DE

GENERALIBVS MOTVS LEGIBVS.

DISSERTATIO INAVGVRALIS

QVAM

AVCTORITATE AMPLISSIMI PHILOSOPHORVM ORDINIS

IN ALMA LITTERARVM VNIVERSITATE

FRIDERICIA GVILELMIA RHENANA

AD SVMMOS IN PHILOSOPHIA HONORES RITE CAPESSENDOS

VNA CVM SENTENTIIS CONTROVERSIS

DIE VIII. AVGVSTI A. MDCCCLIX

PVBLICE DEFENDET

SCRIPTOR

GVIL. HECT. LEXIS

RHENANVS.

OPPONENTIVM PARTES SVSCEPERVNT:

G. KRVMME, PH. D.

A. REIFFERSCHEID, PH. D.

H. KORTVM, STVD. MATH.

BONNAE

FORMIS CAROLI GEORGI.

MDCCCLIX.

VIRO ILLVSTRISSIMO

AVGVSTO BEER

PH. D. MATH. P. P. O.

HASCE STVDIORVM PRIMITIAS

PIO GRATOQVE ANIMO

D. D. D.

SCRIPTOR.

I. Introductio.

1) Mechanice pura quam nunc obtinet stationem liberam, neque scientiae naturali inductivae neque ulli doctrinae philosophicae obnoxiam, post longas demum ambages occupavit. Nam etsi aetatem puerilem iam saeculo XVII. egressa est, tamen etiam post illustre Newtoni et Leibnitii tempus saeculo superiori magnam partem e scholis philosophicis pendebat et, cum ad eam quae de ipsa motus est virium natura afferebantur quaestiones traherentur, notionibus obscuris et metaphysicis velabatur. Nondum enim tum satis intelligebatur, quae esset vera natura mechanices, disciplinae nempe mathematicae, quae certis quibusdam positis definitionibus suis ipsius nititur legibus; nondum geometrae notiones eius proprias et primarias, ex rerum naturalium observatione derivatas, simpliciter ponere audebant, sed principia eius e metaphysica petenda esse credebant; immo nondum illae notiones primariae clare perspiciebantur, quia quo sunt simpliciores, eo difficiliores fuerunt ad eruendum ex implicatis naturae phaenomenis: quare etiam principia secundaria, e. gr. de conservatione quantitatis motus et virium virarum e specialibus quibusdam legibus metaphysicis explicanda esse multi censebant, et principium d'Alemberti pro primario habebatur, etsi in lege secunda Newtoni continetur. Ita quoque fieri potuit, ut mechanicen totam cau-

sarum finalium fundamento superstruendam esse contenderetur: non solum Maupertuis omnino a priori principium suum teleologicum „minimae actionis“ ut unicum et reale, quo leges motus et quietis niterentur, proposuit[1]), sed magnus ipse Euler[2]) adeo causis finalibus confisus est, ut principium Maupertuisii amplificandum susciperet et luculenta sane demonstratione id deduceret, quod nunc quoque illo nomine vocatur theorema: quod neque est principium primarium neque ulla habet iura propria metaphysica, ut Euler credebat, sed axiomatibus constituitur multo simplicioribus.

2) Itaque mirum non est, quod disceptationes philosophicae, quae nunc ad mechanicen puram non pertinere videantur, superiori saeculo contentiones provocaverunt acerrimas, quibus multi geometrae sagaces acumen et ingenium inutiliter impenderunt. Imprimis autem plurimum praebuit difficultatis ea notio, quae pro prima et gravissima in mechanica habebatur: vis. Hoc verbum, vulgo ambiguum et plus unius sententiae capax, accuratis terminis circumscribi debebat, priusquam in mechanicen introduceretur; sed tum nondum perspiciebatur, quatenus illa notio ad hanc scientiam pertineret. Itaque cum in mechanica de vi ideae vulgares, Cartesianae, Leibnitianae miscerentur, graves exoriebantur dissensiones, quibus animi perturbabantur et scientiae officiebatur. Nam definitiones philosophiae dogmaticae tum admodum inter se discrepabant, cum Cartesius nullam inesse corporibus potentiam metaphysicam et omnem motum ex motu alio deducendum esse censeret, Leibnitius

1) Mém. de l'Acad. des sc. de Paris 1744; deinde etiam: Mém. de l'Acad. des sc. de Berlin 1746.

2) Hist. de l'Acad. des sc. de Berl. année 1748, pag. 189: Réflexions sur quelques loix générales de la nature qui s'observent dans les effets des forces quelconques. Ibid. pag. 149.

vero contenderet, vim esse principium quoddam formale (ἐντελέχεια) corpora praeter extensionem, immo prius extensione constituens. Famosissima est rixa illa de aestimatione virium, quae memoratu digna est ut exemplum, quanta confusio etiam disciplinae mathematicae inferri potuerit per notiones vagas et obscuras.

Omnes tum geometras et philosophos haec controversia, acerrima post mortem demum Leibnitii exorta, in duas partes divisit neque toto saeculo elapso prorsus extincta erat.

