ИЗВѢСТІЯ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ. 1902. ЯНВАРЬ. Т. XVI, № 1.

(Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg. 1902. Janvier. T. XVI, № 1.)

Über die Festigkeit des Glases.

Von Fürst **B. Galitzin.**

Mit 1 Tafel.

(Der Akademie vorgelegt am 28. November 1901.).

§ 1.

Einleitung.

Bei manchen physikalischen Untersuchungen kommt es sehr oft vor, dass zugeschmolzene Glasröhren einem mehr oder weniger starken inneren Druck ausgesetzt werden, und es stellt sich alsdann sofort die Frage, welchen Druck das gegebene Rohr aushalten kann. Diese Frage ist von grosser praktischer Wichtigkeit, nicht nur, weil eine richtige Antwort auf dieselbe den Beobachter vor schädlichen und gefährlichen Explosionen schützen kann, sondern auch, weil bei manchen Untersuchungen, wo nämlich ein rascher Temperaturausgleich zwischen dem im Rohre enthaltenen Körper und dem äusseren Raum wünschenswerth ist, wie z. B. bei der Bestimmung von kritischen Temperaturen nach der optischen Methode, dickwandige Glasröhren wegen der schlechten Wärmeleitung des Glases sich als ganz unzweckmässig erweisen, und darnach gestrebt werden muss, so weit wie möglich dünnwandige Röhren von der minimalen zulässigen Wandstärke anzuwenden. Jeder Beobachter richtet sich gewöhnlich beim Auswählen von Röhren für seine Versuche nach seinen eigenen Erfahrungen und folgt seinen eigenen Motiven, deshalb schien es mir aus praktischen, so wie auch theoretischen Gründen wünschenswerth, die Frage nach der Festigkeit verschiedener Glassorten einer näheren experimentellen Untersuchung zu unterwerfen. Es versteht sich von selber, dass solche Untersuchungen auf keine grosse Übereinstimmung der erhaltenen Resultate Anspruch erheben können, da wir es hier mit Erscheinungen zu thun haben, bei welchen die

Elasticitätsgrenze des Körpers überschritten wird, und wo folglich jede zufällige Bedingung, wie etwa das ungleichmässige Abkühlen des Glases beim Anfertigen des Rohres, einen sehr grossen Einfluss auf das erhaltene Resultat haben kann. Trotzdem ergiebt sich durch Vervielfältigung der Versuche die Möglichkeit, diese zufälligen Einflüsse mehr oder weniger zu eliminiren und gewisse Gesetze und Zahlenwerthe anzugeben, welche selbstverständlich nur als erste Annäherung an die Wahrheit zu betrachten sind.

Die von mir ausgeführten Beobachtungen ergeben nur die Möglichkeit in gewissen Fällen zu konstatiren, welchen inneren Druck ein gegebenes Rohr im Mittel auszuhalten im Stande ist. Natürlich können in einzelnen Fällen bei verschiedenen Beobachtungen Abweichungen nach beiden Richtungen stattfinden, aber für denjenigen Beobachter, welcher von den von mir gegebenen Zahlen Gebrauch machen will, kann schon vom Nutzen sein, zu wissen, welchen Druck das von ihm zu gebrauchende Rohr unter normalen Verhältnissen auszuhalten im Stande ist. Selbstverständlich soll man bei den Beobachtungen selber die Versuche nie bis zu diesem maximalen Druck treiben; jeder Beobachter kann schon, seinen eigenen Betrachtungen folgend, feststellen, welchen Theil von diesem maximalen Druck für sein gegebenes Rohr er noch als zulässig annehmen darf.

Ich habe hauptsächlich zwei Glassorten untersucht, nähmlich Röhren aus Jenaer Glas und aus gewöhnlichem Thüringer Glas, ausserdem einige einzelne Beobachtungen mit Röhren aus Jenaer Hartglas, Blei-Glas und grünem Verbrennungsglas angestellt. Für die zwei ersten Glassorten habe ich Röhren von verschiedener Wanddicke untersucht und ausserdem bei allen Beobachtungen mich bemüht, nicht nur den Druck, bei welchem das gegebene Rohr zersprang, festzustellen, sondern auch die Geschwindigkeit des Druckwachsens vor dem Zerspringen zu ermitteln, welche ich bei den Beobachtungen in verhältnismässig weiten Grenzen variiren liess, da es mir von vornherein, erfahrungsgemäss mit anderen Materialien, nicht als unmöglich erschien, dass die Festigkeit des Glases von der Geschwindigkeit der Annäherung an die Elasticitätsgrenze abhängig sein könnte.

§ 2.

Theoretischer Theil.

Nehmen wir ein rechtwinkliges Coordinatensystem x, y, z an, so haben wir für die drei normalen Hauptspannungen p_{xx}, p_{yy} und p_{zz} die drei folgenden bekannten Gleichungen der Elasticitätstheorie[1]):

1) Siehe z. B. Евневичъ. Руководство къ изученію законовъ сопротивленій строительныхъ матеріаловъ. Стр. 35. С.-Птб. 1868 г.

$$\left.\begin{aligned} p_{xx} &= \frac{E}{1+\mu}\left[\frac{\mu\theta}{1-2\mu}+\Delta_x\right] \\ p_{yy} &= \frac{E}{1+\mu}\left[\frac{\mu\theta}{1-2\mu}+\Delta_y\right] \\ p_{zz} &= \frac{E}{1+\mu}\left[\frac{\mu\theta}{1-2\mu}+\Delta_z\right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Hierin bedeuten:

E den Elasticitätsmodulus des Körpers,

μ den Coefficienten der Querkontraktion,

Δ_x, Δ_y, Δ_z die relativen Hauptdilatationen parallel den respectiven Axen und

θ die relative Volumenänderung, wobei bekanntlich

$$\theta = \Delta_x + \Delta_y + \Delta_z \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

zu setzen ist.

Bezeichnen wir ferner durch u, v und w die entsprechenden Änderungen der Coordinaten x, y, z irgend eines Punktes des Körpers, so ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned} \Delta_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \Delta_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \Delta_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Bedeuten nun weiter X, Y, Z die Projectionen der äusseren Kraft, welche auf die Masseneinheit wirkt, auf die Coordinatenaxen und ρ die Dichtigkeit des Körpers im gegebenen Punkte, so ergeben sich aus der Elasticitätstheorie folgende drei Gleichungen für das Gleichgewicht der auf das Massenelement wirkenden Kräfte:

$$\left.\begin{aligned} \frac{E}{2(1+\mu)}\left[\frac{1}{1-2\mu}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial x}+D(u)\right]+\rho X &= 0 \\ \frac{E}{2(1+\mu)}\left[\frac{1}{1-2\mu}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial y}+D(v)\right]+\rho Y &= 0 \\ \frac{E}{2(1+\mu)}\left[\frac{1}{1-2\mu}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial z}+D(w)\right]+\rho Z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (4)$$

Hierin bedeutet das Symbol $D(t)$ die Summe der drei zweiten Derivirten der Function t nach den Coordinatenrichtungen, also

$$D(t) = \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}.$$

Wollen wir nun diese verschiedenen Formeln auf den uns interessirenden Fall eines zugeschmolzenen Glasrohres anwenden.

Bei diesen weiteren Entwickelungen werde ich Herrn Professor Evnewitch's Auseinandersetzungen folgen[1]).

Sei nun R' der innere und R der äussere Radius des Rohrs, P' der innere und P der äussere Druck, und lassen wir die z-Axe mit der Axe des Rohrs zusammenfallen. Bedeute weiter r die Entfernung irgend eines Punktes des Rohrs von der Axe desselben, so ist

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

Wegen der symmetrischen Vertheilung der Massentheilchen und Kräfte kann man setzen:

$$\left.\begin{aligned} u &= kx \\ v &= ky \\ w &= az, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

wo k und a nur von r abhängig sein können.

