Vir Amplissime, et Celeberrime
Fautor Honoratissime.

Dabam Taurini die 5 8$^{bris}$ 1756

Literas tuas mihi quam maxime jucundissimas elapsa hebdomada accepi, ex quibus, magis, magisque affectionem tuam in me singularem, ac benevolentiam perspicere potui. Quod enim in Amplissimum Berolinensium Academicorum ordinem plane immeritus allectus sim, id fere totum opera tua fuisse factum haud quaquam ignoro, nec minus etiam tibi, tuisq: non levis ponderis commendationibus debere agnosco, quod Ill$^{mus}$ Praeses D: de Maupertuis tam propensum in me animum ostendat, dum se quam primum apud Regem munificentissimum curaturum asserit, ut satis commodam in regionibus vestris obtineam stationem, qua quidem re nihil mihi certe gratius, acceptiusque accidere posset. Quamobrem tibi pro tot, tantisque beneficiis immortales ago gratias, nec unquam, dum vivam, agere desinam. Quod mihi porro suades, ut ad ipsum Praesidem literas dem, id mirifice mihi placet, ideoq: quo citius, meliusq: potero rem istam peragere mihi cordi erit.

162v

Cum non multis ante diebus super formulas illas pro curvis, maximi, minimique proprietate præditis inveniendis meditarer, simulque animadverterem in ipsarum applicatione ad principium minimæ quantitatis actionis D: De Maupertuis pro resolutione problematum mechanicorum, oportere ut ambæ cohordinatæ variabiles supponantur: quo omnes necessariæ aequat: haberi possint, statim cogitavi si hac ratione etiam problemata alia maximi, minimiq: naturam postulantium, tractentur, rem ipsam cum majori fortassis universalitate confici posse. Et quidem, binis cohordinatis variabilibus statuendo fit ut in valore differentiali ex formula orto duo introducantur differentialia nempe dx, et dy, quorum proinde coefficientes seorsim nihilo sunt æquandi. Porro quum valor differentialis ex variatione unius cohordinatæ secundum meam methodum constet duobus, ita dicam, partibus: ex quarum una habetur aequatio pro curva, et ex altera determinantur constantes in ipsa ingrediendæ, secundum diversas problematis conditiones, positionem duarum variabilium, reperi quidem majorem aliquam universalitatem formulæ inducere, quod ad hanc secundam partem attinet, non vero quod ad primam, eandem enim semper oriri pro curva æquationem deprehendi sive ipsius dx sive ipsius dy coefficiens nihilo æquetur. Quod quidem quum ~~quam~~ maxime veritati consentaneum videatur; quippe quod una tantum sit curva, quæ uni ac determinato problemati satisfacere posse debeat; attamen ipsum a priori, seu ex ipsis formulis generalibus demonstrare nondum adhuc potui. licet in opinione sim id fieri posse debere. Si tibi, Vir Acutissime, et in hujusmodi Versatissime ista paululum respicere aliquando vacaret, me certe non parum adstringeres, ubi præstantissi-

marum

cogitationum tuarum participem me reddere velles.

Quaeratur e.g. curva brachystochrona; formula est $\int\frac{ds}{\sqrt{x}}$ unde esse debet

$$\delta\int\frac{ds}{\sqrt{x}} = \int\left(\frac{dy}{ds\sqrt{x}}d\delta y + \frac{dx}{ds\sqrt{x}}d\delta x - \frac{ds}{2x\sqrt{x}}\delta x\right) = \frac{dy}{ds\sqrt{x}}\delta y + \frac{dx}{ds\sqrt{x}}\delta x$$

$$-\int\left(d.\frac{dy}{ds\sqrt{x}}.\delta y + \left(d.\frac{dx}{ds\sqrt{x}} + \frac{ds}{2x\sqrt{x}}\right)\delta x\right) = 0$$

unde pro curva quia nulla datur relatio indefinita inter $\delta x$ et $\delta y$, esse debet seorsim $d.\frac{dy}{ds\sqrt{x}} = 0$; ex qua fit $a\,dy^2 = x\,ds^2$; et $d.\frac{dx}{ds\sqrt{x}} + \frac{ds}{2x\sqrt{x}} = 0$, quae mult. per $\frac{2dx}{ds\sqrt{x}}$ et integr. reducitur item ad $a\,dy^2 = x\,ds^2$; ut supra.