Cartesius enim vim corporis moti — et omnino vim tantum in motu corporum posuit — aestimaverat secundum massam corporis (m) ductam in velocitatem (v), et causis finalibus nisus, quia nempe summam totalem virium in mundo constantem manere arbitrabatur, summam omnium mv sive quantitatum motus absolutarum (nulla signorum algebraicorum ratione habita) constantem ponebat: unde falsas suas leges de percussione deduxit. At Leibnitius[1]) illam vim non quantitati motus, sed massae in quadratum velocitatis ductae proportionalem esse contendebat; expressionem mv^2 vim vivam appellavit corporis; summam autem omnium virium vivarum in universo semper eandem manere generaliter affirmavit[2]), praesertim cum Hughenius

1) Primum in „Act. erud. Lips. 1686“: Demonstratio erroris memorabilis Cartesii etc. Opp. ed. Dutens, t. III. p. 180. In eodem tomo plurimae insunt de hac re commentationes.

2) Iamiam Leibnitius theoriam modernam de conservatione virium quodammodo anticipavit, sane ut ideam ingeniosam mere philosophicam: ad easdem pervenit conclusiones ex negatione motus perpetui machinis efficiendi; vim ullam ex nihilo creari posse negat; primam ponit legem „qu'il-y-a toujours une parfaite équation entre la cause pleine et l'effet entier“; „vis activa corporum“ (sive ἐντελέχεια ἡ πρώτη etc.) certo modo respondet ei, quam Helmholtz „Spannkraft“ vocat. — Cf. l. c. plures passim commentationes: pagg. 194, 199, 253, 315 etc.

et Jo. Bernoullius conservationem virium pro casibus quibusdam demonstrassent. — A parte Leibnitii stabant Bernoullii, Muschenbroek, Hermann, Bulfinger, alii; Cartesianam vero sequebantur aestimationem Stirling, Maclaurin, Euler, Clarke etc.[1]) Et Leibnitiani et Cartesiani ad rectas problematum mechanicorum solutiones pervenerunt; utraque pars argumenta afferebat luculentissima: nimirum utraque pars quodammodo a veritate stabat. Nostro tempore miramur, quod tot viri docti non viderint, totam disceptationem verti circa merum verbum „vis", quod ab aliis alio sensu adhibebatur. Si enim quantitatem motus massae cuiusdam causa quadam huic effectui proportionali genitam concipimus eamque causam „vim" nominamus, certe, cum diversis effectibus, nempe quantitatibus motus, diversae causae, i. e. vires, respondeant, hoc sensu vires ex quantitatibus motus aestimandae sunt, quas per idem temporis spatium efficiunt, et sic etiam dici potest, quantitatem motus corporis libere moti, nulla acceleratione vel retardatione, repraesentare vim eius, i. e. causam huius motus. Itaque iam Newton vim motricem etsi alia forma tamen re eadem ratione expressit, ut nos nostris signis: $m\frac{dv}{dt}$. — Si vero facultatem corporis moti speciali quodam modo agendi, e. gr. resistentiam continuam et aequabilem, ut gravitatem propriam, superandi, appellamus vim eius, certe haec vis, ut voluit Leibnitius, est proportionalis mv^2. Leibnitius ipse recte observavit distinguendum esse inter vim absolutam corporis, qua effectus substantialis perficeretur, pondus tolleretur, elastra tenderentur etc., et inter vim progrediendi in certam

1) Hic Kant quoque prima meruit stipendia: (Von der wahren Schätzung der leb. Kräfte, Königsb. 1746) qui gravibus quidem erroribus laborans, tamen multis locis (e. gr. §§. 88 et 89) profundiorem rei ostendit perspicientiam.

directionem eamque directionem retinendi; sed cum illam tantum vim absolutam pro entitate substantiali, hanc vero pro modali haberet, asseclae ejus hanc neglexerunt; Cartesiani vero in hac sola omnia posuerunt, quae diversis sententiis verbi „vis" exprimuntur. — D'Alembert quidem mechanicen analyticam totam quaestionem omittere posse ostendit[1]), tamen dissensiones nondum omnino destiterunt, quia etiam postea notiones saepe male distinguebantur. Tandem Laplace[2]) expressionem momenti accelerationis iam dudum usitatam cum rerum natura congruere tam stricte demonstravit, quam omnino per data ex observatione petita fieri potest. Ita vires vivae suum ius retinuerunt, in viribus autem motricibus Cartesiana valet aestimatio.

3) Sed etiam post hanc controversiam compositam notio vis in mechanica disceptandi spatium praebuit: nam nostro quoque tempore de viribus momentaneis sententiae discrepant. Lagrange percussiones ad speciale quoddam refert virium genus, quae e quantitate motus corporum percutientium aestimandae sint; Poinsot quoque quantitate motus corporis moti ut vi eius uti non cunctatur; contra Cauchy id statim permittendum esse negat; acerrimus autem virium momentanearum hostis est Poncelet[3]), qui nullas nisi vires continuas per tempus quamvis breve existere censet. Quibus dissensionibus mechanice ipsa obscuritate quadam offundi videtur, quae eo difficilius removetur, quia certus quidam timor qualitatum occultarum cum ipso verbo „vis" coniunctus est. Mechanice quoad hac notione obscura laborat nunquam animo securitatem et perspicuitatem disci-

1) Traité de dynamique (Paris 1743). Discours prélim. pag. XVIII. sqq. (II. éd. ib. 1758.)

