delta,\eta)}$. Стандартным образом доказывается (см. [8,69]), что если $f\in\mathcal{R}(A)$, $\|f_\delta-f\|\le\delta$, $\|A_\eta-A\|\le\eta$, то $u_{\alpha(\delta,\eta)}\to u_0$ при $\delta\to 0$, $\eta\to 0$, где $u_0\in A^{-1}f$ – нормальное решение (решение наименьшей нормы) уравнения (0.I). Это означает, что $\mathcal{R}_{\delta,\eta}$ является $(\mathfrak{A},\mathfrak{A}')$-регуляризатором с $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}'=\mathcal{L}(E,F)$.

Доказательство теоремы завершено.

0.3. Оптимальные и оптимальные по порядку методы. Продолжим изучение некорректно поставленной задачи (0.I), в которой $A\in\mathcal{L}(E,F)$, E,F – банаховы пространства. Различные методы решения задачи (0.I) будем сравнивать на некотором центрально-симметрическом ограниченном множестве $\mathcal{M} \subset E$ точных решений. При этом будем считать, что правая часть уравнения задана с точностью δ, а оператор A задан точно; случай приближенного оператора обсудим в конце пункта. Под методом решения уравнения (0.I) будем здесь понимать любое отображение $P: F \to E$ (такое несколько странное определение метода выгодно, чтобы сравнению подвергались, в частности, все "разумные" методы, не вникая в классификацию методов на "разумные" и "неразумные"). Точность метода P на множестве $\mathcal{M}$ охарактеризуем наибольшим возможным отклонением приближения Pf_δ от истинного решения $u \in \mathcal{M}$:

$$\Delta(\delta;\mathcal{M};P) = \sup_{\substack{u\in\mathcal{M},\, f_\delta\in F \\ \|f_\delta - Au\|\le\delta}} \|Pf_\delta - u\|. \qquad (0.7)$$

Метод P_δ называется <u>оптимальным</u> на $\mathcal{M}$, если

$$\Delta(\delta;\mathcal{M};P_\delta) = \inf_P \Delta(\delta;\mathcal{M};P) \quad (0<\delta\le\delta_0);$$

<u>ассимптотически оптимальным на</u> $\mathcal{M}$, если

$$\overline{\lim_{\delta\to 0}} \left[\Delta(\delta;\mathcal{M};P_\delta) / \inf_P \Delta(\delta;\mathcal{M};P)\right] = 1;$$

<u>методом оптимального порядка на</u> $\mathcal{M}$, если

$$\Delta(\delta;\mathcal{M};P_\delta) \le c \inf_P \Delta(\delta;\mathcal{M};P) \quad (0<\delta\le\delta_0), \quad c=const$$

(инфимум берется по всем методам).

<u>Теорема 0.4</u>. Для всякого метода P

$$\Delta(\delta;\mathcal{M};P) \ge \omega(\delta;\mathcal{M}), \qquad (0.8)$$

где

$$\omega(\delta;\mathcal{M}) = \sup_{u\in\mathcal{M},\, \|Au\|\le\delta} \|u\|. \qquad (0.9)$$

<u>Доказательство</u>[I]. Пусть $\varepsilon > 0$ сколь угодно мало. Возьмем такое $\bar{u} \in \mathcal{M}$, что $\|A\bar{u}\| \le \delta$, $\|\bar{u}\| \ge \omega(\delta;\mathcal{M}) - \varepsilon$. Ввиду центральной симметрии $\mathcal{M}$ также $-\bar{u} \in \mathcal{M}$, и в соответствии с (0.7) имеем

I) Теорема 0.4 имеется в [35]; см. также [60]. Мы рассматриваем более простую, чем в [35], ситуацию и снимаем некоторые второстепенные ограничения.

$$\Delta(\delta;\mathcal{M};P)\geq \max\Big\{\sup_{\substack{f_\delta\\ \|A\bar u-f_\delta\|\leq\delta}}\|Pf_\delta-\bar u\|,\ \sup_{\substack{f_\delta\\ \|A\bar u+f_\delta\|\leq\delta}}\|Pf_\delta+\bar u\|\Big\}.$$

Условие $\|A\bar u\|\leq\delta$ позволяет здесь положить $f_\delta=0$, что может привести только к уменьшению оценки:

$$\Delta(\delta;\mathcal{M};P)\geq \max\{\|P0-\bar u\|,\ \|P0+\bar u\|\}\geq\frac{1}{2}(\|P0-\bar u\|+$$
$$+\|P0+\bar u\|)\geq\frac{1}{2}\|(P0-\bar u)-(P0+\bar u)\|=\|\bar u\|\geq\omega(\delta;\mathcal{M})-\varepsilon.$$

Ввиду произвольности $\varepsilon>0$ это и доказывает оценку (0.8).

Теорема доказана.

Найдем функцию $\omega(\delta;\mathcal{M})$ в случае, когда E и F гильбертовы пространства, а $\mathcal{M}$ имеет вид

$$\mathcal{M}_{p,\rho}=\{u\in E:\ u=|A|^p w,\ \|w\|\leq\rho\},\quad p>0,\ \rho>0,\qquad (0.10)$$

где $|A|=(A^*A)^{1/2}\in\mathcal{L}(E,E)$. Имеем

$$\omega(\delta;\mathcal{M}_{p,\rho})=\sup_{u=|A|^p w,\ \|w\|\leq\rho,\ \|A|A|^p w\|\leq\delta}\|u\|=\sup_{\substack{\|w\|\leq\rho\\ \||A|^{p+1}w\|\leq\delta}}\||A|^p w\|.$$

В силу неравенства моментов[I)]

$$\||A|^p w\|\leq\||A|^{p+1}w\|^{p/(p+1)}\|w\|^{1/(p+1)}$$

получаем

$$\omega(\delta;\mathcal{M}_{p,\rho})\leq\rho^{1/(p+1)}\delta^{p/(p+1)}.$$

Неравенство моментов превращается в равенство на собственных элементах. Если $|A|w=\lambda w$, $\|w\|=\rho$, то при $\lambda=(\delta/\rho)^{1/(p+1)}$ имеем $\||A|^{p+1}w\|=\lambda^{p+1}\|w\|=\delta$, и

$$\omega(\delta;\mathcal{M}_{p,\rho})=\rho^{1/(p+1)}\delta^{p/(p+1)}.\qquad (0.11)$$

I) Если B – самосопряженный неотрицательный (необязательно ограниченный) оператор в гильбертовом пространстве, то при любых p и q $(0<p<q)$ и любом u из области определения оператора B^q имеет место неравенство (см. [42])

$$\|B^p u\|\leq\|B^q u\|^{p/q}\|u\|^{1-(p/q)}.$$

Это простейший вариант неравенства моментов; его можно также назвать интерполяционным неравенством.

Если $\lambda = (\delta/\rho)^{1/(p+1)}$ принадлежит не точечному, а непрерывному спектру оператора $|A|$, то существует такая последовательность w_n, что $\|w_n\| = \rho$, $|A| w_n - \lambda w_n \to 0$ при $n \to \infty$, и мы снова приходим к равенству (0.II). В итоге, для выполнения равенства (0.II) достаточно, чтобы $(\delta/\rho)^{1/(p+1)} \in \sigma(|A|)$. Подчеркнем, что для существенно некорректной задачи нуль является точкой сгущение спектра $\sigma(|A|)$ оператора $|A|$.

В сочетании с теоремой 0.4 получаем следующий результат: для всякого метода решения задачи (0.I) имеет место неравенство

$$\Delta(\delta; \mathcal{M}_{p,\rho}; P) \geq \rho^{1/(p+1)} \delta^{p/(p+1)}, \tag{0.I2}$$

по крайней мере, при тех δ, при которых $(\delta/\rho)^{1/(p+1)} \in \sigma(|A|)$.

Если для некоторого метода удается установить

$$\Delta(\delta; \mathcal{M}_{p,\rho}; P) \leq c\, \rho^{1/(p+1)} \delta^{p/(p+1)},$$

то такой метод будет автоматически методом оптимального порядка на $\mathcal{M}_{p,\rho}$ (оптимальным методом, если $c = 1$).

Рассмотрим теперь случай, когда приближенно заданы правая часть и оператор $A \in \mathcal{L}(E, F)$ уравнения (0.I). Под методом решения уравнения (0.I) в таком случае будем понимать любое отображение $P: F \times \mathcal{L}(E, F) \to E$, сопоставляющее правой части f_δ $(\|f_\delta - f\| \leq \delta)$ и оператору A_η $(\|A_\eta - A\| \leq \eta)$ элемент $P(f_\delta, A_\eta) \in E$, который принимается за приближенное решение задачи (0.I). Точность метода P на центрально-симметрическом ограниченном множестве $\mathcal{M} \subset E$ охарактеризуем наибольшим отклонением

$$\Delta(\delta, \eta; \mathcal{M}; P) = \sup_{\substack{u, f_\delta, A \\ u \in \mathcal{M}, \|Au - f_\delta\| \leq \delta, \|A - A_\eta\| \leq \eta}} \|P(f_\delta, A_\eta) - u\|.$$

Затем, как и выше, определим понятия оптимального и оптимального по порядку метода.

В случае, когда E и F – гильбертовы пространства, а $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{p,\rho}$ – множество (0.I0), можно опять показать (см. [35]), что для любого метода P

$$\Delta(\delta, \eta; \mathcal{M}_{p,\rho}; P) \geq c' \rho^{1/(p+1)} (\delta + \eta)^{p/(p+1)}, \quad c' = const > 0. \tag{0.I3}$$

Если для некоторого метода удается установить обратное неравенство

$$\Delta(\delta,\eta;\mathcal{M}_{p,\rho};P)\le c_{p,\rho}(\delta+\eta)^{p/(p+1)}\quad(0<\delta\le\delta_0,\ 0<\eta\le\eta_0),$$

то такой метод будет методом оптимального порядка.

Оценки (0.12) и (0.13) распространяются на множества вида

$$\mathcal{M}_{p,\rho,u_0}=\{u\in E:\ u-u_0=|A|^p w,\ \|w\|\le\rho\},\ p>0,\rho>0,u_0\in E.$$

§ 1. ПОСТРОЕНИЕ КЛАССА МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННЫХ ЗАДАЧ

1.1. Решаемая задача. На протяжении всего дальнейшего E и F будут гильбертовыми пространствами. Нашей целью будет изучение класса методов решения уравнения

$$Au=f, \tag{1.1}$$

где A – линейный непрерывный оператор из E в F. Нулевое подпространство

$$\mathcal{N}(A)=\{u\in E:\ Au=0\},$$

вообще говоря, нетривиально; область значений $\mathcal{R}(A)=AE$, вообще говоря, незамкнута, т.е. задача (1.1) существенно некорректно поставлена.

Обычно предполагаем, что $f\in\mathcal{R}(A)$, а иногда, что $Qf\in\mathcal{R}(A)$, где Q – ортопроектор в F, проектирующий на $\overline{\mathcal{R}(A)}$, замыкание области значений оператора A. В последнем случае уравнение (1.1) разрешимо в смысле наименьших квадратов. Решение в смысле наименьших квадратов – это решение экстремальной задачи

$$\|Au-f\|^2\mapsto\min$$

в E; нетрудно видеть, что решения в смысле наименьших квадратов совпадают с решениями уравнений $Au=Qf$ и $A^*Au=A^*f$, где $A^*\in\mathcal{L}(F,E)$ – сопряженный к A оператор. Решения уравнения (1.1) являются решениями и в смысле наименьших квадратов. Обратное не всегда верно, но если задача (1.1) разрешима, т.е. если $f\in\mathcal{R}(A)$, то решения в смысле наименьших квадратов являются решениями и в обычном смысле.

Вместо точного f в нашем распоряжении, как правило, лишь некоторое приближение $f_\delta\in F$,

$$\|f_\delta - f\| \le \delta; \qquad (1.2)$$

оператор $A \in \mathcal{L}(E,F)$ тоже может быть известен лишь приближенно, вместо него в вычислениях используется некоторое приближение $A_\eta \in \mathcal{L}(E,F)$,

$$\|A_\eta - A\| \le \eta. \qquad (1.3)$$

Здесь δ и η – малые положительные числа, $0<\delta\le\delta_0$, $0<\eta\le\eta_0$.

1.2. <u>Класс методов для задачи с самосопряженным неотрицательным оператором</u>. Рассмотрим случай $E=F$, $A=A^*\geqslant 0$, $A_\eta = A_\eta^* \geqslant 0$.

Пусть $\{g_r\}_{r\in(0,\infty)}$ – некоторое однопараметрическое семейство вещественно- или комплекснозначных функций, определенных и измеримых по Борелю[1)] на некотором отрезке $[0,a]$,

$$\|A_\eta\| \le a \quad (0<\eta\le\eta_0). \qquad (1.4)$$

На эти функции наложим два условия:

$$\sup_{0\le\lambda\le a} |g_r(\lambda)| \le \gamma r \qquad (r>0), \qquad (1.5)$$

$$\sup_{0\le\lambda\le a} \lambda^p |1-\lambda g_r(\lambda)| \le \gamma_p r^{-p} \quad (r>0,\ 0\le p\le p_0), \qquad (1.6)$$

где γ и γ_p – некоторые независящие от r постоянные, $p_0>0$.

Поскольку $\sigma(A_\eta)\subseteq[0,a]$, то можно строить оператор[2)]

---

1) Напомним определения (см. [39]). Функция $g:[0,a]\to R$ <u>измерима по Борелю</u>, если при любом $c\in R$ множество $\{\lambda: g(\lambda)\le c\}\subseteq R$ принадлежит σ-алгебре борелевых множеств, т.е. наименьшей σ-алгебре, содержащей все замкнутые подмножества R. Функция $g:[0,a]\to C$ измерима по Борелю, если ее вещественная и мнимая части измеримы по Борелю.

Непрерывные и кусочно-непрерывные функции измеримы по Борелю.

2) Напомним определение $g(A)$ в случае вполне непрерывного самосопряженного оператора $A\in\mathcal{L}(E,E)$. Пусть λ_j и φ_j $(j=1,2,\ldots)$ – собственные значения и собственные векторы оператора A, причем $\{\varphi_j\}$ образует ортонормальный базис E. Тогда для любой ограниченной функции $g:[0,a]\to C$, $a\geqslant\|A\|$, оператор $g(A)=\mathcal{L}(E,E)$ можно определить формулой

$$g(A)u = \sum_j g(\lambda_j)(u,\varphi_j)\varphi_j \qquad \left(u = \sum_j (u,\varphi_j)\varphi_j \right).$$

$$g_\tau(A_\eta) = \int_0^a g_\tau(\lambda)\, d P_\eta(\lambda),$$

где $P_\eta(\lambda)$ – спектральное семейство проекторов (разложение единицы) оператора A_η (см. [37] или [50]; случай разрывной измеримой функции $g_\tau : [0,a] \to C$ рассмотрен в [5]). Измеримость g_τ по Борелю обеспечивает ее измеримость относительно всевозможных мер вида $d(P_\eta(\lambda)u, v)$, $u, v \in E$, $A_\eta = A_\eta^* \geqslant 0$, $\|A_\eta\| \leqslant a$.

В качестве приближенного решения уравнения (I.I) примем элемент

$$u_\tau = (I - A_\eta g_\tau(A_\eta))u_0 + g_\tau(A_\eta) f_\delta \quad (\tau > 0), \qquad (I.7)$$

где I – единичный оператор, $u_0 \in E$ – некоторое априорно известное начальное приближение к решению уравнения (I.I); можно положить $u_0 = 0$, и приближение u_τ тогда примет вид $u_\tau = g_\tau(A_\eta) f_\delta$. Отсюда, между прочим, можно понять, что функция $g_\tau(\lambda)$ в каком-то смысле должна аппроксимировать функцию $1/\lambda$, соответствующую оператору A_η^{-1}. Количественная характеристика близости этих функций как раз дается условиями (I.5) и (I.6). При возрастании τ функция g_τ приближается к $1/\lambda$, оставаясь, однако ограниченной при каждом τ.

Параметр τ в приближении (I.7) тем или иным образом согласуется с уровнями погрешности δ и η правой части и оператора, так что в действительности $\tau = \tau(\delta, \eta)$. О способах согласования будет сказано позже (§§ 4-7).

I.3. Класс методов в случае необязательно неотрицательных операторов. Теперь рассмотрим случай, когда по-прежнему $E = F$, $A = A^*$, $A_\eta = A_\eta^*$, но откажемся от условия неотрицательности операторов A и A_η.

Пусть $\{g_\tau\}_{\tau \in (0,\infty)}$ – однопараметрическое семейство вещественно- или комплекснозначных функций, определенных и измеримых по Борелю на некотором отрезке $[-a_0, a]$, $a_0 \geqslant 0$, $a > 0$, таком что

$$\sigma(A_\eta) \subseteq [-a_0, a] \quad (0 < \eta \leqslant \eta_0). \qquad (I.8)$$

Введем аналоги условий (I.5) и (I.6):

$$\sup_{-a_0 \le \lambda \le a} |g_r(\lambda)| \le \gamma r \quad (r>0), \tag{I.9}$$

$$\sup_{-a_0 \le \lambda \le a} |\lambda|^p |1-\lambda g_r(\lambda)| \le \gamma_p r^{-p} \quad (r>0,\ 0\le p\le p_0). \tag{I.I0}$$

Приближенное решение уравнения (I.I) строим опять по формуле (I.7).

I.4. <u>Класс методов для несамосопряженной задачи</u>. От общей задачи (I.I) всегда можно перейти к самосопряженной задаче

$$A^*A\,u = A^*f \tag{I.II}$$

с неотрицательным оператором A^*A. Неотрицательным является и его аппроксимация $A_\eta^*A_\eta$. Поэтому для решения задачи (I.II) можно применить методы п. I.2. Условие (I.4) теперь примет вид

$$\|A_\eta\|^2 \le a \quad (0<\eta\le\eta_0); \tag{I.I2}$$

условия (I.5) и (I.6) сохраняют свою форму, а приближение (I.7) теперь запишется так:

$$u_r = (I - A_\eta^*A_\eta\, g_r(A_\eta^*A_\eta))u_0 + g_r(A_\eta^*A_\eta)A_\eta^* f_\delta\,. \tag{I.I3}$$

I.5. <u>Комментарии, замечания, дополнения</u>. I. Как будет ясно из дальнейшего изложения, одной из существенных характеристик приближенных методов (I.7) и (I.I3) является число p_0 в неравенствах (I.6) и (I.I0). Наибольшее p_0, при которых (I.6), соответственно, (I.I0) имеет место, назовем <u>квалификацией</u> метода. Квалификация может быть и бесконечной.

2. При изучении свойств методов (I.7) представляют интерес наименьшие значения постоянных γ и γ_p в (I.5) и (I.6), а также их асимптотические значения $\hat\gamma$ и $\hat\gamma_p$:

$$\gamma = \sup_{r>0}\{r^{-1}\sup_{0\le\lambda\le a}|g_r(\lambda)|\},$$

$$\hat\gamma = \overline{\lim_{r\to\infty}}\{r^{-1}\sup_{0\le\lambda\le a}|g_r(\lambda)|\},$$

$$\gamma_p = \sup_{r>0}\{r^p\sup_{0\le\lambda\le a}\lambda^p|1-\lambda g_r(\lambda)|\},$$

$$\hat\gamma_p = \overline{\lim_{r\to\infty}}\{r^p\sup_{0\le\lambda\le a}\lambda^p|1-\lambda g_r(\lambda)|\}.$$

В случае условий (I.9) и (I.10) они определяются аналогично. Для методов (I.13) вместо γ и $\hat{\gamma}$ будут играть важную роль

$$\gamma_* = \sup_{r>0} \{ r^{-1/2} \sup_{0\le\lambda\le a} \lambda^{1/2} |g_r(\lambda)| \},$$

$$\hat{\gamma}_* = \overline{\lim_{r\to\infty}} \{ r^{-1/2} \sup_{0\le\lambda\le a} \lambda^{1/2} |g_r(\lambda)| \}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\gamma_* \le [\gamma(1+\gamma_0)]^{1/2}, \quad \hat{\gamma}_* \le [\hat{\gamma}(1+\hat{\gamma}_0)]^{1/2},$$

но эти оценки, вообще говоря, грубы.

3. Методами (I.7) и (I.13) можно решать уравнения и с неограниченными замкнутыми операторами, если g_r определены и измеримы по Борелю на $[0,\infty)$, а условия (I.5) и (I.6) выполнены с $a=\infty$.

4. Пусть $E=F$, $A=A^*\ge 0$, $A_\eta = A_\eta^*$. Из (I.3) тогда следует, что $A_\eta \ge -\eta I$. Для $A_\eta' = A_\eta + \eta I$ имеем $A_\eta' \ge 0$, $\|A_\eta' - A\| \le 2\eta$. Таким образом, в случае неотрицательного A легко достигнуть неотрицательности операторов A_η некоторым их огрублением. Но это огрубление можно и обойти, если функции g_r определены и измеримы по Борелю, каждая на своем отрезке $[\alpha r^{-1}, a]$, $\alpha>0$, $a \ge \|A_\eta\|$ $(0<\eta\le\eta_0)$. В дополнение к (I.5) введем условие

$$\sup_{\alpha r^{-1}\le\lambda\le 0} |g_r(\lambda)| \le \gamma' r \qquad (r>0); \tag{I.14}$$

форму условия (I.6) сохраним, но заметим что в силу (I.14)

$$\sup_{\alpha r^{-1}\le\lambda\le 0} |\lambda|^p |1-\lambda g_r(\lambda)| \le \gamma_p' r^{-p}, \quad \gamma_p' = (1+\alpha\gamma')\alpha^p \quad (r>0,\ p\ge 0). \tag{I.14'}$$

Приближенное решение по-прежнему строим по формуле (I.7); его можно строить для $r\in(0, \alpha/\eta]$.

5. Из (I.6) следует, что

$$\mathrm{Re}\, g_r\left(\frac{\mu}{r}\right) \ge (1-\gamma_p \mu^{-p}) \frac{r}{\mu} \qquad (\mu>0),$$

и зафиксировав достаточно большое μ, получаем

$$k_r \equiv \sup_{0\le\lambda\le a} |g_r(\lambda)| \ge \beta r, \quad \beta = const > 0 \quad (r>0).$$

Таким образом, условия (I.5) и (I.6) соответствуют такой параметризации семейства $\{g_r\}$, что

$$\beta r \le k_r \le \gamma r \quad (r>0), \qquad 0<\beta\le\gamma.$$

Отметим, что вместо (I.5) и (I.6) в основу всех рассмотрений можно было бы принять формально более общие условия

$$k_r \uparrow \infty \quad \text{при} \quad r \to \infty,$$

$$\sup_{0\le\lambda\le a} \lambda^p |1-\lambda g_r(\lambda)| \le \gamma_p k_r^{-p} \quad (r>0, \; 0\le p\le p_0).$$

Однако, после перепараметризации семейства ($g_r = \tilde{g}_{k_r}$) эти условия перейдут в (I.5) и (I.6) относительно $\tilde{g}_r$.

6. Из выполнения (I.6) при $p=0$ и $p=p_0$ вытекает его выполнение при всех промежуточных p, причем

$$\gamma_p \le \gamma_0^{1-(p/p_0)} \gamma_{p_0}^{p/p_0} \quad (0\le p\le p_0).$$

7. Если условия (I.5) и (I.6) выполняются для некоторых $g_r : [0,a] \to \mathbb{C}$, то эти условия выполняются и для вещественных частей $\mathrm{Re}\, g_r$. При переходе от g_r к $\mathrm{Re}\, g_r$ постоянные γ и γ_p, вообще говоря, уменьшаются и может даже произойти повышение квалификации. Тем не менее, иногда полезно привлекать комплексно-значные функции g_r.

I.6. <u>Другие возможности симметризации задачи.</u> I. Для несамосопряженной задачи (I.I) можно привлечь двойственную к (I.II) симметризацию

$$AA^*v = f \qquad (u = A^*v)$$

и применить к ней методы п. I.2:

$$v_r = (I - A_\eta A_\eta^* g_r(A_\eta A_\eta^*))v_0 + g_r(A_\eta A_\eta^*) f_\delta, \quad u_r = A_\eta^* v_r. \qquad (I.15)$$

Но как следует из формулы (6.3), получаемое приближение идентично приближению (I.I3) с $u_0 = A_\eta^* v_0$. Тем не менее, из вычислений с v_r можно извлечь практическую пользу: например, если $E = R^n$, $F = R^m$, $m<n$, то $A_\eta A_\eta^*$ является матрицей порядка m, тогда как $A_\eta^* A_\eta$ – матрица порядка n.

2. Теоретический интерес представляет еще одна возможность симметризации задачи (I.I), основанная на полярном разложении [I] оператора $A = \mathcal{U}|A|$. Записав уравнение (I.I)

I) Полярное разложение будет нами и впредь неоднократно использовано. Сформулируем основные относящиеся сюда факты в виде $\mathcal{U}|A|u=f$ и применив к обеим частям оператор $\mathcal{U}^*$, получаем задачу

$$|A|\,u=\mathcal{U}^* f$$

с самосопряженным неотрицательным оператором $|A|$. К ней применимы методы п. I.2:

$$u_r=(I-|A_\eta|\,g_r(|A_\eta|))u_0+g_r(|A_\eta|)\mathcal{U}_\eta^* f_\delta,\qquad A_\eta=\mathcal{U}_\eta|A_\eta|.$$

К сожалению, мы не располагаем хорошими оценками нормы $\|\,|A_\eta|-|A|\,\|$ (некоторая оценка имеется в (3.6), $p=1$), поэтому рассматриваемая схема симметризации в теоретическом плане представляет интерес лишь в случае точно заданного оператора $A_\eta=A$. Приближение u_r примет вид

$$u_r=(I-|A|\,g_r(|A|))u_0+g_r(|A|)\mathcal{U}^* f_\delta,\qquad A=\mathcal{U}|A|. \tag{I.16}$$

Практическое построение полярного разложения оператора является трудной задачей, и методы класса (I.16) практически реализуемы лишь в исключительных случаях (описание реализации одного метода см. в п. 2.4).

Привлечение методов типа (I.16) позволяет строить оптимальные методы для несамосопряженной задачи, если известны оптимальные методы для задачи самосопряженной. Непосредственно из определения оптимальности метода (см. п. 0.3) вытекает следующее утверждение: если для каждого самосопряженного неотрицательного оператора A метод

(доказательства можно найти в [38]). Для любого оператора $A\in\mathcal{L}(E,F)$, где E и F – гильбертовы пространства, имеют место так называемые полярные разложения

$$A=\mathcal{U}(A^*A)^{1/2}=(AA^*)^{1/2}\mathcal{U},\qquad A^*=\mathcal{U}^*(AA^*)^{1/2}=(A^*A)^{1/2}\mathcal{U}^*,$$

где $|A|=(A^*A)^{1/2}\in\mathcal{L}(E,E)$ и $|A^*|=(AA^*)^{1/2}\in\mathcal{L}(F,F)$ – самосопряженные неотрицательные операторы, а оператор $\mathcal{U}\in\mathcal{L}(E,F)$ и его сопряженный $\mathcal{U}^*\in\mathcal{L}(F,E)$ обладают свойствами

$$\|\mathcal{U}u\|=\|u\|\ \text{ для }\ u\in\overline{\mathcal{R}(A^*)}\subseteq E,\qquad \mathcal{U}u=0\ \text{ для }\ u\in\mathcal{R}(A^*)^{\perp}=\mathcal{N}(A)\subseteq E,$$
$$\|\mathcal{U}^*z\|=\|z\|\ \text{ для }\ z\in\overline{\mathcal{R}(A)}\subseteq F,\qquad \mathcal{U}^*z=0\ \text{ для }\ z\in\mathcal{R}(A)^{\perp}=\mathcal{N}(A^*)\subseteq F$$

(такие операторы называются <u>частичными изометриями</u>; ясно, что $\|\mathcal{U}\|=\|\mathcal{U}^*\|\le 1$). Операторы $P=\mathcal{U}^*\mathcal{U}$ и $Q=\mathcal{U}\mathcal{U}^*$ являются ортопроекторами, проектирующими E на $\overline{\mathcal{R}(A^*)}$, соответственно, F на $\overline{\mathcal{R}(A)}$.

$$u_r=(I-Ag_r(A))u_0+g_r(A)f_\delta, \quad r=r(\delta,p,\rho)$$

оптимален на множестве

$$\{u\in E:\quad u-u_0=A^p w,\ \|w\|\le\rho\},$$

то метод (I.16) при том же выборе параметра $r=r(\delta,p,\rho)$ оптимален на множестве

$$\{u\in E:\quad u-u_0=|A|^p w,\ \|w\|\le\rho\}$$

для любого оператора $A\in\mathcal{L}(E,F)$.

В п. 2.4 мы этим замечанием воспользуемся.

I.7. <u>Один способ построения семейства функций</u> g_r. Допустим, что измеримая по Борелю функция $g:[0,\infty)\to\mathbb{C}$ такова, что

$$\gamma\equiv\sup_{0\le\lambda<\infty}|g(\lambda)|<\infty,\quad \gamma_p\equiv\sup_{0\le\lambda<\infty}\lambda^p|1-\lambda g(\lambda)|<\infty\quad(0\le p\le p_0).$$

Тогда для семейства функций $g_r:[0,\infty)\to\mathbb{C}$, определенных по формуле

$$g_r(\lambda)=rg(r\lambda)\qquad(r>0,\ \lambda\ge0)$$

выполнены условия (I.5) и (I.6).

Действительно,

$$\sup_{0\le\lambda<\infty}|g_r(\lambda)|=r\sup_{0\le\lambda<\infty}|g(r\lambda)|=\gamma r\quad(r>0),$$

$$\sup_{0\le\lambda<\infty}\lambda^p|1-\lambda g_r(\lambda)|=\sup_{0\le\lambda<\infty}\lambda^p|1-\lambda rg(r\lambda)|=$$

$$=r^{-p}\sup_{0\le\lambda<\infty}(r\lambda)^p|1-r\lambda g(r\lambda)|=\gamma_p r^{-p}\quad(r>0,\ 0\le p\le p_0).$$

Аналогично, если функция $g:(-\infty,\infty)\to\mathbb{C}$ такова, что

$$\gamma\equiv\sup_{-\infty<\lambda<\infty}|g(\lambda)|<\infty,\quad \gamma_p\equiv\sup_{-\infty<\lambda<\infty}|\lambda|^p|1-\lambda g(\lambda)|<\infty\quad(0\le p\le p_0),$$

то для семейства функций

$$g_r(\lambda)=rg(r\lambda)\qquad(r>0,\ -\infty<\lambda<\infty)$$

выполнены условия (I.9) и (I.10) на $(-\infty,\infty)$.

I.8. <u>Повышение квалификации методов</u>. Каждому методу классов (I.7) и (I.13) можно сопоставить его итерированный (конечное число раз) вариант. При итерировании квалификация метода повышается в столько раз, сколько итераций проделывается.

Рассмотрим для конкретности метод (I.7) в условиях (I.4)-(I.6). Пусть его квалификация $p_0 < \infty$. Зададим натуральное число $m \geq 1$ и по начальному приближению $u_{0,r} = u_0 \in E$ вычислим m итераций, построенных на основании формулы (I.7):

$$u_{n,r} = (I - A_\eta g_r(A_\eta))u_{n-1,r} + g_r(A_\eta)f_\delta, \quad n=1,\dots,m. \tag{I.17}$$

Тогда $u_{m,r}$ представим формулой вида (I.7):

$$u_{m,r} = (I - A_\eta g_{m,r}(A_\eta))u_0 + g_{m,r}(A_\eta)f_\delta,$$

причем функция

$$g_{m,r}(\lambda) = \sum_{j=0}^{m-1}(1-\lambda g_r(\lambda))^j g_r(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\left[1-(1-\lambda g_r(\lambda))^m\right] \tag{I.18}$$

удовлетворяет условиями (I.5) и (I.6) при $0 \leq p \leq m p_0$. Действительно,

$$\sup_{0\leq\lambda\leq a}|g_{m,r}(\lambda)| \leq \sum_{j=0}^{m-1}\gamma_0^j\gamma r = \bar\gamma r \quad (r>0),$$

$$\sup_{0\leq\lambda\leq a}\lambda^p|1-\lambda g_{m,r}(\lambda)| = \sup_{0\leq\lambda\leq a}\lambda^p|1-\lambda g_r(\lambda)|^m =$$

$$= \left[\sup_{0\leq\lambda\leq a}\lambda^{p/m}|1-\lambda g_r(\lambda)|\right]^m \leq (\gamma_{p/m})^m r^{-p} \quad (r>0,\ 0\leq p\leq m p_0).$$

Укажем еще одну форму записи итераций (I.17):

$$u_{n,r} = u_{n-1,r} - C_{r,\eta}(A_\eta u_{n-1,r} - f_\delta), \quad n=1,\dots,m; \quad C_{r,\eta} = g_r(A_\eta).$$

Аналогичным образом можно повысить квалификацию метода (I.7) в условиях (I.8)-(I.10), а также метода (I.13) в условиях (I.5), (I.6), (I.12).

I.9. <u>Класс итерационных методов</u>. Рассмотрим случай $E = F$, $A = A^* \geq 0$, $A_\eta = A_\eta^* \geq 0$. Пусть $g: [0,a] \to R$ с $a \geq \|A_\eta\|$ $(0 < \eta \leq \eta_0)$ – непрерывная функция, такая что

$$0 < g(\lambda) < \frac{2}{\lambda} \quad \text{при} \quad 0 \leq \lambda \leq a. \tag{I.19}$$

Построим итерационную схему

$$u_n = u_{n-1} - C_\eta(A_\eta u_{n-1} - f_\delta), \quad n=1,2,\dots; \quad C_\eta = g(A_\eta). \tag{I.20}$$

За параметр r теперь примем номер итерации: $r = n$.