Porro si datum sit punctum ad quod corpus pervenire debeat, tum esse debebit tam $\delta x$, quam $\delta y$ in fine curvae $=0$, unde evanescent per se membra constantia. Si vero quaeratur curva citissimi appulsus ad datam aliam hoc casu, ponendo coordinatas pro ista data $X$, et $Y$ esse debebit $\delta x : \delta y = dX : dY$; et simul habebitur $\frac{dy\,\delta y + dx\,\delta x}{ds\sqrt{x}} = 0$ seu $dy\,dY + dx\,dX = 0$, quod indicat curvas se mutuo ad angulos rectos secare debere. Unde patet formulam ipsam differentialem solam abunde sufficere pro resolvendo problemate quacunque sub conditione proponatur. In prioribus literis me tibi scripsisse memini posse me hac mea methodo problema de curvis, maximi, minimique proprietate gaudentibus quocunque casu resolvere, non igitur indignaberis si leviusculas meas super hac re cogitationes hisce subjunxero.

Sit itaque $\int Z$ formula maxima, minimave facienda, utcunque $Z$ sit per $x$, et $y$ et eorumque differentialia datum, si aequatio, quae ipsum determinat per $\delta$ differentietur non poterit certe ipsa hujuscemodi formam non adepisci seu $\delta z + m\,\delta dz + n\,\delta d^2 z + p\,\delta d^3 z + \&c.$ $= N\delta y + P\delta dy + Q\delta d^2 y + \&c.$ (ponendo brev. gratia $y$ tantum variab.)

Dicatur secundum hoc membrum $\delta Y$; et secundum ea quae alibi dicta sunt ipsa transibit in $\delta z + m\,d\delta z + n\,d^2\delta z + p\,d^3\delta z + \&c. = \delta Y$

Porro in aequat: hujus formae generatim observo quantitatem $\delta z$ hac ratione exprimi posse $\delta z = A\int B\int C\int \frac{\delta Y}{pABC}$ ubi $A, B, C$ sunt literae assumptitiae ex aequat: data determinandae; ut determinentur: itaque accipiantur differentialia hujus valoris ipsius $\delta z$ et in super: aequat: substituantur: et terminis ordinatis emerget

$$(A + m\,dA + n\,d^2A + p\,d^3A)\int B\int C\int \frac{\delta Y}{pABC} + \overline{mAB + n(BdA + d\cdot AB)}$$

$$\overline{+\, p(Bd^2A + d\cdot(BdA + d\cdot AB))} \times \int C\int \frac{\delta Y}{pABC} + \overline{nABC + p(d\cdot ABC + BdA + d\cdot AB)C}$$

$$\times \int \frac{\delta Y}{pABC} = 0$$

unde nihilo aequando singulos horum integralium coefficientes tres obtinebuntur aequationes.

Habemus ergo $d\cdot\int z = \int A\int B\int C\int \frac{\delta Y}{pABC}$ ideoque, ut in literis super: notavi si abscissa pro qua curva proprietate data praedita esse debet sit $a$, fiatque posito $x = a$ $\int A = F$, et $F - \int A = R$; denuo ubi $x = a$ $\int RB = G$, et $G - \int RB = S$; et iterum posito $x = a$ $\int SC = H$, et $H - \int SC = T$ obtinebitur casu quo $x = a$ $d\cdot\int z = \int \frac{T\delta Y}{pABC}$; ex quo pro curva orietur aequat: (substituto loco $\delta Y$ suo valore) $\frac{TN}{pABC} - d\cdot\frac{TP}{pABC} + d^2\cdot\frac{TQ}{pABC} - \&c. = 0.$

Conjungendo nunc hanc aequat: cum tribus superioribus eliminabuntur quantitates $A, B, C$ cum suis different: et aeq: proveniens erit pro curva quaesita. Eodem modo patet

adeoq: $d^n \cdot xy = x d^n y + n dx d^{n-1} y + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} d^2x d^{n-2} y + \&c:$
quæ est ipsissima series quam dedit Cel: Leibnitius tomo I miscell: Berol: cujusque auctor, cum ipsemet olim eam invenissem, esse putabam.

Sit $y^m$ cujus differentialia cujusque gradus quærantur:
Ad hoc evolvatur quantitas $\left(y + a dy + \frac{a^2 d^2y}{1\cdot 2} + \frac{a^3 d^3y}{1\cdot 2\cdot 3} + \&c.\right)^m$
et secundum formulam quam Cel: Eulerus tradit cap: IV tom: I introd: in Analysin: Infin: ipsa fiet
$y^m(1 + aA + a^2B + a^3C + a^4D + \&c.)$ ubi posito $m+1 = r$ erit

$$A = \frac{r-1}{1}\cdot\frac{dy}{y}.\quad B = \frac{r-2}{2}A\frac{dy}{y} + \frac{2r-2}{2}\frac{d^2y}{1\cdot 2y}.$$

$$C = \frac{r-3}{3}B\frac{dy}{y} + \frac{2r-3}{3}A\frac{d^2y}{1\cdot 2\cdot y} + \frac{3r-3}{3}\frac{d^3y}{1\cdot 2\cdot 3y}$$

Et sic de cæteris. Unde patet quantitatem A ductam in $y^m$ dare differentiale $I^{mi}$ gradus; B ductam in $1\cdot 2y^m$ diff: $2^{di}$, C ductam in $1\cdot 2\cdot 3y^m$ diff: $3^{tii}$, et sic deinceps.