2) Mec. cel. I. ch. I.; Exp. du syst. du monde (Par. 1813) pag. 148 sqq.

3) Cf. e. gr. Comptes rend. 1857. XLIV. p. 82. sqq.

plinae mere mathematicae praebebit. Quin igitur eiciamus illam notionem, quam facile ad ipsam mechanicen puram non pertinere intelligimus? Agitur enim in hac scientia solum de quantitatibus motus neque quidquam curatur de natura causarum, quibus quantitates motus ut effectus procreantur. Qualibet lege corpori cuidam quantitates motus communicari concipere possumus, sive constituimus, ut quantitas finita subito, sive, ut quantitates infinite parvae ei continue per finitum temporis spatium addantur: hoc casu lex variationis data est, si incrementum quantitatis motus per temporis elementum dt, nempe $m\frac{dv}{dt}\,dt$, generaliter noscitur. Manifestum autem est, tum demum mechanicen suum munus adire posse, cum ratio, qua fiunt variationes motus externae, data est. Etiam ex naturae observatione hae rationes tantum, non vires cognoscuntur: ita planetae certa lege, quae expressionibus differentialibus datur, solem versus moventur, et hac forma cogitata haec res clarior videtur, quam si ipsam potentiam, gravitationem, — rem obscuram — expressione momenti accelerationis $m\frac{dv}{dt}$ in calculum introductam concipiamus. — Quod attinet ad quaestionem de viribus momentaneis et continuis, obscuritatem videmus in cognitione tantum esse rerum physicarum, ad quas mechanice pura applicatur, non vero in hac ipsa; omnes quaecunque leges variationum quantitatis motus, sive momentanearum, sive continuarum in hac eadem habent iura.

4) Itaque si praemittimus „quantitatem motus“ ut notionem primariam paucasque alias ponimus definitiones, mechanice pura et ab omni difficultate metaphysica liberatur neque amplius pendet e rerum naturalium cognitione. Sane quae postulantur a priori demonstrari non possint, sed satis superque observationibus confirmata sunt. Tali modo mechanice sui iuris fit et, omnibus eiectis notionibus vagis et obscuris, plane perspicua redditur.

5) Porro ne analysos quidem dominationi mechanice est subiecienda sed pro peculiari habenda disciplina mathematica, quae propria quadam utatur methodo, peculiari problematum mechanicorum naturae quam maxime accommodata. Ingeniose sane Lagrange omnia ad unum problema mere analyticum reduxit: sed res ipsae, quae fiunt, tali methodo minus perspiciuntur, quippe formulis velatae, et difficultates reales, ut quaestiones illae de viribus momentaneis, post velocitates virtuales introductas, multo graviores apparent. Quare recto Poinsot[1]): „Rien ne nous dispense d'étudier les choses en elles-mêmes et de nous bien rendre compte des idées qui font l'objet de nos spéculations.“ Mechanice sui ipsius, non matheseos causa tractanda, et illa methodus synthetico-analytica, qua Poinsot tanto utitur ingenio, propria ei addicenda est. — Ita quoque si ad principia ultima redimus, directa inspectione clare cognoscemus, variationes motus subitas et continuas (sive vires his effectibus substitutas) eiusdem esse generis.

6) Tandem, si ipso initio ideas obscuras introducere nolumus, non proficiscendum est a statica: difficillime enim perspiciamus, quomodo „vires“, quarum effectus in statica non apparet, ad notiones claras et mathematice definiendas redigi possint.

Ratio supra exposita mechanices tractandae quo pateat quaeque efficere possit, directo potissimum experimento comprobatur. Itaque eam in hoc opusculo ad scientiae fundamenta applicare conati sumus. Sane haud magni sunt, quae afferimus, sed, si omnino, magis ob methodum generalem, quam ob res singulas digna videntur, quae respiciantur. Plurima debemus viro clarissimo Poinsot: sed non-

1) Théorie nouv. de la rotation des corps (Paris 1852), p. 64.

nullas res novae lucis aliquid acquisivisse et accuratius indagatas esse credimus.

Ceterum multa strictim tantum attingimus, imprimis definitiones et axiomata, quae ab omnibus conceduntur.

II. Definitiones et axiomata.

7) Punctum materiale concipimus ut globulum infinite parvum, substantia reali expletum, absolute durum et politum.

Datum sit systema fixum coordinatarum orthogonion, cuius axes positivi OX, OY, OZ.

Motus liber puncti materialis p in eo consistit, ut rectam percurrat lineam, et quidem ita, ut coordinatae eius x, y, z aequabiliter et continue cum tempore t mutentur et semper sit: $dx = vdt$; $dy = v'dt$; $dz = v''dt$; ubi v, v', v'' sunt quantitates constantes, sive positivae sive negativae, sive finitae, sive una vel duae sunt $= 0$. Quae quantitates sunt aequales $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ et vocantur velocitates puncti p secundum directiones OX, OY, OZ. — Relatio spatii ds, quod punctum p in via sua recta permetitur, ad temporis elementum dt impensum, $\frac{ds}{dt}$, simpliciter appellatur velocitas huius puncti. Si $\frac{ds}{dt} = V$, manifestum est velocitates v, v' v'' inter se junctas esse conditione: $v^2 + v'^2 + v''^2 = V^2$. — Motum puncto materiali communicare est nihil aliud, quam ponere, coordinatas eius utcunque secundum rationem supra expositam variare.