По индукции легко проверить, что

$$u_n = (I - A_\eta g(A_\eta))^n u_0 + \sum_{j=0}^{n-1} (I - A_\eta g(A_\eta))^j g(A_\eta) f_\delta,$$

и u_n представим формулой (I.7) с функцией $g_n : [0, a] \to R$,

$$g_n(\lambda) = \sum_{j=0}^{n-1} (1 - \lambda g(\lambda))^j g(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\left[1 - (1 - \lambda g(\lambda))^n\right], \quad n = 1, 2, \dots \tag{I.2I}$$

Последняя форма функции g_n позволяет ее при желании разпространить и на ненатуральные n.

Покажем, что для функций g_n выполнены условия (I.5) и (I.6) с $p_0 = \infty$. Прежде всего заметим, что $1 - \lambda g_n(\lambda) = (1 - \lambda g(\lambda))^n$. В силу условия (I.19)

$$\max_{0 \le \lambda \le a} |1 - \lambda g(\lambda)| = 1;$$

более того,

$$\vartheta_\varepsilon \equiv \max_{\varepsilon \le \lambda \le a} |1 - \lambda g(\lambda)| < 1 \qquad \forall \varepsilon > 0. \tag{I.22}$$

Из (I.2I) видно, что $|g_n(\lambda)| \le n g(\lambda)$, и условие (I.5) выполнено с постоянной $\gamma = \max\limits_{0 \le \lambda \le a} g(\lambda)$.

Далее, ввиду непрерывности и положительности функции $g(\lambda)$ существует постоянная $\beta > 0$, такая что

$$\beta \le g(\lambda) \le \gamma \quad (0 \le \lambda \le a).$$

На отрезке $[0, 1/\gamma]$ имеем[I)] $0 \le 1 - \lambda g(\lambda) \le 1 - \beta\lambda$ и

$$\lambda^p |1 - \lambda g(\lambda)|^n \le \lambda^p (1 - \beta\lambda)^n \le \left(\frac{p}{e\beta}\right)^p n^{-p}$$

(на последнем шагу мы оценили максимум функции $\lambda^p (1 - \beta\lambda)^n$).
На отрезке $[1/\gamma, a]$ имеем

$$\lambda^p |1 - \lambda g(\lambda)|^n \le a^p \vartheta^n = a^p (\vartheta^n n^p) n^{-p} \le c_p n^{-p},$$

где в силу (I.22)

$$\vartheta \equiv \max_{1/\gamma \le \lambda \le a} |1 - \lambda g(\lambda)| < 1, \quad \vartheta^n n^p \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Итак, мы приходим к неравенству (I.6):

$$\lambda^p |1 - \lambda g_n(\lambda)| = \lambda^p |1 - \lambda g(\lambda)|^n \le \gamma_p n^{-p} \quad (0 \le p < \infty),$$

$$\gamma_p = \max\left\{\left(\frac{p}{e\beta}\right)^p, \ c_p\right\}.$$

I) Если $1/\gamma > a$, то рассмотрим отрезок $[0, a]$.

Нетрудно также посчитать, что

$$\hat{\gamma} \equiv \overline{\lim_{n\to\infty}} \left\{ n^{-1} \max_{0\le\lambda\le a} |g_n(\lambda)| \right\} = g(0),$$

$$\hat{\gamma}_* \equiv \overline{\lim_{n\to\infty}} \left\{ n^{-1/2} \max_{0\le\lambda\le a} \lambda^{1/2} |g_n(\lambda)| \right\} = \theta \sqrt{g(0)},$$

$$\theta = \max_{0<\lambda<\infty} \lambda^{-1/2}(1-e^{-\lambda}) \approx 0.6382,$$

$$\hat{\gamma}_p \equiv \overline{\lim_{n\to\infty}} \left\{ n^p \max_{0\le\lambda\le a} \lambda^p |1-\lambda g_n(\lambda)| \right\} = \left(\frac{p}{e g(0)}\right)^p, \qquad 0<p<\infty.$$

Если функция g определена и непрерывна на некотором отрезке $[-\alpha, a]$ с $\alpha>0$, то функции g_n удовлетворяют условию (I.I4):

$$\max_{-\alpha/n\le\lambda\le 0} |g_n(\lambda)| \le \gamma' n, \quad \gamma' = \alpha^{-1}(e^{c\alpha}-1), \quad c = \max_{-\alpha\le\lambda\le 0} |g(\lambda)|.$$

Действительно, для $\lambda\in[-\alpha/n, 0]$ имеем

$$|g_n(\lambda)| \le \sum_{j=0}^{n-1} |1-\lambda g(\lambda)|^j |g(\lambda)| \le \sum_{j=0}^{n-1} (1+c\alpha n^{-1})^j c =$$

$$= \left[(1+c\alpha n^{-1})^n - 1\right]\alpha^{-1} n \le (e^{c\alpha}-1)\alpha^{-1} n = \gamma' n.$$

Это замечание, как мы увидим в дальнейшем (см., например, теоремы 4.2 и 5.2), позволяет применять итерационную схему (I.20) и в ситуации, когда $A=A^*\ge 0$, а операторы $A_\eta = A_\eta^*$ необязательно неотрицательные.

В случае общей (необязательно самосопряженной) задачи (I.I) итерационная схема имеет вид

$$u_n = u_{n-1} - C_\eta A_\eta^* (A_\eta u_{n-1} - f_\delta), \quad n=1,2,\ldots; \quad C_\eta = g(A_\eta^* A_\eta). \qquad (\text{I.23})$$

Она получается применением схемы (I.20) к симметризованной задаче $A^*A u = A^* f$. Предполагается выполненным условие (I.I9) с $a \ge \|A_\eta\|^2$ $(0<\eta\le\eta_0)$.

I.I0. Операторная форма итераций. В случае большого количества итерационных шагов более выгодной может оказаться операторная форма итераций (I.20), позволяющая строить u_n для номеров вида $n=m^k$ ($k=1,2,\ldots$; $m\ge 2$ задаваемое натуральное число). По начальному оператору

$$C_{0,\eta} = C_\eta = g(A_\eta) \qquad (\text{I.24})$$

итеративно строим операторы

$$C_{k,\eta}=C_{k-1,\eta}\sum_{j=0}^{m-1}(I-A_\eta C_{k-1,\eta})^j,\quad k=1,2,\ldots . \tag{I.25}$$

Легко убедиться, что приближения

$$u_n=(I-A_\eta C_{k,\eta})u_0+C_{k,\eta}f_\delta \quad (n=m^k;\ k=1,2,\ldots) \tag{I.26}$$

совпадают с приближениями (I.20).

Операторная форма итераций (I.23) имеет следующий вид:

$$C_{0,\eta}=C_0=g(A_\eta^*A_\eta), \tag{I.27}$$

$$C_{k,\eta}=C_{k-1,\eta}\sum_{j=0}^{m-1}(I-A_\eta^*A_\eta C_{k-1,\eta})^j,\quad k=1,2,\ldots, \tag{I.28}$$

$$u_n=(I-A_\eta^*A_\eta C_{k,\eta})u_0+C_{k,\eta}A_\eta^*f_\delta \quad (n=m^k;\ k=1,2,\ldots). \tag{I.29}$$

Любопытно, что разные итерационные схемы, соответствующие разным функциям $g(\lambda)$, в операторной форме отличаются только начальным приближением $C_{0,\eta}$.

§ 2. ПРИМЕРЫ МЕТОДОВ

2.I. Случай задачи с самосопряженным неотрицательным оператором. Здесь рассмотрим случай задачи (I.I) с $E=F$, $A=A^*\geq 0$, $A_\eta=A_\eta^*$.

Метод Лаврентьева. За приближенное решение уравнения (I.I) принимается

$$u_r=(r^{-1}I+A_\eta)^{-1}f_\delta . \tag{2.I}$$

Это приближение имеет форму (I.7) с $u_0=0$ и функцией

$$g_r:[0,\infty)\to R,\quad g_r(\lambda)=\frac{1}{r^{-1}+\lambda}=rg(r\lambda),\quad g(\lambda)=\frac{1}{1+\lambda},$$

для которой выполнены условия (I.5) и (I.6) с $\gamma=1$, $\gamma_p=p^p(1-p)^{1-p}$, $p_0=1$. Забегая вперед, отметим, что квалификация $p_0=1$ в некоторых случаях оказывается слишком малой (см., например, теорему 5.I). Поэтому большой интерес представляет итерированный вариант метода.

Итерированный вариант метода Лавреньева. Зададим натуральное число $m\geq 1$ и начальное приближение $u_{0,r}=u_0\in E$, вычислим m итераций

$$u_{n,\tau}=(\tau^{-1}I+A_\eta)^{-1}(\tau^{-1}u_{n-1,\tau}+f_\delta),\quad n=1,\dots,m; \quad (2.2)$$

за приближенное решение уравнения (I.I) примем $u_\tau=u_{m,\tau}$. Это приближение имеет форму (I.7) с функцией

$$g_\tau:[0,\infty)\to R,\quad g_\tau(\lambda)=\sum_{j=0}^{m-1}\frac{\tau^{-j}}{(\tau^{-1}+\lambda)^{j+1}}=\frac{1}{\lambda}\left[1-\frac{1}{(1+\tau\lambda)^m}\right],$$

для которой условия (I.5) и (I.6) выполнены с $\gamma=m$, $\gamma_p=\left(\frac{p}{m}\right)^p\left(1-\frac{p}{m}\right)^{m-p}$, $p_0=m$. При $m=1$, $u_0=0$ возвращаемся к методу (2.I).

Метод задачи Коши. Положим $\tau=t$, $u_\eta=u(t)$, где $u(t)$ – решение задачи Коши

$$\frac{du}{dt}+A_\eta u=f_\delta,\quad u(0)=u_0, \quad (2.3)$$

т.е.

$$u(t)=e^{-tA_\eta}u_0+\int_0^t e^{-(t-s)A_\eta}ds\, f_\delta.$$

Приближение u_τ имеет форму (I.7) с функцией

$$g_\tau:[0,\infty)\to R,\quad g_\tau(\lambda)=\int_0^\tau e^{-(\tau-s)\lambda}ds=\frac{1}{\lambda}(1-e^{-\tau\lambda})=\tau g(\tau\lambda),$$
$$g(\lambda)=\lambda^{-1}(1-e^{-\lambda}).$$

Условия (I.5) и (I.6) выполнены с $\gamma=1$, $\gamma_p=(p/e)^p$, $p_0=\infty$.

Методы спектральной срезки. Пусть $P_\eta(\lambda)$ – спектральное семейство проекторов (разложение единицы) оператора A_η. Оператор A_η обратим на подпространстве $[I-P_\eta(\lambda)]E$, $\lambda>0$. Положим

$$u_\tau=A_\eta^{-1}(I-P_\eta(\tfrac{1}{\tau}))f_\delta \quad (2.4)$$

или

$$u_\tau=A_\eta^{-1}(I-P_\eta(\tfrac{1}{\tau}))f_\delta+\tau P_\eta(\tfrac{1}{\tau})f_\delta. \quad (2.5)$$

Оба эти приближения имеют форму (I.7) с $u_0=0$, а функция $g_\tau:[0,\infty)\to R$ имеет соответственно вид

$$g_\tau(\lambda)=\begin{cases}1/\lambda & \text{при } \lambda\geq 1/\tau,\\ 0 & \text{при } \lambda<1/\tau,\end{cases}\quad g_\tau(\lambda)=\tau g(\tau\lambda),\quad g(\lambda)=\begin{cases}1/\lambda & \text{при } \lambda\geq 1,\\ 0 & \text{при } \lambda<1\end{cases}$$

и

$$g_r(\lambda)=\begin{cases}1/\lambda & \text{при } \lambda\geq 1/r,\\ r & \text{при } \lambda<1/r,\end{cases}\quad g_r(\lambda)=rg(r\lambda),\quad g(\lambda)=\begin{cases}1/\lambda & \text{при } \lambda\geq 1,\\ 1 & \text{при } \lambda<1.\end{cases}$$

Условия (I.5) и (I.6) выполнены для обеих функций с $\gamma=1$, $p_0=\infty$, причем $\gamma_p=1$ в случае (2.4) и $\gamma_p=p^p/(1+p)^{1+p}$ в случае (2.5).

<u>Явная итерационная схема</u>. При $g(\lambda)\equiv\mu=const$ из (I.20) получаем обычную явную итерационную схему

$$u_n=u_{n-1}-\mu(A_\eta u_{n-1}-f_\delta),\quad n=1,2,\dots\qquad(2.6)$$

В ее операторной форме (I.24)-(I.26) следует положить $C_{0,\eta}=\mu I$. При $\mu\in(0,2/a)$ выполнено условие (I.I9), и, значит, приближения u_n представимы в виде (I.7) с функций g_n, для которой условия (I.5) и (I.6) выполнены с $\gamma=\mu$, $p_0=\infty$. При $\mu\in(0,1/a]$ имеем $\gamma_p=\left(\frac{p}{\mu e}\right)^p$.

<u>Неявная итерационная схема</u>. При $g(\lambda)=1/(\alpha+\lambda)$, $\alpha=const>0$, из (I.20) получаем неявную итерационную схему

$$(\alpha I+A_\eta)(u_n-u_{n-1})=-(A_\eta u_{n-1}-f_\delta),\quad n=1,2,\dots,$$

или, в более привычной форме,

$$(\alpha I+A)u_n=\alpha u_{n-1}+f_\delta,\quad n=1,2,\dots\qquad(2.7)$$

В операторной форме (I.24)-(I.26) этой схемы следует положить $C_{0,\eta}=(\alpha I+A_\eta)^{-1}$. Условие (I.I9) выполнено, и, значит, приближения u_n представимы в виде (I.7) с функцией g_n, для которой выполнены условия (I.5) и (I.6) с $\gamma=\alpha^{-1}$, $p_0=\infty$; при $n\geq p$ имеем $\gamma_p=(\alpha p)^p$.

Условие (I.I9) оставляет большую свободу для построения дальнейших примеров итерационных схем.

Во всех рассмотренных примерах функция g_r в действительности определена и на некотором отрезке $[\alpha r^{-1}; a]$, $\alpha>0$, причем выполнено условие (I.I4). Поэтому рассмотренные методы применимы и в случае необязательно неотрицательных операторов $A_\eta=A_\eta^*$.

2.2. <u>Случай задачи с самосопряженным (необязательно неотрицательным) оператором</u>. Рассмотрим случай задачи (I.I) с $E=F$, $A=A^*$, $A_\eta=A_\eta^*$; от условие неотрицательности A мы отказались.

Модификации метода Лаврентьева. Приближение u_r вычислим по одной из формул

$$u_r = (ir^{-1}I + A_\eta)^{-1} f_\delta \tag{2.8}$$

или

$$u_r = \operatorname{Re}(ir^{-1}I + A_\eta)^{-1} f_\delta, \tag{2.9}$$

где $i = \sqrt{-1}$. В случае приближения (2.9) считаем гильбертово пространство E вещественным, временно переходим к его комплексному расширению, вычисляем в нем $(ir^{-1}I + A_\eta)^{-1} f_\delta$ и возвращаемая в исходное пространство E, беря вещественную часть найденного элемента.

Приближение (2.8) имеет форму (I.7) с $u_0 = 0$ и

$$g_r : (-\infty, \infty) \to \mathbb{C}, \quad g_r(\lambda) = \frac{1}{ir^{-1} + \lambda} = r g(r\lambda), \qquad g(\lambda) = \frac{1}{i + \lambda};$$

условия (I.9) и (I.IO) выполнены с $\gamma = 1$, $\gamma_p = p^{p/2}(1-p)^{(1-p)/2}$, $p_0 = 1$.

Приближение (2.9) имеет форму (I.7) с $u_0 = 0$ и

$$g_r : (-\infty, \infty) \to \mathbb{C}, \qquad g_r(\lambda) = \operatorname{Re} \frac{1}{ir^{-1} + \lambda} = \frac{\lambda}{r^{-2} + \lambda^2},$$

$$g_r(\lambda) = r g(r\lambda), \quad g(\lambda) = \frac{\lambda}{1 + \lambda^2}.$$

Условия (I.9) и (I.IO) выполнены с $\gamma = 1/2$, $\gamma_p = \left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{p}{2}} \left(1 - \frac{p}{2}\right)^{1-\frac{p}{2}}$; $p_0 = 2$. В этом примере при переходе от g_r к $\operatorname{Re} g_r$ квалификация повысилась от I к 2. Заметим также, что приближение (2.9) можно записать в виде

$$u_r = (r^{-2}I + A_\eta^2)^{-1} A_\eta f_\delta,$$

т.е. имеет форму метода Тихонова (ср. (2.I7)). При больших r форма (2.9) может оказаться более предпочтительной, несмотря на вычисления в комплексной области. Это связано с тем, что $\|(ir^{-1}I + A_\eta)^{-1}\| \le r$, а $\|(ir^{-2}I + A_\eta^2)^{-1}\| \le r^2$.

Итерированные варианты методов (2.8) и (2.9)

$$u_{n,r} = (ir^{-1}I + A_\eta)^{-1}(ir^{-1}u_{n-1,r} + f_\delta), \quad n = 1, \dots, m, \tag{2.IO}$$

$$u_{n,r} = \operatorname{Re}\left[(ir^{-1}I + A_\eta)^{-1}(ir^{-1}u_{n-1,r} + f_\delta\right), \quad n = 1, \dots, m \tag{2.II}$$

имеют соответственно квалификации $p_0 = m$ и $p_0 = 2m$. Итерации (2.II) можно записать в виде (ср. (2.I9))

$$u_{n,r}=(r^{-2}I+A_\eta^2)^{-1}(r^{-2}u_{n-1,r}+A_\eta f_\delta),\quad n=1,\ldots,m.$$

Итерационная схема

$$u_n=\mathrm{Re}\left[(i\alpha I+A_\eta)^{-1}(i\alpha u_{n-1}+f_\delta)\right],\quad n=1,2,\ldots \tag{2.12}$$

представима в виде (ср. (2.24))

$$u_n=(\alpha^2 I+A_\eta^2)^{-1}(\alpha^2 u_{n-1}+A_\eta f_\delta),\quad n=1,2,\ldots,$$

и ее исследование естественно проводить в рамках методов (I.13) для несамосопряженных задач[I)]. Хуже обстоит дело с неявной итерационной схемой

$$u_n=(i\alpha I+A_\eta)^{-1}(i\alpha u_{n-1}+f_\delta),\quad n=1,2,\ldots \tag{2.13}$$

– приближение u_n имеет форму (I.7), выполнено условие (I.9), но вместо (I.10) выполняется более слабое условие

$$\sup_{-\infty<\lambda<\infty}|\lambda|^p|1-\lambda g_n(\lambda)|\leq\gamma_p n^{-p/2}\quad(0\leq p<\infty) \tag{2.14}$$

(если положить не $r=n$, а $r=n^{1/2}$, то условие (I.10) становится выполненным, но тогда нарушается условие (I.9)).

Нет естественных аналогов и для явной итерационной схемы и метода задачи Коши, для которых выполнялись бы условия (I.9) и (I.10).

Методы спектральной срезки (2.4) и (2.5) естественным образом распространяются на рассматриваемую задачу: вместо $P_\eta(\frac{1}{r})$ нужно привлечь оператор $B_\eta(\frac{1}{r})=P_\eta(\frac{1}{r})-P_\eta(-\frac{1}{r})$. Соответствующие приближения

$$u_r=A_\eta^{-1}(I-B_\eta(\tfrac{1}{r}))f_\delta \tag{2.15}$$

и

$$u_r=A_\eta^{-1}(I-B_\eta(\tfrac{1}{r}))f_\delta+rB_\eta(\tfrac{1}{r})f_\delta \tag{2.16}$$

имеют форму (I.7), причем условия (I.9) и (I.10) выполнены с $\gamma=1$, $p_0=\infty$ и теми же значениями γ_p, что и для методов (2.4) и (2.5).

I) В рамки условий (I.7)–(I.10) итерации (2.12) укладываются, положив не $r=n$, а $r=n^{1/2}$.

2.3. <u>Случай несамосопряженной задачи</u>. Проведя по схеме п. I.3 симметризацию задачи (I.I), можно к ней применить все рассмотренные выше методы.

<u>Метод Тихонова</u>

$$u_r=(r^{-1}I+A_\eta^*A_\eta)^{-1}A_\eta^* f_\delta \qquad (2.17)$$

является аналогом метода Лаврентьева (2.I) для несамосопряженное задачи. Приближение (2.I7) реализирует минимум функционала А.Н. Тихонова (ср. п. 0.2)

$$\|A_\eta u-f_\delta\|^2+r^{-1}\|u\|^2;$$

если минимизировать функционал

$$\|A_\eta u-f_\delta\|^2+r^{-1}\|u-u_0\|^2,$$

то в качестве точки минимума получаем

$$u_r=(r^{-1}I+A_\eta^*A_\eta)^{-1}(r^{-1}u_0+A_\eta^* f_\delta). \qquad (2.18)$$

Приближение (2.I8) имеет форму (I.I3) с функцией $g_r(\lambda)=1/(r^{-1}+\lambda)$, для которой, как уже отмечалось, выполнены условий (I.5) и (I.6) с $p_0=1$.

Выпишем алгоритмы еще нескольких методов; выполнение условий (I.5) и (I.6) обсуждалось в п. 2.I; см. также табл. 4.I.

<u>Итерированный вариант метода Тихонова</u>: $u_{0,r}=u_0$,

$$u_{n,r}=(r^{-1}I+A_\eta^*A_\eta)^{-1}(r^{-1}u_{n-1,r}+A_\eta^* f_\delta), \quad n=1,\dots,m, \qquad (2.19)$$
$$u_r=u_{m,r}.$$

<u>Метод задачи Коши</u>: $r=t$, $u_r=u(t)$,

$$\frac{du}{dt}+A_\eta^*A_\eta u=A_\eta^* f_\delta, \qquad u(0)=u_0. \qquad (2.20)$$

<u>Методы спектральной срезки:</u>

$$u_r=(A_\eta^*A_\eta)^{-1}\left[I-P_\eta\left(\tfrac{1}{r}\right)\right]A_\eta^* f_\delta, \qquad (2.21)$$

$$u_r=(A_\eta^*A_\eta)^{-1}\left[I-P_\eta\left(\tfrac{1}{r}\right)\right]A_\eta^* f_\delta+r P_\eta\left(\tfrac{1}{r}\right)A_\eta^* f_\delta, \qquad (2.22)$$

где $P_\eta(\lambda)$ – спектральное семейство проекторов оператора $A_\eta^*A_\eta$.

<u>Явная итерационная схема</u>:

$$u_n=u_{n-1}-\mu A_\eta^*(A_\eta u_{n-1}-f_\delta), \quad n=1,2,\dots; \qquad (2.23)$$
$$\mu\in(0,2/a), \quad a\geqslant\|A_\eta\|^2 \quad (0<\eta\leqslant\eta_0).$$

Неявная итерационная схема:

$$(\alpha I + A_\eta^* A_\eta) u_n = \alpha u_{n-1} + A_\eta^* f_\delta, \quad n=1,2,\dots; \quad \alpha>0. \qquad (2.24)$$

2.4. Замечания и дополнения. I. Во всех рассмотренных примерах $\gamma_0=1$, т.е. условие (I.6), соответственно (I.10), при $p=0$ выполняется с постоянной $\gamma_0=1$.

2. Обратим внимание на сходство итераций (2.2) и (2.7), а также других подобных пар. В итерированном варианте метода Лаврентьева (2.2) регуляризация достигается за счет малости параметра $\alpha\equiv r^{-1}$. В неявной итерационной схеме (2.7), напротив, регуляризация достигается за счет величия n, а параметр α зафиксирован необязательно малым. В практических вычислениях по итерационной схеме (2.7) удобно варьировать оба параметра α и n. Если положить $r=n/\alpha$, то для соответствующей функции

$$g_{n,\alpha}(\lambda) = \sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{\alpha}{\alpha+\lambda}\right)^j \frac{1}{\alpha+\lambda} = \frac{1}{\lambda}\left[1-\left(\frac{\alpha}{\alpha+\lambda}\right)^n\right]$$

выполнены условия (I.5) и (I.6) с $p_0=\infty$ при условии, что $n\to\infty$ при $r\to\infty$.

3. Метод задачи Коши и методы спектральной срезки в приведенном виде практически реализуемы в лишь в исключительных случаях; в общем случае они требуют внесения какой-нибудь дополнительной аппроксимации. Однако, в приведенном "чистом" виде они представляют теоретический интерес, особенно метод (2.5) и его вариации. Остальные рассмотренные в п. 2.I-2.3 методы хорошо приспособлены к практическим вычислениям по ним.

4. Как будет замечено в п. 4.5, метод спектральной срезки (2.5) в случае точно заданного оператора $A_\eta=A$ и подходящего выбора $r=r(\delta,p,\rho)$ оптимален в смысле п. 0.3 на каждом множестве

$$\mathcal{M}_{p,\rho}=\{u\in E:\ u=A^p w,\ \|w\|\le\rho\},\quad p>0,\ \rho>0.$$

Обсудим возможности численной реализации этого метода. Допустим, что оператор $A=A^*\geqslant 0$ вполне непрерывен. Пусть λ_k и φ_k $(k=1,2,\dots)$ – его (только) положительные собственные значения и соответствующие им собственные векторы:

$$A\varphi_k=\lambda_k\varphi_k \quad (k=1,2,\dots),\ \lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\dots\geqslant\lambda_k\geqslant\dots,\ \lambda_k\to 0 \text{ при } k\to\infty,$$
$$(\varphi_i,\varphi_k)=\delta_{ik} \quad (i,k=1,2,\dots),$$

а $P(\lambda)$ – спектральное семейство проекторов оператора A. Тогда при $\lambda>0$

$$P(\lambda)=P(0)+\sum_{\lambda_k\leqslant\lambda}(\cdot,\varphi_k)\varphi_k, \qquad I-P(\lambda)=\sum_{\lambda_k>\lambda}(\cdot,\varphi_k)\varphi_k,$$

причем $P(0)$ – ортопроектор, проектирующий на $\mathcal{N}(A)$. Приближение (2.5) можно записать в виде

$$u_r=\sum_{\lambda_k>\frac{1}{r}}\frac{(f_\delta,\varphi_k)}{\lambda_k}\varphi_k+r\Big[f_\delta-\sum_{\lambda_k>\frac{1}{r}}(f_\delta,\varphi_k)\varphi_k\Big]. \quad (2.25)$$

Таким образом, для нахождения приближения u_r нужно знать собственные значения λ_k, бо̀льшие $1/r$, и соответствующие собственные векторы оператора A.

5. Укажем оптимальный на классах

$$\mathcal{M}_{p,\rho}=\{u\in E:\ u=|A|^p w,\ \|w\|\leqslant\rho\},\ p>0,\ \rho>0$$

метод для несамосопряженной задачи. Таким мѐтодом при подходящем согласовании r с δ, p и ρ будет

$$u_r=|A|^{-1}(I-\hat P(\tfrac{1}{r}))\mathcal{U}^*f_\delta+r\hat P(\tfrac{1}{r})\mathcal{U}^*f_\delta, \qquad (2.26)$$

где $\mathcal{U}$ – частичная изометрия из полярного разложения $A=\mathcal{U}|A|$, а $\hat P(\lambda)$ – спектральное семейство проекторов оператора $|A|=(A^*A)^{1/2}$. Оптимальность метода (2.26) на $\mathcal{M}_{p,\rho}$ вытекает из оптимальности метода (2.5) на $\mathcal{M}_{p,\rho}$. По этому поводу см. заключительную часть п. I.6; заметим, что метод (2.26) надстроен на (оптимальный) метод (2.5) по схеме (I.16).

Обсудим возможности численной реализации метода (2.26). Допустим, что оператор $A\in\mathcal{L}(E,F)$ вполне непрерывен. Пусть λ_k^2 и φ_k $(k=1,2,\dots)$ – положительные собственные значения и соответствующие им собственные векторы самосопряженного неотрицательного оператора[I)] $A^*A\in\mathcal{L}(E,E)$:

$$A^*A\varphi_k=\lambda_k^2\varphi_k \ (k=1,2,\dots),\ \lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\dots\geqslant\lambda_k\geqslant\dots,\ \lambda_k\to 0 \text{ при } k\to\infty,$$
$$\varphi_k\in E,\ (\varphi_i,\varphi_k)=\delta_{ik} \ (i,k=1,2,\dots).$$

I) Числа λ_k называются сингулярными числами оператора A (см. [30]).

5

Тогда для $\psi_k = A\varphi_k/\lambda_k$ $(k=1,2,\dots)$ имеем

$$AA^*\psi_k = \lambda_k^2 \psi_k,$$
$$\psi_k \in F, \quad (\psi_i, \psi_k) = \delta_{ik} \quad (i,k=1,2,\dots).$$

Кроме того,

$$|A|\varphi_k = \lambda_k \varphi_k \quad (k=1,2,\dots),$$
$$A = \sum_k \lambda_k (\cdot, \varphi_k)\psi_k, \quad |A| = \sum_k \lambda_k (\cdot, \varphi_k)\varphi_k,$$
$$\mathcal{U} = \sum_k (\cdot, \varphi_k)\psi_k, \quad \mathcal{U}^* = \sum_k (\cdot, \psi_k)\varphi_k,$$
$$\hat{P}(\lambda) = \hat{P}(0) + \sum_{\lambda_k \le \lambda} (\cdot, \varphi_k)\varphi_k, \quad I - \hat{P}(\lambda) = \sum_{\lambda_k > \lambda} (\cdot, \varphi_k)\varphi_k \quad (\lambda > 0),$$
$$\hat{P}(0)\mathcal{U}^* = 0.$$

Приближение (2.26) запишется в виде

$$u_r = \sum_{\lambda_k > \frac{1}{r}} \frac{(f_\delta, \psi_k)}{\lambda_k}\varphi_k + r\sum_{\lambda_k \le \frac{1}{r}} (f_\delta, \psi_k)\varphi_k. \qquad (2.27)$$

Для вычисления приближения (2.27) нужно знать все положительные собственные значения и соответствующие им собственные векторы операторов A^*A и AA^*. Другими словами, нужно знать <u>разложение Шмидта</u>

$$A = \sum_k \lambda_k (\cdot, \varphi_k)\psi_k$$

вполне непрерывного оператора $A \in \mathcal{L}(E,F)$.

§ 3. ОЦЕНКИ РАЗНОСТИ СТЕПЕНЕЙ ОПЕРАТОРОВ

Результаты этого параграфа носят вспомогательный характер и используются только при выводе оценок погрешности методов (I.7) и (I.13) в случае приближенно заданного оператора.

3.I. <u>Формула разности степеней операторов</u>. Пусть $A = A^* \ge 0$ и $B = B^* \ge 0$. Установим формулу

$$A^\alpha - B^\alpha = -\frac{\sin \alpha\pi}{\pi}\int_0^\infty t^\alpha[(tI+A)^{-1} - (tI+B)^{-1}]dt \quad (0<\alpha<1). \qquad (3.I)$$

Вывод формулы (3.I) можно провести по следующей стандартной схеме. I. Для $A_\varepsilon = A + \varepsilon I$, $B_\varepsilon = B + \varepsilon I$ $(\varepsilon > 0)$ основная формула исчисления операторов (см. [3I], стр. 608) дает

$$A_\varepsilon^\alpha - B_\varepsilon^\alpha = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \lambda^\alpha[(\lambda I - A_\varepsilon)^{-1} - (\lambda I - B_\varepsilon)^{-1}]d\lambda,$$

где Γ – любой спрямляемый контур в комплексной плоскости, охватывающий спектры операторов A_ε и B_ε и лежащий в области однозначности аналитической функции λ^α; однозначность λ^α обеспечим, проведя разрез комплексной плоскости вдоль отрицательной вещественной оси. 2. Из равенства

$$(\lambda I - A_\varepsilon)^{-1} - (\lambda I - B_\varepsilon)^{-1} = (\lambda I - A_\varepsilon)^{-1}(A_\varepsilon - B_\varepsilon)(\lambda I - B_\varepsilon)^{-1}$$

вытекает оценка

$$\|(\lambda I - A_\varepsilon)^{-1} - (\lambda I - B_\varepsilon)^{-1}\| \le \frac{\|A-B\|}{dist(\lambda, \sigma(A_\varepsilon))\, dist(\lambda, \sigma(B_\varepsilon))}.$$

Пользуясь этой оценкой, легко убедиться, что в качестве Γ можно взять, например, параболу $Re\,\lambda = c(Im\,\lambda)^2$, а затем деформировать эту параболу, прижав ее ветви к отрицательной вещественной оси ($c \to -\infty$); с учетом равенств $\lambda^\alpha = t^\alpha e^{i\alpha\pi}$, $\lambda^\alpha = t^\alpha e^{-i\alpha\pi}$ $(t = |\lambda| = -\lambda)$ на верхней и нижней ветвях это приводит к равенству (3.I) для положительно определенных операторов A_ε и B_ε. 3. Предельным переходом $\varepsilon \to 0$ получаем формулу (3.I) для A и B. Предельный переход осуществим ввиду неравенства

$$\|(tI + A_\varepsilon)^{-1} - (tI + B_\varepsilon)^{-1}\| \le max\{\|(tI + A_\varepsilon)^{-1}\|, \|(tI + B_\varepsilon)^{-1}\|\} \le t^{-1},$$

которым воспользуемся около нуля, и неравенства

$$\|(tI + A_\varepsilon)^{-1} - (tI + B_\varepsilon)^{-1}\| \le \|A - B\| t^{-2},$$

которым воспользуемся при больших t.

Формула (3.I) является очевидным следствием из формулы А.Балакришнана дробной степени оператора (см. [70, 36]); ее можно также получить из формулы (I4.I6) монографии [43].

3.2. <u>Оценка в случае неотрицательных операторов.</u>

<u>Лемма 3.I.</u> Пусть $A = A^* \ge 0$, $A_\eta = A_\eta^* \ge 0$, $\|A_\eta - A\| \le \eta$. Тогда при любом вещественном $p \ge 0$ справедлива оценка

$$\|A_\eta^p - A^p\| \le c_p\, \eta^{\min\{1,p\}}, \qquad c_p = const. \tag{3.2}$$

Если выполнены условия (I.4) и (I.6), то при $p > 0$

$$\|A_\eta G_{n,\eta}(A_\eta^p - A^p)\| \le \varepsilon_{n,p}\, \eta, \qquad \varepsilon_{n,p} \to 0 \text{ при } n \to \infty, \tag{3.3}$$

где введено обозначение $G_{n,\eta} = I - A_\eta g_n(A_\eta)$.