Setzt man diese Werthe in die Gleichungen (2) und (3) ein, so folgt:

$$\left.\begin{aligned} \theta &= a + 2k + r\frac{dk}{dr} \\ \Delta_x &= k + \frac{x^2}{r}\frac{dk}{dr} \\ \Delta_y &= k + \frac{y^2}{r}\frac{dk}{dr} \\ \Delta_z &= a. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Bringt man nun diese Werthe in die Formeln (1), so ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned} p_{xx} &= \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left[k + \mu a + r\frac{dk}{dr}\left\{\mu + (1-2\mu)\frac{x^2}{r^2}\right\}\right] \\ p_{yy} &= \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left[k + \mu a + r\frac{dk}{dr}\left\{\mu + (1-2\mu)\frac{y^2}{r^2}\right\}\right] \\ p_{zz} &= \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left[(1-\mu)a + 2\mu k + \mu r\frac{dk}{dr}\right] \end{aligned}\right\} \ldots \quad (7)$$

Wollen wir zur Abkürzung die Function

$$r^3\frac{dk}{dr} = \varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

einführen.

1) L. c. p. 178.

Dann lassen sich aus der ersten der Gleichungen (6) folgende drei Formeln ohne Schwierigkeit ableiten:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\theta}{\partial x} &= \frac{x}{r}\left\{\frac{da}{dr} + \frac{1}{r^2}\frac{d\varphi}{dr}\right\} \\ \frac{\partial\theta}{\partial y} &= \frac{y}{r}\left\{\frac{da}{dr} + \frac{1}{r^2}\frac{d\varphi}{dr}\right\} \\ \frac{\partial\theta}{\partial z} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Ausserdem findet man, indem man die Gleichungen (5) berücksichtigt

$$\left.\begin{aligned} D(u) &= \frac{x}{r^3}\frac{d\varphi}{dr} \\ D(v) &= \frac{y}{r^3}\frac{d\varphi}{dr} \\ D(w) &= \frac{z}{r}\left(\frac{da}{dr} + r\frac{d^2a}{dr^2}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Wollen wir nun die Ausdrücke aus den Formeln (9) und (10) in die Gleichgewichtsgleichungen (4) einführen und dabei das Gewicht des Rohrs ausser Acht lassen. Setzt man demgemäss X, Y, Z gleich Null, so sieht man leicht ein, dass die beiden ersten der Gleichungen (4) sich auf die folgende nur eine Gleichung (11) reduciren.

$$2(1-\mu)\frac{d\varphi}{dr} + r^2\frac{da}{dr} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Aus der dritten der Gleichungen (4) ergiebt sich

$$\frac{da}{dr} + r\frac{d^2a}{dr^2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Bestimmt man nun $\frac{da}{dr}$ und $\frac{d^2a}{dr^2}$ aus der Gleichung (11) und setzt diese Werthe in die Gleichung (12) ein, so ergiebt sich

$$\frac{d\varphi}{dr} = r\frac{d^2\varphi}{dr^2}$$

oder

$$\varphi = \frac{Cr^2}{2} + C' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

wo C und C' gewisse Constante bedeuten.

Wenn die Function φ schon einmal bekannt ist, so findet man leicht aus der Gleichung (8),

$$k = \frac{C}{2}\lg r - \frac{C'}{2r^2} + C'', \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

und aus der Gleichung (11)

$$a = C''' - 2\,(1-\mu)\; C \lg r\,, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

wo C'' und C''' abermals zwei neue Constante bedeuten.

Es handelt sich nun darum, die vier Constanten C, C', C'' und C''' zu bestimmen.

Ist das Rohr zugeschmolzen, so kann man für das Ende desselben mit genügender Annäherung setzen

$$p_{zz} = \frac{\pi\,(P'R'^2 - PR^2)}{\pi\,(R^2 - R'^2)}\,, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

oder, wegen der dritten der Gleichungen (7),

$$\frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left[(1-\mu)\,a + 2\,\mu k + \mu r\frac{dk}{dr}\right] = \frac{P'R'^2 - PR^2}{R^2 - R'^2}.$$

Setzt man nun hierin die Werthe von k und a aus den Gleichungen (14) und (15) ein, so folgt:

$$(1-\mu)\,C''' + 2\,\mu\, C'' + \mu\frac{C}{2} + \left\{\mu - 2\,(1-\mu)^2\right\} C \lg r = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E}\cdot\frac{P'R'^2 - PR^2}{R^2 - R'^2}.$$

Da diese Gleichung ihre Gültigkeit für jeden beliebigen Werth von r behalten muss, so ergiebt sich

$$C = 0,$$

also

$$(1-\mu)\,C''' + 2\,\mu\, C'' = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E}\cdot\frac{P'R'^2 - PR^2}{R^2 - R'^2} \quad \ldots\ldots \quad (17)$$

und zugleich

$$\left.\begin{aligned} k &= C'' - \frac{C'}{2r^2} \\ a &= C'''. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

Um die übrigen Constanten zu bestimmen, wollen wir der Einfachheit wegen die zx-Ebene durch unseren veränderlichen Punkt (x, y, z) legen.

Dann folgt aus den Gleichungen (7), mit Berücksichtigung der Gleichungen (18),

$$p_{xx} = p_{rr} = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left[C'' + \mu C''' + \left(\frac{1}{2} - \mu\right)\frac{C'}{r^2}\right]$$

$$p_{yy} = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left[C'' + \mu C''' - \left(\frac{1}{2} - \mu\right)\frac{C'}{r^2}\right].$$

Hieraus ergiebt sich für die Grenzbedingungen

$$-P = (p_{rr})_{r=R} = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left[C'' + \mu C''' + \left(\frac{1}{2} - \mu\right)\frac{C'}{R^2}\right] \quad . \quad (19)$$

$$-P' = (p_{rr})_{r=R'} = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left[C'' + \mu C''' + \left(\frac{1}{2} - \mu\right)\frac{C'}{R'^2}\right] \quad . \quad (20).$$

Aus dem Gleichungssystem (17), (19) und (20) erhält man alsdann:

$$\left.\begin{aligned} C' &= -\frac{2\,(1+\mu)}{E}\,(P' - P)\,\frac{R^2 R'^2}{R^2 - R'^2} \\ C'' &= C''' = \frac{1-2\mu}{E}\cdot\frac{P'R'^2 - PR^2}{R^2 - R'^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

Sind nun die Constanten bestimmt, so lassen sich Δ_x, Δ_y und Δ_z aus den Gleichungen (6), mit Rücksicht auf die Gleichungen (18) und (21), folgendermaassen ausdrücken:

$$\left.\begin{aligned} \Delta_x = \Delta_r &= \frac{1}{E}\cdot\frac{1}{R^2 - R'^2}\left[(1-2\mu)(P'R'^2 - PR^2) - (1+\mu)(P' - P)\frac{R^2R'^2}{r^2}\right] \\ \Delta_y &= \frac{1}{E}\cdot\frac{1}{R^2 - R'^2}\left[(1-2\mu)(P'R'^2 - PR^2) + (1+\mu)(P' - P)\frac{R^2R'^2}{r^2}\right] \\ \Delta_z &= \frac{1-2\mu}{E}\cdot\frac{P'R'^2 - PR^2}{R^2 - R'^2}. \end{aligned}\right\} (22)$$

Aus diesen Ausdrücken ersieht man sofort, dass in allen Fällen

$$\Delta_z = \frac{\Delta_r + \Delta_y}{2},$$

ist.

Folglich sind der maximalen Spannung unterworfen entweder die ringförmigen Fibern des Systems, oder diejenigen Fibern, welche senkrecht zur Axe liegen. Ist also der innere Druck P' grösser, als der äussere P, und wird P' so hoch getrieben, bis dass das Rohr zerspringt, so ergiebt sich unter normalen Verhältnissen, dass die Sprungstelle nicht ein Querschnitt senkrecht zur Axe des Rohres sein kann, was mit den Erfahrungsthatsachen übereinstimmt. Gewöhnlich zerfällt beim Zerspringen das Rohr in kleine Stücke, zuweilen aber zerspringt es in mehrere Theile der Axe entlang, folglich sind in diesem Fall die Trennungsflächen parallel der Axe des Rohres.