Nihil in definitione nostra ostat, quominus plures motus

deinceps vel simul puncto p communicatas concipiamus; ita motus ille cum velocitate V ex tribus motibus secundum directiones axium, quorum velocitates sunt v, v', v'', compositum cogitari potest; et generaliter, si ponimus axioma, non eo, quod plures superponantur motus, naturas singulorum — ob causas quasdam metaphysicas — mutari, sed rem plane geometrice fieri, facile sequuntur leges notae de compositione et dissolutione motuum, sive theorema de parallelopipedo motuum. — Illud axioma autem, quod Laplace cum rerum natura congruere ex observationibus demonstravit, nullo modo evitari potest.

Tandem ponimus expresse, id quod in definitione nostra latet, motum liberum non pendere e loco puncti in spatio neque e tempore, imprimis nunquam eum sponte deficere vel desistere.

Moveantur n puncta, omnino eadem natura et qualitate, libere in spatio; valores algebraici velocitatum eorum secundum axes OX, OY, OZ sint v_1, v'_1, v''_1; v_2, v'_2, v''_2; v_3, v'_3, v''_3, etc. Primum his motibus, quorum natura non pendeat e locis punctorum absolutis in spatio, alii aequalium punctorum substitui possunt, qui iisdem velocitatibus et directionibus certo tempore ex eodem loco incipiant. Deinde motus huc collati, ad distincta quidem individua, sed aequali natura pertinentes, componi possunt, quam si uni et eidem individuo communicentur; quare si unum punctum ejusdem naturae moveretur velocitatibus secundum axes: $(v_1 + v_2 + v_3 + ..)$, $(v'_1 + v'_2 + v'_3 + ..)$, $(v''_1 + v''_2 + v''_3 + ..)$, hic motu certo quodam modo aequivaleret motibus omnium illorum n punctorum, ubicunque in spatio sunt; itaque dicimus, hunc motum repraesentare „quantitatem totalem motus“ per illos motus n punctorum in spatio existentem.

Si igitur k puncta aequalia eadem velocitate in eandem directionem moventur, quantitas motus eorum totalis est eadem, quam si unum punctum eiusdem naturae moveretur velocitate k multiplicata in eandem directionem. Ceterum etiam illa k puncta in unicum novum punctum concrescere cogitare possumus: ita duo puncta habemus diversa natura.

9) Ponamus nunc generaliter per definitionem, diversitatem punctorum materialium, quatenus ad mechanicen pertineat, numeris exprimi posse et in ea sola re consistere, ut alius puncti motu eadem repraesentetur quantitas motus, quam certo quodam numero aliorum eadem velocitate in eandem directionem se moventium. Quare omnes diversorum punctorum motus eiusdem fiunt generis, si singulae velocitates certis quibusdam factoribus multiplicantur: qui factores numeri sunt absoluti et vocantur „massae"; ita omnes motus ad communem modulum revocantur, nempe ad motus punctorum eiusdem naturae, quorum massa ponitur $= 1$. — Deinde etiam, ut supra, quantitatem motus totalem, per motus quoslibet n diversorum punctorum a, b, c etc., quorum massae m_a, m_b, m_c etc. in spatio existentem in resultantem colligere possumus: ita si v_a, v_b, v_c etc. sunt volocitates algebraicae singulorum punctorum secundum OX, quantitas motus totalis in hanc directionem est $= (m_a v_a + m_b v_b + m_c v_c + \ldots)$ — Si igitur punctum materiale pro se tantum consideratur, motus eius per simplicem velocitatem repraesentari potest; si idem punctum consideramus relatum ad alia, motum eius intelligere debemus quantitatem motus, i. e. velocitatem ductam in massam; haec notio est primaria mechanices, cum omnia redeant ad variationes quantitatis motus.

10) Quantitas motus illorum n punctorum, libere ubicunque se moventium, secundum directionem OX (quae omnino arbitraria est) semper repraesentari potest motu cujuslibet massae M, cuius velocitas secundum OX est

$$= \frac{m_a\ v_a + m_b\ v_b + m_c\ v_c + \cdot\cdot}{M}.$$

Si quantitates totales motus illorum punctorum secundum tres directiones, non in eodem plano contentas, singu-

latim sunt $= 0$, in qualibet alia directione etiam inveniemus motum totalem $= 0$; item quantitas motus totalis tum in spatio existens est $= 0$. Si motus illorum n punctorum certam repraesentant quantitatem motus resultantem, semper per massam quamlibet in contrariam directionem ubicunque in spatio certa velocitate motam quantitas totalis $= 0$ reddi potest.

Haec omnia facile perspiciuntur, si recordamur, naturam motus eiusdem puncti non pendere e loco absoluto in spatio, sed e directione tantum et velocitate.