Д̲о̲к̲а̲з̲а̲т̲е̲л̲ь̲с̲т̲в̲о̲. Докажем оценку (3.2). Рассмотрим сперва случай $p=\alpha\in(0,1)$. По формуле (3.I)

$$A_\eta^\alpha - A^\alpha = -\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^\infty t^\alpha[(tI+A_\eta)^{-1}-(tI+A)^{-1}]\,dt. \tag{3.4}$$

В промежутке $(0,\eta)$ воспользуемся оценкой

$$\|(tI+A_\eta)^{-1}-(tI+A)^{-1}\|\le t^{-1},$$

а в промежутке (η,∞) – оценкой

$$\|(tI+A_\eta)^{-1}-(tI+A)^{-1}\|\le \eta t^{-2},$$

вытекающей из равенства

$$(tI+A_\eta)^{-1}-(tI+A)^{-1}=(tI+A_\eta)^{-1}(A-A_\eta)(tI+A)^{-1}. \tag{3.5}$$

В результате приходим к оценке (3.2):

$$\|A_\eta^\alpha - A^\alpha\|\le \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left(\frac{\eta^\alpha}{\alpha}+\eta\frac{\eta^{\alpha-1}}{1-\alpha}\right)\le 2\eta^\alpha \qquad (0<\alpha<1).$$

При $p=0$ оценка (3.2) тривиальна. При целом $p=k\ge 1$ из равенства

$$A_\eta^k - A^k = \sum_{j=0}^{k-1} A_\eta^j(A_\eta - A)A^{k-1-j}$$

получаем

$$\|A_\eta^k - A^k\|\le c_k\eta \qquad (k=1,2,\dots),$$

т.е. оценка (3.2) верна и в таком случае. Наконец, при $p=k+\alpha$, где $k\ge 1$ целое, $\alpha\in(0,1)$, имеем

$$A_\eta^p - A^p = A_\eta^k(A_\eta^\alpha - A^\alpha) + (A_\eta^k - A^k)A^\alpha,$$

и в оценке нуждается только член (см. (3.4))

$$A_\eta^k(A_\eta^\alpha - A^\alpha) = -\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^\infty t^\alpha A_\eta^k[(tI+A_\eta)^{-1}-(tI+A)^{-1}]\,dt.$$

При помощи (3.5) и неравенства $\|A_\eta(tI+A_\eta)^{-1}\|\le 1$ оценим

$$\|A_\eta^k[(tI+A_\eta)^{-1}-(tI+A)^{-1}]\|\le \begin{cases}\|A_\eta\|^{k-1}t^{-1}\eta,\\ \|A_\eta\|^k t^{-2}\eta.\end{cases}$$

Воспользуясь первой оценкой в промежутке $(0,1)$, а второй – в $(1,\infty)$, получаем

$$\|A_\eta^k(A_\eta^\alpha - A^\alpha)\|\le \|A_\eta\|^{k-1}(1+\|A_\eta\|)\eta,$$

и доказательство оценки (3.2) завершено.

Докажем оценку (3.3). Для простоты допустим, что условие (I.6) выполнено с $p_0\ge 1$. При $p\ge 1$ оценка (3.3) немедленно вытекает из (I.6) и (3.2), причем $\varepsilon_{\tau,p}=c_p\mathcal{T}_1\tau^{-1}$.

При $\rho = \alpha \in (0,1)$ имеем (см. (3.4))

$$A_\eta G_{r,\eta}(A_\eta^\alpha - A^\alpha) = -\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^\infty t^\alpha A_\eta G_{r,\eta}\left[(tI+A_\eta)^{-1}-(tI+A)^{-1}\right]dt.$$

Пусть $\beta \in (0,\alpha)$. Заметив, что $A_\eta G_{r,\eta} = A_\eta^\beta G_{r,\eta} A_\eta^{1-\beta}$,

$$\|A_\eta^{1-\beta}(tI+A_\eta)^{-1}\| \le t^{-\beta},$$

оценим

$$\|A_\eta G_{r,\eta}[(tI+A_\eta)^{-1}-(tI+A)^{-1}]\| \le \begin{cases} \gamma_\beta r^{-\beta} t^{-\beta-1}\eta, \\ \gamma_1 r^{-1} t^{-2}\eta. \end{cases}$$

Воспользуясь опять первой оценкой в промежутке $(0,1)$, а второй – в $(1,\infty)$, приходим к оценке (3.3), в которой

$$\varepsilon_{r,\alpha} = \gamma_\beta r^{-\beta}\frac{\sin\alpha\pi}{(\alpha-\beta)\pi} + \gamma_1 r^{-1}.$$

Если положить $\beta = \alpha/2$, то $\varepsilon_{r,\alpha} = 2\gamma_{\alpha/2} r^{-\alpha/2} + \gamma_1 r^{-1}$.

Лемма 3.I доказана.

3.3. Оценка в общем случае. Для $A, A_\eta \in \mathcal{L}(E,F)$ обозначим $|A| = (A^*A)^{1/2}$, $|A_\eta| = (A_\eta^* A_\eta)^{1/2}$, $B = A^*A$, $B_\eta = A_\eta^* A_\eta$. Это неотрицательные операторы в E.

Лемма 3.2. Пусть $\|A_\eta - A\| \le \eta$. Тогда при любом вещественном $p \ge 0$ справедлива оценка

$$\|\,|A_\eta|^p - |A|^p\| \le c_p(1+|\ln\eta|)\eta^{\min\{1,p\}}, \quad c_p = const. \tag{3.6}$$

Если выполнены условия (I.6) и (I.12), то при $p>0$

$$\|A_\eta K_{r,\eta}(|A_\eta|^p - |A|^p)\| \le \varepsilon_{r,p}\eta, \quad \varepsilon_{r,p}\to 0 \text{ при } r\to\infty, \tag{3.7}$$

где $K_{r,\eta} = I - A_\eta^* A_\eta g_r(A_\eta^* A_\eta) = I - B_\eta g_r(B_\eta)$.

Доказательство аналогично доказательству предыдущей леммы, но более технично. Мы повторим все нужные выкладки.

Неравенство (3.6) равносильно неравенству

$$\|B_\eta^p - B^p\| \le c_p'(1+|\ln\eta|)\eta^{\min\{1,2p\}}, \quad c_p' = c_{2p}, \tag{3.8}$$

которое удобнее доказывать.

Для целого $p = k \ge 1$ из равенств

$$B_\eta^k - B^k = \sum_{j=0}^{k-1} B_\eta^j (B_\eta - B) B^{k-1-j},$$

$$B_\eta - B = A_\eta^*(A_\eta - A) + (A_\eta^* - A^*)A$$

следует более точная, чем (3.8), оценка

$$\|B_\eta^k - B^k\| \le c_k' \eta \quad (k=1,2,\dots). \tag{3.9}$$

При $\rho=\alpha\in(0,1)$ по формуле (3.I) имеем

$$B_\eta^\alpha - B^\alpha = -\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^\infty t^\alpha[(tI+B_\eta)^{-1}-(tI+B)^{-1}]dt. \tag{3.I0}$$

В промежутке $(0,\eta^2)$ воспользуемся оценкой

$$\|(tI+B_\eta)^{-1}-(tI+B)^{-1}\| \le t^{-1},$$

а в промежутках $(\eta^2,1)$ и $(1,\infty)$, соответственно, оценками

$$\|(tI+B_\eta)^{-1}-(tI+B)^{-1}\| \le 2t^{-3/2}\eta,$$

$$\|(tI+B_\eta)^{-1}-(tI+B)^{-1}\| \le (\|A_\eta\|+\|A\|)t^{-2}\eta,$$

вытекающими из равенства

$$\begin{aligned}(tI+B_\eta)^{-1}-(tI+B)^{-1}&= \\ =(tI+B_\eta)^{-1}[A_\eta^*(A-A_\eta)+(A^*-A_\eta^*)A](tI+B)^{-1}&\end{aligned} \tag{3.II}$$

и неравенств

$$\|(tI+A_\eta^*A_\eta)^{-1}A_\eta^*\| \le t^{-1/2}, \qquad \|A(tI+A^*A)^{-1}\| \le t^{-1/2}.$$

В результате при $\alpha\ne 1/2$ получаем

$$\|B_\eta^\alpha - B^\alpha\| \le \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left[\frac{\eta^{2\alpha}}{\alpha} + 4\eta\,\frac{1-\eta^{2\alpha-1}}{2\alpha-1} + (\|A_\eta\|+\|A\|)\eta\,\frac{1}{1-\alpha}\right].$$

Поскольку

$$\frac{1-\eta^\beta}{\beta} \le |\ln\eta| \quad (0<\beta<1),$$

то при $\alpha>\frac{1}{2}$

$$\eta\,\frac{1-\eta^{2\alpha-1}}{2\alpha-1} \le \eta|\ln\eta|,$$

а при $\alpha<\frac{1}{2}$

$$\eta\,\frac{1-\eta^{2\alpha-1}}{2\alpha-1} = \eta^{2\alpha}\,\frac{1-\eta^{1-2\alpha}}{1-2\alpha} \le \eta^{2\alpha}|\ln\eta|;$$

при $\alpha=\frac{1}{2}$ множитель $|\ln\eta|$ появляется при интегрировании непосредственно. Итак,

$$\|B_\eta^\alpha - B^\alpha\| \le \eta^{2\alpha} + \frac{4}{\pi}|\ln\eta|\,\eta^{\min\{1,2\alpha\}} + (\|A_\eta\|+\|A\|)\eta \quad (0<\alpha<1),$$

и оценка (3.8) в случае $\rho=\alpha\in(0,1)$ установлена.

Рассмотрим, наконец, случай $\rho=k+\alpha$, где $k\ge 1$ целое, $\alpha\in(0,1)$. Тогда

$$B_\eta^p - B^p = B_\eta^\kappa(B_\eta^\alpha - B^\alpha) + (B_\eta^\kappa - B^\kappa)B^\alpha.$$

Второй член в правой части оценим на основании (3.9). В оценке нуждается первый член (см. (3.10))

$$B_\eta^\kappa(B_\eta^\alpha - B^\alpha) = -\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^\infty t^\alpha B_\eta^\kappa[(tI+B_\eta)^{-1}-(tI+B)^{-1}]dt.$$

Поскольку $\|B_\eta(tI+B_\eta)^{-1}\| \le 1$, то из (3.11) следует, что

$$\|B_\eta^\kappa[(tI+B_\eta)^{-1}-(tI+B)^{-1}]\| \le \begin{cases} \|B_\eta\|^{\kappa-1}(\|A_\eta\|+\|A\|)t^{-1}\eta, \\ \|B_\eta\|^{\kappa}(\|A_\eta\|+\|A\|)t^{-2}\eta. \end{cases}$$

Первой оценкой воспользуемся на $(0,1)$, второй – на $(1,\infty)$. В результате получим уточнение оценки (3.8):

$$\|B_\eta^p - B^p\| \le c_p'\eta \quad (p\ge 1). \tag{3.12}$$

Тем самым завершено доказательство оценки (3.6).

Перейдем к доказательству оценки (3.7). Она равносильна оценке

$$\|B_\eta^{1/2}K_{r,\eta}(B_\eta^p - B^p)\| \le \varepsilon_{r,p}'\eta, \quad \varepsilon_{r,p}' \to 0 \text{ при } r\to\infty, \tag{3.13}$$

которую мы и докажем. Для простоты будем считать, что условие (1.6) выполнено с $p_0 \ge 1/2$.

При $p\ge 1$ оценка (3.13) немедленно вытекает из (1.6) и (3.12), причем $\varepsilon_{r,p}' = c_p'\gamma_{1/2}r^{-1/2}$. При $p=\alpha\in(0,1)$ на основании (3.10) и (3.11) имеем

$$B_\eta^{1/2}K_{r,\eta}(B_\eta^\alpha - B^\alpha) =$$

$$= -\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\Big\{\int_0^\infty t^\alpha B_\eta^{1/2}K_{r,\eta}(tI+B_\eta)^{-1}A_\eta^*(A-A_\eta)(tI+B)^{-1}dt +$$

$$+\int_0^\infty t^\alpha B_\eta^{1/2}K_{r,\eta}(tI+B_\eta)^{-1}(A^*-A_\eta^*)A(tI+B)^{-1}dt\Big\}.$$

Ввиду полярных разложений

$$A_\eta = \mathcal{U}_\eta|A_\eta|, \quad A=\mathcal{U}|A| \quad (\|\mathcal{U}_\eta\|=1,\ \|\mathcal{U}\|=1),$$

получаем неравенство

$$\|B_\eta^{1/2}K_{r,\eta}(B_\eta^\alpha - B^\alpha)\| \le$$

$$\leq \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left\{\int_0^{\infty} t^{\alpha}\|B_\eta K_{r,\eta}(tI+B_\eta)^{-1}\|t^{-1}dt+\right.$$

$$\left.+\int_0^{\infty} t^{\alpha}\|B_\eta^{1/2}K_{r,\eta}(tI+B_\eta)^{-1}\|\,\|B^{1/2}(tI+B)^{-1}\|dt\right\}\eta.$$

Пусть $\beta\in(0,\alpha)$, $\beta\leq 1/2$. Учитывая, что

$$\|B_\eta^{\sigma}(tI+B_\eta)^{-1}\|\leq t^{\sigma-1}\quad (t>0;\ 0\leq\sigma\leq 1),$$

при помощи (I.6) оценим подынтегральные нормы:

$$\|B_\eta K_{r,\eta}(tI+B_\eta)^{-1}\|\leq\begin{cases}\gamma_\beta r^{-\beta}t^{-\beta},\\ \gamma_{1/2}r^{-1/2}\|A_\eta\|t^{-1},\end{cases}$$

$$\|B_\eta^{1/2}K_{r,\eta}(tI+B_\eta)^{-1}\|\leq\begin{cases}\gamma_\beta r^{-\beta}t^{-\frac{1}{2}-\beta},\\ \gamma_{1/2}r^{-1/2}t^{-1};\end{cases}$$

$$\|B^{1/2}(tI+B)^{-1}\|\leq\begin{cases}t^{-1/2},\\ \|A\|t^{-1}.\end{cases}$$

Верхние варианты этих оценок используем в промежутке $(0,1)$, нижние – в $(1,\infty)$. В результате приходим к оценке (3.I3) с

$$\varepsilon'_{r,\alpha}=2\,\frac{\sin\alpha\pi}{(\alpha-\beta)\pi}\,\gamma_\beta r^{-\beta}+(\|A_\eta\|+\|A\|)\gamma_{1/2}r^{-1/2}.$$

В частности, положив $\beta=\alpha/2$, имеем

$$\varepsilon'_{r,\alpha}=4\gamma_{\alpha/2}r^{-\alpha/2}+(\|A_\eta\|+\|A\|)\gamma_{1/2}r^{-1/2}. \qquad (3.I4)$$

Лемма 3.2 доказана.

Как видно из доказательства, при $p\geq 2$ в оценке (3.6) можно убрать множитель $1+|\ln\eta|$. Неизвестно, можно ли это сделать при $p\in(0,2)$. В частности, неизвестно, верно ли неравенство $\||A_\eta|-|A|\|\leq c\|A_\eta-A\|$.

3.4. Оценка в случае самосопряженных операторов. В п. I мы уже рассмотрели случай неотрицательных самосопряженных операторов. Теперь откажемся от условия их неотрицательности.

Лемма 3.3. Пусть $A=A^*$, $A_\eta=A_\eta^*$, $\|A_\eta-A\|\leq\eta$. Тогда

$$\||A_\eta|^p-|A|^p\|\leq c_p(1+|\ln\eta|)\eta^{\min\{1,p\}}\quad (p\geq 0). \qquad (3.I5)$$

Если выполнены условия (I.8) и (I.10), то при $p>0$

$$\|A_\eta G_{r,\eta}(|A_\eta|^p-|A|^p)\|\le \varepsilon_{r,p}\,\eta, \qquad \varepsilon_{r,p}\to 0 \text{ при } r\to\infty, \quad (3.16)$$

где $G_{r,\eta}=I-A_\eta g_r(A_\eta)$.

Доказательство. Оценка (3.15) в предыдущем пункте установлена в более обшей ситуации (см. лемму 3.2). Доказательство оценки (3.16) мало отличается от доказательства оценки (3.7) и не будет повторено.

§ 4. АПРИОРНОЕ ЗАДАНИЕ ПАРАМЕТРА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

4.I. Самосопряженная задача. Начальное приближение $u_0\in E$ считаем независящим от δ и η.

Теорема 4.I. Пусть $E=F$, $A=A^*$, $A_\eta=A_\eta^*$, $f\in\mathcal{R}(A)$, $\|f_\delta-f\|\le\delta$, $\|A_\eta-A\|\le\eta$. Пусть выполнены условия (I.8)-(I.10). Если параметр $r=r(\delta,\eta)$ в приближении (I.7) выбрать так, что

$$r\to\infty,\ (\delta+\eta)r\to 0 \quad \text{при } \delta\to 0,\ \eta\to 0, \qquad (4.1)$$

то

$$u_{r(\delta,\eta)}\to u_* \quad \text{при } \delta\to 0,\ \eta\to 0, \qquad (4.2)$$

где u_* – ближайшее к u_0 решение уравнения (I.I).

Если начальная погрешность представима в виде

$$u_0-u_*=|A|^p w,\quad \|w\|\le\rho,\quad 0<p\le p_0, \qquad (4.3)$$

то, положив

$$r=d\,(\delta+\eta)^{-1/(p+1)},\quad d=const>0, \qquad (4.4)$$

справедлива оценка погрешности

$$\|u_{r(\delta,\eta)}-u_*\|\le c_{p,\rho,d}\,(\delta+\eta)^{p/(p+1)},\quad 0<p\le p_0. \qquad (4.5)$$

Комментарии. I. Сходимость (4.2) при любом $f\in\mathcal{R}(A)$ означает, что метод $\{(I.7),\ (4.I)\}$ является $(\mathfrak{A},\mathfrak{A}')$-регуляризатором, где $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}'\subset\mathcal{L}(E,E)$ – множество самосопряженных операторов.

2. Из оценки (4.5) следует (см. п. 0.3), что метод $\{(I.7),\ (4.4)\}$ имеет оптимальный порядок на классе решений (4.3).

3. В случае итерационных методов вместо (4.4) выбираем $r = \mathrm{int}[d(\delta+\eta)^{-1/(p+1)}]$, где int означает целую часть числа. В случае операторных итераций {(I.25), (I.26)} выбираем наибольшее из чисел K, таких что $m^K \le d(\delta+\eta)^{-1/(p+1)}$, и положим $r = m^K$. Свойства регуляризации и оптимальности при этом сохраняются.

Доказательство теоремы. Из (I.7) следует, что

$$u_r - u_* = G_{r,\eta}(u_0 - u_*) + g_r(A_\eta)(f_\delta - A_\eta u_*), \quad G_{r,\eta} = I - A_\eta g_r(A_\eta); \quad (4.6)$$

мы учли, что A_η перестановочен с любой функцией от A_η, в частности, $A_\eta g_r(A_\eta) = g_r(A_\eta) A_\eta$.

Покажем, что

$$G_{r,\eta}(u_0 - u_*) \to 0 \text{ при } r \to \infty, \ \eta \to 0. \quad (4.7)$$

Доказательство заключается в проверке условий теоремы Банаха—Штейнгауза: I. нормы операторов $G_{r,\eta}$ в силу условия (I.10) ограничены независящей от r и η постоянной γ_0:

$$\|G_{r,\eta}\| \le \sup_{\lambda\in\sigma(A_\eta)} |1-\lambda g_r(\lambda)| \le \sup_{-a_0\le\lambda\le a} |1-\lambda g_r(\lambda)| \le \gamma_0;$$

2. поскольку u_* – ближайшее к u_0 решение уравнения (I.I), то $u_0 - u_*$ ортогонален $N(A)$, т.е. $u_0 - u_* \in N(A)^\perp = \overline{R(A)}$;
3. для элементов вида $u = Av$ ($v \in E$), образующих в $\overline{R(A)}$ плотное подмножество, имеем

$$\|G_{r,\eta} u\| = \|G_{r,\eta} A v\| \le \|G_{r,\eta}(A - A_\eta) v\| + \|G_{r,\eta} A_\eta v\| \le$$

$$\le \gamma_0 \eta \|v\| + \|v\| \sup_{-a_0\le\lambda\le a} |\lambda|\,|1-\lambda g_r(\lambda)| \to 0 \quad \text{при } r\to\infty, \eta\to 0.$$

Далее, $f_\delta - A_\eta u_* = (f_\delta - f) - (A_\eta - A) u_*$, откуда

$$\|f_\delta - A_\eta u_*\| \le \delta + \|u_*\|\eta.$$

По условию (I.9)

$$\|g_r(A_\eta)\| \le \sup_{\lambda\in\sigma(A_\eta)} |g_r(\lambda)| \le \gamma r,$$

поэтому

$$\|g_r(A_\eta)(f_\delta - A_\eta u_*)\| \le \gamma r(\delta + \|u_*\|\eta). \quad (4.8)$$

Из (4.6)-(4.8) и условия (4.I) выбора r следует сходимость (4.2).

Пусть теперь начальная погрешность имеет вид (4.3). Оценим первый член правой части (4.6):

$$\|G_{r,\eta}(u_0-u_*)\|=\|G_{r,\eta}|A|^p w\|\le \|G_{r,\eta}(|A|^p-|A_\eta|^p)w\|+$$

$$+\|G_{r,\eta}|A_\eta|^p w\|\le \gamma_0\||A|^p-|A_\eta|^p\|\,\|w\|+\gamma_p r^{-p}\|w\|.$$

Мы здесь опять воспользовались условием (I.IO). Для нормы $\||A|^p-|A_\eta|^p\|$ справедлива оценка

$$\||A|^p-|A_\eta|^p\|\le c_p(1+|\ln\eta|)\eta^{\min\{1,p\}} \quad (0<p<\infty) \qquad (4.9)$$

(см. лемму 3.2). В итоге,

$$\|G_{r,\eta}(u_0-u_*)\|\le\left[\gamma_0 c_p(1+|\ln\eta|)\eta^{\min\{1,p\}}+\gamma_p r^{-p}\right]\rho \quad (0\le p\le p_0).$$

Совместно с (4.6), (4.8) и (4.4) это дает оценку (4.5).

Теорема 4.I доказана.

Замечание. Как видно из доказательства, сходимость (4.2) имеет место и в том случае, когда вместо (I.IO) выполнены следующие более слабые условия:

$$\left.\begin{aligned}&\sup_{-a_0\le\lambda\le a}|1-\lambda g_r(\lambda)|\le\gamma_0=const \quad (r>0),\\ &\sup_{-a_0\le\lambda\le a}|\lambda|\,|1-\lambda g_r(\lambda)|\to 0 \quad \text{при } r\to\infty.\end{aligned}\right\}(4.IO)$$

С другой стороны, при выводе оценки сходимости (4.5) условие (I.IO) использовалось в полном объеме.

В силу этого замечания, например, и итерационный метод (2.I3) определяет регуляризатор (см. (2.I4)). Но этот метод неоптимального порядка.

Аналогичное замечание можно сделать об остальных теоремах данного параграфа.

4.2. Самосопряженная задача с неотрицательным оператором. Если $A=A^*\ge 0$, $A_\eta=A_\eta^*\ge 0$, то применима теорема 4.I с $a_0=0$, т.е. условиями (I.5) и (I.6). Здесь мы обсудим случай, когда $A=A^*\ge 0$, а операторы $A_\eta=A_\eta^*$ необязательно неотрицательны. Как видно из примеров п. 2.I, для довольно широкого класса методов функции g_r определены, каждая на своем отрезке $[\alpha r^{-1}, a]$, $\alpha>0$, причем нет общего отрезка $[-a_0,a]$ с $a_0>0$, на котором соблюдались бы условия (I.9) и

(I.10). Теорема 4.1 для таких методов неприменима. Однако, верно следующее видоизменение теоремы 4.1.

Теорема 4.2. Пусть $E=F$, $A=A^*\geq 0$, $A_\eta = A_\eta^*$, $f\in\mathcal{R}(A)$, $\|f_\delta - f\|\leq\delta$, $\|A_\eta - A\|\leq\eta$. Пусть функции $g_r:[\alpha r^{-1}, a]\to\mathbb{C}$ с $\alpha>0$, $a\geq\|A_\eta\|$ $(0<\eta\leq\eta_0)$ удовлетворяют условиям (1.5), (1.6) и (1.14). Тогда справедливы все утверждения теоремы 4.1. (В данном случае $|A|=A$).

Доказательство отличается от доказательства теоремы 4.1 лишь второстепенными деталями (см. (1.14), (1.14')):

$$\|G_{r,\eta}\|\leq \sup_{\alpha r^{-1}\leq\lambda\leq a}|1-\lambda g_r(\lambda)|\leq\max\{\gamma_0,\gamma_0'\},$$

$$\|g_r(A_\eta)\|\leq \sup_{\alpha r^{-1}\leq\lambda\leq a}|g_r(\lambda)|\leq r\max\{\gamma,\gamma'\},\quad r\leq\alpha\eta^{-1}.$$

4.3. Несамосопряженная задача. Некоторый результат о сходимости метода (1.13) можно сразу получить из теоремы 4.1. Однако, этот результат можно существенно усилить. Это связано с тем, что в симметризированном уравнении $A^*Au = A^*f$ свободный член не произвольный, перед f стоит оператор A^*.

Теорема 4.3. Пусть $A\in\mathcal{L}(E,F)$, $f\in\mathcal{R}(A)$, $\|f_\delta - f\|\leq\delta$, $\|A_\eta - A\|\leq\eta$. Пусть выполнены условия (1.12), (1.5) и (1.6).

Если параметр $r=r(\delta,\eta)$ в приближении (1.13) выбран так, что

$$r\to\infty,\quad (\delta+\eta)^2 r\to 0 \text{ при } \delta\to 0,\ \eta\to 0, \tag{4.11}$$

то

$$u_{r(\delta,\eta)}\to u_* \text{ при } \delta\to 0,\ \eta\to 0, \tag{4.12}$$

где u_* – ближайшее к u_0 решение[1)] уравнения (1.1).

1) Попрежнему считаем, что $u_0\in E$ не зависит от δ и η. Однако, как эта теорема, так и последующие результаты о несамосопряженной задаче сохраняют силу в случае, когда $u_0 = u_{0,\eta} = A_\eta^* v_0$, $v_0\in F$ фиксирован; под u_* тогда следует понимать ближайшее к A^*v_0 решение уравнения (1.1). К указанной форме начального приближения приходим, если вычисления проводятся по схеме (1.15), равносильной (1.13).

Если начальная погрешность представима в виде

$$u_0 - u_* = |A|^p w, \quad \|w\| \le \rho, \quad 0 < p \le 2p_0, \tag{4.13}$$

то, положив

$$\tau = d(\delta+\eta)^{-2/(p+1)}, \quad d = \mathrm{const} > 0, \tag{4.14}$$

справедлива оценка погрешности

$$\|u_{\tau(\delta,\eta)} - u_*\| \le c_{p,\rho,d}\,(\delta+\eta)^{p/(p+1)}, \quad 0<p\le 2p_0. \tag{4.15}$$

Таким образом, метод $\{(1.13),\ (4.11)\}$ является $(\mathfrak{A},\mathfrak{A}')$-регуляризатором с $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' = \mathcal{L}(E,F)$, а метод $\{(1.13),\ (4.14)\}$ имеет на классе (4.13) точных решений оптимальный порядок.

Доказательство. Для определенного формулой (1.13) приближения u_τ имеем

$$u_\tau - u_* = K_{\tau,\eta}(u_0 - u_*) + g_\tau(A_\eta^* A_\eta)A_\eta^*(f_\delta - A_\eta u_*), \tag{4.16}$$

где

$$K_{\tau,\eta} = I - A_\eta^* A_\eta\, g_\tau(A_\eta^* A_\eta).$$

При помощи теоремы Банаха—Штейнгауза убеждаемся, что

$$\|K_{\tau,\eta}(u_0-u_*)\| \to 0 \text{ при } \tau\to\infty,\ \eta\to 0. \tag{4.17}$$

Действительно, $\|K_{\tau,\eta}\| \le \gamma_0$ по условию (1.6); $u_0 - u_* \in N(A)^\perp = \overline{R(A^*)}$; для элементов вида $u = A^*Av$ $(v\in E)$, образующих в $\overline{R(A^*)}$ плотное подмножество, имеем

$$\|K_{\tau,\eta}u\| = \|K_{\tau,\eta}A^*Av\| \le \|K_{\tau,\eta}(A^*A - A_\eta^*A_\eta)v\| + \|K_{\tau,\eta}A_\eta^*A_\eta v\| \le$$

$$\le \gamma_0(\|A\|+\|A_\eta\|)\|v\|\eta + \|v\| \sup_{0\le\lambda\le a} \lambda|1-\lambda g_\tau(\lambda)| \to 0 \text{ при } \tau\to\infty,\ \eta\to 0$$

Оценим норму оператора $g_\tau(A_\eta^*A_\eta)A_\eta^*$. Воспользовавшись полярным разложением

$$A_\eta = \mathcal{U}_\eta |A_\eta|,$$

где $|A_\eta| = (A_\eta^*A_\eta)^{1/2}$, $\mathcal{U}_\eta$ – частично изометрический оператор, $\|\mathcal{U}_\eta\| = 1$, получаем

$$g_\tau(A_\eta^*A_\eta)A_\eta^* = g_\tau(A_\eta^*A_\eta)(A_\eta^*A_\eta)^{1/2}\mathcal{U}_\eta^*$$

и

$$\|g_r(A_\eta^*A_\eta)A_\eta^*\| \le \sup_{0\le\lambda\le a} |g_r(\lambda)|\lambda^{1/2} \le \gamma_* r^{1/2}.$$

Здесь

$$\gamma_* = \sup_{r>0}\left[r^{-1/2}\sup_{0\le\lambda\le a}|g_r(\lambda)|\lambda^{1/2}\right] \le$$

$$\le \sup_{r>0}\left[r^{-1}\sup_{0\le\lambda\le a}|g_r(\lambda)|\cdot\sup_{0\le\lambda\le a}\lambda|g_r(\lambda)|\right]^{1/2} \le \left[\gamma(1+\gamma_0)\right]^{1/2},$$

так как по условию (I.6)

$$\lambda|g_r(\lambda)| = |-\lambda g_r(\lambda)| \le |1-\lambda g_r(\lambda)|+1 \le \gamma_0+1.$$

Итак,

$$\|g_r(A_\eta^*A_\eta)A_\eta^*(f_\delta - A_\eta u_*)\| \le \gamma_* r^{1/2}(\delta + \|u_*\|\eta). \qquad (4.18)$$

Из (4.16)–(4.18) на основании условия (4.11) выбора r следует сходимость (4.12).

Пусть начальная погрешность представима в виде (4.13). Докажем оценку (4.15). Имеем

$$\|K_{r,\eta}(u_0-u_*)\| = \|K_{r,\eta}|A|^p w\| \le \|K_{r,\eta}(|A|^p-|A_\eta|^p)w\| +$$

$$+\|K_{r,\eta}|A_\eta|^p w\| \le \gamma_0\,\||A|^p-|A_\eta|^p\|\,\|w\| + \gamma_{p/2}\, r^{-p/2}\|w\|,$$

так как $K_{r,\eta}|A_\eta|^p = (I-A_\eta^*A_\eta g_r(A_\eta^*A_\eta))(A_\eta^*A_\eta)^{p/2}$ и по условия (I.6)

$$\|K_{r,\eta}|A_\eta|^p\| \le \sup_{0\le\lambda\le a}\lambda^{p/2}|1-\lambda g_r(\lambda)| \le \gamma_{p/2}\, r^{-p/2}.$$

Воспользовавшись также неравенством (4.9), получаем

$$\|K_{r,\eta}(u_0-u_*)\| \le \left[\gamma_0 c_p(1+|\ln\eta|)\eta^{\min\{1,p\}} + \gamma_{p/2} r^{-p/2}\right]\rho.$$

Подставив сюда и в (4.18) r по формуле (4.14), приходим к оценке (4.15).

Теорема 4.3 доказана.

Оценки (4.15) и (4.5), хотя и имеют одинаковый порядок, дос[illegible]гаются при разных r (ср. (4.14) и (4.4)). Вычисления с большим r труднее проводить. Например, в итерационных методах r – это количество итераций, а в методах Лаврентьева и Тихонова с ростом r ухудшается устойчивость относительно погрешностей окружения. По указанной причине в самосопряженной задаче (I.1) переход к уравнению $A^2u = Af$ и методам класса (1.13) нежелательны, лучше применять методы класса

(I.7) непосредственно к уравнению (I.I).

Рассмотрим теперь случай, когда уравнение (I.I) разрешимо в смысле наименьших квадратов. Напомним, что Q -ортопроектор в F, проектирующий на $\overline{\mathcal{R}(A)}$.

Теорема 4.4. Пусть $Qf\in\mathcal{R}(A)$, $\|f_\delta-f\|\le\delta$, $\|A_\eta-A\|\le\eta$. Пусть выполнены условия (I.I2), (I.5) и (I.6).

Если параметр $r=r(\delta,\eta)$ в приближении (I.I3) выбран так, что

$$r\to\infty,\quad (\delta^2+\eta)r\to 0 \text{ при } \delta\to 0,\ \eta\to 0, \tag{4.19}$$

то

$$u_{r(\delta,\eta)}\to u_* \text{ при } \delta\to 0,\quad \eta\to 0, \tag{4.20}$$

где u_* – ближайшее к u_0 решение уравнения (I.I) в смысле наименьших квадратов.