Beim fortwährenden Wachsen des inneren Druckes P' wird das aus dem gegebenen Material verfertigte Rohr zerspringen, wenn die maximale relative Dilatation $\Delta_{\max.}$ eine gewisse Grenze erreicht, bei welcher die inneren Elasticitätskräfte nicht mehr den äusseren Kräften Gleichgewicht halten können. Bezeichnen wir die entsprechende Spannung in diesem Fall durch

T_m, wo T_m als Maass für die Festigkeit des Materials betrachtet werden kann, so ergiebt sich nach den allgemeinen Principien der Elasticitätstheorie

$$\Delta_{\max.} = \frac{T_m}{E}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (23)$$

wo E den Elasticitätsmodulus bedeutet.

Diese Formel hat eine allgemeine Bedeutung und ist in allen Fällen anwendbar, also nicht nur für cylindrische Röhren.

In der Praxis, wo es auf die Bestimmung der Festigkeit des gegebenen Systems ankommt, und wo die Spannungen nie bis zur Elasticitätsgrenze getrieben werden dürfen, benutzt man statt der Formel (23) die Formel

$$\Delta_{\max.} = \frac{1}{m} \cdot \frac{T_m}{E},$$

wo m eine gewisse Zahl bedeutet, welcher zuweilen der Name «Festigkeitscoefficient» beigelegt wird, und die Spannungen werden, der Sicherheit halber, nur entsprechend diesem verkleinerten Werth von $\Delta_{\max.}$ hoch getrieben. Welcher Werth für m einzusetzen ist, hängt von verschiedenen Umständen ab, auf welche wir nicht näher einzugehen brauchen. Gewöhnlich wählt man für m Werthe zwischen 3 und 6.

Da es uns auf die Bestimmung der wahren Festigkeit ankommt, so werden wir die Formel in ihrer einfacheren Form

$$\Delta_{\max.} = \frac{T_m}{E}$$

anwenden.

Mit Rücksicht auf die Gleichungen (22) findet man alsdann, wenn $P' > P$ ist:

$$\frac{R}{R'} = \sqrt{\frac{T_m + (1-2\mu)P'}{T_m + (2-\mu)P - (1+\mu)P'}} \cdot \quad \ldots\ldots\ (24)$$

Ist T_m einmal bestimmt, so dürfte man diese Formel benutzen, um das Verhältniss der Radien des Rohres zu bestimmen, für welches das Rohr bei konstantem äusseren Druck P den inneren Druck P' noch auszuhalten im Stande ist.

Nach der Bedeutung der Gleichung (24) müsste T_m für ein gegebenes Material und bei denselben Temperaturverhältnissen eine Constante sein, was aber, wie wir weiter sehen werden, nicht mit den Beobachtungen übereinstimmt.

Bei meinen Untersuchungen war P stets gleich dem äusseren atmosphärischen Drucke, weshalb wir folglich mit genügender Genauigkeit

$$P = 1$$

setzen können.

Für Glas können wir $\mu = 1/4$ nehmen, und schreiben wir noch statt P' — P_m, wo P_m (in Atmosphären ausgedrückt) also den maximalen inneren Druck bedeutet, welchen das gegebene Rohr noch ausgehalten hat, und bezeichnen noch der Einfachheit wegen $\left(\frac{R}{R'}\right)$ durch n, so können wir zur Berechung von T_m aus den Beobachtungen die Gleichung (24) in die folgende umformen:

$$T_m = \frac{1}{4}\left\{5\,P_m + 7\left(\frac{P_m - 1}{n^2 - 1} - 1\right)\right\} \quad \ldots\ldots\ (25)$$

Die Formel (25) zeigt, dass P_m nur von dem Verhältniss der Radien n und nicht von den absoluten Werthen derselben abhängig sein soll.

Gewöhnlich werden die Daten für Festigkeit in Kilogrammen pro Quadratmillimeter angegeben. Um dieselben Einheiten beizubehalten, muss man den aus der Formel (25) sich ergebenden Werth vom T_m noch mit dem Factor 0,010333 multipliciren.

§ 3.

Versuchsanordnung.

Die zu untersuchenden Röhren wurden zunächst in mehrere Theile geschnitten, deren Länge zwischen 25 cm. und 40 cm. variirte. Gewöhnlich war die Länge der gebrauchten Stücke etwa 30 cm. Jedes Rohrstück wurde alsdann an einem Ende zu einer Spitze ausgezogen und offen gelassen. Das andere Ende wurde in einer passenden Metallhülse mit Hilfe von Marineleimkitt fest eingekittet. Die Hülse wurde dann an einer kräftigen Cailletet'schen Compressionspumpe angebracht und mit Hilfe einer besonderen Mutter stark angeschraubt. Das Manometer der Compressionspumpe war mit einer Theilung bis zu 1000 Atmosphären versehen, aber bei meinen Untersuchungen betrug der maximale beobachtete Druck nicht mehr, als 448 Atmosphären. Bei den Druckbestimmungen wurde selbstverständlich auf die Correctionswerthe der Manometertheilung Rücksicht genommen. Die Compressionspumpe wurde mit Wasser gefüllt und dasselbe in dem zu untersuchenden Rohr so hoch mit der Pumpe getrieben, dass nur eine kleine Luftmenge in dem oberen capillaren Theile des Rohres zurückblieb. Alsdann wurde die ausgezogene Spitze mit einer Stichflamme zugeschmolzen. Um vor Glasscherben geschützt zu sein, wurde der herausragende Theil des Rohres mit einem aus Drahtnetz verfertigten Cylinder bedeckt und auf diesen ausserdem ein Cylinder aus Pappe aufgesetzt. Durch die Wirkung der Pumpe konnte der innere Druck im Versuchsrohr so hoch getrieben werden, bis das Rohr zersprang, wobei, wenn der Druck schneller vergrössert werden sollte, man den Hebelarm der Pumpe benutzte, wenn man aber den Druck ganz langsam wachsen lassen wollte, so bediente man sich der besonderen Compressionsschraube, mit welcher die Cailletetschen Pumpen versehen sind.

Beim Zerspringen zerfiel das Rohr gewöhnlich in äussert kleine Stücke, wobei zuweilen die Erscheinung einen ganz milden Charakter hatte, zuweilen aber gab es ziemlich heftige Explosionen. In einigen Ausnahmefällen zersprang das Rohr quer über der Axe oder sogar sofort nach dem Anfang der Drucksteigerung, was wohl einem ungleichmässigen Abkühlen des Glases beim Herstellen des Rohres oder dem Vorhandensein irgend welcher anormaler Spannungen zuzuschreiben ist. Diese Beobachtungen müssten natürlich beim Ableiten der Endresultate der Versuche ausser Acht gelassen werden.

Den Gang des Manometers bei der Wirkung der Compressionspumpe, welche von meinem Gehilfen getrieben wurde, habe ich durch ein Fernrohr beobachtet und dabei die Momente, wo der Zeiger des Manometers je zehn neue Atmosphären passirt hatte, mit Hilfe eines elektrischen Contakts auf einem besonderen Chronographen von Hasler und Escher notiert. Auf diese Weise konnte man leicht die mittlere Geschwindigkeit des Druckwachsens während der Beobachtungen ableiten, so wie die Geschwindigkeit unmittelbar vor dem Zerspringen des Rohres. Die Drucke, bei welchen das Rohr zersprang, wurden direkt durch das Fernrohr abgelesen.

Alle Beobachtungen geschahen bei Zimmertemperatur.

Der innere und äussere Radius jedes untersuchten Rohrstückes wurden jedes Mal vor dem Ausziehen das einen Endes zur Spitze ermittelt. Dazu verwandte ich ein in einem Stativ fest eingeklemmtes Mikroskop mit Fadenkreuz, vor dessen Gesichtsfeld das zu untersuchende Rohr mit Hilfe der Schraube einer Theilmaschine fortbewegt wurde. Die Durchmesser wurden an beiden Enden des Rohrstückes gemessen und aus den erhaltenen Werthen zu je zwei die Mittel genommen.

§ 4.

Beobachtungen.

Auf die oben beschriebene Weise wurde folgende Anzahl von kleinen Röhren untersucht:

Aus Blei-Glas	7	Röhren
» Jenaer[1] (schwerflüssigem) Hartglas	7	»
» grünem Verbrennungsglas	7	»
» Jenaer Glas	38	»
» gewöhnlichem Thüringer Glas . . .	40	» ,

also im Ganzen 99 Röhren, wobei, wie gesagt, einige Beobachtungen missglückten.