11) Punctum materiale p certa moveatur velocitate, punctum q non sit motum; certo temporis puncto inter p et q talis intercedat coniunctio, ut p omnino amplius moveri non possit, quin certam simul quantitatem motus puncto q secundum lineam coniunctionis pq communicet, i. e. quin punctum q secundum pq secum trahat vel prae se trudat: definimus, hoc ipso tempore quantitatem originalem motus puncti p secundum illam directionem tanto deminui, quantum puncto q communicetur; motus igitur mutatus, quo p eodem temporis puncto novam viam ingressurum est, componitur ex mutata componente secundum lineam coniunctionis pq et ex integra componente motus originalis normali in eam lineam. Quae supra definita sunt, sic quoque dici possunt: „Variationes quantitatis motus, quibus puncta p et q illo tempore subito afficiuntur, sunt aequales et contrariae."

Sed ponamus, punctum q quoque esse in motu, cum illa coniunctio introducatur: statuimus, idem principium simul bis adhiberi posse et variationes motus secundum lineam coniunctionis, quas puncta p et q dato temporis puncto subire debeant, priusquam omnino moveri pergere possint, esse aequales et contrarias; summa igitur algebraica quantitatis motus amborum punctorum secundum pq (et ergo etiam quantitas motus eorum totalis) tum non mutatur; si componentes velocitatum eorum algebraicarum secundum pq originaliter sunt c_p et c_q, massae m_p et m_q, variationes quantitatum motus singularum hoc temporis puncto effectae facile inveniuntur $\frac{m_p m_q}{m_p+m_q}(c_p-c_q)$ et $\frac{m_p m_q}{m_p+m_q}(c_p-q_q)$. Brevitatis causa dicere possumus, puncta p et q tum agere in se invicem quantitatibus motus $m_p c_p$ et $m_q c_q$; qua actione componentes motuum eorum normales in pq non mutantur. Coniunctionem illam, qua subito distantia punctorum immutabilis reddita est, per filum vel virgam nulla massa nullaque vi elastica praeditam effectam cogitare possumus.

12) Tandem hinc ad generale procedimus principium: „Si quotquot puncta materialia originaliter certis motibus praedita temporis quodam puncto se invicem trahunt vel trudunt, quia ob coniunctiones introductas aliud punctum motum suum pergere non potest, quin alia quaedam etiam directe moveat, hoc ipso tempore, priusquam omnino puncta moveri pergunt, secundum omnes eas lineas coniunctionis, secundum quas puncta in se agunt, binae variationes quantitatis motus fiunt aequales et contrariae, et praeter has nullae aliae."

Nihil refert, si illae coniunctiones per momentum tantum quamvis breve existunt: primo, quo introducuntur, mathematico, ut ita dicam, temporis puncto, certae iam statim efficiuntur variationes quantitatum motus, sive sunt infinite parvae sive valoribus finitis: tum demum puncta novas vias ingressura sunt; quas num realiter ingrediantur vel persequantur, nihil hic interest.

Principium illud „de aequalitate actionis et reactionis" est lex proprie mechanica, qua tota scientia nititur; demonstrari quidem non potest, sed naturaliter animis se obtulit et congruit cum natura rerum. Lex secunda Newtoni etiam latius patet: supra enim puncta materialia non nisi se invicem trahendo vel trudendo secundum rectas quasdam lineas in se agere positum est.

III. De systematibus liberis.

13) Puncta materialia systema liberum formant, si coordinatae eorum certis inter se coniunctae sunt conditionibus, quae pendent tantum e locis eorum relativis, non vero ex absolutis positionibus in spatio.

Ita systema non esset liberum si quaedam eius puncta relationes haberent quascunque ad puncta absolute fixa in spatio; re vera in natura non existunt systemata proprie non libera.

Primo systema liberum ita constitutum concipiamus, ut quodque punctum materiale cum aliis quibusdam per virgas vel fila, neque massa, neque vi elastica praedita, coniunctum sit; non necesse est puncta his virgis et filis esse affixa sed quaedam etiam, ut annuli, sine frictione secundum ea delabi possint. — Si tales coniunctiones subito in puncta libere mota introducimus, generaliter omnia puncta hoc ipso tempore, priusquam omnino amplius moveri possunt, certas debent subire variationes quantitatum motus; nam quodque punctum et alia quaedam puncta, cum quibus filis vel virgis coniunctum est, dum motum originalem pergere tendit, secundum lineas coniunctionis illo temporis puncto trahit vel trudit, et ab his aliis, tum etiam certo modo moturis, eodem tempore et ipsum trahitur vel truditur secundum easdem lineas. Variationes motus igitur non fiunt nisi secundum distantias eorum punctorum, inter quae coniunctio realis, ut virga, intercedit; has lineas secundum quas realiter agitur, dehinc appellabimus „lineas directae actionis." Variatio igitur motus totalis, qua illo tempore afficitur punctum quodlibet systematis, componitur ex variationibus, quas hoc punctum, et quia alia movet et quia ab aliis movetur, tum secundum lineas directae actionis in ipsum convenientes subit.