Formula ista præ cæteris iis casibus utilis esse potest, quibus formula summatoria Bernoulliana pro integratione generali ipsius $\int z dx$. expedit uti. Si enim $z$ sit functio ipsius $x$ irrationalis hac methodo solis differentialibus quantitatis sub signo radicali invenientur omnes $dz, d^2z, d^3z$ &c: quod aliunde tædiosissimum est, et calculi erroribus maxime obnoxium. Cæterum, quod et ad quantitates exponentiales hoc theorema applicetur: dicere supervacaneum est; hoc unum addam nempe si proponatur quantitas $d^m y^n d^r y^s d^t y^u$, quæ erit necessario terminus aliquis differentialis quantitatis $y^{n+s+u}$, et quidem gradus $mn+rs+tu$, et quæratur: qualis esse debeat ejus coefficiens? hoc mediante hoc theoremate et regula Bernulliana pro inveniente coefficiente dati termini in potestatis quantitatis datæ invenio esse

$$= \frac{M\cdot M-1\cdot M-2 \cdots\cdots 1}{(1\cdot 2\cdots m)^n(1\cdot 2\cdots r)^s(1\cdot 2\cdots t)^u} \times \frac{N\cdot N-1\cdot N-2 \cdots 1}{(1\cdot 2\cdot 3\cdots n)(1\cdot 2\cdot 3\cdots s)(1\cdot 2\cdot 3\cdots u)}$$

Posito nempe $M = mn + rs + tu$. $N = n+s+u$.

Ne literae istae omnino mathematicis rebus vacuae existerent meditatiunculas quasdam meas de quantitatum differentiationibus hic subjungere existimavi ratus vos pro benignitate vestra summ paululum attentionis ipsis non denegaturos.

## Teorema

Data functione quotlibet quantitatum variabilium puta $x, y, z$ si quaeratur ejus differentiale gradus $n$ ponatis in ipsa functione $x + a\,dx + \frac{a^2 d^2x}{1\cdot 2} + \frac{a^3 d^3x}{1\cdot 2\cdot 3} + \&c.$ loco $x$

$$y + a\,dy + \frac{a^2 d^2y}{1\cdot 2} + \frac{a^3 d^3y}{1\cdot 2\cdot 3} + \&c. \quad \text{loco } y$$

et sic loco $z$ &c. dico, functione evoluta terminisque secundum dimensiones ipsius $a$ ordinatis fore coefficientem ipsius $a^n$ ductum in $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 \cdots n$ differentiale quaesitum

Sit e.g. functio data $xy$ facta substitutione fiet

$$\left(x + a\,dx + \frac{a^2 d^2x}{1\cdot 2} + \frac{a^3 d^3x}{1\cdot 2\cdot 3} + \&c.\right)\left(y + a\,dy + \frac{a^2 d^2y}{1\cdot 2} + \frac{a^3 d^3y}{1\cdot 2\cdot 3} + \&c.\right)$$

seu evolutione facta

$$xy + a(x\,dy + y\,dx) + a^2\left(\frac{x\,d^2y}{1\cdot 2} + dx\,dy + \frac{d^2x\,y}{1\cdot 2}\right)$$

$$+ a^3\left(\frac{x\,d^3y}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{dx\,d^2y}{1\cdot 2} + \frac{d^2x\,dy}{1\cdot 2} + \frac{d^3x\,y}{1\cdot 2\cdot 3}\right) + \&c.$$

- - - - - - - - - - - - - - -

$$+ a^n\left(\frac{x\,d^ny}{1\cdot 2\cdot 3 \cdots n} + \frac{dx\,d^{n-1}y}{1\cdot 2\cdot 3 \cdots n-1} + \frac{d^2x\,d^{n-2}y}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3 \cdots n-2} + \frac{d^3x\,d^{n-3}y}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 3 \cdots n-3} + \&c.\right.$$