Die meisten Beobachtungen beziehen sich auf Jenaer und gewöhnliches Thüringer Glas, wobei ich in diesen beiden Fällen Röhren von verschiedenen Durchmessern und Wanddicken untersucht habe.

Bei allen Beobachtungen habe ich mich bestrebt, die Geschwindigkeit des Druckwachsens zwischen verhältnissmässig weiten Grenzen variiren zu lassen.

Die Resultate dieser Beobachtungen sind in der Reihenfolge, wie sie thatsächlich ausgeführt worden sind, in der folgenden Tabelle wiedergegeben.

Die erste	Colonne	enthält	die Nummer N des Rohres.
» zweite	»	»	die Angabe der Glassorte.
» dritte	»	»	die mittlere Geschwindigkeit V_m des Druckwachsens, also die Anzahl von Atmosphären, um welche der Druck im Rohr in einer Secunde wächst.
» vierte	»	»	die Geschwindigkeit V des Druckwachsens unmittelbar vor dem Zerspringen des Rohres, ausgedrückt in denselben Einheiten.
» fünfte	»	»	den äusseren Radius des Rohres R.
» sechste	»	»	den inneren Radius » » R'.
» siebente	»	»	die Wanddicke $d = R - R'$.
» achte	»	»	das Verhältniss der Radien $n = \frac{R}{R'}$.
» neunte	»	»	den maximalen beobachteten Druck P_m, bei welchem das Rohr zersprang.
» zehnte	»	»	die aus den Werthen von n und P_m nach der Formel (25) berechnete Festigkeit T_m, ausgedrückt in Kilogrammen pro Quadratmillimeter.
» elfte	»	»	Bemerkungen zu den Beobachtungen.

1) Für Thermometerröhren.

Tabelle I.

№	Glassorte.	V_m	V	R	R'	$d=R-R'$	$n=\frac{R}{R'}$	P_m	T_m	Bemerkungen.
		Atm./Sec.	Atm./Sec.	m/m	m/m	m/m		Atm.	klgr./□ m/m	
1		—	—	4,95	1,74	3,21	2,84	—	—	Missglückte.
2		—	1,6	5,06	1,81	3,25	2,80	124	1,91	
3		—	—	4,55	1,75	2,80	2,60	142	2,26	
4	Blei-Glas	4,8	7,1	4,71	1,87	2,84	2,52	204	3,30	
5		—	—	5,45	1,81	3,64	3,01	255	3,85	
6		—	—	5,71	1,80	3,91	3,17	375	5,57	
7		4,2	6,6	5,54	1,85	3,69	2,99	265	4,01	
8		2,5	2,7	4,38	3,34	1,04	1,31	155	5,86	
9	Jenaer Glas	2,5	2,2	4,33	3,28	1,05	1,32	122	4,52	
10		—	—	4,31	3,28	1,03	1,31	—	—	Missglückte.
11		1,5	1,9	4,29	3,29	1,00	1,30	34	(1,27)	Unrichtiger Sprung.
12		3,6	5,3	5,26	2,30	2,96	2,29	234	4,00	
13		1,8	1,2	5,15	2,24	2,91	2,30	448	(7,64)	Sprungstelle senkrecht zur Axe.
14		4,8	3,1	5,00	2,13	2,87	2,35	287	4,84	
15		1,9	1,9	6,05	2,59	3,46	2,34	161	(2,71)	Sprungstelle senkrecht zur Axe.
16	Thüringer Glas	1,9	1,9	5,98	2,54	3,44	2,35	265	4,45	
17		2,5	2,7	5,94	2,50	3,44	2,38	257	(4,29)	Sprungstelle senkrecht zur Axe.
18		2,6	4,0	5,83	2,45	3,38	2,38	250	4,18	
19		1,4	3,0	7,13	5,28	1,85	1,35	203	7,07	
20		—	1,9	7,18	5.30	1,88	1,35	122	4,21	
21		2,2	1,3	7,20	5,31	1,89	1,36	234	8,03	
22		7,3	6,7	7,26	5,35	1,91	1,36	234	8,03	
23		3,5	2,9	4,39	3,17	1,22	1,38	190	6,20	
24		4,1	4,5	4,41	3,19	1,22	1,38	151	4,92	
25		2,4	2,2	4,49	3,24	1,25	1,39	164	5,27	
26		10,3	16,7	4,57	3,28	1,29	1,39	92	(2,92)	Unrichtiger Sprung.
27		2,0	1,7	4,57	3,27	1,30	1,40	236	7,46	
28		2,0	2,0	4,14	3,10	1,04	1,34	130	4,66	
29		1,6	1,5	4,13	3,10	1,03	1,33	142	5,13	
30		5,8	5,0	4,12	3,09	1,03	1,33	154	5,57	
31		1,8	1,9	4,10	3,07	1,03	1,33	182	6,53	
32		8,0	8,3	4,09	3,07	1,02	1,30	175	6,28	
33		—	—	5,42	4,84	0,58	1,12	47	3,80	
34		—	—	5,31	4,77	0,54	1,11	—	—	Missglückte.
35		2,4	2,2	5,26	4,69	0,57	1,12	47	3,80	
36		—	1,0	5,22	4,62	0,60	1,13	42	3,28	
37		—	—	5,11	4,54	0,57	1,12	—	—	Zersprang ganz am Anfang des Comprimirens.
38		4,2	7,1	3,02	2,22	0,80	1,36	165	5,56	
39		—	—	3,05	2,25	0,80	1,36	—	—	
40	Jenaer Glas	4,7	5,9	3,03	2,22	0,81	1,37	195	6,58	
41		4,7	5,6	3,02	2,22	0,80	1,36	161	5,46	
42		8,3	10,0	3,09	2,29	0,80	1,35	130	4,52	
43		—	—	4,37	3,06	1,31	1,43	—	—	
44		4,1	2,6	4,36	3,03	1,33	1,44	265	7.86	
45		3,9	2,9	4,37	2,99	1,38	1,46	234	6,70	
46		4,3	2,0	4,36	2.99	1,37	1,46	223	6,41	
47		2,0	1,0	4,31	2,95	1,36	1,46	180	5,15	
48		1,5	1,3	4,37	3,89	0,48	1,12	44	3,55	
49		—	0,7	4,46	3,98	0,48	1,12	40	3,22	
50		5,1	4,3	4,48	4,00	0,48	1,12	44	3,55	
51		1,5	1,7	4,50	4,03	0,47	1,12	42	3,50	
52		1,0	1,1	5,32	4,73	0,59	1,13	46	3,59	
53		5,5	4,5	5,33	4,76	0,57	1,12	52	4,35	
54		0,7	0,5	5,31	4,75	0,56	1,12	42	3,50	
55		3,0	2,3	5,34	4,75	0,59	1,12	60	4,87	
56		—	—	5,40	4,78	0,62	1,13	40	3,02	

Tabelle I. (Fortsetzung).