Valet hic statim principium generale (§. 12): in quaque igitur linea directae actionis hoc temporis puncto variationes motus binae aequales et contrariae efficiuntur; deinde si puncta motibus mutatis novas vias inchoant, statim denuo variationes subeunt, quia coniunctiones manentes quoque temporis puncto idem efficiunt, quam si tum demum introducerentur: ita puncta materialia continue de novis viis inchoatis deflectuntur et curvas describunt; mathematico quoque temporis puncto variationibus quibusdam motus, quamvis infinite parvis, afficiuntur; sed semper, etiam si novae coniunctiones subito adduntur, variatio totalis quantitatis motus systematis manet $= 0$, quia semper colligitur ex variationibus binis aequalibus et contrariis.

14) Tales coniunctiones virgis et filis effectae certas tantum repraesentant aequationes conditionales inter distantias quasdam punctorum materialium positae. Hinc procedendum est ad systemata libera, quae aequationibus quibuscunque conditionalibus inter distantias punctorum materialium, immo talibus, quae tempus explicite continent, constituuntur. Quas conditiones ita repraesentari posse intelligimus, ut virgae et fila inter puncta intercedentia sint variabilia et continue certa quadam lege se contrahant vel extendant; quae lex e distantiis punctorum, vel quoque e tempore pendere potest. Sed nullo modo ob has mutationes spontaneas minus valet principium generale (§. 12): variationes motus, quae duo puncta mathematico quolibet temporis puncto trahendo se et trudendo secundum virgam intercedentem subeunt, aequales et contrariae sunt, sive virga se est extensura sive contractura. Quare etiam quantitas motus totalis systematis semper manet constans.

15) Tandem aequationes conditionales, quibus systema liberum constituitur, praeter distantias punctorum materialium inter se etiam distantias materialium a punctis nulla massa praeditis continere possunt, quorum coordinatae quoque tempore illorum positionibus determinantur. Talia puncta motum proprium habere non possunt neque ulla impenditur quantitas motus, si loca eorum aliorum motu mutantur. Concipere possumus illa puncta ita, ut a punctis materialibus quibusdam virgae vel fila, sive variabilia sive non, in unum conveniant locum, ubi punctum materiale non est. Quare nodos illa appellabimus. Atqui positio talis cuiusdam nodi o semper ita determinatur, ut quovis tempore punctorum materialium p, q, r, s . . . , a quibus lineae directae actionis (e. gr. fila tensa) po, qo, ro, rs . . . , in o conveniunt, variationes motus secundum has lineas sint singula quaeque aequales et contrariae resultanti ex aliis, ita ut resultans totalis harum variationum $= 0$. Valet enim hic quoque principium illud de actione et reactione; punctum p e. gr. trahendo vel trudendo secundum po aliis motum communicat secundum oq, or, os etc. dissolutum, simul autem secundum eandem lineam po motum accipit ab illis punctis p, q, r, s . . . secundum lineas coniunctionis cum o et ipsis trahentibus vel trudentibus; quodque punctum autem tantum motus perdit, quantum aliis communicat.

Ceterum etiam plures nodi inter se coniuncti esse possunt.

Licet nunc concludere, quia pro omnibus systematibus liberis, quae aequationibus conditionalibus inter distantias punctorum, sive omnia sunt materialia, sive non, constituuntur, actiones secundum lineas directae actionis quovis tempore sunt aequales et contrariae, etiam si novae coniunctiones introducuntur vel originales mutantur, — quantitatem motus totalem systematis liberi semper manere eandem, etiamsi puncta collidant, si novae coniunctiones subito appareant (e. gr. si fila antea nondum tensa tandem tenduntur,) si fila rumpant etc.

Ut cognoscatur, quam late pateant hae considerationes simplicissimae, breviter hinc, priusquam amplius progrediamur, theoremata nota de conservatione centri gravitatis et arearum, motibus non extrinsecus mutatis, demonstrabimus.

16) Puncta materialia a, b, c, d etc., quorum massae m_a, m_b, m_c, m_d etc., certis quantitatibus motus originaliter

acceptis, moveantur ad systema utcunque coniuncta. Velocitates singulorum secundum aves OX, OY, OZ, nempe $\frac{dx_a}{dt}$, $\frac{dy_a}{dt}$, $\frac{dz_a}{dt}$; $\frac{dx_b}{dt}$, $\frac{dy_b}{dt}$, $\frac{dz_b}{dt}$; $\frac{dx_c}{dt}$, $\frac{dy_c}{dt}$, $\frac{dz_c}{dt}$; etc. continue variantur; sed quantitas motus totalis systematis manet constans (§. 15); quam quantitatem totalem repraesentamus massa quadam in unum punctum concentrata, certa velocitate in certam directionem movente. Si hanc massam M aequalem facimus summae omnium massarum singularum, $(m_a + m_b + m_c + \ldots)$, id quod naturalissimum videtur, variationes coordinatarum illius puncti, $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$, per temporis elementum dt, (tempus pro variabili primaria habemus) neglectis quantitatibus superiorum ordinum, debent esse

$$d\xi = \frac{m_a dx_a + m_b dx_b + m_c dx_c + \ldots}{M}$$

$$d\eta = \frac{m_a dy_a + m_b dy_b + m_c dy_c + \ldots}{M}$$

$$d\zeta = \frac{m_a dz_a + m_b dz_b + m_c dz_c + \ldots}{M}$$

Integrando habemus:

$$\xi = \frac{m_a x_a + m_b x_b + m_c x_c + \ldots}{M}$$

$$\eta = \frac{m_a y_a + m_b y_b + m_c y_c + \ldots}{M}$$

$$\zeta = \frac{m_a z_a + m_b z_b + m_c z_c + \ldots}{M}$$

id est: per coordinatas punctorum materialium motorum continue variantes successio punctorum geometricorum determinatur, quorum coordinatae variabilibus ξ, η, ζ, exprimuntur: quae successio talis est, ut singulae coordinatae eius puncti (ξ, η, ζ), quod tempori t, et eius, quod tempori $(t + dt)$ respondet, tantum differant, quantum per idem tempus dt variantur coordinatae massae M, si ita moveatur, ut semper quantitatem motus totalem systematis repraesentet.

Quare si massam M continue in puncta (ξ, η, ζ), ut continue punctorum materialium coordinatis determinantur, intrare cogitamus, hoc motu huius massae semper et directio et valor quantitatis motus totalis systematis repraesentatur: ergo hic motus massae M rectilinearis et aequabilis esse debet et successio punctorum (ξ, η, ζ) rectam format lineam. — Ita, cum mssam M ponamus $= (m_a + m_b + m_c + \ldots)$, habemus legem notam, a Newtono propositam, de conservatione centri gravitatis, quae applicatio specialis tantum est legis de conservatione quantitatis motus [1]).

17) Sequitur etiam statim ex principio generali theorema illud de conservatione arearum, praemisso lemmate de compositione arearum ad idem punctum pertinentium:

Puncto materiali plures simul plures simul communicentur motus, qui singuli et darent velocitates secundum axem OX: $\frac{d'x}{dt}$, $\frac{d''x}{dt}$, $\frac{d'''x}{dt}$, etc., secundum OY: $\frac{d'y}{dt}$, $\frac{d''y}{dt}$, $\frac{d'''y}{dt}$, etc. Quibus motibus simultaneis post tempus dt variationes coordinatarum x et y puncti materialis effectae erunt:

$$(1) \qquad dx = d'x + d''x + d'''x + \ldots .$$

$$(2) \qquad dy = d'y + d''y + d'''y + \ldots .$$

si (1) multiplicatur coordinata y, (2) coordinata x, subtrahendo et multiplicando $\frac{1}{2}$ habemus:

$$\tfrac{1}{2}(xdy - ydx) = \tfrac{1}{2}(xd'y - yd'x) + \tfrac{1}{2}(xd''y - yd''x) + \tfrac{1}{2}(xd'''y - yd'''x) + \ldots .$$

(Semper ratio habenda est signorum algebraicorum.) Sunt autem $\frac{1}{2}(xdy - ydx)$, $\frac{1}{2}(xd'y - yd'x)$, $\frac{1}{2}(xd''y - yd''x)$, etc., areae infinite parvae, resultanti et singulis componentibus motibus puncti illius respondentes et ad arbitrarium punctum et pla-

---

1) Neglegimus constantes integrationibus introductas, quibus significatur, omne punctum, quod, firme cum centro gravitatis systematis coniunctum, motum eius sequatur, item rectam lineam aequabiliter describere.

num, nempe O et XOY, relatae: area resultans est igitur summa algebraica arearum componentium.

Deinde areae motibus realibus punctorum materialium a, b, c, d, etc. systematis cuiusdam liberi per tempus dt respondentes et ad idem punctum et planum relatae si comparantur, ut ad communem revocentur modulum, singulis massis, m_a, m_b m_c, m_d, etc. multiplicandae sunt. Ita tantum abhinc verbum „area" intelligimus. Facile autem nunc perspicitur, ut variationes motus secundum quamque lineam directae actionis, ita etiam areas his variationibus motus respondentes quovis temporis momento binas esse aequales et contrarias: bases enim pro binis ex (§. 12) sunt aequales et contrariae, et altitudo a puncto O ducta est communis. Porro si consideramus, aream resultantem per tempus dt pro quoque puncto systematis ex (3) esse summam algebraicam arearum motui originali et variationibus motus per coniunctiones effectis respondentium, statim cognoscimus, ut quantitatem motus systematis totalem, ita etiam summam totalem omnium illarum arearum, motibus punctorum materialium per tempus dt effectam, semper esse constantem, etiam si puncta collidant, fila quaedam rumpant, alia subito tendantur etc. Neque haec lex valet minus, si quaedam lineae directae actionis, e. gr. fila tensa, non ad punctum materiale, sed ad nodum conducant, id quod simili ratione sequitur ex (§. 15.), secundum quam variationes motus in his lineis semper resultantem habent $= 0$. Vidimus igitur, quomodo theorema de conservatione arearum ad generale redeat principium de actione et reactione.

IV. De effectu aequationum conditionalium.

18) Iamiam initio capitis superioris imaginem quandam omnium systematum liberorum concepimus, cum, a casibus simplicioribus ad implicatiores procedentes, generaliter punctorum materialium coniunctiones per virgas et fila certa lege variabilia effectas cogitari posse viderimus; item effectus talium coniunctionum ad tractus et pressiones secundum lineas directae actionis redire vidimus.