Если начальная погрешность представима в виде (4.I3), то, положив

$$r=d(\delta+\eta)^{-2/(p+2)},\quad d=const>0, \tag{4.21}$$

справедлива оценка погрешности

$$\|u_{r(\delta,\eta)}-u_*\|\le c_{p,\varrho,d}(\delta+\eta)^{p/(p+2)},\quad 0<p\le 2p_0. \tag{4.22}$$

Доказательство повторяет рассуждения, проведенные при доказательстве предыдущей теоремы. Видоизменяется только оценка (4.I8), так как теперь вместо $Au_*=f$ имеем $Au_*=Qf$. Соответственно,

$$f_\delta-A_\eta u_*=(f_\delta-f)-(A_\eta-A)u_*+(f-Qf).$$

Поскольку $QA=A$, т.е. $(I-Q)A=0$, то перейдя к сопряженным операторам и учитывая самосопряженность ортопроектора Q, получаем $A^*(I-Q)=0$ и

$$\|A_\eta^*(f-Qf)\|=\|(A_\eta^*-A^*)(f-Qf)\|\le\eta\|f-Qf\|\le\eta\|f\|.$$

Вместо (4.I8) получаем, таким образом, неравенство

$$\|g_r(A_\eta^*A_\eta)A_\eta^*(f_\delta-A_\eta u_*)\|\le\gamma_* r^{1/2}(\delta+\|u_*\|\eta)+\gamma r\|f\|\eta. \tag{4.23}$$

В остальном повторяем рассуждения доказательства теоремы 4.3.

4.4. Случай точно заданного оператора. I. Постоянные $c_{p,\varrho,d}$ в оценках сходимости (4.5), (4.I5) и (4.22) можно вычислить, но они имеют довольно сложный вид. Ограничимся случаем $\eta=0$, т.е. случаем точно заданного оператора $A_\eta=A$.

Проследив еще раз доказательство теоремы 4.I, увидим, что оценка (4.5) принимает вид

$$\|u_\tau - u_*\| \le (\gamma_p \rho d^{-p} + \gamma d)\delta^{p/(p+1)}, \quad \tau = d\delta^{-1/(p+1)}, \quad 0<p\le p_0.$$

Минимизируя эту оценку по d, получаем

$$d = (p\gamma_p \rho/\gamma)^{1/(p+1)}, \tag{4.24}$$

$$\|u_\tau - u_*\| \le (1+p)p^{-p/(p+1)}\gamma^{p/(p+1)}\gamma_p^{1/(p+1)}\rho^{1/(p+1)}\delta^{p/(p+1)}, \quad 0<p\le p_0. \tag{4.25}$$

2. Проследив доказательство теоремы 4.3, приведем оценку (4.I5) в случае $\eta=0$ к виду

$$\|u_\tau - u_*\| \le (\gamma_{p/2}\rho d^{-p/2} + \gamma_* d^{1/2})\delta^{p/(p+1)}, \quad \tau = d\delta^{-2/(p+1)},$$
$$0<p\le 2p_0.$$

Минимизируя по d, получаем

$$d = (p\gamma_{p/2}\rho/\gamma_*)^{2/(p+1)}, \tag{4.26}$$

$$\|u_\tau - u_*\| \le (1+p)p^{-p/(p+1)}\gamma_*^{p/(p+1)}\gamma_{p/2}^{1/(p+1)}\rho^{1/(p+1)}\delta^{p/(p+1)}, \quad 0<p\le 2p_0. \tag{4.27}$$

Напомним, что

$$\gamma_* = \sup_{\tau>0}\left[\tau^{-1/2}\sup_{0\le\lambda\le a}\lambda^{1/2}|g_\tau(\lambda)|\right]. \tag{4.28}$$

Фигурирующая в оценках (4.25) и (4.27) функция $\varphi(p) = (1+p)p^{-p/(p+1)}$ изображена на рис. 4.I.

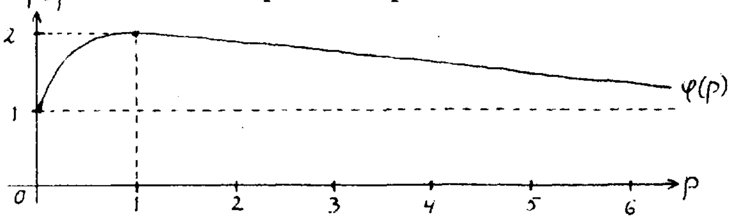

Рис. 4.I. График функции $\varphi(p)=(1+p)p^{-p/(p+1)}$. Для нее $\varphi(0)=1$, $\varphi(1)=2$ (максимум), $\varphi(\infty)=1$, $\varphi'(p) = -\frac{\ln p}{(p+1)^2}\varphi(p)$.

4.5. Оптимальность некоторых методов. Оценки (4.25) и (4.27) позволяют установить оптимальность некоторых из рассмотренных в § 2 методов в смысле определения п. 0.3. Обозначим

$$\mathcal{M}_{p,\rho} = \{ u_* \in E : \ u_* = |A|^p w, \ \|w\| \le \rho \}.$$

Согласно (0.12) для любого метода, в частности, для методов вида

$$u_r = g_r(A^*A)A^* f_\delta$$

и

$$u_r = g_r(A) f_\delta \ \text{(случай } E=F,\ A=A^* \text{)}$$

имеем

$$\sup_{u_* \in \mathcal{M}_{p,\rho},\ \|f_\delta - f\| \le \delta} \|u_r - u_*\| \ge \rho^{1/(p+1)} \delta^{p/(p+1)}. \qquad (4.29)$$

Если для некоторого метода в (4.29) достигается знак равенства, то он автоматически будет оптимальным.

Рассмотрим случай $E=F$, $A=A^*$. В соответствии с оценкой (4.25) метод

$$u_r = g_r(A) f_\delta, \quad r = (p\gamma_p \rho/\gamma)^{1/(p+1)} \delta^{-1/(p+1)} \qquad (4.30)$$

оптимален на классе точных решений $\mathcal{M}_{p,\rho}$, если

$$\psi(p) \equiv (1+p)p^{-p/(p+1)} \gamma^{p/(p+1)} \gamma_p^{1/(p+1)} \le 1. \qquad (4.31)$$

Для методов спектральной срезки (2.5) и (2.16), как показывает элементарная проверка, это условие выполнено. Таким образом, метод

$$u_r = A^{-1}\left(I - P\left(\tfrac{1}{r}\right)\right) f_\delta + r P\left(\tfrac{1}{r}\right) f_\delta, \quad r = \frac{p}{p+1} \rho^{1/(p+1)} \delta^{-1/(p+1)}$$
$$(A = A^* \ge 0) \qquad (4.32)$$

оптимален на классе $\mathcal{M}_{p,\rho}$, $p>0$, $\rho>0$. Не следует думать, что оптимальный метод единственен. Второй пример оптимального метода для самосопряженной задачи предоставляет метод (2.9) при $p=1$:

$$u_r = \mathrm{Re}\,(i r^{-1} I + A)^{-1} f_\delta, \quad r = \rho^{1/2} \delta^{-1/2} \quad (A = A^*).$$

Анализ условия (4.31) дает наглядный критерий оптимальности метода. Ради простоты ограничимся случаем $A=A^* \ge 0$ и вещественно-значных $g_r : [0,a] \to R$. Неравенство (4.31) можно переписать в виде $\gamma_p \le c_{p,\gamma}$, где

$$c_{p,\gamma} = \frac{p^p}{(1+p)^{1+p}} \gamma^{-p}.$$

С учетом определения γ_p неравенство примет вид

$$|1-\lambda g_r(\lambda)| \le c_{p,\gamma} r^{-p} \lambda^{-p} \qquad (0 \le \lambda \le a).$$

При $g_r(\lambda) \le 1/\lambda$ отсюда получаем

$$g_r(\lambda) \ge (1 - c_{p,\gamma} r^{-p} \lambda^{-p}) \lambda^{-1},$$

а при $g_r(\lambda) > 1/\lambda$ получаем

$$g_r(\lambda) \le (1 + c_{p,\gamma} r^{-p} \lambda^{-p}) \lambda^{-1}.$$

Не следует забывать и условие (I.5), согласно которому $|g_r(\lambda)| \le \gamma r$. В итоге, метод оптимален на $\mathcal{M}_{p,\rho}$, если

$$\max\{-\gamma r, (1-c_{p,\gamma} r^{-p}\lambda^{-p})\lambda^{-1}\} \le g_r(\lambda) \le \min\{\gamma r, (1+c_{p,\gamma} r^{-p}\lambda^{-p})\lambda^{-1}\}$$
$$(0 \le \lambda \le a, \quad r > 0).$$

Это условие лишь в точке $\lambda_r = p/((p+1)\gamma r)$ однозначно определяет значение $g_r(\lambda_r) = \gamma r$; в остальных точках остается некоторый произвол. На рис. 4.2 заштрифована область, в которой должен располагаться график функции g_r. В случае необязательно неотрицательного оператора A эта область продолжается центрально-симметричным отображением в левую полуплоскость.

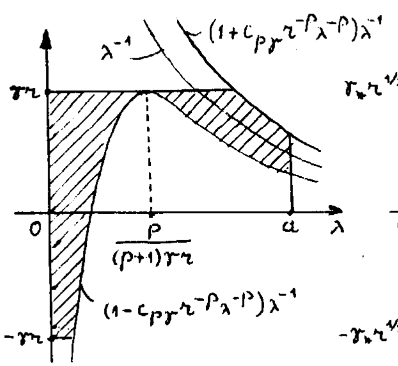

Рис. 4.2

Метод (4.30) оптимален на $\mathcal{M}_{p,\rho}$, если график g_r расположен в заштрифованной области.

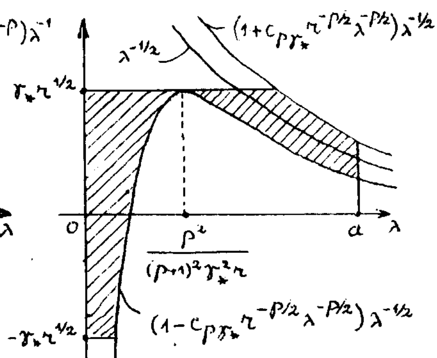

Рис. 4.3

Метод (4.33) оптимален на $\mathcal{M}_{p,\rho}$, если график $\lambda^{1/2} g_r(\lambda)$ расположен в заштрифованной области.

Рассмотрим случай несамосопряженной задачи. В соответствии с (4.27) метод

$$u_r = g(A^*A)A^*f_\delta, \quad r = (p\gamma_{p/2}\,\rho/\gamma_*)^{2/(p+1)}\delta^{-2/(p+1)} \qquad (4.33)$$

оптимален на $\mathcal{M}_{p,\rho}$, если

$$\psi_*(p) \equiv (1+p)p^{-p/(p+1)}\gamma_*^{p/(p+1)}\gamma_{p/2}^{1/(p+1)} \leq 1. \qquad (4.34)$$

Отсюда получаем критерий оптимальности (см. рис. 4.3)

$$\max\{-\gamma_* r^{1/2},\ (1-c_{p,\gamma_*} r^{-p/2}\lambda^{-p/2})\lambda^{-1/2}\} \leq \lambda^{1/2} g_r(\lambda) \leq$$

$$\leq \min\{\gamma_* r^{1/2},\ (1+c_{p,\gamma_*} r^{-p/2}\lambda^{-p/2})\lambda^{-1/2}\} \qquad (0\leq\lambda\leq a,\ r>0),$$

$$c_{p,\gamma_*} = \frac{p^p}{(1+p)^{1+p}}\gamma_*^{-p}.$$

Для метода Тихонова (2.17) $\gamma_* = 1/2$, $\gamma_p = p^p(1-p)^{1-p}$, и условие (4.34) при $p=1$ выполнено. Таким образом, метод

$$u_r = (r^{-1}I + A^*A)^{-1}A^*f_\delta, \qquad r = \rho\delta^{-1}$$

оптимален на $\mathcal{M}_{1,\rho}$.

Более универсальный (но трудно реализуемый, см. п. 2.4) пример оптимального метода предоставляет

$$u_r = |A|^{-1}(I - \hat{P}(\tfrac{1}{r}))\mathcal{U}^*f_\delta + r\hat{P}(\tfrac{1}{r})\mathcal{U}^*f_\delta, \quad r = \frac{p}{p+1}\rho^{1/(p+1)}\delta^{-1/(p+1)},$$

где $\mathcal{U}$ – частичная изометрия из полярного разложения $A = \mathcal{U}|A|$, а $\hat{P}(\lambda)$ – спектральное семейство проекторов оператора $|A| = (A^*A)^{1/2}$. Этот метод не укладывается в рамки методов (4.33); его оптимальность на $\mathcal{M}_{p,\rho}$ при любых $p>0$, $\rho>0$ вытекает из оптимальности метода (4.32) для задач с $A = A^* \geq 0$ (см. п. 1.6).

В таблице I иллюстрируется поведение коэффициентов $\psi(p)$ и $\psi_*(p)$ для рассмотренных в § 2 методов. Метод тем ближе к оптимальному, чем ближе $\psi(p)$, соответственно $\psi_*(p)$, к 1. Для самосопряженной задачи, наряду с методом спектральной срезки (2.5), хорошими свойствами обладают итерационные методы. Для несамосопряженной задачи метод Тихонова лучше остальных при малых p (при $0<p\leq 1$). В широком диапазоне изменения p (при $0<p\leq 10$) хорошими свойствами обладает также метод задачи Коши; при $p\approx 2.51286$ он оптимален. Итерационные методы обладают в точности такими же характеристиками в асимптотическом смысле. Заметим, что

Таблица 4.I

Сводка методов и их характеристик

Задача (I.I), $A=A^*\geq 0$				
Метод	Условия	γ	γ_p	p_0
Лаврентьева (2.I)		1	$p^p(1-p)^{1-p}$	1
Лаврентьева (2.2),ит.	$m=2$	2	$(\frac{p}{2})^p(1-\frac{p}{2})^{2-p}$	2
задачи Коши (2.3)		1	$(p/e)^p$	∞
спектр. срезки (2.4)		1	1	∞
спектр. срезки (2.5)		1	$p^p/(1+p)^{1+p}$	∞
итер. явн. (2.6)	$0<\mu<\frac{1}{\|A\|}$	μ	$(p/(\mu e))^p$	∞
итер. неявн. (2.7)	$n\geq p$	$1/\alpha$	$(\alpha p)^p$	∞
итер. (I.20), (I.I9)	$n\to\infty$	$\hat{\gamma}=g(0)$	$\hat{\gamma}_p=(p/(g(0)e))^p$	∞
$A=A^*$ необязательно неотрицателен				
Лаврентьева (2.8),мод.		1	$p^{p/2}(1-p)^{(1-p)/2}$	1
Лаврентьева (2.9),мод.		$1/2$	$(\frac{p}{2})^{p/2}(1-\frac{p}{2})^{(2-p)/2}$	2
Лаврентьева (2.I0),мод.,ит.	$m=2$	2	$(\frac{p}{2})^{p/2}(1-\frac{p}{2})^{(2-p)/2}$	2
Лаврентьева (2.II),мод.,ит.	$m=2$	0.7872	$(\frac{p}{4})^{p/2}(1-\frac{p}{4})^{(4-p)/2}$	4
спектр. срезки (2.I5)		1	1	∞
спектр. срезки (2.I6)		1	$p^p/(1+p)^{1+p}$	∞

Несамосопряженная задача (I.I)				
Метод	Условия	γ_*	γ_p	p_0
Тихонова (2.I7)		$1/2$	$p^p(1-p)^{1-p}$	1
Тихонова (2.I9),ит.	$m=2$	0.7872	$(\frac{p}{2})^p(1-\frac{p}{2})^{2-p}$	2
задачи Коши (2.20)		$\theta\approx 0.6382$	$(p/e)^p$	∞
спектр. срезки (2.2I)		1	1	∞
спектр. срезки (2.22)		1	$p^p/(1+p)^{1+p}$	∞
итер. явн. (2.23)	$0<\mu\leq\frac{2}{\|A\|^2}$	$\mu^{1/2}$	$(p/(\mu e))^p$	∞
итер. неявн. (2.24)	$n\geq p$	$\alpha^{-1/2}$	$(\alpha p)^p$	∞
итер. (I.23), (I.I9)	$n\to\infty$	$\hat{\gamma}_*=\theta\sqrt{g(0)}$	$\hat{\gamma}_p=(p/(g(0)e))^p$	∞
класс методов п.7.I,принцип невязки (7.26),оценка (7.28)				≥ 1

Таблица 4.I (продолжение)

Коэффициенты $\psi(p)$ и $\psi_*(p)$ в оценках (4.25) и (4.27)

$\psi(p)=(1+p)p^{-p/(p+1)}\gamma^{p/(p+1)}\gamma_p^{1/(p+1)},\quad 0\le p\le p_0$										
Метод	$p=0$	$p=0.1$	$p=1/4$	$p=1/2$	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$	$p=5$	$p=\infty$
(2.I)	I	I.0I	I.05	I.I9	2.00	–	–	–	–	–
(2.2)	I	I.0I	I.04	I.I3	I.4I	3.00	–	–	–	–
(2.3)	I	I.0I	I.02	I.07	I.2I	I.54	I.89	2.25	2.6I	∞
(2.4)	I	I.36	I.66	I.90	2.00	I.88	I.74	I.64	I.55	I
(2.5)	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I
(2.6)	I	I.0I	I.02	I.07	I.2I	I.54	I.89	2.25	2.6I	∞
(2.7)	I	I.I0	I.25	I.50	2.00	3.00	4.00	5.00	6.00	∞
(I.20)	I	I.0I	I.02	I.07	I.2I	I.54	I.89	2.25	2.6I	∞
(2.8)	I	I.I7	I.33	I.5I	2.00	–	–	–	–	–
(2.9)	I	I.07	I.06	I.03	I	I.I9	–	–	–	–
(2.I0)	I	I.2I	I.4I	I.65	2.00	3.43	–	–	–	–
(2.II)	I	I.07	I.08	I.05	I.0I	I.02	I.I2	I.36	–	–
(2.I5)	I	I.36	I.65	I.89	2.00	I.89	I.75	I.65	I.57	I
(2.I6)	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I

$\psi_*(p)=(1+p)p^{-p/(p+1)}\gamma_*^{p/(p+1)}\gamma_{p/2}^{1/(p+1)},\quad 0\le p\le 2p_0$										
Метод	$p=0$	$p=0.1$	$p=1/4$	$p=1/2$	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$	$p=5$	$p=\infty$
(2.I7)	I	I.07	I.06	I.03	I	I.I9	–	–	–	–
(2.I9)	I	I.07	I.08	I.05	I.0I	I.02	I.I2	I.36	–	–
(2.20)	I	I.09	I.II	I.08	I.05	I.0I	I.0I	I.02	I.05	∞
(2.2I)	I	I.33	I.66	I.90	2.00	I.88	I.74	I.64	I.55	I
(2.22)	I	I.I3	I.2I	I.25	I.24	I.I9	I.I5	I.I2	I.II	I
(2.23)	I	I.I3	I.22	I.27	I.3I	I.36	I.4I	I.47	I.52	∞
(2.24)	I	I.I8	I.35	I.50	I.68	I.90	2.04	2.I0	2.32	∞
(I.23)	I	I.09	I.II	I.08	I.05	I.0I	I.0I	I.02	I.05	∞
п.7.I	I	I.07	I.I5	I.26	I.4I	(при $1<p\le p_0$ оценка (7.29))				

асимптотические при $\delta\to 0$ (при $n\to\infty$) свойства итерационных методов $\{(1.20), (1.19)\}$ и $\{(1.23), (1.19)\}$ не зависят от функции g, по которой метод строится.

В последней строке таблицы приведены данные о классе методов (см. оценку (7.28)), описанных в п. 7.1; параметр r для них выбирается не априорным способом для целого класса $\mathcal{M}_{p,\rho}$, а индивидуально для каждого f_δ по принципу невязки (по условию (7.26)).

4.6. <u>Случай точно заданных оператора и правой части.</u> В случае точных данных $f_\delta = f$, $A_\eta = A$ для приближений

$$u_r = (I - A g_r(A)) u_0 + g_r(A) f \tag{4.35}$$

и

$$u_r = (I - A^* A g_r(A^* A)) u_0 + g_r(A^* A) A^* f \tag{4.36}$$

можно поставить вопрос о быстроте сходимости при $r\to\infty$.

<u>Теорема 4.5</u>. Пусть $E=F$, $A=A^*$, $f\in\mathcal{R}(A)$ и выполнено условие (1.10). Тогда для приближения (4.35) имеет место сходимость

$$u_r \to u_* \quad \text{при} \quad r\to\infty, \tag{4.37}$$

где u_* – ближайшее к u_0 решение уравнения (1.1). Если

$$u_0 - u_* = |A|^p w, \quad \|w\|\le\rho, \quad 0<p\le p_0, \tag{4.38}$$

то

$$\|u_r - u_*\| \le \gamma_p \rho r^{-p}, \quad 0<p\le p_0, \tag{4.39}$$

$$\|u_r - u_*\| = o(r^{-p}), \quad 0<p<p_0. \tag{4.40}$$

<u>Доказательство</u>. Сходимость (4.37) и оценка (4.39) немедленно вытекают из условия (1.10) и равенства

$$u_r - u_* = (I - A g_r(A))(u_0 - u_*) = (I - A g_r(A)) |A|^p w.$$

Докажем оценку (4.40). Достаточно показать, что при $0<p<p_0$

$$\|(I - A g_r(A)) |A|^p w\| = o(r^{-p}),$$

т.е.

$$r^p \|(I - A g_r(A)) |A|^p w\| \to 0 \quad \text{при } r\to\infty.$$

Это вытекает из теоремы Банаха—Штейнгауза: по условию (1.10)

$$r^p \|(I - A g_r(A))|A|^p\| \le \gamma_p,$$

а для элементов вида $u = |A|^{p_0 - p} v$ $(v \in E)$ имеем

$$r^p \|(I - A g_r(A))|A|^p u\| = r^p \|(I - A g_r(A))|A|^{p_0} v\| \le \gamma_{p_0} r^{p - p_0} \|v\| \to 0;$$

элементы указанно вида образуют плотное подмножество в подпространстве $\mathcal{N}(A)^\perp$, на котором рассматриваемые операторы отличны от нуля.

Теорема 4.5 доказана.

Сходимость (4.37) остается в силе, если вместо условия (I.I0) выполнены условия (4.I0).

Теорема 4.6. Пусть $Qf \in \mathcal{R}(A)$ и выполнено условие (I.6). Тогда для приближения (4.36) имеет место сходимость

$$u_r \to u_* \quad \text{при} \quad r \to \infty, \tag{4.4I}$$

где u_* – ближайшее к u_0 решение уравнения (I.I) в смысле наименьших квадратов. Если

$$u_0 - u_* = |A|^p w, \quad \|w\| \le \rho, \quad 0 < p \le 2p_0, \tag{4.42}$$

то

$$\|u_r - u_*\| \le \gamma_{p/2}\, \rho\, r^{-p/2}, \quad 0 < p \le 2p_0, \tag{4.43}$$

$$\|u_r - u_*\| = o\left(r^{-p/2}\right), \quad 0 < p < 2p_0. \tag{4.44}$$

Доказательство основывается на равенстве

$$u_r - u_* = (I - A^* A g_r(A^* A))(u_0 - u_*)$$

и аналогично доказательству теоремы 4.5.

Сравнение оценок (4.39) и (4.43) говорит еще раз о том, что в случае самосопряженных задач переход от уравнения (I.I) к уравнению $A^2 u = Af$ невыгоден – сходимость замедляется.

§ 5. ПРИНЦИП НЕВЯЗКИ: САМОСОПРЯЖЕННАЯ ЗАДАЧА

Рассмотренный в предыдущим параграфе априорный выбор параметра регуляризации r трудно реализуем на практике. Дело в том, что в большинстве задач мы не знаем, какому классу (4.3) решение u_* принадлежит, а выбор r осуществлялся на базе именно такой информации (см. (4.4)).

Рассматриваемый в этом и последующих двух параграфах принцип невязки дает способ выбора r, свободный от таких трудностей. Под <u>принципом невязки</u> понимается согласование невязки $\|A_\eta u_r - f_\delta\|$ с уровнями погрешностей δ и η правой части f и оператора A уравнения (I.I).

5.I. <u>Поведение невязки</u>. В этом параграфе мы будем рассматривать самосопряженную задачу (I.I) с $E=F$, $A=A^*$, $A_\eta=A_\eta^*$ и приближение (I.7) для нее; будем считать выполненными условия (I.8)–(I.I0).

Поскольку по условию (I.9) $\|g_r(A_\eta)\|\le\gamma r\to 0$ при $r\to 0$, то

$$u_r\to u_0 \text{ при } r\to 0, \tag{5.I}$$

и вместе с тем

$$A_\eta u_r - f_\delta \to Au_0 - f_\delta \text{ при } r\to 0. \tag{5.2}$$

Изученим поведене невязки при $r\to\infty$. Покажем, что

$$A_\eta u_r - f_\delta \to Q_\eta f_\delta - f_\delta \text{ при}^{1)}\ r\to\infty, \tag{5.3}$$

где Q_η – ортопроектор, проектирующий на $\overline{\mathcal{R}(A_\eta)}$, и значит, $I-Q_\eta$ – ортопроектор, проектирующий на $\mathcal{N}(A_\eta)$. Из (I.7) следует формула

$$A_\eta u_r - f_\delta = (I - A_\eta g_r(A_\eta))(A_\eta u_0 - f_\delta),$$

и для доказательства (5.3) достаточно убедиться, что

$$(I - A_\eta g_r(A_\eta))v \to (I-Q_\eta)v \text{ при } r\to\infty \quad \forall v\in E. \tag{5.4}$$

Поскольку $A_\eta(I-Q_\eta)=0$, то и $A_\eta g_r(A_\eta)(I-Q_\eta)=0$ (операторы

---

1) Сами приближения u_r при $r\to\infty$ расходятся, если $Q_\eta f_\delta \bar{\in} \mathcal{R}(A_\eta)$.

A_η и $g_r(A_\eta)$ перестановочны), и

$$(I - A_\eta g_r(A_\eta))(I-Q_\eta)v = (I-Q_\eta)v.$$

Таким образом, (5.4) равносильно соотношению

$$(I-A_\eta g_r(A_\eta))Q_\eta v \to 0 \quad \text{при } r\to\infty \quad \forall v\in E,$$

которое легко проверяется на основании теоремы Банаха—Штейнгауза: по условию (I.IO) имеем

$$\| I-A_\eta g_r(A_\eta)\| \le \gamma_0 \quad (r>0),$$

причем для элементов вида $v=A_\eta w$ $(w\in E)$, образующих в $\overline{\mathcal{R}(A_\eta)}=Q_\eta E$ плотное подмножество, имеем

$$\|(I-A_\eta g_r(A_\eta))A_\eta w\| \le \sup_{-a_0\le\lambda\le a} |\lambda||1-\lambda g_r(\lambda)|\,\|w\| \to 0 \text{ при } r\to\infty.$$

Итак, соотношение (5.3) установлено. Поскольку

$$\|Q_\eta f_\delta - f_\delta\| = \inf_{u\in E} \|A_\eta u - f_\delta\|,$$

то из (5.3) следует, что

$$\|A_\eta u_r - f_\delta\| \to \inf_{u\in E} \|A_\eta u - f_\delta\| \text{ при } r\to\infty. \tag{5.5}$$

Допустим теперь, что $f\in\mathcal{R}(A)$, $Au_*=f$. Тогда

$$\inf_{u\in E} \|A_\eta u - f_\delta\| \le \|A_\eta u_* - f_\delta\| \le \delta + \|u_*\|\eta,$$

и из (5.5) получаем основное для дальнейшего неравенство

$$\lim_{r\to\infty} \|A_\eta u_r - f_\delta\| \le \delta + \|u_*\|\eta. \tag{5.6}$$

Бывают случаи, когда в (5.6) имеет место знак равенства. Пусть, например, $Au_* = \eta u_*$. Обозначим $v_* = u_*/\|u_*\|$ и положим

$$f_\delta = f+\delta v_*, \quad A_\eta = A - \eta(\cdot, v_*)v_*.$$

Тогда $\|f_\delta - f\| = \delta$, $\|A_\eta - A\| = \eta$, $A_\eta v_* = Av_* - \eta v_* = 0$,

$$f_\delta - A_\eta u_* = (f_\delta - f) - (A_\eta - A)u_* = (\delta + \|u_*\|\eta)v_* \in \mathcal{N}(A_\eta),$$

$$(I-A_\eta g_r(A_\eta))(f_\delta - A_\eta u_*) = f_\delta - A_\eta u_*,$$

а вместе с тем

$$\lim_{r\to\infty} \|A_\eta u_r - f_\delta\| = \lim_{r\to\infty} \|(I-A_\eta g_r(A_\eta))(A_\eta u_0 - f_\delta)\| =$$

$$= \lim_{r\to\infty} \|(I-A_\eta g_r(A_\eta))(A_\eta u_* - f_\delta)\| = \|f_\delta - A_\eta u_*\| = \delta + \|u_*\|\eta;$$

мы учли, что

$$\lim_{r\to\infty} \|(I-A_\eta g_r(A_\eta))A_\eta\| = 0.$$

Заметим, что в этом примере $f=\eta u_*$ отнюдь не должен быть малым вместе с η – можно взять u_* большой нормы.

5.2. <u>Правила выбора параметра регуляризации</u>. В приближении (I.7) будем допускать значение $r=0$, положив в соответствии с (5.I) u_r при $r=0$ равным начальному приближению u_0.

<u>Правило (Π_1)</u>. Зададим числа $b_1>1$, $b_2\geq b_1$ и $\theta\in(0,1)$. Если при $r=0$ выполняется неравенство

$$\|A_\eta u_r - f_\delta\| \leq b_2(\delta+\|u_*\|\eta) \tag{5.7}$$

(u_* – ближайшее к u_0 решение уравнения (I.I)), то положим $r=0$. В противном случае выберем любое такое $r>0$, что (5.7) выполнено, а для некоторого "предшествующего" $r'\in[\theta r, r]$ выполнено

$$\|A_\eta u_{r'} - f_\delta\| \geq b_1(\delta+\|u_*\|\eta). \tag{5.8}$$

Конечно, в этом правиле естественно брать $b_1=b_2$; случай $b_1<b_2$ допускается только из-за полезности в теоретических рассуждениях. Само правило лишь частично устраняет трудности, связанные с отсутствием информации о решении u_* – теперь нужно знать оценку его нормы. Поэтому в следующих двух правилах u_* заменяется через $\|u_r\|$ или $\|u_r-u_0\|+\|u_0\|$.

Правило (Π_1) гарантирует выбор r при всех $\delta>0$ и $\eta>0$ (см. (5.6)). При замене $\|u_*\|$ через $\|u_r\|$ или $\|u_r-u_0\|+\|u_0\|$ такой гарантии уже нет. Как будет показано позже, при достаточно малых $\delta>0$ и $\eta>0$ выбор r все-же осуществим. Чтобы гарантировать выбор r при всех δ и η, дополним правила специальными условиями, которые, как окажется позже, при малых δ и η не новлияют на выбор r.

<u>Правило (Π_2)</u>. Зададим числа $b>1$, $d>0$ и $\theta\in(0,1)$. Если при $r=0$ выполняется неравенство

$$\|A_\eta u_r - f_\delta\| \leq b\left[\delta+(\|u_r-u_0\|+\|u_0\|)\eta\right], \tag{5.9}$$

то положим $r=0$. В противном случае выберем любое такое

$r \in (0, d/(\delta+\eta)]$, для которого (5.9) выполнено, а для некоторого $r' \in [\theta r, r]$ выполнено

$$\|A_\eta u_{r'} - f_\delta\| \geq b[\delta + (\|u_{r'} - u_0\| + \|u_0\|)\eta]. \qquad (5.10)$$

Если же такого r не существует, то положим $r = d/(\delta+\eta)$.

<u>Правило (Π_3)</u> – такое же как правило (Π_2), с заменой (5.9) и (5.10) на неравенства

$$\|A_\eta u_r - f_\delta\| \leq b(\delta + \|u_r\|\eta), \qquad (5.11)$$

$$\|A_\eta u_{r'} - f_\delta\| \geq b(\delta + \|u_{r'}\|\eta). \qquad (5.12)$$

Правила (Π_1)–(Π_3) оставляют определенную свободу при их реализации. Они особенно удобны в итерационных методах: счет останавливаем на первом $r = n \leq d/(\delta+\eta)$, для которого выполнено соответствующее из неравенств (5.7), (5.9) или (5.11); второе из пары неравенств тогда автоматически выполнено при $r' = n-1$. В случае операторной формы итераций {(1.24)–(1.26)} следует положить $\theta \leq 1/m$. Подобную реализацию в виде останова счета можно организовать и для неитерационных методов, проведя вычисления u_r при $r = r_n$ с $r_n = r_{n-1}/\theta$, $n = 1, 2, \ldots$.

Дальнейшие комментарии к правилам выбора r будут даны в п. 5.9.

5.3. <u>Сходимость и оценка погрешности</u>. Начальное приближение u_0 считаем независящим от δ и η.

<u>Теорема 5.1</u>. Пусть $E = F$, $A = A^*$, $A_\eta = A_\eta^*$, $f \in \mathcal{R}(A)$, $\|f_\delta - f\| \leq \delta$, $\|A_\eta - A\| \leq \eta$. Пусть выполнены условия (1.8)–(1.10), причем в (1.10) $p_0 > 1$, $\gamma_0 = 1$. Пусть параметр $r = r(\delta, \eta)$ в приближении (1.7) выбран по правилу (Π_1) или (Π_2).

Тогда

$$(\delta+\eta) r(\delta,\eta) \to 0, \quad u_{r(\delta,\eta)} \to u_* \quad \text{при} \quad \delta \to 0, \ \eta \to 0, \qquad (5.13)$$

где u_* – ближайшее к u_0 решение уравнения (1.1).