№	Glassorte.	V_m	V	R	R'	$d=R-R'$	$n=\frac{R}{R'}$	P_m	T_m	Bemerkungen.
		Atm/Sec.	Atm./Sec.	m/m	m/m	m/m		Atm.	klgr./□ m/m	
57		2,5	2,2	3,74	3,25	0,49	1,15	52	3,44	
58		0,9	0,8	3,79	3,30	0,49	1,15	55	3,76	
59		5,8	5,3	3,78	3,28	0,50	1,15	60	4,10	
60	Jenaer Hartglas	—	2,0	3,76	3,26	0,50	1,15	36	2,36	Zersprang verhältnissmässig sehr früh.
61		0,6	0,7	3,78	3,28	0,50	1,15	58	3,86	
62		0,8	0,7	3,57	2,98	0,59	1,20	72	3,90	
63		7,7	9,1	3,55	2,96	0,59	1,20	82	4,38	
64		3,0	2,4	7,21	4,32	2,89	1,67	347	7,98	
65		4,0	3,7	7,13	4,37	2,76	1,63	157	3,71	
66	Grünes Verbrennungsglas	3,6	4,3	7,05	4,41	2,64	1,60	152	3,71	
67		2,1	1,7	7,06	4,43	2,63	1,59	138	3,38	Der untere Theil des Rohres zerfiel in Stücke, der obere blieb heil.
68		14,3	16,7	7,46	4,86	2,60	1,53	165	4,31	
69		1,7	1,3	7,50	4,90	2,60	1,53	181	4,75	
70		2,7	2,2	7,19	4,50	2,69	1,60	230	5,63	
71		2,2	1,6	5,25	3,67	1,58	1,43	234	7,03	
72		—	—	5,23	3,64	1,59	1,44	154	4,59	
73		1,1	0,8	5,21	3,65	1,56	1,43	159	4,78	
74		15,8	12,5	5,17	3,64	1,53	1,42	257	7,83	
75		2,9	3,6	5,19	3,62	1,57	1,44	236	7,04	
76		—	—	5,20	3,63	1,57	1,43	104	3,08	
77		ungefähr 2,8	—	5,21	3,63	1,58	1,44	246	7,35	
78		—	—	5,19	3,62	1,57	1,43	191	5,70	
79		1,4	1,6	5,17	3,62	1,55	1,43	223	6,73	
80		8,8	14,3	5,18	3,61	1,57	1,44	261	7,79	
81		2,7	2,3	5,39	3,54	1,85	1,52	160	4,23	
82		2,8	4,0	5,40	3,55	1,85	1,52	255	6,79	
83		7,4	9,1	5,38	3,56	1,82	1,51	234	6,28	
84		1,2	1,3	5,36	3,55	1,81	1,51	170	4,57	
85	Thüringer Glas	2,8	2,3	5,35	3,54	1,81	1,51	227	6,08	
86		1,3	1,3	4,64	4,20	0,44	1,10	42	3,90	
87		—	—	4,66	4,23	0,43	1,10	—	—	Zersprang bei einem sehr kleinen Überdruck.
88		—	—	4,72	4,28	0,44	1,10	30	2,81	
89		1,0	0,9	4,71	4,26	0,45	1,10	45	4,21	
90		—	7,1	5,53	4,70	0,83	1,18	63	3,74	
91		2,2	1,9	5,53	4,71	0,82	1,18	98	5,87	
92		1,5	1,3	5,57	4,75	0,82	1,17	93	5,56	
93		2,5	1,8	5,65	4,81	0,84	1,17	86	5,14	
94		3,3	2,4	5,68	4,83	0,85	1,18	92	5,50	
95		2,2	2,2	4,30	3,43	0,87	1,25	84	3,70	
96		7,2	5,3	4,34	3,46	0,88	1,25	142	6.29	
97		1,5	1,6	4,38	3,49	0,89	1,26	82	3,57	
98		—	—	4,39	3,49	0,90	1,26	161	6,96	
99		2,7	1,7	4,40	3,48	0,92	1,26	154	6,67	

Anmerkung. Die Klammern in der Colonne T_m bedeuten, dass die entsprechenden Röhren von einem und demselben Rohrstück abgeschnitten sind.

Um aus dem in der Tabelle I angeführten Zahlenmaterial Schlüsse ziehen zu können und eventuell Mittelwerthe zu bilden, muss man zuerst untersuchen, ob irgend welcher Zusammenhang zwischen der Festigkeit und der Geschwindigkeit des Druckwachsens besteht, wobei die in runden Klammern angeführten Werthe von T_m aus früher erörterten Gründen ausser Acht gelassen werden müssen.

Die Beobachtungen mit Bleiglas (№№ 2 bis 7) geben sehr schwankende Werthe von T_m bei fast einem und demselben Werthe von n, so dass sich dabei kein sicherer Zusammenhang zwischen T_m und V erkennen lässt. Diese Schwankungen in den Werthen von T_m rühren wohl davon her, dass das aus Bleiglas untersuchte Rohr sehr dickwandig war. Überhaupt, je starkwandiger das Rohr ist, als um so unregelmässiger im Allgemeinen erweisen sich die Beobachtungen. (Vergl. №№ 12—18 und 64—70).

Die Beobachtungen mit Jenaer Hartglas (№№ 57—63) ergeben auch keinen regelmässigen Zusammenhang zwischen V und T_m (bei demselben n). Dasselbe gilt auch für die Beobachtungen mit grünem Verbrennungsglas (№№ 64—70). In diesem letzten Fall sind bei sehr ähnlichen Werthen von V (№№ 64 und 65) und bei fast demselben Werth von n die Werthe von T_m sehr verschieden, und umgekehrt, bei sehr verschiedenen Werthen von V (№№ 68 und 69) unterscheiden sich die Werthe von T_m verhältnissmässig sehr wenig.

Wenden wir uns jetzt zu den Beobachtungen mit Thüringer Glas und vergleichen die Werthe von T_m, welche demselben Verhältniss $n = \frac{R}{R'}$ entsprechen, miteinander. Die №№ 90—94 deuten darauf hin, dass grösseren Werthen von V kleinere Werthe von T_m entsprechen, die №№ 71, 73 und 74 ergeben das entgegengesetzte Resultat. Die übrigen Beobachtungen lassen keinen sicheren Schluss über den Zusammenhang zwischen V und T_m ziehen; in einigen Fällen verlaufen die Werthe in einem Sinne, in anderen gerade im entgegengesetzten. Die №№ 21 und 22 bei genau demselben Werth von n ergeben genau gleiche Werthe von T_m bei ganz verschiedenen V.

Dasselbe gilt auch für die Beobachtungen mit Jenaer Glas, woraus wohl der Schluss zu ziehen ist, dass kein bedeutender Zusammenhang zwischen den Werthen von T_m und der Geschwindigkeit des Druckwachsens besteht, jedenfalls sind die Unterschiede in den Werthen von T_m kleiner, als diejenigen, welche etwaigen Unregelmässigkeiten in der Constitution des Glases entsprechen, und welche bei diesen Beobachtungen, bei denen die Elasticitätsgrenze überschritten wird, so stark zur Geltung kommen. Dieses Resultat ist für unseren Zweck insofern von Bedeutung, als dass es uns ermöglicht, von der Geschwindigkeit des Druckwachsens vollständig abzusehen und aus den Werthen von T_m, welche fast gleichen Werthen von n entsprechen, Mittelwerthe zu bilden, aus deren Vergleichung untereinander weitere Schlüsse gezogen werden können.

§ 5.

Versuchsergebnisse.

Wollen wir nun die verschiedenen Beobachtungen nach Glassorten gruppieren und diejenigen Zahlen, welche fast gleichen Werthen von $n = \frac{R}{R'}$ entsprechen, in besonderen kleinen Tabellen zusammenstellen, aus denen noch gewisse Mittelwerthe gebildet werden sollen.

In jeder Tabelle wollen wir noch die Werthe von T_m nach wachsenden Werthen von n ordnen.

Die unten bei den Tabellen angeführten Werthe von G ergeben das Gewicht des entsprechenden Mittelwerthes. Von diesen Zahlen wird später, bei Anstellung gewisser noch zu besprechender Berechnungen, Gebrauch gemacht.

Blei-Glas.

Tabelle II.

№	n	d	T_m
		$^m/_m$	$\frac{\text{klgr.}}{\square\ ^m/_m}$
4	2,52	2,84	3,30
3	2,60	2,80	2,26
2	2,80	3,25	1,91
7	2,99	3,69	4,01
5	3,01	3,64	3,85
6	3,17	3,91	5,57
Mittel	2,85	3,36	3,48

$G = 6$

In dieser Tabelle, in welcher die Werthe von n so verschieden ausfallen, ist die Bildung von Mittelwerthen wohl nicht ganz berechtigt, da aber bei diesen Beobachtungen mit Blei-Glas die benutzten Rohrstücke sehr dicke Wände hatten, und infolgedessen die einzelnen Werthe von T_m sehr grosse Schwankungen aufweisen, kann die Bildung von Mittelwerthen wohl als gestattet angesehen werden.

Übrigens, je dicker die Röhrenwände, desto weniger Vertrauen verdienen die Beobachtungen, da in diesem Falle die Unregelmässigkeiten in dem Glase selber einen stärkeren Einfluss auf die beobachteten maximalen Drucke P_m ausüben.

Jenaer schwerflüssiges Hartglas.

Tabelle III.