quomodo operandum sit in casu quo altioris gradus ipsius $\delta z$ differentialia in aequat: occurrunt. An methodus ista sit genuina, an alia potior existat tuum nunc esto judicium. Haec sunt, Vir Clarissime praecipua capita cogitationum, quas hactenus super hac materia habui; et quibus si non omnimode absoluta sit, saltem ei parum deesse puto. Interim vero si me ad superficies hac methodo maximi, minimique proprietate praeditas inveniendas converto, maximas me obrutum invenio difficultatibus. Sit e: g: proposita invenienda superficies, quae inter omnes (ita dicam) isoperimetras, maxima contineat soliditatem. Formula pro soliditate est $\iint z\,dx\,dy$ unde differ: $\delta$ fiet ejus valor different: $=\iint dx\,dy\,\delta z$ (pono $dx$, et $dy$ const:). Formula vero pro superficie est $\iint dx\,dy\sqrt{1+p^2+q^2}$ posito esse $dz = p\,dx + q\,dy$. different: pariter et fiet ejus dif: $=\iint dx\,dy\left(\frac{p\,\delta p + q\,\delta q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)$ Porro retinendo eundem notandi modum, quo tu Vir Clarissime usus es §: XIX dissert: de cordis vibrantib: in memoriis Academ: Berolin: anni 1753 $p=\left(\frac{dz}{dx}\right)$ unde $\delta p = \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)$; $q=\left(\frac{dz}{dy}\right)$ et $\delta q = \left(\frac{d\delta z}{dy}\right)$ ideoque valor different: $=\iint dx\,dy\left(\frac{p\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)+q\left(\frac{d\delta z}{dy}\right)}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)$ quod reduco ad

$$\int dy\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\delta z + \int dx\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\delta z - \cancel{\iint dx\,dy}$$

$$-\iint dx\,dy\left(\frac{\left(d.\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)}{dx}+\frac{\left(d.\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)}{dy}\right)\delta z$$ unde habetur: pro superficie ~~area~~

aeq: $a\,dx\,dy - \left(\frac{\left(d.\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)}{dx} - \frac{\left(d.\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)}{dy}\right)dx\,dy = 0$ seu

$$\frac{\left(d.\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)}{dx}+\frac{\left(d.\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)}{dy} = a;$$ Ex qua quomodo

generaliter aeq: finita pro superficie erui possit non video; difficultas enim maxima ex hoc oritur: quod unum differentiale variente solo $x$, alterum solo $y$ accipiendum sit; Huic quidem aequationi sphaeram satisfacere calculo inito deprehendit: facile, sed hic casus est particularis, multo enim latius ipsa se se extendit. Quod vero attinet ad membra $\int dy \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\delta z$ $\int dx \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\delta z$ ipsa si data sit curva, quae esse debeat perimeter superficiei quaerendae per se evanescunt, evanescentibus ipsis $\delta z$, ad eundem plane modum, quo evanescunt membra constantia in inveniendis curvis ubi puncta extrema ipsius sunt data.

Hac methodo invenio quidem pro superficie aequatione quaecunque sit formula ipsa data; attamen quomodo ipsa inventa uti debeam nescio.

Si tu mihi Vir Clarissime aliquid luminis super hanc rem affundere non gravaberis, habebis me certe tibi maximum debitorem.

Sed jam tempus est longae huic epistolae finem imponere; Lubet tamen hoc etiam addere, quod nuper in legendis formulis, quas pro sinuum, ac cosinuum potestatibus tradis pag: 220 Introd: in Analysin: Infin:

Ipsas enim ad formulam generalem revocavi. En

$$(2\cos: z)^m = \cos: mz + m\cos:(m-2)z + \frac{m\cdot m-1}{1\cdot 2}\cos:(m-4)z + \frac{m\cdot m-1\cdot m-2}{1\cdot 2\cdot 3}\cos:(m-6)z + \frac{m\cdot m-1\cdot m-2\cdot m-3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cos:(m-8)z + \&c:$$

Unde quia si $\sin: z = \cos(\pi - z)$ (denotante $\pi$ angulum rectum) fit etiam

$$(2\sin: z)^m = \cos: m(\pi - z) + m\cos:(m-2)(\pi-z) + \frac{m\cdot m-1}{1\cdot 2}\cos:(m-4)(\pi-z) + \&c$$

Quae si ad casus particulares applicentur: eam tuis apprime convenient.

Sic autem conceptae utilitatem aliquam afferre posse videntur: in radicum extractionibus: ex sinibus, cosinibusque. Verum patientia tua me jam satis abusum esse video ideoque: nihil amplius addam; Solum me gratiae tuae ac benevolentiae, quo melius potero commendabo. In eo nunc sum ut in ordinem redigam sive, quae de curvis maximi, minimique proprietate praeditis in genere, sive quae de ~~earum~~ applicatione Principii D: De Maupertuis ad problemata tam dynamica quam hydrodinamica, meditatus sum, ut ad Academiam mittam; Interea ne literae, quas ad ipsum gratiarum reddendarum causa dedi omnino vacuae existerent, quaedam de differentialibus apposui.

Vale, Faveque tibi Addictissimo, et Deditissimo Lodovico de la Grange Tournier