Если начальная погрешность представима в виде

$$u_0 - u_* = |A|^p w, \quad \|w\| \leq \varrho, \quad 0 < p \leq p_0 - 1, \qquad (5.14)$$

то справедливы оценки

$$r(\delta,\eta) \le c_{p,\varrho}(\delta+\eta)^{-1/(p+1)}, \qquad (5.15)$$

$$\|u_{r(\delta,\eta)} - u_*\| \le c'_{p,\varrho}(\delta+\eta)^{p/(p+1)}, \quad 0<p\le p_0-1, \qquad (5.16)$$

где постоянные $c_{p,\varrho}$ и $c'_{p,\varrho}$, кроме p и ϱ, зависят еще от параметров b_1, b_2, b, θ, d правил выбора r.

В случае начальной погрешности (5.14) с $0<p<p_0-1$ справедливы также соотношения

$$(\delta+\eta)^{1/(p+1)} r(\delta,\eta) \to 0, \qquad (5.17)$$

$$\|u_{r(\delta,\eta)} - u_*\| = o\left((\delta+\eta)^{p/(p+1)}\right) \text{ при } \delta\to 0,\ \eta\to 0. \qquad (5.18)$$

Все перечисленные утверждения справедливы и в случае правила ($П_3$) выбора r, если $\mathcal{N}(A)=0$ или если

$$b\left[1-d\gamma\max\{\|A\|/\|f\|, 1\}\right] > 1. \qquad (5.19)$$

Доказательство теоремы строится в п. 5.4–5.6.

<u>Комментарии к теореме</u>. I. Условие $p_0>1$ существенно. Например, для метода Лаврентьева (2.I) имеем $p_0=1$, и принцип невязки в форме правил ($П_1$)–($П_3$) приводит к расходящемуся процессу.

2. Условие $\gamma_0=1$ можно заменить условием $b_1>\gamma_0$ в правиле ($П_1$) и, соответственно, условием $b>\gamma_0$ в правилах ($П_3$) и ($П_2$). Отметим, однако, что для всех конкретных методов, рассмотренных в § 2, имеем $\gamma_0=1$.

3. Выполнения условия (5.19) можно достигнуть, выбрав $d>0$ достаточно малым. Нормы $\|A\|$ и $\|f\|$ легко оценить:

$$\|A\|/\|f\| \le (\|A_\eta\|+\eta)/(\|f_\delta\|-\delta).$$

4. Поскольку сходимость $u_{r(\delta,\eta)}\to u_*$ при $\delta\to 0, \eta\to 0$ имеет место при любом $f\in\mathcal{R}(A)$, то метод (I.7) с правилом ($П_1$), ($П_2$) или ($П_3$) выбора r определяет ($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}$)-регуляризатор, где $\mathfrak{A}$ — класс самосопряженных операторов.

5. Из оценки погрешности (5.16) следует (см. п. 0.3), что метод (I.7) с правилами ($П_1$), ($П_2$) или ($П_3$) выбора r имеет оптимальный порядок на классе решений (5.14). При априорном выборе r была получена такая же оценка погрешности (см. (4.3)–(4.5)), но для более широкого отрезка изменения p, а именно для $0<p\le p_0$. В этом отношении принцип невязки уступает априорному заданию r.

6. Соотношение (5.18) означает, что для каждой индивидуальной задачи (1.1) сходимость более быстрая, чем это следует из оценки на всем классе (5.14).

7. В заключение проакцентируем основное преимущество принципа невязки в форме правил (Π_1)–(Π_3) перед априорным заданием r : он правильно регулирует выбором r без наличия информации о принадлежности решения какому-нибудь классу (5.14).

5.4. <u>Доказательство теоремы: правило (Π_1)</u>. 1. Для приближения (1.7) имеем

$$u_r-u_*=G_{r,\eta}(u_0-u_*)+g_r(A_\eta)(f_\delta-A_\eta u_*),\quad G_{r,\eta}=I-A_\eta g_r(A_\eta), \tag{5.20}$$

$$A_\eta u_r-f_\delta=A_\eta G_{r,\eta}(u_0-u_*)-G_{r,\eta}(f_\delta-A_\eta u_*). \tag{5.21}$$

Ранее нами установлено (см. (4.7) и (4.8)), что

$$G_{r,\eta}(u_0-u_*)\to 0 \text{ при } r\to\infty,\ \eta\to 0, \tag{5.22}$$

$$\|g_r(A_\eta)(f_\delta-A_\eta u_*)\|\le\gamma r(\delta+\|u_*\|\eta). \tag{5.23}$$

В дополнение к (5.22) докажем, что

$$\sigma_{r,\eta}\equiv r\|A_\eta G_{r,\eta}(u_0-u_*)\|\to 0 \quad \text{при } r\to\infty,\ \eta\to 0. \tag{5.24}$$

Действительно, по условию (1.10)

$$r\|A_\eta G_{r,\eta}\|\le r\sup_{\lambda\in\sigma(A_\eta)}|\lambda(1-\lambda g_r(\lambda)|\le\gamma_1\quad (r>0,\eta>0), \tag{5.25}$$

а для элементов вида $u=Av$ $(v\in E)$, образующих в $\overline{R(A)}$ плотное подмножество, имеем

$$r\|A_\eta G_{r,\eta}u\|=r\|A_\eta G_{r,\eta}Av\|\le$$

$$\le r\|A_\eta G_{r,\eta}(A-A_\eta)v\|+r\|A_\eta G_{r,\eta}A_\eta v\|\le$$

$$\le\gamma_1\eta\|v\|+\|v\|r\sup_{\lambda\in\sigma(A_\eta)}|\lambda|^2|1-\lambda g_r(\lambda)|\to 0 \quad \text{при } r\to\infty,\eta\to 0.$$

(Здесь существенно, что условие (1.10) выполнено с $p_0>1$.) Поскольку, $u_0-u_*\in N(A)^\perp=\overline{R(A)}$, то (5.24) этим установлено.

2. Если правило (Π_1) выдает $r=0$ при сколь угодно малых $\delta>0$ и $\eta>0$, т.е. если

$$\|A_\eta u_0-f_\delta\|\le b_2(\delta+\|u_*\|\eta),$$

то в пределе $\delta\to 0$, $\eta\to 0$ получаем $Au_0-f=0$, т.е. u_0 – решение уравнения (I.I). В таком случае утверждения теоремы тривиальны. Поэтому будем считать, что при достаточно малых $\delta>0$ и $\eta>0$ правило (Π_1) дает

$$r=r(\delta,\eta)>0, \quad r'=r'(\delta,\eta)>0, \quad r'\in[\theta r, r].$$

Поскольку $\|G_{r,\eta}\|\le\gamma_0=1$, то из (5.2I) получаем неравенства

$$\|A_\eta G_{r,\eta}(u_0-u_*)\|\le(b_2+1)(\delta+\|u_*\|\eta), \tag{5.26}$$

$$\|A_\eta G_{r',\eta}(u_0-u_*)\|\ge(b_1-1)(\delta+\|u_*\|\eta). \tag{5.27}$$

Из (5.27) и (5.24)

$$r'(b_1-1)(\delta+\|u_*\|\eta)\le\sigma_{r',\eta}.$$

Отсюда видим (см. (5.24)), что $(\delta+\eta)r'(\delta,\eta)\to0$ при $\delta\to0$, $\eta\to0$, а вместе с тем установлено первое из соотношений (5.I3). Второе по соотношений (5.I3) теперь следует из (5.20, (5.22) и (5.23), если $r(\delta,\eta)\to\infty$ при $\delta\to0$, $\eta\to0$. Случай ограниченного $r(\delta,\eta)$ рассмотрим отдельно[I].

3. Докажем импликацию

$$r_n\le\bar r=const,\ \eta_n\to0,\ y_n\equiv A_{\eta_n}G_{r_n,\eta_n}(u_0-u_*)\to0 \text{ при } n\to\infty\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_n\equiv G_{r_n,\eta_n}(u_0-u_*)\to0 \text{ при } n\to\infty. \tag{5.28}$$

Действительно, последовательность x_n ограничена и поэтому слабо компактна; пусть $x_n\rightharpoonup x\in E$ $(n\in N'\subseteq N)$. Тогда $y_n=A_{\eta_n}x_n=$ $=Ax_n+(A_{\eta_n}-A)x_n\rightharpoonup Ax$ $(n\in N')$, а так как по условию $y_n\to0$, то $Ax=0$. Теперь

$$\|x_n\|^2=(x_n,\ (I-A_{\eta_n}g_{r_n}(A_{\eta_n}))(u_0-u_*))=$$

$$=(x_n,u_0-u_*)-(y_n,g_{r_n}(A_{\eta_n})(u_0-u_*))\to(x,u_0-u_*)=0 \quad (n\in N'),$$

так как $y_n\to0$, $\|g_{r_n}(A_{\eta_n})\|\le\gamma r_n\le\gamma\bar r$, $x\in\mathcal N(A)$, $u_0-u_*\in\mathcal N(A)^\perp$. Отсюда следует, что и вся последовательность x_n $(n\in N)$ сходится к нулю, и (5.28) установлено.

Если $r(\delta,\eta)\le\bar r=const$ при $\delta\to0,\eta\to0$, то из (5.26) к

I) Такой случай возможен, хотя и совершенно нетипичен. А именно, можно показать, что тогда $(P(\lambda_0)-P(-\lambda_0))(u_0-u_*)=0$, где λ_0 – некоторое положительное число, $P(\lambda)$ – спектральное семейство проекторов оператора A.

(5.28) получаем сходимость к нулю первого члена в правой части (5.20); второй член сходится к нулю ввиду неравенства (5.23). Тем самым завершено доказательства сходимости (5.13).

4. Пусть u_0-u_* представим в виде (5.14). Доказательство оценок (5.15) и (5.16) опирается на неравенства (см. лемму 3.3; при целом p они очевидны)

$$\| |A_\eta|^p-|A|^p\|\le c_p(1+|\ln\eta|)\eta^{\min\{1,p\}}, \tag{5.29}$$

$$\|A_\eta G_{r,\eta}(|A_\eta|^p-|A|^p)\|\le \varepsilon_{r,p}\eta, \quad \varepsilon_{r,p}\to 0 \text{ при } r\to\infty. \tag{5.30}$$

Оценим заново элемент $A_\eta G_{r,\eta}(u_0-u_*)$:

$$\|A_\eta G_{r,\eta}(u_0-u_*)\| = \|A_\eta G_{r,\eta}|A|^p w\|\le$$

$$\le \|A_\eta G_{r,\eta}(|A|^p-|A_\eta|^p)w\| + \|A_\eta G_{r,\eta}|A_\eta|^p w\|\le$$

$$\le \varepsilon_{r,p}\eta\|w\| + \gamma_{p+1}r^{-(p+1)}\|w\| \tag{5.31}$$

(мы воспользовались условием (1.10) и неравенством (5.30)). Сопоставляя это (5.27), получаем

$$\gamma_{p+1}(r')^{-(p+1)}\|w\|\ge(b_1-1)\delta+[(b_1-1)\|u_*\|-\varepsilon_{r',p}\|w\|]\eta.$$

Поскольку $\varepsilon_{r',\eta}\to 0$ при $r'\to\infty$, а $r(\delta,\eta)\le r'(\delta,\eta)/\theta$, то отсюда следует оценка (5.15).

Оценка (5.16) следует из (5.20), (5.23), (5.15) и проводимой ниже оценки члена $G_{r,\eta}(u_0-u_*)$. Имеем

$$\|G_{r,\eta}(u_0-u_*)\|=\|G_{r,\eta}|A|^p w\|\le$$

$$\le\|G_{r,\eta}|A_\eta|^p w\|+\|G_{r,\eta}(|A_\eta|^p-|A|^p)w\|.$$

Последняя норма в силу (5.29) дает вклад $O(\eta^{p/(p+1)})$, а $\|G_{r,\eta}|A_\eta|^p w\|=\||A_\eta|^p G_{r,\eta}w\|$ оценим при помощи неравенства моментов:

$$\||A_\eta|^p G_{r,\eta}w\|\le\||A_\eta|^{p+1}G_{r,\eta}w\|^{p/(p+1)}\|G_{r,\eta}w\|^{1/(p+1)}\le$$

$$\le\|A_\eta G_{r,\eta}|A_\eta|^p w\|^{p/(p+1)}\|w\|^{1/(p+1)}\le$$

$$\le\left(\|A_\eta G_{r,\eta}(|A_\eta|^p-|A|^p)w\|+\|A_\eta G_{r,\eta}|A|^p w\|\right)^{p/(p+1)}\rho^{1/(p+1)}\le$$

$$\le(\varepsilon_{r,\eta}\eta\rho+\|A_\eta G_{r,\eta}(u_0-u_*)\|)^{p/(p+1)}\rho^{1/(p+1)} \tag{5.32}$$

На последнем шаге мы опять воспользовались неравенством (5.30); принимая во внимание (5.26), получаем для рассматриваемой нормы оценку порядка $O((\delta+\eta)^{p/(p+1)})$. Тем самым оценка (5.I6) доказана.

5. При $0<p<p_0-1$ аналогично (5.24) доказывается, что[I])

$$\tilde{\delta}_{r,\eta} \equiv r^{p+1}\|A_\eta G_{r,\eta}|A_\eta|^p w\| \to 0 \quad \text{при } r\to\infty,\ \eta\to 0.$$

Введя соответствующее уточнение в (5.3I), получаем соотношение (5.I7). При выводе (5.I8) используем это соотношение вместо (5.I5), а в (5.32) вместо неравенства $\|G_{r,\eta}w\|\le\|w\|$ привлечем соотношение $\|G_{r,\eta}w\|\to 0$ при $r\to\infty$, $\eta\to 0$ (ср. (5.22)). Соотношение $\|G_{r(\delta,\eta),\eta}w\|\to 0$ верно и в случае, когда $r(\delta,\eta)$ остается при $\delta\to 0$, $\eta\to 0$ ограниченным – нужно воспользоваться импликацией типа (5.28).

Теорема 5.I в случае правила (Π_1) доказана.

5.5. <u>Доказательство теоремы: правило (Π_2)</u>. Случай, когда u_0 – решение уравнения (I.I), тривиален. Будем считать, что $Au_0\neq f$. Наша цель – показать, что для определенного по правилу (Π_2) $r=r(\delta,\eta)$ при достаточно малых $\delta>0$ и $\eta>0$ имеем

$$\|A_\eta u_r - f_\delta\| \le (b+\varepsilon)[\delta+(\|u_*-u_0\|+\|u_0\|)\eta], \tag{5.33}$$

$$\exists\, r'\in[\theta r, r]:\quad \|A_\eta u_{r'} - f_\delta\| \ge (b-\varepsilon)[\delta+(\|u_*-u_0\|+\|u_0\|)\eta], \tag{5.34}$$

где $\varepsilon>0$ сколь угодно мало (зафиксируем его так, что $b-\varepsilon>1$). Тем самым случай правила (Π_2) сводится к случаю правила (Π_1), рассмотренному в предыдущем пункте.

Прежде всего заметим, что

$$\varliminf_{r\to\infty,\ \delta\to 0,\ \eta\to 0} \|u_r-u_0\| \ge \|u_*-u_0\|. \tag{5.35}$$

Действительно, если для некоторой последовательности u_{r_n} с $r_n\to\infty$, $\delta_n\to 0$, $\eta_n\to 0$ имеем $\lim\|u_{r_n}-u_0\|<\|u_*-u_0\|$, то эта последовательность ограничена и, значит, слабо компакт-

I) Без ограничения общности можно считать, что $w\in\mathcal{N}(A)^\perp$.

ная; будем считать, что $u_{\tau_n} \rightharpoonup u'$ при $n\to\infty$. Из (5.21) заключаем, что $\|A_{\eta_n}u_{\tau_n}-f_{\delta_n}\|\to 0$, а вместе с тем $Au_{\tau_n}\to f$. Поэтому $Au'=f$. При этом в силу слабой сходимости $u_{\tau_n}-u_0 \rightharpoonup u'-u_0$ выполняется неравенство $\|u'-u_0\|\le \underline{\lim}\,\|u_{\tau_n}-u_0\|< \|u_*-u_0\|$, что противоречит определению u_* как ближайшего к u_0 решения уравнения (1.1). Противоречие доказывает (5.35).

Согласно (5.6) имеем

$$\lim_{\tau\to\infty}\|A_\eta u_\tau-f_\delta\|\le\delta+\|u_*\|\eta\le\delta+(\|u_*-u_0\|+\|u_0\|)\eta.$$

С учетом (5.35) при достаточно больших τ и достаточно малых $\delta>0$ и $\eta>0$ выполняется неравенство (5.9). Поэтому при достаточно малых $\delta>0$ и $\eta>0$ существуют $\tau=\tau(\delta,\eta)$ и $\tau'=\tau'(\delta,\eta)\in[\theta\tau,\tau]$, для которых выполнены условия (5.9) и (5.10); убедимся, что при этом

$$\tau(\delta,\eta)<d/(\delta+\eta). \tag{5.36}$$

Действительно, если $\tau(\delta,\eta)\ge d/(\delta+\eta)$, то $1/\tau'(\delta,\eta)\le(\delta+\eta)/(\theta d)$, и из (5.21), (5.24) и (5.35) при достаточно малых $\delta>0$ и $\eta>0$ получаем

$$\|A_\eta u_{\tau'}-f_\delta\|\le\sigma_{\tau',\eta}/\tau'(\delta,\eta)+\delta+\|u_*\|\eta<b\left[\delta+(\|u_{\tau'}-u_0\|+\|u_0\|)\eta\right],$$

что противоречит (5.10).

Из (5.20), (5.22), (5.23) и (5.36) получаем, что

$$\|u_{\tau(\delta,\eta)}\|\le const \text{ при } \delta\to 0,\ \eta\to 0.$$

Поэтому из (5.9) и (5.10) следует, что

$$\|A_\eta u_\tau-f_\delta\|\le c\,(\delta+\|u_*\|\eta),$$

$$\|A_\eta u_{\tau'}-f_\delta\|\ge(b-\varepsilon)\left[\delta+(\|u_*-u_0\|+\|u_0\|)\eta\right]\ge(b-\varepsilon)(\delta+\|u_*\|\eta)$$

с большой пока постоянной c. Но это уже позволяет применить теорему с правилом (Π_1) и получить сходимость $u_{\tau(\delta,\eta)}\to u_*$ при $\delta\to 0$, $\eta\to 0$, а затем из (5.9) и (5.10) получить неравенства (5.33) и (5.34).

В рассуждениях мы использовали соотношение $\tau(\delta,\eta)\to\infty$ при $\delta\to 0$, $\eta\to 0$. Если же $\tau(\delta_n,\eta_n)\le\bar\tau=const$ при некоторых $\delta_n\to 0$, $\eta_n\to 0$, то, привлекая импликацию (5.28), получаем сразу сходимость $u_{\tau(\delta_n,\eta_n)}\to u_*$, а вместе с тем (5.33) и (5.34).

Теорема 5.I в случае правила ($П_2$) доказана.

5.6. <u>Доказательство теоремы: правило ($П_3$)</u>. I. Пусть $\mathcal{N}(A)=0$. Тогда аналогично (5.35) доказывается, что

$$\varliminf_{\tau\to\infty,\ \delta\to 0,\ \eta\to 0} \|u_\tau\| \geq \|u_*\|.$$

Используя это неравенство вместо (5.35), аналогично предыдущему пункту доказывается, что для $\tau=\tau(\delta,\eta)$, определенного по правилу ($П_3$), при достаточно малых $\delta>0$ и $\eta>0$ имеем

$$\|A_\eta u_\tau - f_\delta\| \leq (b+\varepsilon)(\delta+\|u_*\|\eta), \tag{5.37}$$

$$\exists \tau'\in[\theta\tau,\tau]: \quad \|A_\eta u_{\tau'} - f_\delta\| \geq (b-\varepsilon)(\delta+\|u_*\|\eta). \tag{5.38}$$

Тем самым получается сведения случае правила ($П_3$) к случаю правила ($П_1$).

2. Пусть выполнено условие (5.I9). С учетом условия $\tau(\delta,\eta)\leq d/(\delta+\eta)$ получаем из (5.20), (5.22) и (5.23)

$$\varliminf_{\delta\to 0,\ \eta\to 0} \|u_{\tau(\delta,\eta)}\| \geq \|u_*\| - \varlimsup_{\delta\to 0,\ \eta\to 0} \gamma\tau(\delta,\eta)(\delta+\|u_*\|\eta) \geq$$

$$\geq \|u_*\| - \gamma d\,\frac{\delta+\|u_*\|\eta}{\delta+\eta} \geq \|u_*\|\left(1-d\gamma\max\left\{1,\frac{1}{\|u_*\|}\right\}\right).$$

Из равенства $Au_*=f$ следует, что $1/\|u_*\|\leq\|A\|/\|f\|$. С учетом (5.I9) имеем, таким образом,

$$\varliminf_{\delta\to 0,\ \eta\to 0} b\,\|u_{\tau(\delta,\eta)}\| \geq b_1\|u_*\|, \quad b_1>1.$$

Это неравенство позволяет снова получить (5.37) и (5.38), а вместе с тем сведение к случаю правила ($П_1$).

Доказательство теоремы 5.I завершено.

5.7. <u>Случай неотрицательного оператора A</u>. Рассмотрим случай, когда $A=A^*\geq 0$, а $A_\eta=A_\eta^*$ необязательно неотрицательные.

<u>Теорема 5.2</u>. Пусть $E=F$, $A=A^*\geq 0$, $A_\eta=A_\eta^*$, $f\in\mathcal{R}(A)$, $\|f_\delta-f\|\leq\delta$, $\|A_\eta-A\|\leq\eta$. Пусть функции $g_\tau:[\alpha\tau^{-1},a]\to\mathbb{C}$ с $\alpha>0$, $a\geq\|A_\eta\|$ $(0<\eta\leq\eta_0)$ удовлетворяют условиям (I.5), (I.6) и (I.I4), причем $p_0>1$. Пусть параметр $\tau=\tau(\delta,\eta)$ в приближении (I.7) выбран по правилу ($П_2$) или правилу ($П_3$), причем в случае правила ($П_3$) считаем выполненным условие $\mathcal{N}(A)=0$ или условие (5.I9). Пусть наконец,

$$d \le \alpha, \quad b > \max\{\gamma_0, 1 + d\gamma'\}. \tag{5.39}$$

Тогда справедливы утверждения теоремы 5.I.

На правило ($П_1$) эта теорема распространяется при условии, что оно дополнено ограничением $r \le d/(\delta+\eta)$, подобно правилам ($П_2$) и ($П_3$), а вместо (5.39) выполняются условия

$$d \le \alpha, \quad b_1 > \max\{\gamma_0, 1 + d\gamma'\}. \tag{5.40}$$

Доказательство получается незначительным видоизменением рассуждений п. 5.4–5.6 и предоставляется читателю. Рассуждения п. 5.I о поведении невязки проходят без изменений.

Отметим, что в случае $\gamma_0 = 1$ числа $b_1 > 1$ и $b > 1$ в правилах ($П_1$)–($П_3$) можно выбрать сколь угодно близкими к I; выполнение условий (5.39) и (5.40) тогда достигается за счет выбора достаточно малого $d > 0$.

5.8. Случай точно заданного оператора. В случае $A_\eta = A$ можно указать постоянные в оценках сходимости. Правила ($П_1$)–($П_3$) сливаются в одно правило (при этом примем, что в ($П_1$) $b_1 = b_2 = b$):

Правило (П). Зададим числа $b > 1$ и $\theta \in (0, 1)$. Если при $r = 0$ выполнено неравенство

$$\|Au_r - f_\delta\| \le b\delta, \tag{5.41}$$

то положим $r = 0$. В противном случае выберем любое такое $r > 0$, при котором (5.41) выполнено, а при некотором $r' \in [\theta r, r]$ выполнено обратное неравенство

$$\|Au_{r'} - f_\delta\| \ge b\delta. \tag{5.42}$$

Теорема 5.3. Пусть $E = F$, $A = A^*$, $f \in \mathcal{R}(A)$, $\|f_\delta - f\| \le \delta$. Пусть выполнены условия (I.9) и (I.10), причем $\sigma(A) \subseteq [-a_0, a]$, $p_0 > 1$, $\gamma_0 = 1$. Выберем в приближении

$$u_r = (I - Ag_r(A))u_0 + g_r(A) f_\delta$$

параметр $r = r(\delta)$ по правилу (П).

Тогда $\delta r(\delta) \to 0$, $u_{r(\delta)} \to u_*$ при $\delta \to 0$, где u_* – ближайшее к u_0 решение уравнения (I.I).

Если начальная погрешность представима в виде (5.I4), то справедливы оценки

$$\tau(\delta) \le c_p \rho^{1/(p+1)} \delta^{-1/(p+1)}, \tag{5.43}$$

$$\|u_{\tau(\delta)} - u_*\| \le c_p' \rho^{1/(p+1)} \delta^{p/(p+1)}, \quad 0<p\le p_0-1, \tag{5.44}$$

где

$$c_p = \theta^{-1}\left(\frac{\gamma_{p+1}}{b-1}\right)^{1/(p+1)}, \qquad c_p' = (b+1)^{p/(p+1)} + c_p\gamma.$$

Если начальная погрешность представима в виде (5.I4) с $0<p<p_0-1$, то

$$\delta^{1/(p+1)}\tau(\delta)\to 0, \quad \|u_{\tau(\delta)} - u_*\| = o(\delta^{p/(p+1)}) \text{ при } \delta\to 0.$$

<u>Доказательство</u>. Все утверждения, кроме оценок (5.43) и (5.44), непосредственно следуют из теоремы 5.I, в которой положим $\eta=0$. Вывод оценок (5.43) и (5.44) получается повторением соответствующих рассуждений в п. 5.4, которые за счет равенства $A_\eta = A$ значительно упрощаются.

5.9. <u>Непрерывность и монотонность невязки</u>. Будем опять считать выполненными условия (I.8)-(I.I0). Введем два дополнительного условия:

$$g_{\tau_n}(\lambda)\to g_\tau(\lambda) \text{ при } \tau_n\to\tau>0 \quad \forall\lambda\in[-a_0,a], \tag{5.45}$$

$$|1-\lambda g_{\tau_2}(\lambda)| \le |1-\lambda g_{\tau_1}(\lambda)| \text{ при } 0<\tau_1<\tau_2, -a_0\le\lambda\le a. \tag{5.46}$$

Из условия (5.45) следует непрерывность функции $\varphi(\tau) = \|A_\eta u_\tau - f_\delta\|$ $(\tau>0)$, а из (5.46) ее монотонное убывание. Оба эти утверждения легко следуют из интегрального представления

$$\|A_\eta u_\tau - f_\delta\|^2 = \|(I - A_\eta g_\tau(A_\eta))(A_\eta u_0 - f_\delta)\| =$$
$$= \int_{-a_0}^{a} |1-\lambda g_\tau(\lambda)|^2 \, d(P_\eta(\lambda)z, z), \qquad z = A_\eta u_0 - f_\delta,$$

где $P_\eta(\lambda)$ – спектральное семейство проекторов оператора $A_\eta = A_\eta^*$. В частности, (5.45) и оценка (I.9) позволяют совершить предельный переход $\tau_n\to\tau$ под знаком интеграла (теорема Лебега), что доказывает непрерывность $\varphi(\tau)$, а монотонное убывание $\varphi(\tau)$ является следствием из (5.46) и возрастания функции $(P_\eta(\lambda)z, z)$ по λ (положительности меры $d(P_\eta(\lambda)z, z)$).

Если выполнено условие (5.46), функции g_τ вещественнозначны и

$$0 \leq 1 - \lambda g_\tau(\lambda) \leq 1 \quad (-a_0 \leq \lambda \leq a, \ \tau > 0), \tag{5.47}$$

то функция $\psi(\tau) = \|u_\tau - u_0\|$ возрастает по τ. Действительно, из (5.46) и (5.47) следует, что

$$|g_{\tau_1}(\lambda)| \leq |g_{\tau_2}(\lambda)| \text{ при } 0 < \tau_1 < \tau_2, \ -a_0 \leq \lambda \leq a,$$

и остается заметить, что в соответствии с (I.7)

$$u_\tau - u_0 = -g_\tau(A_\eta)(A_\eta u_0 - f_\delta),$$

$$\|u_\tau - u_0\|^2 = \int_{-a_0}^{a} |g_\tau(\lambda)|^2 d(P_\eta(\lambda) z, z), \quad z = A_\eta u_0 - f_\delta.$$

При условиях (5.46), (5.47) правило ($П_2$) выбора τ приобретает особенно прозрачный смысл. Ввиду убывания $\|A_\eta u_\tau - f_\delta\|$ и возрастания $\|u_\tau - u_0\|$ множество тех τ, для которых выполнено неравенство (5.9) – это некоторый интервал $[\tau_*, \infty)$ или (τ_*, ∞), а неравенство (5.10) запрещает в нем брать слишком большие τ.

Для общей итерационной схемы (I.20) условия (5.46) и (5.47) выполнены, если условие (I.19) усилить до неравенства

$$0 < g(\lambda) \leq 1/\lambda \quad (0 \leq \lambda \leq a).$$

В частности, это так для неявной схемы (2.7), а в явной схеме (2.6) следует потребовать $\mu \in (0, 1/a]$. Условия (5.46) и (5.47) выполнены и для остальных методов п. 2.I.

Условие (5.45) выполнено для всех рассмотренных в п.2.I и 2.2 методов, кроме метода (2.4) и итерационных методов (для последних условие (5.45) лишено смысла, так как τ принимает только натуральные значения).

5.10. Еще один вариант принципа невязки. В случае непрерывной зависимости невязки $\|A_\eta u_\tau - f_\delta\|$ от τ гарантирован выбор τ по следующему правилу.

Правило ($П_1'$). Зададим числа $b_1 > 1$ и $b_2 \geq b_1$. Если $\|A_\eta u_0 - f_\delta\| \leq b_2(\delta + \|u_*\|\eta)$, то положим $\tau = 0$. В противном случае выберем любое такое $\tau > 0$, для которого

$$b_1(\delta + \|u_*\|\eta) \leq \|A_\eta u_\tau - f_\delta\| \leq b_2(\delta + \|u_*\|\eta)$$

(u_* – ближайшее к u_0 решение уравнения (I.I)).

Прпвило (Π_2'). Зададим числа $b_1>1$, $b_2\geq b_1$ и $d>0$. Если $\|A_\eta u_0-f_\delta\|\leq b_2(\delta+\|u_0\|\eta)$, то положим $\tau=0$. В противном случае выберем любое такое $\tau\in(0, d/(\delta+\eta)]$, для которого

$$b_1\left[\delta+(\|u_\tau-u_0\|+\|u_0\|)\eta\right]\leq\|A_\eta u_\tau-f_\delta\|\leq$$
$$\leq b_2\left[\delta+(\|u_\tau-u_0\|+\|u_0\|)\eta\right]. \quad (5.48)$$

Если же такого τ не существует, положим $\tau=d/(\delta+\eta)$.

Правило (Π_3') – такое же как правило (Π_2'), с заменой (5.48) на неравенство

$$b_1(\delta+\|u_\tau\|\eta)\leq\|A_\eta u_\tau-f_\delta\|\leq b_2(\delta+\|u_\tau\|\eta).$$

Если выполнено условие (5.45), гарантирующее непрерывность невязки по τ, то для приближения (I.7) справедливы аналоги теорем 5.I и 5.2, в которых правила (Π_1), (Π_2) и (Π_3) заменяются соответственно на (Π_1'), (Π_2') и (Π_3'). Доказательство получается повторением рассуждений п. 5.4–5.6.

В случае точно заданного оператора $A_\eta=A$ правила (Π_1')–(Π_3') сливаются в одно:

Правило (Π'). Зададим числа $b_1>1$ и $b_2\geq b_1$. Если $\|Au_0-f_\delta\|\leq b_2\delta$, то положим $\tau=0$. В противном случае выберем любое такое $\tau>0$, для которого

$$b_1\delta\leq\|Au_\tau-f_\delta\|\leq b_2\delta.$$

Если выполнено условие (5.45), то для правила (Π') справедлив аналог теоремы 5.3. В оценках (5.43) и (5.44) имеем

$$c_p=\left(\frac{\gamma_{p+1}}{b_1-1}\right)^{1/(p+1)}, \quad c_p'=(b_2+1)^{p/(p+1)}+c_p\gamma.$$

В правилах (Π_1')–(Π_3') и (Π') можно, конечно, положить $b_1=b_2=b>1$, но это осложняет практическое применение этих правил. Интерес представляет вопрос, можно ли положить $b_1=b_2=1$, т.е. довести невязку до уровня $\|A_\eta u_\tau-f_\delta\|= =\delta+\|u_*\|\eta$. Оказывается, что этого делать нельзя – получается расходящийся процесс. Анализ вопроса проведен в § 7.

§ 6. ПРИНЦИП НЕВЯЗКИ: НЕСАМОСОПРЯЖЕННАЯ ЗАДАЧА

В этом параграфе мы изучим различные варианты принципа невязки для приближения (I.I3) в задаче (I.I) с $A \in \mathcal{L}(E,F)$. Будем считать выполненными условия (I.5), (I.6) и (I.I2).

6.I. Формула невязки. Для приближения (I.I3) справедливы формулы

$$A_\eta u_\tau - f_\delta = (I - A_\eta A_\eta^* g_\tau(A_\eta A_\eta^*))(A_\eta u_0 - f_\delta), \tag{6.I}$$

$$A_\eta^*(A_\eta u_\tau - f_\delta) = (I - A_\eta^* A_\eta g_\tau(A_\eta^* A_\eta))A_\eta^*(A_\eta u_0 - f_\delta). \tag{6.2}$$

Для получения этих формул следует показать, что

$$A_\eta g_\tau(A_\eta^* A_\eta) = g_\tau(A_\eta A_\eta^*)A_\eta, \quad A_\eta^* g_\tau(A_\eta A_\eta^*) = g_\tau(A_\eta^* A_\eta)A_\eta^*.$$

Эти равенства вытекают из следующей леммы.