№	n	d	T_m
		m/m	$\frac{\text{klgr.}}{\square\ \text{m/m}}$
57	1,15	0,49	3,44
58	1,15	0,49	3,76
59	1,15	0,50	4,10
60	1,15	0,50	2,36
61	1,15	0,50	3,86
62	1,20	0,59	3,90
63	1,20	0,59	4,38
Mittel	1,16	0,52	3,69

$G = 7$

Grünes Verbrennungsglas.

Tabelle IV.

№	n	d	T_m
		m/m	$\frac{\text{klgr.}}{\square\ \text{m/m}}$
68	1,53	2,60	4,31
69	1,53	2,60	4,75
67	1,59	2,63	3,38
70	1,60	2,69	5,63
66	1,60	2,64	3,71
65	1,63	2,76	3,71
64	1,67	2,89	7,98
Mittel	1,59	2,69	4,78

$G = 7.$

In dieser Tabelle sind die einzelnen Werthe von T_m wegen der Dickwandigkeit der benutzten Röhren ziemlich schwankend.

Jenaer Glas.

Tabelle V.

№	n	d	T_m
		m/m	$\frac{\text{klgr.}}{\square\ \text{m/m}}$
33	1,12	0,58	3,80
35	1,12	0,57	3,80
36	1,13	0,60	3,28
Mittel	1,12	0,58	3,63

$G = 3.$

Tabelle VI.

№	n	d	T_m
		m/m	$\frac{\text{klgr.}}{\square\ \text{m/m}}$
48	1,12	0,48	3,55
49	1,12	0,48	3,22
50	1,12	0,48	3,55
51	1,12	0,47	3,50
53	1,12	0,57	4,35
54	1,12	0,56	3,50
55	1,12	0,59	4,87
52	1,13	0,59	3,59
56	1,13	0,62	3,02
Mittel	1,12	0,54	3,68

$G = 9.$

Tabelle VII.

№	n	d	T_m
		m/m	$\frac{\text{klgr.}}{\square\ \text{m/m}}$
8	1,31	1,04	5,86
9	1,32	1,05	4,52
Mittel	1,32	1,05	5,19

$G = 2.$

Tabelle VIII.

№	n	d	T_m
		m/m	klgr./□ m/m
32	1,30	1,02	6,28
31	1,33	1,03	6,53
30	1,33	1,03	5,57
29	1,33	1,03	5,13
28	1,34	1,04	4,66
Mittel	1,33	1,03	5,63

$G = 5$.

Tabelle IX.

№	n	d	T_m
		m/m	klgr./□ m/m
42	1,35	0,80	4,52
41	1,36	0,80	5,46
38	1,36	0,80	5,56
40	1,37	0,81	6,58
Mittel	1,36	0,80	5,53

$G = 4$.

Tabelle X.

№	n	d	T_m
		m/m	klgr./□ m/m
23	1,38	1,22	6,20
24	1,38	1,22	4,92
25	1,39	1,25	5,27
27	1,40	1,30	7,46
Mittel	1,39	1,25	5,96

$G = 4$.

Tabelle XI.

№	n	d	T_m
		m/m	klgr./□ m/m
44	1,44	1,33	7,86
45	1,46	1,38	6,70
46	1,46	1,37	6,41
47	1,46	1,36	5,15
Mittel	1,46	1,36	6,53

$G = 4$.

Thüringer Glas.

Tabelle XII.

№	n	d	T_m
		m/m	klgr./□ m/m
86	1,10	0,44	3,90
88	1,10	0,44	2,81
89	1,10	0,45	4,21
Mittel	1,10	0,44	3,64

$G = 3$.

Tabelle XIII.

	n	d	T_m
		m/m	klgr./□ m/m
92	1,17	0,82	5,56
93	1,17	0,84	5,14
90	1,18	0,83	3,74
91	1,18	0,82	5,87
94	1,18	0,85	5,50
Mittel	1,18	0,83	5,16

$G = 5$.

Tabelle XIV.

№	n	d	T_m
		m/m	$\frac{\text{klgr.}}{\square\,^{m}/_{m}}$
95	1,25	0,87	3,70
96	1,25	0,88	6,29
97	1,26	0,89	3,57
98	1,26	0,90	6,96
99	1,26	0,92	6,67
Mittel	1,26	0,89	5,44

$G = 5.$

Tabelle XV.

№	n	d	T_m
		m/m	$\frac{\text{klgr.}}{\square\,^{m}/_{m}}$
19	1,35	1,85	7,07
20	1,35	1,88	4,21
21	1,36	1,89	8,03
22	1,36	1,91	8,03
Mittel	1,36	1,88	6,84

$G = 4.$

Tabelle XVI.

№	n	d	T_m
		m/m	$\frac{\text{klgr.}}{\square\,^{m}/_{m}}$
74	1,42	1,53	7,83
71	1,43	1,58	7,03
73	1,43	1,56	4,78
72	1,44	1,59	4,59
75	1,44	1,57	7,04
Mittel	1,43	1,57	6,25

$G = 5.$

Tabelle XVII.

№	n	d	T_m
		m/m	$\frac{\text{klgr.}}{\square\,^{m}/_{m}}$
76	1,43	1,57	3,08
78	1,43	1,57	5,70
79	1,43	1,55	6,73
77	1,44	1,58	7,35
80	1,44	1,57	7,79
Mittel	1,43	1,57	6,13

$G = 5.$

Tabelle XVIII.

№	n	d	T_m
		m/m	$\frac{\text{klgr.}}{\square\,^{m}/_{m}}$
85	1,51	1,81	6,08
84	1,51	1,81	4,57
83	1,51	1,82	6,28
82	1,52	1,85	6,79
81	1,52	1,85	4,23
Mittel	1,51	1,83	5,59

$G = 5.$

Tabelle XIX.

№	n	d	T_m
		m/m	$\frac{\text{klgr.}}{\square\,^{m}/_{m}}$
12	2,29	2,96	4,00
14	2,35	2,87	4,84
16	2,35	3,44	4,45
18	2,38	3,38	4,18
Mittel	2,34	3,16	4,37

$G = 4.$

Die in den Tabellen II, III und IV angeführten Mittelwerthe für Blei-Glas, Jenaer Hartglas und Verbrennungsglas ergeben nur vereinzelte Werthe von T_m für ein bestimmtes Verhältniss n, während in den folgenden Tabellen für gewöhnliches Jenaer und Thüringer Glas Werthe von T_m angegeben sind, welche verschiedenen Werthen von $n = \frac{R}{R'}$ entsprechen. Der Bedeutung nach sollte die Grösse T_m von dem Verhältniss n ganz und gar unabhängig sein, was aber nicht mit den Beobachtungen übereinstimmt. Freilich sind die verschiedenen Werthe von T_m, welche denselben n angehören, ziemlich schwankend, was auch wegen des Überschreitens der Elasticitätsgrenze wohl zu erwarten war, doch können wir die Mittelwerthe von T_m für verschiedene n mit einander vergleichen, um etwa einen Aufschluss über den Zusammenhang von T_m mit n zu erhalten. Dieser Zusammenhang muss selbstverständlich nur als erste Annäherung an die Wahrheit betrachtet werden; um sicherere Schlüsse ziehen zu können, müsste man die Beobachtungen sehr viel vermehren, um alle zufälligen Einflüsse aus den Mittelwerthen möglichst eliminiren zu können.

In den folgenden zwei Tabellen XX und XXI sind für gewöhnliches Jenaer und Thüringer Glas die verschiedenen Mittelwerthe von T_m und n zusammengestellt [1]).

Jenaer Glas.

Tabelle XX.

n	T_m	d	G
	klgr. / □ m/m	m/m	.
1,12	3,67	0,55	12
1,33	5,50	1,04	7
1,36	5,53	0,80	4
1,39	5,96	1,25	4
1,46	6,53	1,36	4

1) Dabei sind aus den Mittelwerthen der Tabellen V und VI, VII und VIII, XVI und XVII abermals die Mittelwerthe genommen unter Berücksichtigung der entsprechenden Gewichte.

Thüringer Glas.

Tabelle XXI.

n	T_m	d	G
	klgr. / □ m/m	m/m	
1,10	3,64	0,44	3
1,18	5,16	0,83	5
1,26	5,44	0,89	5
1,36	6,84	1,88	4
1,43	6,19	1,57	10
1,51	5,59	1,83	5
2,34	4,37	3,16	4

Hierzu wäre noch hinzuzufügen:

	n	T_m	d	C	
Für Blei-Glas	2,85	3,48 klgr./□ m/m	3,36 m/m	6	(Tabelle II).
» Jenaer Hartglas . .	1,16	3,69	0,52	7	(Tabelle III).
» Verbrennungsglas .	1,59	4,78	2,69	7	(Tabelle IV).

Betrachten wir nun näher die Zahlen der Tabelle XX, so sehen wir, dass für Jenaer Glas mit wachsendem n innerhalb der Beobachtungsdata T_m stetig wächst und zwar ist die Abhängigkeit fast eine lineare.

Für Thüringer Glas wächst am Anfang T_m mit n bis zu einem gewissen Maximum (etwa bei $n = 1,36$) um dann allmählig abzunehmen.

Der Zusammenhang zwischen T_m und n für beide Glassorten lässt sich deutlich in der beigefügten Fig. I verfolgen, wo als Abscissen die Werthe von n und als Ordinaten die entsprechenden Werthe von T_m genommen sind. Die für Jenaer Glas geltende Curve ist mit dem Buchstaben J und die für Thüringer Glas mit T bezeichnet.

Die Beobachtungen für Jenaer Glas entsprechen einem viel kleineren Intervall von Werthen für n; vielleicht deshalb auch fällt für die Curve des Jenaer Glases der absteigende Ast fort, da es freilich kaum anzunehmen ist, dass mit wachsendem n T_m immer weiter stetig wächst. Die Zahlen für Jenaer Glas weisen im Allgemeinen eine viel grössere Gleichmässigkeit auf, als diejenigen für Thüringer Glas, vielleicht, weil das letztere eine ganz gewöhnliche Glassorte war.

In der Figur I sind die vereinzelten Werthe für Blei-Glas, Jenaer Hartglas und Verbrennungsglas angedeutet (Punkte B, H und V). Die

Werthe für Hartglas und Verbrennungsglas liegen den entsprechenden Werthen für die zwei früher erwähnten Glassorten sehr nahe; nur Blei-Glas scheint etwas weniger widerstandsfähig zu sein. Das aber ist freilich nur eine Vermuthung, da die Beobachtungen mit Jenaer und Thüringer Glas nicht bis zu dem Werth von n reichen, welcher den Beobachtungen mit Blei-Glas entspricht.

Überhaupt scheint die Festigkeit T_m von der Glassorte weniger abzuhängen, als von dem Verhältniss der Radien n; es schien mir auch deshalb überflüssig, die Zusammensetzung der von mir untersuchten Glassorten näher zu bestimmen.

Es ergiebt sich also, dass für dieselbe Glassorte die Festigkeit nicht als eine Constante betrachtet werden kann, wohl besteht ein Zusammenhang zwischen T_m und n; folglich kann die theoretische Formel (24) nicht den Beobachtungen als vollständig entsprechend betrachtet werden. Freilich kann man von dieser Formel immer noch Gebrauch machen, nur muss man für jeden Werth von $\frac{R}{R'}$ den entsprechenden Werth von T_m einsetzen.

Ob T_m auch von der Dicke der Wände d abhängt, darüber lässt sich aus diesen Beobachtungen kein sicherer Schluss ziehen.

Wollen wir nun von den in den Tabellen XX und XXI angeführten Zahlen Gebrauch machen, um für bestimmte, um 0,05 sich unterscheidende Werthe von n, T_m zu berechnen. Diese Zahlen werden dann dazu dienen, um den maximalen Druck, welchen ein gegebenes Rohr unter normalen Verhältnissen auszuhalten im Stande ist, zu berechnen.

Der Zusammenhang zwischen n und T_m kann für Jenaer Glas (Tabelle XX) durch die folgende Formel dargestellt werden:

$$T_m = A + Bn.$$

Die Coefficienten A und B lassen sich aus den Zahlen der Tabelle XX berechnen.

Thut man das und berechnet alsdann die den verschiedenen n entsprechenden Werthe für T_m, so erhält man folgende Zahlen, wobei ich mir auch eine kleine Extrapolation erlaubt habe. Die Werthe von T_m sind dabei auf 0,1 abgerundet worden.

Jenaer Glas.

Tabelle XXII.

n	T_m klgr. / □ m/m
1,05	3,1
1,10	3,5
1,15	3,9
1,20	4,3
1,25	4,8
1,30	5,2
1,35	5,6
1,40	6,0
1,45	6,4
1,50	6,9

Thüringer Glas.

Tabelle XXIII.

n	T_m klgr. / □ m/m
1,0	3,4
1,10	3,9
1,15	4,5
1,20	5,0
1,25	5,6
1,30	6,1
1,35	6,7
1,40	6,4
1,45	6,0
1,50	5,7
1,55	5,4
1,60	5,1
1,65	4,9
1,70	4,8
1,75	4,7
1,80	4,6
1,85	4,5
1,90	4,4
1,95	4,4
2,00	4,4
2,05	4,3
2,10	4,3
2,15	4,3
2,20	4,3
2,25	4,3
2,30	4,4
2,35	4,4

Wenden wir uns jetzt zu den Beobachtungen mit Thüringer Glas (Tabelle XXI).

Von $n = 1,10$ bis $n = 1,36$ kann man zur Berechnung von T_m für verschiedene Werthe von n folgende Formel benutzen.

$$T_m = A + Bn + Cn^2,$$

für den absteigenden Ast wollen wir dagegen eine viergliedrige Formel der folgenden Art nehmen:

$$T_m = A + \frac{B}{n} + \frac{C}{n^2} + \frac{D}{n^3}.$$

Nach der Ausführung aller Berechnungen erhält man folgende Zahlenwerthe (siehe Tabelle XXIII).

Ist nun der Zusammenhang zwischen n und T_m bekannt, so kann man zur Lösung einer Aufgabe übergehen, die von praktischer Wichtigkeit ist.

Es handelt sich darum, zu bestimmen, wieviel Atmosphären P_m ein gegebenes Rohr auszuhalten im Stande ist?

Zu dem Zweck wollen wir die Formel (25) in eine zur Berechnung von P_m geeignete umgestalten. Da P_m gewöhnlich in Atmosphären ausgedrückt wird, so müssen wir, um die Zahlen der vorigen Tabellen XXIII und XXIV direkt benutzen zu können, den Werth von T_m in der Formel (25) noch mit dem Zahlenfactor $\frac{1}{0{,}010333} = 96{,}8$ multipliciren.

Thut man das, so erhält man leicht folgende Formel:

$$P_m = \frac{7\,n^2}{5\,n^2+2} + 387\,\frac{n^2-1}{5\,n^2+2} \cdot T_m \,, \ldots\ldots (26)$$

wo P_m in Atmosphären und T'_m in klgr. pro □ m/m ausgedrückt sind.

Führt man nun die aus den Tabellen XXII und XXIII für verschiedene Werthe von n sich ergebenden Werthe von T_m ein, so erhält man für Jenaer und Thüringer Glas folgende definitive Zahlen:

Jenaer Glas.

Tabelle XXIV.

$n = \frac{R}{R'}$	P_m
	Atm.
1,05	17
1,10	36
1,15	58
1,20	81
1,25	108
1,30	134
1,35	162
1,40	190
1,45	219
1,50	253

Thüringer Glas.

Tabelle XXV.

$n = \frac{R}{R'}$	P_m
	Atm.
1,05	19
1,10	40
1,15	66
1,20	94
1,25	125
1,30	157
1,35	193
1,40	203
1,45	206
1,50	209
1,55	210
1,60	209
1,65	210
1,70	215
1,75	218
1,80	220
1,85	222
1,90	223
1,95	228
2,00	233
2,05	233
2,10	237
2,15	241
2,20	245
2,25	249
2,30	258
2,35	261

Die in den vorigen Tabellen XXIV und XXV angeführten Werthe von P_m ergeben den maximalen Druck, welchen ein gegebenes Rohr bei Zugrundelegung der Zahlen meiner Beobachtungen unter normalen Verhältnissen im Mittel auszuhalten im Stande ist. Da aber zur Berechnung von P_m die Mittelwerthe von T_m benutzt worden sind, so darf man den Druck im Innern des Rohres nie bis zu diesen Grenzwerthen von P_m treiben, da, wie aus den Tabellen II bis XIX ersichtlich ist, der kleinste sich ergebende Werth von T_m oft viel kleiner, als der Mittelwerth von T_m, ausfällt. Im ungünstigsten Falle beträgt der Unterschied 50% des Mittelwerthes von T_m.