Лемма 3.I. Пусть $g:[0,a]\to\mathbb{C}$ – измеримая по Борелю ограниченная функция, $\|A\|^2 \le a$. Тогда

$$Ag(A^*A) = g(AA^*)A. \tag{6.3}$$

Доказательство.I. Рассмотрим отдельно случай непрерывной функции g (доказательство в таком случае особенно прозрачно). Непрерывную функцию можно с любой степенью точности равномерно проаппроксимировать полиномами. Пусть

$$\varepsilon_n \equiv \max_{0\le\lambda\le a} |g_n(\lambda) - g(\lambda)| \to 0 \text{ при } n\to\infty,$$

где g_n – некоторый полином. Тогда

$$\|g_n(A^*A) - g(A^*A)\| \le \varepsilon_n \to 0, \quad \|g_n(AA^*) - g(AA^*)\| \le \varepsilon_n \to 0.$$

Для полинома g_n формула (6.3) верна, в чем легко убедиться, рассмотрив одночлены λ^k:

$$A(A^*A)^k = (AA^*)^k A \quad (k=0,1,2,\dots).$$

В пределе $n\to\infty$ получаем, что формула (6.3) верна и для функции g.

2. В общем случае необязательно непрерывной функции g возьмем в основу полярные разложения операторов A и A^* (см. стр. 20, подстрочное замечание)

$$A = \mathcal{U}(A^*A)^{1/2}, \quad A^* = (A^*A)^{1/2}\mathcal{U}^*. \tag{6.4}$$

Отсюда следует, что $\mathcal{U}(A^*A)\mathcal{U}^* = AA^*$, а значит и

$$\mathcal{U}\, P(\lambda)\,\mathcal{U}^* = Q(\lambda),$$

где $P(\lambda)$ и $Q(\lambda)$ – спектральные семейства проекторов операторов A^*A и AA^* соответственно. Из интегральных представлений

$$g(A^*A) = \int_0^a g(\lambda)\, dP(\lambda), \qquad g(AA^*) = \int_0^a g(\lambda)\, dQ(\lambda)$$

получаем

$$\mathcal{U} g(A^*A)\mathcal{U}^* = g(AA^*),$$

или

$$\mathcal{U} g(A^*A) = g(AA^*)\,\mathcal{U}^*.$$

Применив к обеим частям равенства оператор $(AA^*)^{1/2}$, получаем на основании (6.4) равенство (6.3).

Лемма 6.I доказана.

6.2. <u>Поведение невязки</u>. Из условия (I.5) следует, что $u_r \to u_0$ при $r \to 0$, а вместе с тем

$$A_\eta u_r - f_\delta \to A_\eta u_0 - f_\delta, \quad A_\eta^*(A_\eta u_r - f_\delta) \to A_\eta^*(A_\eta u_0 - f_\delta) \text{ при } r \to 0.$$

Из условия (I.6) и равенства (6.2) следует, что

$$\|A_\eta^*(A_\eta u_r - f_\delta)\| \le \gamma_{1/2} r^{-1/2} \|A_\eta u_0 - f_\delta\| \to 0 \text{ при } r \to \infty. \quad (6.5)$$

Убедимся, что

$$A_\eta u_r - f_\delta \to Q_\eta f_\delta - f_\delta \text{ при } r \to \infty, \quad (6.6)$$

где $Q_\eta \in \mathcal{L}(F,F)$ – ортопроектор, проектирующий на $\overline{\mathcal{R}(A_\eta)}$. Действительно, $\overline{\mathcal{R}(A_\eta)} = \overline{\mathcal{R}(A_\eta A_\eta^*)}$, и по доказанному в предыдущем параграфе соотношению (5.4) имеем

$$(I - A_\eta A_\eta^* g_r(A_\eta A_\eta^*))\, z \to (I - Q_\eta)\, z \quad \text{при } r \to \infty \quad \forall z \in F.$$

Отсюда и из (6.I) немедленно следует (6.6).

Если $f \in \mathcal{R}(A)$, $Au_* = f$, то

$$\|Q_\eta f_\delta - f_\delta\| = \inf_{u \in E} \|A_\eta u - f_\delta\| \le \|A_\eta u_* - f_\delta\| \le \delta + \|u_*\|\eta,$$

и из (6.6) получаем

$$\lim_{r \to \infty} \|A_\eta u_r - f_\delta\| \le \delta + \|u_*\|\eta. \quad (6.7)$$

Это неравенство положим в основу при формулировке правил выбора r (см. п. 6.3).

Неравенство (6.7) неулучшаемое. Пусть, например, $z_\eta \in F$

таков, что $\|A^*z_\eta\|=\eta$, $\|z_\eta\|=1$(его существование гарантировано, если $0<\eta<\|A\|$, а $\mathcal{R}(A^*)$ незамкнута, что имеет место в случае незамкнутой $\mathcal{R}(A)$, т.е. в случае существенно некорректной задачи). Положив $f=cAA^*z_\eta\in\mathcal{R}(A)$ и считая ради простоты $\mathcal{N}(A)=0$, имеем $u_*=cA^*z_\eta$; обозначим также $v_*=u_*/\|u_*\|=u_*/(c\eta)$. Положим, далее,

$$f_\delta=f+\delta z_\eta,\quad A_\eta=A-\eta(\cdot,v_*)z_\eta.$$

Тогда $\|f_\delta-f\|=\delta$, $\|A_\eta-A\|=\eta$, $f_\delta-A_\eta u_*=(\delta+\|u_*\|\eta)z_\eta$, $z_\eta\in\mathcal{N}(A_\eta^*)$, $(I-Q_\eta)f_\delta=f_\delta-A_\eta u_*$ (оператор $I-Q_\eta$ проектирует на $\mathcal{N}(A_\eta^*)$), $\|Q_\eta f_\delta-f_\delta\|=\|f_\delta-A_\eta u_*\|=\delta+\|u_*\|\eta$, и в (6.7) достигается знак равенства. Если $\mathcal{N}(A^*)\neq 0$, то проведенную конструкцию можно приспособить к любому $f\in\mathcal{R}(AA^*)$.Таким образом, для довольно богатого набора правых частей f существуют возмущения f_δ и A_η, при которых в (6.7) имеет место знак равенства.

Если выполнено дополнительное условие

$$g_{r_n}(\lambda)\to g_r(\lambda)\ \text{при}\ r_n\to r>0\quad \forall\lambda\in[0,a],\tag{6.8}$$

то функции $\varphi_1(r)=\|A_\eta u_r-f_\delta\|$ и $\varphi_2(r)=\|A_\eta^*(A_\eta u_r-f_\delta)\|$ непрерывны при $r>0$. Если

$$|1-\lambda g_{r_2}(\lambda)|\le|1-\lambda g_{r_1}(\lambda)|\ \text{при}\ 0<r_1\le r_2,\ 0\le\lambda\le a,\tag{6.9}$$

то $\varphi_1(r)$ и $\varphi_2(r)$ монотонно убывающие. Наконец, если выполнено условие (6.9), причем функции g_r вещественно-значные и

$$0\le 1-\lambda g_r(\lambda)\le 1\ \text{при}\ r>0,\ 0\le\lambda\le a,\tag{6.10}$$

то функция $\psi(r)=\|u_r-u_0\|$ монотонно возрастающая.

Эти три утверждения легко доказываются на основе равенств (6.1) и (6.2); рассуждения аналогичны приведенным в п. 5.9.

6.3. <u>Правила выбора параметра регуляризации</u>. Ввиду (6.7) существует $r=r(\delta,\eta)$, удовлетворяющий условиям следующего правила выбора.

<u>Правило (П$_1$)</u>. Зададим числа $b_1>1$, $b_2\ge b_1$ и $\theta\in(0,1)$. Если при $r=0$ выполняется неравенство

$$\|A_\eta u_r-f_\delta\|\le b_2(\delta+\|u_*\|\eta)\tag{6.11}$$

(u_* – ближайшее к u_0 решение уравнения (I.I)), то положим $\tau=0$. В противном случае выберем любое такое $\tau>0$, для которого (6.II) выполнено, а для некоторого "предшествующего" $\tau'\in[\theta\tau,\tau]$ выполнено

$$\|A_\eta u_{\tau'}-f_\delta\|\geq b_1(\delta+\|u_*\|\eta). \tag{6.12}$$

Если выполнено условие (6.8), то гарантирован выбор τ и по следующему правилу.

Правило (П$_1'$). Зададим числа $b_1>1$ и $b_2\geq b_1$. Если $\|A_\eta u_0-f_\delta\|\leq b_2(\delta+\|u_*\|\eta)$, то положим $\tau=0$. В противном случае выберем любое такое $\tau>0$, для которого

$$b_1(\delta+\|u_*\|\eta)\leq\|A_\eta u_\tau-f_\delta\|\leq b_2(\delta+\|u_*\|\eta).$$

Эти два правила полностью идентичны соответствующим правилам из предыдущего параграфа. В последующих правилах мы выпуждены по-новому задавать верхнюю границу для τ.

Правило (П$_2$). Зададим числа $b>1$, $d>0$ и $\theta\in(0,1)$. Если при $\tau=0$ выполняется неравенство

$$\|A_\eta u_\tau-f_\delta\|\leq b\left[\delta+(\|u_\tau-u_0\|+\|u_0\|)\eta\right], \tag{6.13}$$

то положим $\tau=0$. В противном случае выберем любое такое $\tau\in(0,d/(\delta+\eta)^2]$, для которого (6.I3) выполнено, а для некоторого $\tau'\in[\theta\tau,\tau]$ выполнено

$$\|A_\eta u_{\tau'}-f_\delta\|\geq b\left[\delta+(\|u_{\tau'}-u_0\|+\|u_0\|)\eta\right]. \tag{6.14}$$

Если же такого $\tau\in(0,d/(\delta+\eta)^2]$ не существует, то положим $\tau=d/(\delta+\eta)^2$.

Это правило особенно удобно в ситуации, когда $\|A_\eta u_\tau-f_\delta\|$ монотонно убывает по τ, а $\|u_\tau-u_0\|$ монотонно возрастает. Напомним, что такая ситуации имеет место в условиях (6.9), (6.I0).

Правило (П$_3$) – такое же как правило (П$_2$), с заменой неравенств (6.I3) и (6.I4) на неравенства

$$\|A_\eta u_\tau-f_\delta\|\leq b(\delta+\|u_\tau\|\eta), \tag{6.15}$$

$$\|A_\eta u_{\tau'}-f_\delta\|\geq b(\delta+\|u_{\tau'}\|\eta). \tag{6.16}$$

Правило (П$_2'$). Зададим числа $b_1>1$, $b_2\geq b_1$ и $d>0$.

Если $\|A_\eta u_0 - f_\delta\| \le b_2(\delta + \|u_0\|\eta)$, то положим $r=0$. В противном случае выберем любое такое $r \in (0, d/(\delta+\eta)^2]$, что

$$b_1[\delta + (\|u_r - u_0\| + \|u_0\|)\eta] \le \|A_\eta u_r - f_\delta\| \le$$
$$\le b_2[\delta + (\|u_r - u_0\| + \|u_0\|)\eta]. \qquad (6.17)$$

Если же такого r не существует, положим $r = d/(\delta+\eta)^2$.

<u>Правило (Π_3')</u> – такое же как правило (Π_2'), с заменой неравенства (6.17) на неравенство

$$b_1(\delta + \|u_r\|\eta) \le \|A_\eta u_r - f_\delta\| \le b_2(\delta + \|u_r\|\eta).$$

Соотношение (6.5) дает основу следующему правилу.

<u>Правило (Π_4)</u>. Зададим числа $b>0$ и $\theta \in (0,1)$. Если при $r=0$ выполняется неравенство

$$\|A_\eta^*(A_\eta u_r - f_\delta)\| \le b(\delta+\eta), \qquad (6.18)$$

то положим $r=0$. В противном случае выберем любое такое $r>0$, для которого (6.18) выполнено, а для некоторого $r' \in [\theta r, r]$ выполнено

$$\|A_\eta^*(A_\eta u_{r'} - f_\delta)\| \ge b(\delta+\eta). \qquad (6.19)$$

<u>Правило (Π_4')</u>. Зададим числа $b_1>0$ и $b_2 \ge b_1$. Если $\|A_\eta^*(A_\eta u_0 - f_\delta)\| \le b_2(\delta+\eta)$, то положим $r=0$. В противном случае выберем любое такое $r>0$, что

$$b_1(\delta+\eta) \le \|A_\eta^*(A_\eta u_r - f_\delta)\| \le b_2(\delta+\eta).$$

Комментарии к правилам (Π_1)–(Π_3) выбора r см. в п.5.2. Сделаем одно замечание о применении правил (Π_4) и (Π_4') к итерационным методам. Для общей итерационной схемы (I.23) имеем

$$u_n - u_{n-1} = -C_\eta A_\eta^*(A_\eta u_{n-1} - f_\delta), \quad n=1,2,\ldots; \quad C_\eta = g(A_\eta^* A_\eta).$$

Из условия (I.19) вытекают оценки

$$\|C_\eta\| \le \gamma, \quad \|C_\eta^{-1}\| \le \beta^{-1},$$

где

$$\gamma = \max_{0\le\lambda\le a} g(\lambda), \quad \beta = \min_{0\le\lambda\le a} g(\lambda) > 0.$$

Таким образом,

$$\gamma^{-1}\|u_n - u_{n-1}\| \le \|A_\eta^*(A_\eta u_{n-1} - f_\delta)\| \le \beta^{-1}\|u_n - u_{n-1}\|,$$

и равносильные с (Π_4) и (Π_4') правила получаем, если вместо

$\|A_\eta^*(A_\eta u_n - f_\delta)\|$ использовать норму очередной поправки $\|u_n - u_{n-1}\|$.

6.4. <u>Сходимость и оценка погрешности</u>. В этом пункте приведем формулировки центральных результатов параграфа; их доказательства приводятся в последующих пунктах.

Начальное приближение u_0 считаем независимым[I)] от δ и η.

<u>Теорема 6.I</u>. Пусть $f \in \mathcal{R}(A)$, $\|f_\delta - f\| \le \delta$, $\|A_\eta - A\| \le \eta$. Пусть выполнены условия (I.I2), (I.5) и (I.6) с $p_0 > 1/2$, $\gamma_0 = 1$; в случае привлечения правил группы (Π_1')–(Π_3') дополнительно предполагаем выполненным условие (6.8).

Если параметр $r = r(\delta, \eta)$ в приближении (I.I3) выбран по любому из правил (Π_1), (Π_2), (Π_1'), (Π_2'), то

$$(\delta+\eta)^2 r(\delta,\eta) \to 0, \quad u_{r(\delta,\eta)} \to u_* \text{ при } \delta \to 0, \eta \to 0, \tag{6.20}$$

где u_* – ближайшее к u_0 решение уравнения (I.I). Если при этом начальная погрешность представима в виде

$$u_0 - u_* = |A|^p w, \ \|w\| \le \rho, \ 0 < p \le 2p_0 - 1, \tag{6.2I}$$

то справедливы оценки

$$r(\delta,\eta) \le c_{p,\rho} (\delta+\eta)^{-2/(p+1)}, \tag{6.22}$$

$$\|u_{r(\delta,\eta)} - u_*\| \le c'_{p,\rho} (\delta+\eta)^{p/(p+1)}, \quad 0 < p \le 2p_0 - 1; \tag{6.23}$$

в случае начальной погрешности (6.2I) с $0 < p < 2p_0 - 1$ справедливы также соотношения

$$(\delta+\eta)^{2/(p+1)} r(\delta,\eta) \to 0, \tag{6.24}$$

$$\|u_{r(\delta,\eta)} - u_*\| = o\left((\delta+\eta)^{p/(p+1)}\right) \text{ при } \delta \to 0, \eta \to 0. \tag{6.25}$$

Перечисленные утверждения справедливы и в случае правила (Π_3), если $N(A) = 0$ или если

$$b\left[1 - d^{1/2} \gamma_* \max\{\|A\|/\|f\|, 1\}\right] > 1, \tag{6.26}$$

а также в случае правила (Π_3'), если $N(A) = 0$ или если

$$b_1\left[1 - d^{1/2} \gamma_* \max\{\|A\|/\|f\|, 1\}\right] > 1. \tag{6.27}$$

I) См. подстрочное замечание к стр. 44.

Здесь b, b_1 и d – параметры из правил ($П_3$) и ($П_3'$),

$$\gamma_* = \sup_{\tau > b}\left[\tau^{-1/2} \sup_{0\le\lambda\le a} \lambda^{1/2} g_\tau(\lambda)\right]. \tag{6.28}$$

Большинство комментариев к теореме 5.I распространяется и на данную теорему. Особенно подчеркнем оптимальный порядок оценки (6.23) на классе точных решений (6.2I). Привлечение правил ($П_4$) и ($П_4'$), как это видно из следующей теоремы, не приводит к оценкам оптимального порядка; зато эти правила применимы и в случае, когда уравнение (I.I) разрешимо лишь в смысле наименьших квадратов.

Теорема 6.2. Пусть $Qf \in \mathcal{R}(A)$, $\|f_\delta - f\| \le \delta$, $\|A_\eta - A\| \le \eta$. Пусть выполнены условия (I.I2), (I.5) и (I.6) с $p_0 > 1$, а в случае привлечения правила ($П_4'$) также (6.8). Пусть, наконец, в правилах ($П_4$) и ($П_4'$) параметры b и b_1 таковы, что $b > \gamma_0 \|f - Qf\|$, соответственно, $b_1 > \gamma_0 \|f - Qf\|$.

Если $\tau = \tau(\delta, \eta)$ в приближении (I.I3) выбран по правилу ($П_4$) или ($П_4'$), то

$$(\delta+\eta)\tau(\delta,\eta) \to 0, \qquad u_{\tau(\delta,\eta)} \to u_* \text{ при } \delta\to 0,\ \eta\to 0, \tag{6.29}$$

где u_* – ближайшее к u_0 решение уравнения (I.I) в смысле наименьших квадратов. Если при этом начальная погрешность представима в виде

$$u_0 - u_* = |A|^p w, \quad \|w\| \le \rho, \quad 0 < p \le 2(p_0 - 1), \tag{6.30}$$

то справедливы оценки

$$\tau(\delta,\eta) \le c_{p,\rho}\,(\delta+\eta)^{-2/(p+2)}, \tag{6.31}$$

$$\|u_{\tau(\delta,\eta)} - u_*\| \le c'_{p,\rho}\,(\delta+\eta)^{p/(p+2)}, \quad 0 < p \le 2(p_0-1); \tag{6.32}$$

в случае начальной погрешности (6.30) с $0 < p < 2(p_0 - 1)$ справедливы также соотношения

$$(\delta+\eta)^{2/(p+2)}\,\tau(\delta,\eta) \to 0, \tag{6.33}$$

$$\|u_{\tau(\delta,\eta)} - u_*\| = o\left((\delta+\eta)^{p/(p+2)}\right) \quad \text{при } \delta\to 0,\ \eta \to 0. \tag{6.34}$$

Условие $b > \gamma_0 \|f - Qf\|$ нельзя снять; его можно, конечно, заменить более грубым, но легко реализуемым условием $b > \gamma_0 \|f\|$. В случае $f \in \mathcal{R}(A)$ имеем $f - Qf = 0$, и параметр

$b>0$ в правиле (Π_4) произволен. Аналогичное замечание касается правила (Π_4').

6.5. Доказательство теоремы 6.I отличается от доказательства теоремы 5.I только техническими деталями. Поэтому мы будем теперь более краткими, сосредоточив внимание на узловых моментах доказательства.

Введем обозначения

$$B = A^*A = |A|^2, \qquad B_\eta = A_\eta^* A_\eta = |A_\eta|^2,$$
$$K_{r,\eta} = I - A_\eta^* A_\eta g_r(A_\eta^* A_\eta) = I - B_\eta g_r(B_\eta),$$
$$\hat{K}_{r,\eta} = I - A_\eta A_\eta^* g_r(A_\eta A_\eta^*).$$

В виду условия (I.6)

$$\|K_{r,\eta}\| \le \gamma_0 = 1, \qquad \|\hat{K}_{r,\eta}\| \le \gamma_0 = 1.$$

Для приближения (I.I3) имеем (ср. 4.I6) и (6.I)

$$u_r - u_* = K_{r,\eta}(u_0 - u_*) + g_r(B_\eta) A_\eta^* (f_\delta - A_\eta u_*), \tag{6.35}$$
$$A_\eta u_r - f_\delta = A_\eta K_{r,\eta}(u_0 - u_*) - \hat{K}_{r,\eta}(f_\delta - A_\eta u_*). \tag{6.36}$$

Ранее нами установлено (см. (4.I7) и (4.I8), что

$$\|K_{r,\eta}(u_0 - u_*)\| \to 0 \text{ при } r \to \infty,\ \eta \to 0, \tag{6.37}$$
$$\|g_r(B_\eta) A_\eta^* (f_\delta - A_\eta u_*)\| \le \gamma_* r^{1/2} (\delta + \|u_*\| \eta); \tag{6.38}$$

кроме того

$$\|\hat{K}_{r,\eta}(f_\delta - A_\eta u_*)\| \le \delta + \|u_*\| \eta. \tag{6.39}$$

Аналогично (5.24) доказывается, что

$$\sigma_{r,\eta} \equiv r^{1/2} \|A_\eta K_{r,\eta}(u_0 - u_*)\| \to 0 \text{ при } r \to \infty,\ \eta \to 0. \tag{6.40}$$

Наконец, аналогично (5.28) устанавливается импликация

$$r_n \le \bar{r} = const,\ \eta_n \to 0,\ A_{\eta_n} K_{r_n,\eta_n}(u_0 - u_*) \to 0 \text{ при } n \to \infty \Rightarrow$$
$$\Rightarrow K_{r_n,\eta_n}(u_0 - u_*) \to 0 \text{ при } n \to \infty. \tag{6.4I}$$

Обратимся к правилу (Π_1). Если оно выдает $r = 0$ при сколь угодно малых $\delta > 0$ и $\eta > 0$, то $Au_0 = f$, и утверждения теоремы тривиальны. Поэтому будем считать, что при достаточно малых $\delta > 0$ и $\eta > 0$ правило (Π_1) дает $r = r(\delta, \eta) > 0$,

$\tau'=\tau'(\delta,\eta)>0,\ \tau'\in[\theta\tau,\tau]$. Из (6.36) и (6.39) для них получаем неравенства

$$\|A_\eta K_{\tau,\eta}(u_0-u_*)\|\le(b_2+1)(\delta+\|u_*\|\eta),\qquad(6.42)$$

$$\|A_\eta K_{\tau',\eta}(u_0-u_*)\|\ge(b_1-1)(\delta+\|u_*\|\eta).\qquad(6.43)$$

Из (6.40) и (6.43)

$$(\tau')^{1/2}(b_1-1)(\delta+\|u_*\|\eta)\le\sigma_{\tau',\eta},$$

поэтому $(\delta+\eta)^2\tau'(\delta,\eta)\to0,\ (\delta+\eta)^2\tau(\delta,\eta)\to0$ при $\delta\to0,\eta\to0$. Если одновременно $\tau(\delta,\eta)\to\infty$ при $\delta\to0,\eta\to0$, то сходимость $u_{\tau(\delta,\eta)}\to u_*$ при $\delta\to0,\ \eta\to0$ вытекает из (6.35), (6.37) и (6.38). Если же $\tau_n=\tau(\delta_n,\eta_n)\le\bar\tau=const$ при некоторых $\delta_n\to0$, $\eta_n\to0$, то сходимость $u_{\tau(\delta_n,\eta_n)}\to u_*$ вытекает из (6.35), (6.38), (6.4I) и (6.42). Итак, (6.20) доказано.

Пусть u_*-u_0 представим в виде (6.2I). При помощи (I.6) и (3.7) находим

$$\|A_\eta K_{\tau,\eta}(u_0-u_*)\|=\|A_\eta K_{\tau,\eta}|A|^p w\|\le$$

$$\le\|B_\eta^{1/2}K_{\tau,\eta}B_\eta^{p/2}w\|+\|A_\eta K_{\tau,\eta}(|A_\eta|^p-|A|^p)w\|\le$$

$$\le\gamma_{(p+1)/2}\tau^{-(p+1)/2}\|w\|+\varepsilon_{\tau,\eta}\eta\|w\|,\quad\varepsilon_{\tau,\eta}\to0\ \text{при}\ \tau\to\infty.$$

Сопоставляя это с (6.43), получаем

$$\gamma_{(p+1)/2}(\tau')^{-(p+1)/2}\|w\|\ge(b_1-1)\delta+[(b_1-1)\|u_*\|-\varepsilon_{\tau',\eta}\|w\|]\eta.$$

Отсюда следует оценка (6.22). Оценка (6.23) следует из (6.35), (6.38), (6.22) и проводимой ниже оценки члена $K_{\tau,\eta}(u_0-u_*)$. Имеем (см. (3.6))

$$\|K_{\tau,\eta}(u_0-u_*)\|=\|K_{\tau,\eta}|A|^p w\|\le$$

$$\le\|K_{\tau,\eta}|A_\eta|^p w\|+\|K_{\tau,\eta}(|A_\eta|^p-|A|^p)w\|\le$$

$$\le\||A_\eta|^p K_{\tau,\eta}w\|+c_p(1+|\ln\eta|)\eta^{\min\{1,p\}}\|w\|.\qquad(6.44)$$

Последний член имеет порядок $o(\eta^{p/(p+1)})$, а член $\||A_\eta|^pK_{\tau,\eta}w\|$ оценим при помощи неравенства моментов точно так, как в (5.32). В результате получаем оценку $\|K_{\tau,\eta}(u_0-u_*)\|=$ $=O((\delta+\eta)^{p/(p+1)})$, и оценка (6.23) установлена.

Соотношения (6.24) и (6.25) доказываются несложными уточнениями рассуждений (ср. п. 5.4).

Рассмотрим случай правила ($П_1'$). Для $r=r(\delta,\eta)$, определенного по правилу ($П_1'$) имеем (ср. (6.42) и (6.43)

$$\|A_\eta K_{r,\eta}(u_0-u_*)\| \le (b_2+1)(\delta+\|u_*\|\eta),$$

$$\|A_\eta K_{r,\eta}(u_0-u_*)\| \ge (b_1-1)(\delta+\|u_*\|\eta).$$

Видоизменения в рассуждениях касаются только оценки $r(\delta,\eta)$ и они очевидны.

Применение правил ($П_2$), ($П_3$) и ($П_2'$), ($П_3'$) сводится к случаю правил ($П_1$) и ($П_1'$) аналогично тому, как это делалось в п. 5.5, 5.6.

Доказательство теоремы 6.I завержено.

6.6. Доказательство теоремы 6.2. Формула (6.35) верна и в случае $Qf\in\mathcal{R}(A)$:

$$u_r-u_*=K_{r,\eta}(u_0-u_*)+g_r(B_\eta)A_\eta^*(f_\delta-A_\eta u_*). \quad (6.45)$$

Из нее (или из (6.36)) следует, что

$$A_\eta^*(A_\eta u_r-f_\delta)=B_\eta K_{r,\eta}(u_0-u_*)-K_{r,\eta}A_\eta^*(f_\delta-A_\eta u_*). \quad (6.46)$$

Из § 4 нам известно, что (см. (4.I7) и (4.23))

$$\|K_{r,\eta}(u_0-u_*)\|\to 0 \text{ при } r\to\infty,\ \eta\to 0, \quad (6.47)$$

$$\|g_r(B_\eta)A_\eta^*(f_\delta-A_\eta u_*)\|\le\gamma_* r^{1/2}(\delta+\|u_*\|\eta)+\gamma r\|f\|\eta; \quad (6.48)$$

проследив вывод (4.23), видим также, что

$$\|K_{r,\eta}A_\eta^*(f_\delta-A_\eta u_*)\|\le\gamma_{1/2}r^{-1/2}(\delta+\|u_*\|\eta)+\gamma_0\|f-Qf\|\eta. \quad (6.49)$$

Далее (ср. (5.24))

$$\sigma_{r,\eta}\equiv r\|B_\eta K_{r,\eta}(u_0-u_*)\|\to 0 \quad \text{при } r\to\infty,\ \eta\to 0. \quad (6.50)$$

Наконец, верна импликация (ср. (5.28))

$$r_n\le\bar r=const,\ \eta_n\to 0,\ B_{\eta_n}K_{r_n,\eta_n}(u_0-u_*)\to 0 \text{ при } n\to\infty \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_{r_n,\eta_n}(u_0-u_*)\to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty. \quad (6.5I)$$

Обратимся к правилу ($П_4$). Если оно выдает $r=0$ при сколь угодно малых $\delta>0$ и $\eta>0$, то

$$\|A_\eta^*(A_\eta u_0-f_\delta)\|\le b(\delta+\eta)\to 0 \quad \text{при } \delta\to 0,\ \eta\to 0,$$

откуда следует, что $A^*(Au_0-f)=0$, т.е. начальное приближение u_0 является решением уравнения (I.I) в смысле наименьших квадратов. В таком случае утверждения теоремы тривиальны. Поэтому будем считать, что правило (Π_4) при достаточно малых $\delta>0$ и $\eta>0$ дает $r=r(\delta,\eta)>0$, $r'=r'(\delta,\eta)>0$, $r'\in[\theta r, r]$. Из (6.46) и (6.49) для таких r и r' получаем

$$\|B_\eta K_{r,\eta}(u_0-u_*)\|\leqslant b(\delta+\eta)+\gamma_{1/2}r^{-1/2}(\delta+\|u_*\|\eta)+\gamma_0\|f\|\eta, \quad (6.52)$$

$$\|B_\eta K_{r',\eta}(u_0-u_*)\|\geqslant b(\delta+\eta)-\gamma_{1/2}(r')^{-1/2}(\delta+\|u_*\|\eta)-\gamma_0\|f-Qf\|\eta.$$

По условию теоремы $b-\gamma_0\|f-Qf\|>0$. Поэтому, если $r'(\delta,\eta)\to\infty$ при $\delta\to 0,\ \eta\to 0$, то при достаточно малых δ и η имеем

$$\|B_\eta K_{r',\eta}(u_0-u_*)\|\geqslant b'(\delta+\eta), \quad b'>0. \qquad (6.53)$$

Отсюда совместно с (6.50) получаем, что $(\delta+\eta)r'(\delta,\eta)\to 0$, а вместе с тем $(\delta+\eta)r(\delta,\eta)\to 0$ при $\delta\to 0,\ \eta\to 0$.

Дальнейшие рассуждения идут в по знакомому нам руслу, используя (6.45)-(6.53) вместо (6.35)-(6.43).

Доказательство теоремы 6.2 закончено.

6.7. Случай точно заданного оператора. В случае $A_\eta=A$ правила (Π_1)-(Π_3) можно объединить в одно правило (Π), а правила (Π_1')-(Π_3') в одно правило (Π'). Их формулировки дословно повторяют приведенные в п. 5.8 и 5.I0. В теореме 6.I можно уточнить постоянные:

Теорема 6.3. Пусть $f\in\mathcal{R}(A)$, $\|f_\delta-f\|\leqslant\delta$. Пусть выполнены условия (I.5) и (I.6) с $a\geqslant\|A\|^2$, $p_0>1/2$, $\gamma_0=1$, а в случае привлечения правила (Π') также условие (6.8).

Если параметр $r=r(\delta)$ в приближении

$$u_r=(I-A^*Ag_r(A^*A))u_0+g_r(A^*A)A^*f_\delta$$

выбран по любому из правил (Π) и (Π'), то

$$\delta^2 r(\delta)\to 0, \quad u_{r(\delta)}\to u_* \quad \text{при } \delta\to 0,$$

где u_* – ближайшее к u_0 решение уравнения (I.I). Если при этом начальная погрешность представима в виде (6.2I), то справедливы оценки

$$r(\delta)\leqslant c_p\,\rho^{2/(p+1)}\delta^{-2/(p+1)}, \qquad (6.54)$$

$$\|u_{r(\delta)}-u_*\|\leqslant c_p'\,\rho^{1/(p+1)}\delta^{p/(p+1)}, \quad 0<p\leqslant 2p_0-1, \quad (6.55)$$

где в случае правила (П)

$$c_p=\theta^{-1}\left(\frac{\gamma_{(p+1)/2}}{b-1}\right)^{2/(p+1)}, \quad c_p'=(b+1)^{p/(p+1)}+c_p^{1/2}\gamma_*, \quad (6.56)$$

а в случае правила (П′)

$$c_p=\left(\frac{\gamma_{(p+1)/2}}{b_1-1}\right)^{2/(p+1)}, \quad c_p'=(b_2+1)^{p/(p+1)}+c_p^{1/2}\gamma_*. \quad (6.57)$$

<u>Доказательство</u> этих оценок получается повторением рассуждений п. 6.5 в данной упрощенной ситуации.

Постоянные можно подсчитать и в оценках теоремы 6.2. Кроме того, можно снять условия $b>\gamma_0\|f-Qf\|$, $b_1>\gamma_0\|f-Qf\|$, т.е. параметры $b>0$ и $b_1>0$ в правилах ($П_4$) и ($П_4'$) могут быть произвольными. Это связано с тем, что $A^*(I-Q)=0$, и вместо (6.49) в случае $A_\eta=A$ получаем

$$\|(I-A^*Ag_r(A^*A))A^*(f_\delta-Au_*)\|\le\gamma_{1/2}r^{-1/2}\delta.$$

§ 7. КРИТИЧЕСКИЙ УРОВЕНЬ НЕВЯЗКИ

7.I. <u>Постановка задачи</u>. Как выяснено в предыдущих двух параграфах, для невязки приближений (I.7) и (I.I3) справедливо соотношение

$$\lim_{r\to\infty}\|A_\eta u_r-f_\delta\|=\inf_{u\in E}\|A_\eta u-f_\delta\|\le\delta+\|u_*\|\eta, \quad (7.I)$$

где u_* – решение уравнения (I.I). В правилах выбора параметра регуляризации r мы позаботились о том, чтобы $\|A_\eta u_r-f_\delta\|$ была величиной порядка $b(\delta+\|u_*\|\eta)$, $b>1$. Возникает естественный вопрос, допустимо ли вести вычисления до достижения невязкой критического уровня

$$\|A_\eta u_r-f_\delta\|=\delta+\|u_*\|\eta \quad (7.2)$$

или

$$\|A_\eta u_r-f_\delta\|=\delta+(\|u_0\|+\|u_r-u_0\|)\eta. \quad (7.3)$$

Здесь нужны некоторые уточнения, ибо, как было указано в п. 5.I и 6.2, в (7.I) иногда имеет место знак равенства, а невязка $\|A_\eta u_r-f_\delta\|$ обычно монотонно убывает по r, и тогда $\|A_\eta u_r-f_\delta\|>\delta+\|u_*\|\eta$ при каждом конечном $r>0$. Об этих уточнениях будет сказано позже по ходу дела.

Приближения (I.7) и (I.I3) определены заданием функций g_r. До сих пор мы брали в основу условия (I.5) и (I.6) на g_r. Теперь мы эти условия несколько усилим, положив в основу условия

$$g_r(\lambda)\geq 0, \quad 0\leq 1-\lambda g_r(\lambda)\leq g_r(\lambda)/\kappa_r \quad (0\leq\lambda\leq a,\ r>0), \qquad (7.4)$$

где

$$\kappa_r=\sup_{0\leq\lambda\leq a} g_r(\lambda).$$

В дальнейшем существенно также условие $\kappa_r\to\infty$ при $r\to\infty$, однако, в целях единообразия мы это условие примем в "нормализованном" виде

$$\beta r\leq\kappa_r\leq\gamma r \quad (r>0),\ \beta=\mathrm{const}>0,\ \gamma=\mathrm{const}. \qquad (7.5)$$

В таком случае выполнено условие (I.5). Поскольку

$$0\leq 1-\lambda g_r(\lambda)\leq 1,$$

$$0\leq\lambda(1-\lambda g_r(\lambda))\leq\lambda g_r(\lambda)/\kappa_r\leq 1/\kappa_r\leq\beta^{-1}r^{-1} \quad (0\leq\lambda\leq a),$$

то в силу замечания 6 п. I.5 для $p\in[0,1]$ выполнено также условие (I.6), т.е. квалификация $p_0\geq 1$. Заметим также, что из (7.4) следует строгая положительность $g_r(\lambda)$.

Предложение 7.I. Если функция $g:[0,\infty)\to R$ такова, что

$$g(\lambda)\geq 0,\ 0\leq 1-\lambda g(\lambda)\leq g(\lambda)/\gamma \quad (0\leq\lambda<\infty),\ \gamma\equiv\sup_{0\leq\lambda<\infty} g(\lambda)<\infty,$$

то для семейства функций

$$g_r(\lambda)=r g(r\lambda) \qquad (0\leq\lambda<\infty,\ r>0)$$

выполнены условия (7.4) и (7.5), причем $\kappa_r=\gamma r$.

Доказательство элементарно.

Предложение 7.2. Пусть $m\geq 1$ фиксировано. Если условия (7.4) и (7.5) для семейства функций g_r выполнены, то они выполнены и для семейства функций $g_{m,r}$, определенных формулой (I.I8) и соответствующих итерированному варианту методов (I.7) и (I.I3).

Доказательство. Из (7.4) нетрудно заметить, что функция $g_r(\lambda)$, а также функция $1-\lambda g_r(\lambda)$ свои наибольшие значения достигают при $\lambda=0$. Поэтому из (I.I8) получаем

$$\sup_{0\le\lambda\le a} g_{m,\tau}(\lambda)=g_{m,\tau}(0)=mK_\tau\equiv K_{m,\tau}, \qquad g_{m,\tau}(\lambda)\ge 0,$$

$$1-\lambda g_{m,\tau}(\lambda)=(1-\lambda g_\tau(\lambda))^m=(1-\lambda g_\tau(\lambda))\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1}(1-\lambda g_\tau(\lambda))^{m-1}\le$$

$$\le\frac{g_\tau(\lambda)}{K_\tau}\,\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1}(1-\lambda g_\tau(\lambda))^j=\frac{1}{mK_\tau}\sum_{j=0}^{m-1}(1-\lambda g_\tau(\lambda))^j g_\tau(\lambda)=$$

$$=\frac{1}{mK_\tau}g_{m,\tau}(\lambda)=\frac{g_{m,\tau}(\lambda)}{K_{m,\tau}}\quad(0\le\lambda\le a),$$ ч. и т.д.

Аналогично доказывается

Предложение 7.3. Если функция $g:[0,a]\to R$ такова, что

$$g(\lambda)\ge 0,\ 0\le 1-\lambda g(\lambda)\le g(\lambda)/\gamma\quad(0\le\lambda\le a),\quad \gamma\equiv\sup_{0\le\lambda\le a}g(\lambda)<\infty, \tag{7.6}$$

то для функций $g_n(\lambda)$, определенных формулой (I.2I) и соответствующих итерационным методам (I.20) и (I.23), выполнены условия (7.4) и (7.5), причем $K_\tau=\gamma\tau$. Выполнено также условие (6.9).

Обратимся к примерам § 2. В силу предложения 7.I условия (7.4), (7.5) выполнены для методов Лаврентьева и Тихонова, а в силу предложения 7.2 также для их итерированных вариантов. Далее, по предложению 7.I условия (7.4), (7.5) выполнены для метода задачи Коши и для методов спектральной срезки (2.5) и (2.22); для методов (2.4) и (2.2I) эти условия нарушены. Наконец, в силу предложения 7.3 условия (7.4), (7.5) выполнены для неявных итерационных схем (2.7) и (2.24), а при $\mu\in(0,1/a]$ также для явных итерационных схем (2.6) и (2.23); при $\mu\in(1/a,2/a)$ эти условия наружены.

7.2. Критический уровень невязки для приближения (I.7) приводит к расходящемуся процессу. Рассмотрим случай $E=F$, $A=A^*\ge 0$; оператор A считаем заданным точно ($\eta=0$). Условия (7.2) и (7.3) сливаются в условие

$$\|Au_\tau-f_\delta\|=\delta, \tag{7.7}$$

где

$$u_\tau=(I-Ag_\tau(A))u_0+g_\tau(A)f_\delta. \tag{7.8}$$

Теорема 7.I. Пусть $E=F$, $A=A^*>0$, $f\in\mathcal{R}(A)$, а начальное приближение u_0 таково, что $\|Au_0-f_\delta\|>\delta$ и

$$(I-Ag_\tau(A))(u_0-u_*)\neq 0 \text{ при всех } \tau>0. \qquad (7.9)$$

Пусть выполнены условия (5.45), (7.4), (7.5) с $\alpha \geqslant \|A\|$. Тогда для любого $M>>0$ и любого достаточно малого $\delta>0$ найдется такой $f_\delta=f_{\delta,M}\in F$, что $\|f_\delta-f\|=\delta$, но при выборе $\tau=\tau(\delta)$ из условия[I)] (7.7) для приближения (7.8) получаем

$$\|u_{\tau(\delta)}-u_*\|>M.$$

Доказательство проведем при дополнительном условии о полной непрерывности оператора A, что упрощает выкладки. Обозначим через λ_j и φ_j $(j=1,2,\dots)$ собственные значения и собственные элементы оператора A:

$$A\varphi_j=\lambda_j\varphi_j,\quad \lambda_j>0,\quad \|\varphi_j\|=1\ (j=1,2,\dots),\quad \lambda_j\to 0 \text{ при } j\to\infty.$$

Элемент f_δ выберем так, что $f_\delta-f=\sigma_j\delta\varphi_j$, где $\sigma_j=1$, если $\mathrm{Re}(u_0-u_*,\varphi_j)\leqslant 0$, и $\sigma_j=-1$ в противном случае; номер $j=j(\delta,M)$ выбирается достаточно большим (об этом будет сказано ниже). Формулы (5.20) и (5.2I) в данном случае дают

$$u_\tau-u_*=(I-Ag_\tau(A))(u_0-u_*)+\sigma_j\delta g_\tau(\lambda_j)\varphi_j,$$

$$Au_\tau-f_\delta=A(I-Ag_\tau(A))(u_0-u_*)-\sigma_j\delta(1-\lambda_j g_\tau(\lambda_j))\varphi_j,$$

Отсюда

$$\|u_\tau-u_*\|\geqslant\delta g_\tau(\lambda_j)-\varepsilon_\tau,$$

$$\varepsilon_\tau=\|(I-Ag_\tau(A))(u_0-u_*)\|\to 0 \text{ при } \tau\to\infty,$$

$$\|Au_\tau-f_\delta\|^2\geqslant\|A(I-Ag_\tau(A))(u_0-u_*)\|^2+\delta^2(1-\lambda_j g_\tau(\lambda_j))^2,$$

так как в силу выбора σ_j

$$\mathrm{Re}\left(A(I-Ag_\tau(A))(u_0-u_*),\ -\sigma_j\delta(1-\lambda_j g_\tau(\lambda_j))\varphi_j\right)=$$
$$=-\sigma_j\delta\lambda_j(1-\lambda_j g_\tau(\lambda_j))^2\,\mathrm{Re}(u_0-u_*,\varphi_j)\geqslant 0.$$

По условию выбора $\tau=\tau(\delta)$ из (7.7)

$$\|A(I-Ag_\tau(A))(u_0-u_*)\|^2+\delta^2(1-\lambda_j g_\tau(\lambda_j))^2\leqslant\delta^2.$$

I) В силу положительности A имеем $\overline{R(A)}=E$; и $\|Au_\tau-f_\delta\|\to 0$ при $\tau\to\infty$ (см. (7.I)). Выбор τ из условия (7.7) гарантирован.

С учетом (7.9) отсюда легко усмотреть, что $r(\delta)\to\infty$ при $j\to\infty$; в силу (7.4) имеем также

$$g_{r(\delta)}(\lambda_j)\geqslant \frac{1}{\lambda_j+1/K_{r(\delta)}}\to\infty,$$

а вместе с тем

$$\|u_{r(\delta)}-u_*\|\geqslant \delta g_{r(\delta)}(\lambda_j)-\varepsilon_{r(\delta)}\to\infty \quad \text{при} \quad j\to\infty.$$

Теорема доказана.

Отрицательный результат здесь был получен при весьма специальных возмущениях элемента $f\in\mathcal{R}(A)$. Если возмущение имеет случайных характер, то, как показывают численные эксперименты, ухудшение приближения u_r при приближении невязки к критическому уровню δ выражено нерезко. Не исключено, что в вероятностной постановке[1)] можно доказать сходимость метода $\{(I.7),\ (7.2)\}$.

7.3. <u>Численные примеры</u>. Проиллюстрируем зависимость $\|u_r-u_*\|$ от $b\equiv\|Au_r-f_\delta\|/\delta$ на численных примерах. Рассмотрим модельную задачу

$$h\sum_{j=1}^{N-1} a_{ij}u_j=f_i \quad (i=1,\dots,N-1), \tag{7.I0}$$

в которой

$$h=\frac{1}{N},\quad a_{ij}=\pi^2 ih(1-jh) \text{ при } i\leqslant j,\quad a_{ij}=a_{ji}\quad (i,j=1,\dots,N-1).$$

Матрица $A=(ha_{ij})$ симметрична и положительна: $A=A^*>0$. Задача (7.I0) получена дискретизацией интегрального уравнения первого рода

$$\pi^2\int_0^1 G(t,s)u(s)ds=f(t) \quad (0\leqslant t\leqslant 1), \tag{7.II}$$

где

$$G(t,s)=\begin{cases} t(1-s) & \text{при } t\leqslant s,\\ s(1-t) & \text{при } t>s\end{cases}$$

– функцию Грина дифференциального оператора $-y''$ при краевых условиях $y(0)=y(1)=0$. При достаточно больших N задача (7.I0) унаследует от задачи (7.II) свойства некорректно поставленной задачи.

I) По иным поводам вероятностные постановки рассмотрены в [2I, 65, 67].

Таблица 7.I

Решение системы уравнений (7.I0), N=30, δ=0.00I

Метод Лаврентьева (2.I)

$u_*=u_{*,1}$			$u_*=u_{*,2}$		
r^{-1}	$b=\|Au_r-f_\delta\|/\delta$	$\|u_r-u_*\|$	r^{-1}	$b=\|Au_r-f_\delta\|/\delta$	$\|u_r-u_*\|$
0.0I50	I4.II	0.I293	0.053I	45.46	0.0500
0.0098	9.39	0.II76	0.0349	30.37	0.0409
0.0089	8.48	0.II70	0.03I4	27.43	0.0404
0.0080	7.65	0.II76	0.0282	24.76	0.0408
0.0052	5.08	0.I306	0.0I22	I0.85	0.0666
0.0023	2.24	0.I9I8	0.0052	4.74	0.I2I5
0.00I0	0.99	0.2587	0.0023	2.08	0.I949

Итеративный вариант метода Лаврентьева (2.2), m=2, u_0=0

$u_*=u_{*,1}$			$u_*=u_{*,2}$		
r^{-1}	$b=\|Au_r-f_\delta\|/\delta$	$\|u_r-u_*\|$	r^{-1}	$b=\|Au_r-f_\delta\|/\delta$	$\|u_r-u_*\|$
0.0382	3.43	0.I233	0.I667	I8.46	0.0252
0.0280	2.38	0.II04	0.I35I	I2.83	0.02I9
0.0225	I.88	0.I063	0.I094	8.86	0.02I3
0.0203	I.68	0.I059	0.0886	6.09	0.023I
0.0I82	I.5I	0.I068	0.07I7	4.I8	0.0267
0.0I20	I.0I	0.I234	0.058I	2.90	0.03I9
0.0079	0.70	0.I570	0.047I	2.05	0.0384

Неявная итерационная схема (2.7), α=0.2, u_0=0

$u_*=u_{*,1}$			$u_*=u_{*,2}$		
$r=n$	$b=\|Au_r-f_\delta\|/\delta$	$\|u_r-u_*\|$	$r=n$	$b=\|Au_r-f_\delta\|/\delta$	$\|u_r-u_*\|$
I2	I.63	0.I055	I	I50.I0	0.I5I7
I4	I.40	0.I005	2	25.07	0.0305
I6	I.24	0.098I	3	4.39	0.0I78
I7	I.I8	0.0978	4	I.33	0.0200
I8	I.I2	0.0979	5	I.02	0.0239
20	I.03	0.0992	6	0.95	0.0282
22	0.96	0.I0I8	7	0.9I	0.0326

Явная итерационная схема (2.6), μ=I.5, u_0=0

$u_*=u_{*,1}$			$u_*=u_{*,2}$		
$r=n$	$b=\|Au_r-f_\delta\|/\delta$	$\|u_r-u_*\|$	$r=n$	$b=\|Au_r-f_\delta\|/\delta$	$\|u_r-u_*\|$
20	2.98	0.I40I	5	28.60	0.0328
30	I.97	0.II57	6	I4.40	0.0207
40	I.50	0.I028	7	7.3I	0.0I62
50	I.24	0.0972	8	3.82	0.0I50
55	I.I5	0.0965	9	2.I7	0.0I52
60	I.07	0.0968	I0	I.45	0.0I59
70	0.96	0.0998	I5	0.96	0.02I7

В качестве $E=F$ в данном случае выступает пространство $(N-1)$-мерных векторов $u=(u_1,\dots,u_{N-1})$ с нормой

$$\|u\|=\Big(h\sum_{j=1}^{N-1}u_j^2\Big)^{1/2}.$$

В качестве точного решения задачи (7.10) зададим

$$u_*=u_{*,1}=(1,1,\dots,1)$$

или

$$u_*=u_{*,2}=Au_{*,1}.$$

По u_* вычислим соответствующее f, который затем возмутим величинами $\pm\delta$. По получаемой приближенной правой части f_δ различными методами восстановим решение задачи (7.10). Численные результаты представлены в таблице 7.1. Подчеркнуты те значения b, при которых погрешность наименьшая. Бросается в глаза, что в случае метода Лаврентьева оптимальное b значительно больше, чем в других методах. Это не случайно: для метода Лаврентьева правило (П) (см. п.5.8) приводит к расходящемуся процессу – не выполнено условие $p_0>1$ теоремы 5.3. Видно также, что для остальных методов погрешность $\|u_r-u_*\|$ зависит от b довольно слабо. При приближении b к 1 погрешность $\|u_r-u_*\|$ растет во всех примерах. Видимо, не располагая никакой дополнительной информацией о решении, в правиле (П) можно рекомендовать $b=2$.

Качественно такая же картина наблюдалась, когда правые части системы (7.10) возмущались псевдослучайными числами.

7.4. <u>Неравенство для приближения (1.13)</u>. Для приближения (1.13) выбор r из условия (7.2), как будет показано в следующем пункте, приводит к сходящемуся процессу. Доказательство опирается на следующую лемму.

<u>Лемма 7.1</u>. Пусть выполнены условия (7.4) и (7.5), причем $a\geq\|A_\eta\|^2$. Тогда для приближения (1.13) при любом $u\in E$ и любом $r>0$ имеет место неравенство

$$\|u_r-u\|^2+\kappa_r\left(\|A_\eta u_r-f_\delta\|^2-\|A_\eta u-f_\delta\|^2\right)\leq$$
$$\leq\left(\left(I-A_\eta^*A_\eta g_r(A_\eta^*A_\eta)\right)(u_0-u),\ u_0-u\right). \tag{7.12}$$

Д͟о͟к͟а͟з͟а͟т͟е͟л͟ь͟с͟т͟в͟о͟. По формуле (6.1)

$$A_\eta u_r - f_\delta = (I - A_\eta A_\eta^* g_r(A_\eta A_\eta^*))(A_\eta u_0 - f_\delta),$$

а вместе с тем

$$\|A_\eta u_r - f_\delta\|^2 = \int_0^a (1-\lambda g_r(\lambda))^2 d(Q_\eta(\lambda)(A_\eta u_0 - f_\delta), A_\eta u_0 - f_\delta),$$

где $Q_\eta(\lambda)$ – спектральное семейство проекторов оператора $A_\eta A_\eta^*$.

Для приближения (1.13) и любого $u \in E$ имеем

$$u_r - u = (I - A_\eta^* A_\eta g_r(A_\eta^* A_\eta))(u_0 - u) + g_r(A_\eta^* A_\eta) A_\eta^* (f_\delta - A_\eta u).$$

Отсюда

$$\|u_r - u\|^2 = ((I - A_\eta^* A_\eta g_r(A_\eta^* A_\eta))(u_0 - u), (I - A_\eta^* A_\eta g_r(A_\eta^* A_\eta))(u_0 - u)) +$$
$$+ 2\,\mathrm{Re}((I - A_\eta^* A_\eta g_r(A_\eta^* A_\eta))(u_0 - u), g_r(A_\eta^* A_\eta) A_\eta^* (f_\delta - A_\eta u)) +$$
$$+ (g_r(A_\eta^* A_\eta) A_\eta^* (f_\delta - A_\eta u), g_r(A_\eta^* A_\eta) A_\eta^* (f_\delta - A_\eta u)) =$$
$$= ((I - A_\eta^* A_\eta g_r(A_\eta^* A_\eta))^2 (u_0 - u), u_0 - u) +$$
$$+ 2\,\mathrm{Re}(A_\eta g_r(A_\eta^* A_\eta)(I - A_\eta^* A_\eta g_r(A_\eta^* A_\eta))(u_0 - u), f_\delta - A_\eta u) +$$
$$+ (A_\eta A_\eta^* g_r(A_\eta A_\eta^*) g_r(A_\eta A_\eta^*)(f_\delta - A_\eta u), f_\delta - A_\eta u).$$

(на последнем шаге преобразований мы воспользовались формулой (6.3)). Раскладывая $A_\eta u_0 - f_\delta$ на слагаемые $A_\eta(u_0 - u)$ и $A_\eta u - f_\delta$, напишем вспомогательное равенство

$$(g_r(A_\eta A_\eta^*)(I - A_\eta A_\eta^* g_r(A_\eta A_\eta^*))(A_\eta u_0 - f_\delta), A_\eta u_0 - f_\delta) =$$
$$= (g_r(A_\eta A_\eta^*)(I - A_\eta A_\eta^* g_r(A_\eta A_\eta^*)) A_\eta (u_0 - u), A_\eta (u_0 - u)) +$$
$$+ 2\,\mathrm{Re}(g_r(A_\eta A_\eta^*)(I - A_\eta A_\eta^* g_r(A_\eta A_\eta^*)) A_\eta (u_0 - u), A_\eta u - f_\delta) +$$
$$+ (g_r(A_\eta A_\eta^*)(I - A_\eta A_\eta^* g_r(A_\eta A_\eta^*))(A_\eta u - f_\delta), A_\eta u - f_\delta) =$$
$$= (A_\eta^* A_\eta g_r(A_\eta^* A_\eta)(I - A_\eta^* A_\eta g_r(A_\eta^* A_\eta))(u_0 - u), u_0 - u) -$$
$$- 2\,\mathrm{Re}(A_\eta g_r(A_\eta^* A_\eta)(I - A_\eta^* A_\eta g_r(A_\eta^* A_\eta))(u_0 - u), f_\delta - A_\eta u) +$$
$$+ (g_r(A_\eta A_\eta^*)(I - A_\eta A_\eta^* g_r(A_\eta A_\eta^*))(f_\delta - A_\eta u), f_\delta - A_\eta u).$$

Полученные два равенства сложим почленно:

$$\|u_\tau-u\|^2+\left(g_\tau(A_\eta A_\eta^*)(I-A_\eta A_\eta^* g_\tau(A_\eta A_\eta^*))(A_\eta u_0-f_\delta),\ A_\eta u_0-f_\delta\right)=$$
$$=\left(\left(I-A_\eta^* A_\eta g_\tau(A_\eta^* A_\eta)\right)(u_0-u),\ u_0-u\right)+$$
$$+\left(g_\tau(A_\eta A_\eta^*)(f_\delta-A_\eta u),\ f_\delta-A_\eta u\right).$$

По условию (7.4) $g_\tau(\lambda)\geqslant \kappa_\tau(1-\lambda g_\tau(\lambda))$, вследствие чего

$$\left(g_\tau(A_\eta A_\eta^*)(I-A_\eta A_\eta^* g_\tau(A_\eta A_\eta^*))(A_\eta u_0-f_\delta),\ A_\eta u_0-f_\delta\right)=$$
$$=\int_0^a g_\tau(\lambda)(1-\lambda g_\tau(\lambda))\,d\left(Q_\eta(\lambda)(A_\eta u_0-f_\delta),\ A_\eta u_0-f_\delta\right)\geqslant$$
$$\geqslant \kappa_\tau\int_0^a (1-\lambda g_\tau(\lambda))^2 d\left(Q_\eta(\lambda)(A_\eta u_0-f_\delta),\ A_\eta u_0-f_\delta\right)=\kappa_\tau\|A_\eta u_\tau-f_\delta\|^2.$$

Учитывая также, что

$$\left(g_\tau(A_\eta A_\eta^*)(f_\delta-A_\eta u),\ f_\delta-A_\eta u\right)\leqslant \kappa_\tau\|A_\eta u-f_\delta\|^2,$$

приходим к неравенству (7.12). Лемма 7.1 доказана.

Теперь мы в состоянии проанализировать случай, когда при фиксированных f_δ и A_η невязка приближения (1.13) не достигает критического уровня (7.2).

<u>Лемма 7.2</u>. Пусть выполнены условия (7.4) и (7.5), $a\geqslant \|A_\eta\|^2$. Пусть $f\in \mathcal{R}(A)$, а u_* – решение уравнения (1.1). Если для приближения (1.13) при каждом $\tau>0$ выполняется неравенство $\|A_\eta u_\tau-f_\delta\|>\delta+\|u_*\|\eta$, то уравнение $A_\eta u=f_\delta$ разрешимо в смысле наименьших квадратов, и $u_\tau\to u_{\delta,\eta}$ при $\tau\to\infty$, где $u_{\delta,\eta}$ – ближайшее к u_0 решение указанного уравнения в смысле наименьших квадратов.

<u>Доказательство</u>. По условию при каждом $\tau>0$ имеем $\|A_\eta u_*-f_\delta\|\leqslant$ $\leqslant \delta+\|u_*\|\eta<\|A_\eta u_\tau-f_\delta\|$, и из (7.12) получаем

$$\|u_\tau-u_*\|^2\leqslant\left(\left(I-A_\eta^*A_\eta g_\tau(A_\eta^*A_\eta)\right)(u_0-u_*),\ u_0-u_*\right)\leqslant\|u_0-u_*\|.$$

Итак система элементов $\{u_\tau\}$ ограничена, а значит слабо компактна. Пусть $u_{\tau_n}\rightharpoonup u'$, $\tau_n\to\infty$. Тогда $A_\eta u_{\tau_n}\rightharpoonup A_\eta u'$. В силу (6.6) $A_\eta u_{\tau_n}\to Q_\eta f_\delta$, где Q_η – ортопроектор, проектирующий на $\overline{\mathcal{R}(A_\eta)}$. Значит, $A_\eta u'=Q_\eta f_\delta$, и уравнение $A_\eta u=f_\delta$ разрешимо в смысле наименьших квадратов; пусть $u_{\delta,\eta}$ – решение, указанное в лемме. Поскольку $\|A_\eta u_{\delta,\eta}-f_\delta\|=\|Q_\eta f_\delta-f_\delta\|\leqslant$ $\leqslant\|A_\eta u_\tau-f_\delta\|$ $(\tau>0)$, то из (7.12) получаем

$$\|u_\tau-u_{\delta,\eta}\|^2\leqslant\left(\left(I-A_\eta^*A_\eta g_\tau(A_\eta^*A_\eta)\right)(u_0-u_{\delta,\eta}),\ u_0-u_{\delta,\eta}\right)\to 0 \text{ при } \tau\to\infty$$

(здесь нужно провести стандартные рассуждения с привлечением теоремы Банаха—Штейнгауза; заметим, что $u_0 - u_{\delta,\eta} \in N(A_\eta)^\perp = \overline{R(A_\eta^*)}$. Лемма 7.2. доказана.

<u>Лемма 7.3</u>. Пусть выполнены условия (6.9), (7.4) и (7.5), $a \geq \|A_\eta\|^2$, $\eta > 0$. Если для приближения (I.I3) при каждом $\tau > 0$ выполняется неравенство $\|A_\eta u_\tau - f_\delta\| > \delta + (\|u_0\| + \|u_\tau - u_0\|)\eta$, то справедливы утверждения леммы 7.2.

<u>Доказательство</u>. В силу условий (6.9) и (7.4) невязка $\|A_\eta u_\tau - f_\delta\|$ монотонно убывает, а $\|u_\tau - u_0\|$ монотонно возрастает по τ (см. п. 6.2). Отсюда и условия леммы заключаем, что $\|u_\tau\| \leq const$ при $\tau \to \infty$, после чего повторяются рассуждения доказательства предыдущей леммы. Лемма 7.3 доказана.

7.5. <u>Сходимость приближений (I.I3)</u>. Допустим, что выполнено условие (6.8), обеспечивающее непрерывность $\|A_\eta u_\tau - f_\delta\|$ по τ. Если $\|A_\eta u_0 - f_\delta\| > \delta + \|u_*\|\eta$, то либо существует $\tau = \tau(\delta,\eta)$, при котором имеет место равенство (7.2), либо $\|A_\eta u_\tau - f_\delta\| > \delta + \|u_*\|\eta$ при каждом $\tau > 0$. В последнем случае условимся считать $\tau(\delta,\eta) = \infty$, $u_\infty = \lim_{\tau\to\infty} u_\tau = u_{\delta,\eta}$ (см. лемму 7.2).

<u>Теорема 7.2</u>. Пусть $f \in R(A)$, u_* – ближайшее к u_0 решение уравнения (I.I). Пусть $\|f_\delta - f\| \leq \delta$, $\|A_\eta - A\| \leq \eta$, $\|A_\eta u_0 - f_\delta\| > \delta + \|u_*\|\eta$ и выполнены условия (6.8), (7.4) и (7.5) с $a \geq \|A_\eta\|^2$ $(0 < \eta \leq \eta_0)$. Если параметр $\tau = \tau(\delta,\eta)$ в приближении (I.I3) подобран из условия (7.2), то

$$u_{\tau(\delta,\eta)} \to u_* \text{ при } \delta \to 0,\ \eta \to 0. \tag{7.I3}$$

Если начальная погрешность представима в виде[I)]

$$u_0 - u_* = |A|^p w,\quad 0 < p \leq p_0,\quad \|w\| \leq \rho, \tag{7.I4}$$

то справедлива (оптимальная по порядку) оценка погрешности

$$\|u_{\tau(\delta,\eta)} - u_*\| \leq C_{p,\rho}(\delta+\eta)^{p/(p+1)},\quad 0 < p \leq p_0. \tag{7.I5}$$

<u>Доказательство</u>. В случае конечного $\tau = \tau(\delta,\eta)$ из (7.2) и (7.I2) следует, что

I) Напомним, что из (7.4) и (7.5) вытекает $p_0 \geq 1$.

$$\|u_\tau - u_*\|^2 \le (K_{\tau,\eta}(u_0-u_*), u_0-u_*), \quad K_{\tau,\eta} = I - A_\eta^* A_\eta g_\tau(A_\eta^* A_\eta). \quad (7.16)$$

Отсюда в силу (4.17) немедленно получаем сходимость (7.13), если $\tau(\delta,\eta)\to\infty$ при $\delta\to 0, \eta\to 0$. В случае $\tau(\delta,\eta)=\infty$ неравенство (7.16) верно при каждом $\tau>0$, и сходимость (7.13) несложным образом получаем в предельном процессе. В случае, когда $\tau(\delta,\eta)\le const$ при $\delta\to 0$, $\eta\to 0$, привлекаем рассуждения п.6.5 с импликацией (6.41).

При доказательстве оценки (7.15) будем считать $\tau(\delta,\eta)$ конечным. В случае $\tau(\delta,\eta)=\infty$ рассуждения такие же, нужно только рассматривать достаточно большие τ и в заключении совершить предельный переход $\tau\to\infty$.

Оператор $K_{\tau,\eta}$ самосопряжен и неотрицателен – это вытекает из неотрицательности функции $1-\lambda g_\tau(\lambda)$. Из (7.16) и (7.14) получаем

$$\|u_\tau - u_*\| \le \|K_{\tau,\eta}^{1/2}(u_0-u_*)\| = \|K_{\tau,\eta}^{1/2}|A|^p w\| \le$$
$$\le \|K_{\tau,\eta}^{1/2}|A_\eta|^p w\| + \|K_{\tau,\eta}^{1/2}(|A_\eta|^p - |A|^p)w\|.$$

Здесь $\tau=\tau(\delta,\eta)$ определено условием (7.2). С учетом (3.6) продолжим это неравенство так:

$$\|u_\tau - u_*\| \le \|K_{\tau,\eta}^{1/2}|A_\eta|^p w\| + c_p(1+|\ln\eta|)\eta^{\min\{1,p\}}\|w\|. \quad (7.17)$$

Но

$$\|K_{\tau,\eta}^{1/2}|A_\eta|^p\| \le \sup_{0\le\lambda\le a}(1-\lambda g_\tau(\lambda))^{1/2}\lambda^{p/2} \le (\gamma_p \tau^{-p})^{1/2}, \quad 0<p\le p_0,$$

где γ_p – постоянная из неравенства (1.6). Поэтому, если $\tau(\delta,\eta)\ge(\delta+\eta)^{-2/(p+1)}$, то мы сразу приходим к оценке (7.15).

Если же $\tau(\delta,\eta)\le(\delta+\eta)^{-2/(p+1)}$, то оценку (7.15) получаем иным способом из (6.35) и (6.36), повторив заключительную часть доказательства теоремы 6.1.

Теорема 7.2 доказана.

<u>Теорема 7.3</u>. Пусть $f\in R(A)$, $\|f_\delta - f\|\le\delta$, $\|A_\eta - A\|\le\eta$, $\|A_\eta u_0 - f_\delta\| > \delta + \|u_0\|\eta$. Пусть выполнены условия (6.8), (6.9), (7.4) и (7.5) с $a\ge\|A_\eta\|^2$ $(0<\eta\le\eta_0)$. Параметр $\tau=\tau(\delta,\eta)$ в приближении (1.13) выберем так, чтобы выполнялось условие (7.3); если равенство (7.3) при конечных τ не достигается,

положим в соответствии с леммой 7.3 $\tau(\delta,\eta)=\infty$, $u_\infty=\lim\limits_{\tau\to\infty} u_\tau = u_{\delta,\eta}$. Тогда $u_{\tau(\delta,\eta)}\to u_*$ при $\delta\to 0,\ \eta\to 0$, где u_* – ближайшее к u_0 решение уравнения (I.I).

Доказательство. Как уже отмечалось, в силу условий (6.9) и (7.4) $\|A_\eta u_\tau - f_\delta\|$ монотонно убывает, а $\|u_\tau - u_0\|$ монотонно возрастает по τ; из (6.8) вытекает непрерывная зависимость указанных норм от τ. Наряду с $\tau(\delta,\eta)$, определенным в формулировке доказываемой теоремы, введем в рассмотрение $\tau_* = \tau_*(\delta,\eta)$, при котором имеет место (7.2). Если $\tau(\delta,\eta)\le \tau_*(\delta,\eta)$, то при таком τ (и вообще всех τ, предшествующих τ_*) имеет место (7.I6), откуда немедленно вытекает сходимость $u_{\tau(\delta,\eta)}\to u_*$ при $\delta\to 0,\ \eta\to 0$.

С новой ситуацией сталкиваемся, если $\tau_*(\delta,\eta)<\tau(\delta,\eta)$. Тогда

$$\|u_{\tau(\delta,\eta)}-u_0\|\le\|u_*-u_0\|,$$

ибо в противном случае $\|u_0\|+\|u_{\tau(\delta,\eta)}-u_0\|>\|u_*\|$, откуда из-за отмеченной монотонности $\|A_\eta u_\tau - f_\delta\|$ и $\|u_\tau-u_0\|$ следовало бы, что $\tau(\delta,\eta)\le\tau_*(\delta,\eta)$, вопреки условию. Значит, система элементов $u_{\tau(\delta,\eta)}$ ограничена, а вместе с тем слабо компактна. Пусть $u_{\tau_n}\rightharpoonup u'$, где $\tau_n=\tau(\delta_n,\eta_n)$, $\delta_n\to 0,\ \eta_n\to 0$. Тогда $Au_{\tau_n}=A_{\eta_n}u_{\tau_n}-(A_{\eta_n}u_{\tau_n}-Au_{\tau_n})\to f$, поэтому $Au'=f$ и

$$\|u'-u_0\|\le\underline{\lim}\,\|u_{\tau_n}-u_0\|\le\overline{\lim}\,\|u_{\tau_n}-u_0\|\le\|u_*-u_0\|.$$

Поскольку u_* – ближайшее к u_0 решение уравнения (I.I), то $u'=u_*$, $\|u_{\tau_n}-u_0\|\to\|u_*-u_0\|$. Последняя сходимость вместе со слабой сходимостью $u_{\tau_n}-u_0\rightharpoonup u_*-u_0$ влекут за собой сильную сходимость $u_{\tau_n}-u_0\to u_*-u_0$, или $u_{\tau_n}\to u_*$. Итак, слабо компактная при $\delta\to 0,\ \eta\to 0$ система $u_{\tau(\delta,\eta)}$ оказывается сильно компактной с единственной предельной точкой u_*. Это означает, что $u_{\tau(\delta,\eta)}\to u_*$ при $\delta\to 0,\ \eta\to 0$.