Berücksichtigt man nun, dass das erste Glied in der Formel (26)

$$\frac{7\,n^2}{5\,n^2+2}$$

immer zwischen 1 und 1,4 enthalten ist, und dass P_m gewöhnlich mehrere Atmosphären beträgt, so kann man P_m mit hinreichender Genauigkeit T_m als proportional betrachten (für denselben Werth von n); folglich wäre es zu empfehlen, den Druck im Inneren des Versuchsrohres, wenn dasselbe heil bleiben soll, nur bis zur Hälfte der aus den Tabellen XXIV und XXV sich ergebenden Werthe von P_m zu treiben.

Dabei ist man freilich auch nicht garantirt, dass das Rohr nicht platzen wird, da, wie wir gesehen haben, Ausnahmefälle vorkommen können (bei ungleichmässig abgekühlten Röhren etc.), wo das Rohr auch bei einem sehr kleinen inneren Überdruck zerspringt.

Kehren wir nochmals zu der theoretischen, aus der Elasticitätstheorie sich ergebenden Formel (26) zurück.

Die Beobachtungen haben ergeben, dass T_m eigentlich eine veränderliche Grösse ist, da aber T_m, seiner Bedeutung nach, nie ins Unbegrenzte wachsen kann, so muss es ein Maximum haben. Setzen wir diesen Maximalwerth $(T_m)_{\text{max.}}$ in die Formel (26) ein, so sehen wir, dass P_m bei Veränderung von n nur bis zu einer gewissen Grenze zunehmen kann; dieser Fall entspricht $n = \infty$.

Der grösste von mir beobachtete Werth von T_m war 8,03. Setzen wir dem entsprechend $T_m = 8{,}03$ und $n = \infty$, so ergiebt sich

$$(P_m)_{\text{max.}} = 623^{\text{ Atm.}}$$

Wäre n nicht gleich ∞, sondern nur gleich 10, so würde man erhalten

$$P_m = 614^{\text{ Atm.}}$$

Es ergiebt sich also, dass ein cylindrisches Glasrohr, sei es so dickwandig, wie es will, nur einen gewissen inneren Maximaldruck aushalten kann.

Es lohnt sich also gar nicht, von einer gewissen Grenze an, die Wandstärke weiter zu vergrössern, da man dabei sehr wenig für den maximalen Druck P_m gewinnt. Für $n = 10$ und $n = \infty$ beträgt der Druckunterschied nur 9 Atmosphären.

Bei Zugrundelegung der Zahlen meiner Beobachtungen kann ein Glasrohr höchstens 623 Atmosphären aushalten.

§ 6.

Schlussfolgerungen.

Die Resultate dieser ganzen Untersuchung, welche nur als erste Annäherung an die Wahrheit zu betrachten sind, lassen sich folgendermaassen zusammenfassen.

Die Festigkeit verschiedener Glassorten ist innerhalb der Beobachtungsgrenzen von der Geschwindigkeit des Druckwachsens im Inneren des Rohres beim constanten äusseren Druck (1 Atmosphäre) als unabhängig zu betrachten.

Die Festigkeit erweist sich für eine und dieselbe Glassorte nicht als constant, sondern sie hängt von dem Verhältniss $n = \frac{R}{R'}$ der äusseren und inneren Radien des Rohres ab, und zwar, bei wachsendem n wächst am Anfang auch die Festigkeit T_m (Jenaer und Thüringer Glas), um später bei fortgesetztem Wachsen von n mehr oder weniger langsam abzunehmen (Thüringer Glas).

Ein Zusammenhang der Festigkeit T_m mit der Röhrendicke d lässt sich aus den Versuchen nicht erkennen.

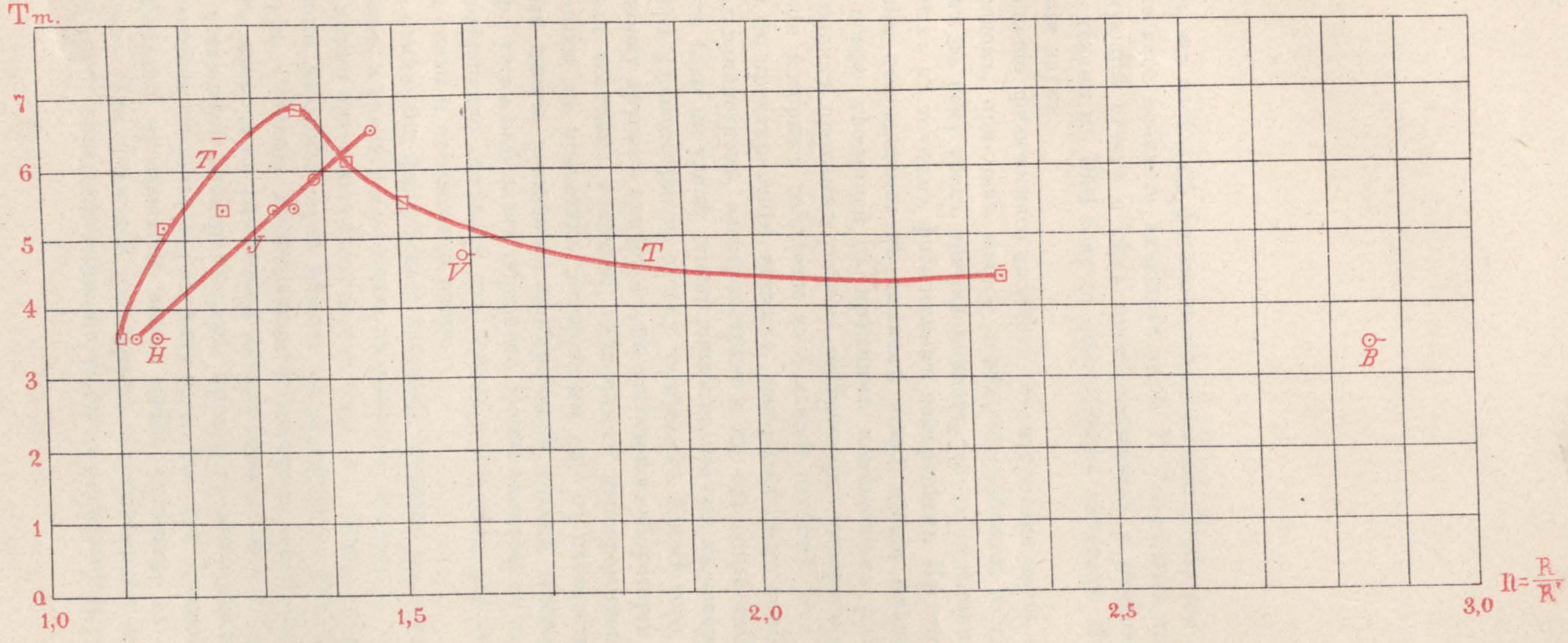
Die Festigkeiten für verschiedene Glassorten unterscheiden sich bei denselben Werthen von n verhältnissmässig wenig von einander; einen grösseren Einfluss auf T_m scheint das Verhältniss der Radien n zu haben.

Im Allgemeinen, je dicker die Glaswände des Rohres, desto schwankender sind die Werthe des maximalen Druckes P_m, welchen das Rohr auszuhalten vermag.

Die für verschiedene Röhren sich ergebenden Maximaldrucke P_m lassen sich aus den Tabellen XXIV und XXV (Jenaer Glas und Thüringer Glas) entnehmen.

In Wirklichkeit, wenn man darauf Gewicht legt, dass bei der Erhöhung des inneren Druckes, das benutzte Rohr heil bleiben soll, darf man den Druck höchstens nur bis zur Hälfte der aus den Tabellen XXIV und XXV sich ergebenden Werthen von P_m treiben.

Fig. I.



ЛИТ. К. БИРКЕНФЕЛЬДА С П Б