Теорема 7.3. доказана.

Сомнительно, верна ли оценка $\{(7.14),\ (7.15)\}$ при выборе $\tau=\tau(\delta,\eta)$ из условия (7.3). Трудности связаны с отсутствием оценки на $\tau(\delta,\eta)$ и нарушением неравенства (7.I6) при $\tau>\tau_*(\delta,\eta)$. Если на τ наложить естественную априорную границу $r(\delta,\eta)\leq d/(\delta+\eta)^2$, $d=const>0$ (ср. § 6), то удается установить более слабую чем (7.I5) оценку погрешности:

<u>Замечание</u>. Пусть выполнены условия теоремы 7.3, а условие выбора r модифицируем: если (7.3) имеет место при некотором $r\in(0,d/(\delta+\eta)^2]$, то это $r=r(\delta,\eta)$ примем за параметр регуляризации в приближении (I.I3); в противном случае положим $r(\delta,\eta)=d/(\delta+\eta)^2$. Тогда $u_{r(\delta,\eta)}\to u_*$ при $\delta\to 0,\eta\to 0$, причем в случае начального приближения (7.I4)

$$\|u_{r(\delta,\eta)}-u_*\|\leq c_{p,\rho}(\delta+\eta)^{p/(2(p+1))},\quad 0<p\leq p_0. \quad (7.I8)$$

<u>Доказательство</u>. В случае $r(\delta,\eta)\leq r_*(\delta,\eta)$ остается в силе неравенство (7.I7); если же $r(\delta,\eta)>r_*(\delta,\eta)$, то из (7.I2) получаем более грубое неравенство

$$\|u_{r(\delta,\eta)}-u_*\|^2\leq\|K^{1/2}_{r(\delta,\eta)),\eta}(u_0-u_*)\|^2+$$

$$+(\|A_\eta u_*-f_\delta\|^2-\|A_\eta u_{r(\delta,\eta)}-f_\delta\|^2)\gamma d(\delta+\eta)^{-2}. \quad (7.I9)$$

Здесь

$$\|A_\eta u_*-f_\delta\|\leq\delta+\|u_*\|\eta\leq\delta+(\|u_0\|+\|u_*-u_0\|)\eta,$$

$$\|A_\eta u_{r(\delta,\eta)}-f_\delta\|\geq\delta+(\|u_0\|+\|u_{r(\delta,\eta)}-u_0\|)\eta,$$

откуда

$$\|A_\eta u_*-f_\delta\|^2-\|A_\eta u_{r(\delta,\eta)}-f_\delta\|^2\leq$$
$$\leq 2[\delta+(\|u_0\|+\|u_*-u_0\|)\eta](\|u_*-u_0\|-\|u_{r(\delta,\eta)}-u_0\|)\eta.$$

Но ввиду монотонного возрастания $\|u_r-u_0\|$ имеем

$$\|u_*-u_0\|-\|u_{r(\delta,\eta)}-u_0\|\leq\|u_*-u_0\|-\|u_{r_*(\delta,\eta)}-u_0\|\leq$$
$$\leq\|u_*-u_{r_*(\delta,\eta)}\|\leq c'_{p,\rho}(\delta+\eta)^{p/(p+1)}$$

(см. теорему 7.2). В итоге второй член в правой части неравенства (7.I9) имеет оценку $O((\delta+\eta)^{p/(p+1)})$; первый член оценим как в доказательстве теоремы 7.2. В результате приходим к оценке (7.I8).

Если $r(\delta,\eta)\leq r_*(\delta,\eta)$ или $r(\delta,\eta)\leq const\cdot(\delta+\eta)^{-2/(p+1)}$, то вместо (7.I8) получаем более точную оценку (7.I5). К сожалению, $r(\delta,\eta)$ может выйти за эти границы.

7.6. Сходимость метода итераций. Следующие теоремы доказываются аналогично теоремам 7.2 и 7.3.

Теорема 7.4. Пусть измеримая по Борелю функция $g:[0,a]\to R$ удовлетворяет условиям (7.6), причем $a\geq\|A_\eta\|^2$ $(0<\eta\leq\eta_0)$. Пусть $f\in\mathcal{R}(A)$, $\|f_\delta-f\|\leq\delta$, $\|A_\eta-A\|\leq\eta$, $\|A_\eta u_0-f_\delta\|>$ $>\delta+\|u_*\|\eta$. Остановим итерации

$$u_n=u_{n-1}-g(A_\eta^*A_\eta)A_\eta^*(A_\eta u_{n-1}-f_\delta),\quad n=1,2,\ldots \tag{7.20}$$

на первом $n=n(\delta,\eta)$, при котором

$$\|A_\eta u_n-f_\delta\|\leq\delta+\|u_*\|\eta \tag{7.21}$$

(u_* – ближайшее к u_0 решение уравнения (I.I)); если такого n нет, положим $n(\delta,\eta)=\infty$ и $u_\infty=u_{\delta,\eta}=\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ (см. лемму 7.2). Тогда

$$u_{n(\delta,\eta)}\to u_*\quad\text{при}\quad\delta\to0,\ \eta\to0, \tag{7.22}$$

причем в случае начальной погрешности[I)]

$$u_0-u_*=|A|^p w,\quad p>0,\ \|w\|\leq\rho \tag{7.23}$$

справедлива (оптимальная по порядку) оценка

$$\|u_{n(\delta,\eta)}-u_*\|\leq c_{p,\rho}(\delta+\eta)^{p/(p+1)},\quad 0<p<\infty. \tag{7.24}$$

Теорема 7.5. Пусть $\|A_\eta u_0-f_\delta\|>\delta+\|u_0\|\eta$, а в остальном выполнены условия теоремы 7.4. Остановим итерации (7.20) на первом $n=n(\delta,\eta)$, для которого будет выполнено хотя бы одно из следующих двух неравенств:

$$\|A_\eta u_n-f_\delta\|\leq\delta+(\|u_0\|+\|u_n-u_0\|)\eta,\quad n\geq d/(\delta+\eta)^2,$$

где $d>0$ – задаваемое наперед число. Тогда остается в силе сходимость (7.22), а в случае начальной погрешности (7.23) справедлива (неоптимальная по порядку) оценка

$$\|u_{n(\delta,\eta)}-u_*\|\leq c_{p,\rho}(\delta+\eta)^{p/(2(p+1))},\quad 0<p<\infty.$$

7.7. Случай точно заданного оператора. Поставим перед собой целью уточнение постоянной $c_{p,\rho}$ в оценке (7.15).

I) Напомним (см. п. I.9), что для итерационных методов квалификация $p_0=\infty$.

Теорема 7.6. Пусть $f \in \mathcal{R}(A)$, $\|f_\delta - f\| \le \delta$, $\|Au_0 - f_\delta\| > \delta$ и выполнены условия (6.8), (7.4) и (7.5) с $a \ge \|A\|^2$. Для приближения

$$u_r = (I - A^*A\, g_r(A^*A))u_0 + g_r(A^*A)A^*f_\delta \tag{7.25}$$

выберем $r = r(\delta)$ таким образом, что[I)]

$$\|Au_r - f_\delta\| = \delta. \tag{7.26}$$

Тогда

$$u_{r(\delta)} \to u_* \quad \text{при} \quad \delta \to 0, \tag{7.27}$$

где u_* – ближайшее к u_0 решение уравнения (I.I). При этом в случае начальной погрешности (7.I4) справедливы оценки

$$\|u_{r(\delta)} - u_*\| \le 2^{p/(p+1)} \rho^{1/(p+1)} \delta^{p/(p+1)}, \quad 0 < p \le 1, \tag{7.28}$$

$$\|u_{r(\delta)} - u_*\| \le c_p \rho^{1/(p+1)} \delta^{p/(p+1)}, \quad 1 \le p \le p_0, \tag{7.29}$$

где c_p – решение уравнения

$$c = 2^{p/(p+1)} + \gamma_* \gamma_p^{1/(2p)} c^{-1/p}, \tag{7.30}$$

γ_p и γ_* – характеристики g_r (см. п. I.5.2).

Если на $r(\delta)$ наложить априорное ограничение $r(\delta) \le d/\delta^2$, $d = const > 0$, то оценки (7.28) и (7.29) остаются в силе при достаточно малых $\delta > 0$.

Доказательство. Сходимость (7.27) в теореме 7.2 установлена в более общей ситуации. Докажем оценку (7.28). При $r = r(\delta)$, определяемом из условия (7.26), справедливо неравенство (ср. (7.I6))

$$\|u_r - u_*\| \le \|K_r^{1/2} |A|^p w\|, \quad K_r = I - A^*A\, g_r(A^*A). \tag{7.3I}$$

Оператор $K_r^{1/2}|A|^p$ самосопряжен и неотрицателен. Применением неравенства моментов находим

$$\|u_r - u_*\| \le \|K_r^{(p+1)/(2p)} |A|^{p+1} w\|^{p/(p+1)} \|w\|^{1/(p+1)}.$$

При $0 < p \le 1$ имеем $(p+1)/(2p) \ge 1$. Учитывая также, что $\|K_r\| \le 1$,

---

I) Неравенство $\|Au_r - f_\delta\| > \delta$ при всех $r > 0$ возможно лишь в том исключительном случае, когда $Qf_\delta = f$, $u_r \to u_*$ при $r \to \infty$, где Q – ортопроектор, проектирующий на $\overline{\mathcal{R}(A)}$. Это следует из (7.I2).

получаем

$$\|K_\tau^{(p+1)/(2p)}|A|^{p+1}w\| \leq \|K_\tau|A|^{p+1}w\| = \|AK_\tau(u_0-u_*)\|.$$

Из (6.36) и (7.26)

$$\|AK_\tau(u_0-u_*)\| \leq \|Au_\tau - f_\delta\| + \|f_\delta - f\| \leq 2\delta,$$

и мы приходим к оценке (7.28).

Докажем (7.29). Из (7.31)

$$\|u_{\tau(\delta)} - u_*\| \leq \gamma_p^{1/2}[\tau(\delta)]^{-p/2}\rho \quad (0<p\leq p_0).$$

Если $\tau(\delta) \geq c^{-2/p}\gamma_p^{1/p}\rho^{2/(p+1)}\delta^{-2/(p+1)}$, то отсюда

$$\|u_{\tau(\delta)} - u_*\| \leq c\rho^{1/(p+1)}\delta^{p/(p+1)}.$$

Если же $\tau(\delta) \leq c^{-2/p}\gamma_p^{1/p}\rho^{2/(p+1)}\delta^{-2/(p+1)}$, то повторение заключительной части доказательства теоремы 6.1 дает

$$\|u_{\tau(\delta)} - u_*\| \leq \left(2^{p/(p+1)} + \gamma_* c^{-1/p}\gamma_p^{1/(2p)}\right)\rho^{1/(p+1)}\delta^{p/(p+1)}.$$

Полученные две оценки принимают единую форму (7.29), если c определить из условия (7.30).

Из (7.31) видно также, что при $\gamma_p^{1/p}\rho^{2/(p+1)}\delta^{-2/(p+1)} \leq \leq \tau \leq \tau(\delta)$ имеем

$$\|u_\tau - u_*\| \leq \rho^{1/(p+1)}\delta^{p/(p+1)}.$$

Поэтому априорное ограничение не выбирать $\tau(\delta)$ больше, чем d/δ^2, не портит оценок (7.28) и (7.29) при достаточно малых δ.

Теорема 7.6 доказана.

Замечание. Если $\tau = \tau(\delta)$ выбрать так, чтобы

$$b_1\delta \leq \|Au_\tau - f_\delta\| \leq b_2\delta \quad (b_2 \geq b_1 \geq 1),$$

то из (7.12) и (7.14) получаем

$$\|u_{\tau(\delta)} - u_*\|^2 + K_{\tau(\delta)}(b_1^2-1)\delta^2 \leq \left[(b_2+1)^{p/(p+1)}\rho^{1/(p+1)}\delta^{p/(p+1)}\right]^2, \quad 0<p\leq 1,$$

откуда, в частности,

$$\|u_{\tau(\delta)} - u_*\| \leq (b_2+1)^{p/(p+1)}\rho^{1/(p+1)}\delta^{p/(p+1)}, \quad 0<p\leq 1, \qquad (7.32)$$

а в случае $b_1 > 1$ вытекает также оценка на $\tau(\delta)$.

Оценка (7.32) уточняет оценку {(6.55), (6.57)}, но имеет более узкую сферу применимости (ограничения на g_r и p).

Правая часть оценки (7.32) тем меньше, чем меньше b_2. Но было бы поспешным делать вывод, что наилучшая точность действительно достигается при $b_1=b_2=1$, т.е. по правилу (7.26).

7.8. <u>Заключение: как выбирать параметр регуляризации?</u> На протяжении §§ 5–7 мы подробно изучили различные варианты принципа невязки. Выскажем некоторые подытоживающие суждения о целесообразности того или иного выбора параметра $r = r(\delta,\eta)$ в приближениях (I.7) и (I.I3).

Для приближения (I.7) допустимы правила выбора r, сформулированные и обоснованные в § 5; критический уровень невязки приводит к расходящемуся процессу (теорема 7.I).

Для приближения (I.I3) в случае точно заданного оператора $A_\eta = A$ допустимы как правила выбора r, рассмотренные в § 6, так и правила с доведением невязки до критического уровня. Оба варианта выбора r приводят к оптимальным по порядку методам на классах решений (7.I4). Следует, правда, еще раз обратить внимание на то обстоятельство, что обоснование выбора r с доведением невязки до критического уровня получено при более жестких ограничениях, чем в § 6. Для некоторых методов, например, для явной итерационной схемы (2.23) с $\mu\in(1/\|A\|, 2/\|A\|)$ допустимость критического уровня (7.7) невязки остается открытым.

В случае неточно заданного оператора A с полной уверенностью можно привлекать правила § 6. С другой стороны, выбор r из условия (7.2) практически нереализуем, а для его аналога (7.3) нам не удалось вывести оценок оптимального порядка.

Есть несколько причин в случае итерационных методов отдать предпочтение правилам § 6 выбора r. Во-первых эти правила, в отличие от правил настоящего параграфа, приводят к ограничениям на число итераций (см., например, (6.20),(6.22)), что весьма важно для практических вычислений. Во-вторых, хотя мы и не исследовали влияние ошибок округления, довольно ясно и без выкладок, что итерационный метод относительно таких ошибок тем устойчивее, чем меньше итераций нужно проделать[1]. В-третьих, наличие параметров b, b_1, b_2 и т.д. в правилах § 6 делают их гибкими, позволяют настроить их на решаемую задачу. Но эту гибкость можно расценивать и как недостаток — нужны дополнительные соображения о выборе b, b_1 и b_2.

В задачах практики обычно уровни погрешности δ и η ($\|f_\delta - f\| \leq \delta$, $\|A_\eta - A\| \leq \eta$) известны не совсем четко, поэтому мы волей-неволей вынуждены привлекать правила типов §§ 5, 6. Впрочем, и сам принцип невязки является лишь одним из практических способов для выбора параметра регуляризации. Обзор других способов см. [63, 64].

---

1) Анализ влияния ошибок округления в итерационных методах см. в [32, 33, 14].

Библиографические замечания

Основы теории некорректно поставленных задач заложены А.Н.Тихоновым, М.М.Лаврентьевым и В.К.Ивановым.

Первые регуляризаторы типа (I.7) и (I.I3) были построены М.М.Лаврентьевым [46] и А.Н.Тихоновым [6I]. Их методы описаны в п. 2.I и 2.3 (А.Н.Тихонов излагает свой метод в более общей форме в вариационной формулировке). Кроме того, в [46] показано, что и явная итерационная схема определяет регуляризатор (утверждение типа теоремы 4.I для метода итераций).

В литературе наиболее популярным объектом исследования являлся метод Тихонова. Особо отметим работы В.К.Иванова [34] и В.А.Морозова [5I-54], положивших начало изучению принципа невязки для метода Тихонова. Затем эти тематика изучалась в работах [9, II, 27, 28]; отметим также недавние работы [2, 6, 33, 48, 69]. Принцип невязки для метода Тихонова к настоящему времени всесторонне исследован, рассмотрены задачи в банаховых пространствах, нелинейные задачи, различные варианты реализации принципа. Тем не менее, теоремы 6.I и 6.2 содержат новые результаты и в применении к методу Тихонова - это оценки сходимости в случае приближенно заданного оператора.

По методу итераций тоже выполнен ряд интересных работ. В [68, 4I, 58, 59] итерационный метод исследован в случае точных данных задачи, а в работах [46, 40, 44] в случае неточных данных. Принципу невязки останова итераций посвящены работы [9, II, 32, 33, I4]. Перечисленные работы затрагивают явную итерационную схему. Неявная итерационная схема на уровне априорного задания числа итераций исследовалась в [5I, 77, 45]. Теоремы 6.I и 6.2 в применении к итерационным методам сравнимы с результатами [I4]; в [I4] использовалась другая методика доказательства. В последнее время выполнен ряд интересных работ по нелинейным (нестационарным) итерационным методам; см. [74-76, I, 25-26, 66, 56-57, 20].

Идея построения регуляризаторов некорректно поставленных задач как некоторых функций от оператора решаемого уравнения выдвинута и развита А.Б.Бакушинским [7-12]. Им, в частности, исследовался принцип невязки, но соответствующие результаты несколько эпизодические. Изложение §§ 1-7 следует работам [15-19]. В частности, в [18] выявлена решающая роль условий (1.5), (1.6) и квалификации метода при обосновании принципа невязки, а в [19] выделен класс методов, рассмотренный в § 7. Утверждения типа леммы 7.1 и теоремы 7.6 для метода Тихонова и метода последовательных приближений (явной схемы) были ранее получены в богатой новыми идеями работе В.И.Емелина и М.А.Красносельского [33].

В работах [72, 73, 80] исследован класс методов в условиях точно заданной правой части и оператора; теорема 4.6 усиливает и уточняет эти результаты.

Основные достижения данной работы, на наш взгляд, связаны с допущением неточного задания оператора решаемого уравнения. Ради простоты, мы ограничились случаем, когда приближенный оператор A_η близок к точному A по норме $(\|A_\eta - A\| \leq \eta)$. Однако, развитые нами методы позволяют проанализировать и случай, когда $A_\eta \to A$ поточечно или даже в смысле дискретной сходимости (о понятии дискретной сходимости на формализованном уровне см. [13]). Отметим попутно работы [3, 4, 78, 79], в которых предпринята любопытная попытка использовать дискретизацию задачи в качестве регуляризуещего фактора.

Отметим также недавнюю работу А.Н.Тихонова [62], в которой рассматриваются устойчивые методы решения приближенно заданных систем линейных алгебраических уравнений (разыскивается нормальное решение).

Более подробную библиографию по различным аспектам теории некорректно поставленных задач, особенно по вариационным методам решения таких задач см. в монографиях [63, 35, 49].

Литература

1. А л и ф а н о в О.М., Р у м я н ц е в С.В., Об устойчивости итерационных методов решения линейных некорректных задач. Докл. АН СССР, 1979, т. 248, № 6, стр. 1289-1291.
2. А л ь б е р Я.И., Р я з а н ц е в а И.П., Принцип невязки в нелинейных задачах с монотонными разрывными отображениями - регуляризирующие алгоритмы. Докл. АН СССР, 1978, т. 239, № 5, стр. 1017-1020.
3. А п а р ц и н А.С., О численном решении систем интегральных уравнений Вольтерра I рода методом квадратур. В кн.: Методы оптимизации и исследование операций, стр. 79-88. Иркутск, 1976.
4. А п а р ц и н А.С., Б а к у ш и н с к и й А.Б., Приближённое решение интегральных уравнений I рода методом квадратурных сумм. В кн.: Дифференциальные и интегральные уравнения, вып. I, стр. 248-258. Иркутск, 1972.
5. А х и е з е р Н.И., Г л а з м а н И.М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. "Наука", Москва, 1966.
6. Б а е в А.В., О построении нормального решения нелинейных некорректных задач методом регуляризации. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1979, т. 9, № 3, стр. 594-600.
7. Б а к у ш и н с к и й А.Б., Один общий прием построения регуляризирующих алгоритмов для линейного некорректного уравнения в гильбертовом пространстве. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1967, т. 7, № 3, стр. 672-677.
8. Б а к у ш и н с к и й А.Б., Избранные вопросы приближенного решения некорректных задач. (Тексты лекций), Изд. МГУ, Москва, 1968.

9. Б а к у ш и н с к и й А.Б., К распространению принципа невязки. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1970, т. 10, № 1, стр. 210-213.
10. Б а к у ш и н с к и й А.Б., Замечания об одном классе регуляризирующих алгоритмов. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1973, т. 13, № 6, стр. 1596-1598.
11. Б а к у ш и н с к и й А.Б., К обоснованию принципа невязки. В кн.: Дифференц. и интегр. ур-ния, вып. 2, стр. 117-126. Изд-во ИГУ, Иркутск, 1973.
12. Б а к у ш и н с к и й А.Б., Оптимальные и квазиоптимальные методы решения линейных задач, порожденные регуляризирующими алгоритмами. Изв. вузов, Математика, 1978, № 11, стр. 6-10.
13. В а й н и к к о Г., Анализ дискретизационных методов. Изд. ТГУ, Тарту, 1976.
14. В а й н и к к о Г., Оценки погрешности метода последовательных приближений для некорректных задач. Автоматика и телемеханика, 1980, № 3, стр. 84-92.
15. В а й н и к к о Г., Принцип невязки для класса регуляризационных методов. Тезисы конференции "Теоретические и прикладные вопросы математики", стр. 170 - 172. Изд. ТГУ, Тарту, 1980.
16. В а й н и к к о Г., Принцип невязки для класса регуляризационных методов в случае приближенного заданного оператора. II симп. по методам решения нелин. уравнений и задач оптимизации, стр. 27-29. Изд. АН ЭССР, Таллин, 1981.
17. В а й н и к к о Г., Принцип невязки для класса регуляриризационных методов для самосопряженных задач. В кн.: Численное решение краевых задач и интегральных уравнений (тезисы конфер.), стр. 73-75. Изд. ТГУ, Тарту, 1981.
18. В а й н и к к о Г.М., Принцип невязки для одного класса регуляризационных методов. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1982, т. 22, № 3, стр. 499-515.
19. В а й н и к к о Г.М., Критический уровень невязки в методах регуляризации. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1983, т. 23, № 3.

20. В а с и н В.В., Проекционно-итерационные методы решения некорректных задач и их приложения. В кн.:Численное решение краевых задач и интегральных уравнений, стр. 76-78. Изд. ТГУ, Тарту, 1981.
21. В е р е т е н н и к о в А.Ю., К р а с н о с е л ь с к и й М.А., Регуляризация некорректных задач остановом в условиях случайных ошибок. В кн.: Численное решение краевых задач и интегральных уравнений, стр. 79-81. Изд. ТГУ, Тарту, 1981.
22. В е р л а н ь А.Ф., С и з и к о в В.С., Методы решения интегральных уравнений с программами для ЭВМ. "Наукова думка", Киев, 1978.
23. В и н о к у р о в В.А., О понятии регуляризуемости разрывных отображений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1971, т. 11, № 5, стр. 1097-1112.
24. В и н о к у р о в В.А., Регуляризуемость и аналитическая представимость. Докл. АН СССР, 1975, т. 220, № 2, 269-272.
25. Г и л я з о в С.Ф., Об устойчивости решения линейных операторных уравнений I рода методом наискорейшего спуска. Вестн. Моск. ун-та, сер. вычисл. матем. и киберн., 1980, № 3, стр. 26-32.
26. Г и л я з о в С.Ф., Устойчивое решение линейных некорректных уравнений методом наискорейшего спуска. В кн.: Численное решение краевых задач и интегральных уравнений, стр. 82-84. Изд. ТГУ, Тарту, 1981.
27. Г о н ч а р с к и й А.В., Л е о н о в А.С., Я г о л а А.Г., Обобщенный принцип невязки. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1973, т. 13, № 2, стр.294-302.
28. Г о н ч а р с к и й А.В., Л е о н о в А.С., Я г о л а А.Г., О применимости принципа невязки в случае нелинейных некорректных задач и о новом регуляризующем алгоритме их решения. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1975, т. 15, № 2, стр. 290-297.
29. Г о н ч а р с к и й А.В., Ч е р е п а щ у к А.М., Я г о л а А.Г., Численные методы решения обратных задач астрофизики. "Наука", Москва, 1978.

30. Г о х б е р г И.Ц., К р е й н М.Г., Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. "Наука", Москва, 1965.
31. Д а н ф о р д Н., Ш в а р ц Дж.Т., Линейные операторы. Общая теория. ИИЛ, Москва, 1962.
32. Е м е л и н И.В., К р а с н о с е л ь с к и й М.А., Правило останова в итерационных процедурах решения некорректных задач. Автоматика и телемеханика, 1978. № 12, стр. 59-63.
33. Е м е л и н И.В., К р а с н о с е л ь с к и й М.А., К теории некорректных задач. Докл. АН СССР, 1979, т. 244, № 4, стр. 805-808.
34. И в а н о в В.К., О приближенном решении операторных уравнений первого рода. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1966, т. 6, № 6, стр. 1089-1094.
35. И в а н о в В.К., В а с и н В.В., Т а н а н а В.П., Теория линейных некорректных задач. "Наука", Москва, 1978.
36. И о с и д а К., Функциональный анализ. "Мир", Москва, 1967.
37. К а н т о р о в и ч Л.В., А к и л о в Г.П., Функциональный анализ. "Наука", Москва, 1977.
38. К а т о Т., Теория возмущений линейных операторов. "Мир", Москва, 1972.
39. К о л м о г о р о в А.Н., Ф о м и н С.В., Элементы теории функций и функционального анализа. "Наука", Москва, 1968.
40. К о н с т а н т и н о в а Я.В., Л и с к о в е ц О.А., Оценки погрешности в методе итераций для уравнений 1-го рода. Вестн. Белорусск. ун-та, сер. физ.,мат., мех., 1973, № 1, стр. 9-15.
41. К р а с н о с е л ь с к и й М.А., О решении методом последовательных приближений уравнений с самосопряженными операторами. Успехи матем. наук., 1961, т. 15, вып. 3, стр. 161-165.
42. К р а с н о с е л ь с к и й М.А., В а й н и к к о Г.М., З а б р е й к о П.П., Р у т и ц к и й Я.Б., С т е ц е н к о В.Я., Приближенное решение операторных уравнений. "Наука", Москва, 1969.

43. Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е., Интегральные операторы в пространстве суммируемых функций. "Наука", Москва, 1966.
44. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И., Вычислительные методы в высшей математике, т. 2, "Вышэйшая школа", Минск, 1975.
45. Крянев А.В., Итерационный метод решения некорректных задач. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1974, т. 14, № 1, стр. 25–35.
46. Лаврентьев М.М., О некоторых некорректных задачах математической физики. Изд-во СО АН СССР, Новосибирск, 1962.
47. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П., Некорректные задачи математической физики и анализа. "Наука", Москва, 1980.
48. Леонов А.С., О выборе параметра регуляризации для нелинейных некорректных задач с приближенно заданным оператором. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1979, т. 19, № 6, стр. 1363–1376.
49. Лисковец О.А., Вариационные методы решения неустойчивых задач. "Наука и техника", Минск, 1981.
50. Люстерник Л.А., Соболев В.И., Элементы функционального анализа. "Наука", Москва, 1965.
51. Морозов В.А., О регуляризирующих семействах операторов. В кн.: Вычисл. методы и программирование. Вып. VIII, стр. 63–95. Изд-во МГУ, Москва, 1967.
52. Морозов В.А., О принципе невязки при решении операторных уравнений методом регуляризации. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1968, т. 8, № 2, стр. 295–309.
53. Морозов В.А., Линейные и нелинейные некорректные задачи. Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 11, стр. 128–178. Изд. ВИНИТИ, Москва, 1973.
54. Морозов В.А., Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. Изд-во МГУ, Москва, 1974.
55. Петунин Ю.И., Пличко А.Н., Теория характеристик подпространств и ее приложения. "Вища школа", Киев, 1980.

56. С а р в Л., О решении линейных некорректных задач α-методами. В кн.: Численное решение краевых задач и интегральных уравнений, стр. 86–88. Изд. ТГУ, Тарту, 1981.

57. С а р в Л., Одно семейство нелинейных итерационных методов для некорректных задач. Изв. АН ЭССР, сер. физ., мат., 1982, т. 31, № 3, стр. 261–269.

58. С т р а х о в В.Н., О методе последовательных приближений для линейных уравнений в гильбертовом пространстве. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1973, т. 13, № 4, стр. 1041–1044.

59. С т р а х о в В.Н., К вопросу о скорости сходимости в методе простой итерации. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1973, т. 13, № 6, стр. 1602–1606.

60. Т а н а н а В.П., Методы решения операторных уравнений. "Наука", Москва, 1981.

61. Т и х о н о в А.Н., О регуляризации некорректно поставленных задач. Докл. АН СССР, 1963, т. 153, № 1, стр. 49–52.

62. Т и х о н о в А.Н., О приближенных системах линейных алгебраических уравнений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1980, т. 20, № 6, стр. 1373–1383.

63. Т и х о н о в А.Н., А р с е н и н В.Я., Методы решения некорректных задач. "Наука", Москва, 1974.

64. Т и х о н о в А.Н., М о р о з о в В.А., Методы регуляризации некорректно поставленных задач. Сб. "Выч. методы и программиров.", вып. 35, изд. МГУ, 1981, стр. 3–34.

65. Т и х о н о в А.Н., Г л а с к о В.Б., К р и к с и н Ю.А., К вопросу о квазиоптимальном выборе регуляризационного параметра. Докл. АН СССР, 1979, т. 248, № 3, стр. 531–535.

66. Т р у ш н и к о в В.Н., Один нелинейный регуляризующий алгоритм и некоторые его применения. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1979, т. 19, № 4, стр. 822–827.

67. Ф е д о т о в А.М., Оптимальные линейные решающие процедуры для линейных операторных уравнений со случайными данными. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1981, т. 21, № 5. стр. 1075–1090.

68. Ф р и д м а н В.М., Метод последовательных приближений для интегрального уравнения Фредгольма I рода. Успехи матем. наук, 1956, т. 11, вып. I, стр. 233-234.

69. Я г о л а А.Г., О выборе параметра регуляризации при решении некорректных задач в рефлексивных пространствах. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1980, т.20, № 3, стр. 586-596.

70. B a l a k r i s h n a n, V., Fractional powers of closed operators and the semi-groups generated by them. Pacific J. Math., 1960, V. 10, p. 419-437.

71. D i e s t e l, J., Geometry of Banach spaces - selected topics. Lect. Not. Math., N 485. Springer, Berlin, 1975.

72. G r o e t s c h, C.W., Sequential regularization of ill-posed problems involving unbounded operators. Comm. Math. Univ. Carolinae, 1977, 18, N 3, p. 489-498.

73. G r o e t s c h, C.W., On the rate of convergence for approximations to the generalized inverse. Numer. funct. anal. and optimization, 1979, V. 1, Nr. 2, p. 195-201.

74. K a m m e r e r, W.J., N a s h e d, M.Z., Steepest descent for singular linear operators with nonclosed range. Applicable Analysis, 1971, 1, p. 143-153.

75. K a m m e r e r, W.J., N a s h e d, M.Z., On the convergence of the conjucate gradient method for singular linear operator equations. SIAM J. Numer. Anal., 1972, Vol. 9., Nr 1, p. 165-181.

76. K a m m e r e r, W.J., N a s h e d, M.Z., Iterative methods for best approximate solution of linear integral equations of the first and second kinds. J. Math. Anal. and Appl., 1972, V. 40, Nr 3, p.547-573.

77. M a r t i n e t, B., Determination approchée d'un point fixe d'une application pseudo-contractante. Cas de l'application prox. C.R. Acad. Sci., 1972, V. 274, N. 2, p. 163-165.

78. N a t t e r e r, F., Regularisierung schlecht gestellter Probleme durch Projektionsverfahren. Numer. Math., 1977, 28, S. 329-341.

79. R i c h t e r, G.R., Numerical solution of integral equations of the first kind with nonsmooth kernels. SIAM J. Numer. Anal., 1978, v. 15, N 3, p. 511-522.

80. S h o w a l t e r, D., B e n - I s r a e l, A., Representation and computation of the generalized inverse of a bounded linear operator between two Hilbert spaces. Accad. Naz. dei Lincei, 1970, V. 48, p. 184-194.

Предметный указатель

Геннадий В а й н и к к о.
МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННЫХ
ЗАДАЧ В ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ.
На русском языке.
Тартуский государственный университет.
ЭССР, 202400, г.Тарту, ул.Юликооли, 18.
Ответственный редактор Э. Тамме.
Корректор И. Саарниит.
Подписано к печати 29.10.1982.
Формат 60х84/16.
Бумага писчая.
Машинопись. Ротапринт.
Условно-печатных листов 6,51.
Учетно-издательских листов 5,28.
Печатных листов 7,0.
Тираж 400.
Заказ № 1166.
Цена 15 коп.
Типография ТГУ, ЭССР, 202400, г.Тарту, ул.Пялсона, 14.