Nunc vero, ad naturam talium systematum ratione accuratiore et generaliori indagandam, directe, quomodo puncta per aequationes conditionales quascunque inter distantias inter se iungantur, inspiciemus. Sint igitur puncta a, b, c, d, ... ad systema liberum coniuncta aequatione conditionali: $F\,(a_b, a_c \ldots b_c, b_d, \ldots) = 0$, ubi a_b (sive b_a), a_c (sive c_a), etc. sunt distantiae a b s o l u t a e punctorum a et b, a et c, etc. Quam aequationem, simpliciter $F = 0$ significatam, pro conditione habemus inter punctorum coordinatas, x_a, y_a, z_a, x_b, y_b, z_b, etc., quia generaliter:

$$p_q = q_p = \sqrt{(x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2 + (z_q - z_p)^2}$$

Talis conditio quem habeat effectum ad variationes quantitatum motus punctorum materialium non nisi directis rerum ipsarum considerationibus perspici potest; est igitur cognoscendum, quid per illam determinatum sit, sed cavendum, ne plus illam valere credamus, quam realiter constitutum est.

Primum observandum est, eam esse mere geometricam, quippe non proprie inter puncta data a, b, c, d, ..., sed generaliter inter loca geometrica relationes ponat servandas. Concipiamus nunc, puncta materialia a, b, c, d, ..., originaliter certis motibus acceptis, sub illa conditione moveri; quodlibet consideramus mathematicum temporis punctum: tum omnia illa puncta certos factura essent motus, si libera essent: sic vero, priusquam omnino amplius moveri inchoare possunt, certas variationes motus, quamvis parvas, hoc ipso temporis puncto subire debent: nam quodvis punctum materiale, cum motu suo coordinatas suas mutaturum est, ob aequationem $F = 0$ etiam aliorum punctorum materialium coordinatas variaturas reddit: i. e. aliis quantitatem motus tum communicat, quam ipsum perdit. — Has variationes motus quoque mathematico temporis puncto efficiendas, brevitatis causa appellabimus „tensiones"; quae non possunt exsistere, nisi puncta materialia ad tales coordinatas motibus suis tendunt, in quas intrare per äequationem conditionalem tum non licet.

At substituamus in hanc aequationem valores coordinatarum omnium punctorum excepto uno quolibet, p, ut dato illo temporis puncto sunt; manifestum est, nihil aliud tum illa conditione constitui, quam id, punctum p hoc tempore ubicunque esse debere in superficie, quae datur aequatione $F = 0$, si solae coordinatae x_p, y_p, z_p pro variabilibus, reliquae autem, ut tum sunt, pro constantibus habentur; quam superficiem significamus $F_p = 0$ et nominamus „superficiem conditionalem puncti p pro illo tempore." Omnia huius superficiei puncta geometrica eadem habent iura: quare si punctum p illo tempore propensionem haberet in aliud quoddam eiusdem superficiei punctum intrandi, haec propensio conditionem datam omnino non sentiret neque tensiones efficeret neque subiret: at talem punctum materiale p habet propensionem, si moturum est quocunque versum in plano tangentiali superficiei $F_n = 0$ in loco suo praesenti applicato: ita enim, cum de propensione tantum pro mathematico temporis puncto, non de motu realiter inchoato agatur, res eadem est, quam si p ad punctum geometricum sibi proximum superficiei conditionalis tenderet. — Unde concludimus, quemcunque motum punctum p illo tempore esset facturum, componentem huius motus tangentialem ad superficiem conditionalem tum conditionem datam non sentire neque ullam variationem subire, sed eandem manere, quam si p tum liberum redderetur. Quare non solum quantitas motus, quam punctum p tum perdit, quia alia trahere etc. debet, sed etiam ea, quam simul eodem tempore accipit, quia et ipsum aliorum motu trahitur vel truditur, nonnisi normalis esse potest in superficiem conditionalem in

puncto (x_p, y_p, z_p); nulla enim actio quocunque versus in plano tangentiali esse potest.

Hae considerationes valent pro quolibet puncto materiali systematis: itaque propositionem habemus gravissimam:

„In systemate libero aequatione conditionali $F=0$ constituto, quoque temporis puncto directiones variationum totalium quantitatum motus singulorum punctorum materialium, quicunque sunt motus eorum originales, normales sunt in locis punctorum praesentibus ad superficies singulas conditionales illi temporis puncto respondentes."

Motus deinde, quos puncta, variationibus necessariis factis eodem tempore realiter inchoant, componuntur ex integris componentibus illis tangentialibus et mutatis componentibus normalibus; nihil refert, quod puncta materialia statim et continue de novis viis inchoatis deflectuntur: quae supra proposita sunt valent stricte pro quovis mathematico temporis puncto de continuis tensionibus, quae coniunctionibus efficiuntur; ad superficies conditionales puncta materialia ipsa, sive ad motum tum tendunt, sive non, nihil pertinent, sed valores coordinatarum tantum eorum, ut tum cum maxime sunt. — Manifestum est, illam propositionem etiam semper valere, si tempus explicite in aequationem datam intrat.

19) Videmus ex (§. 13) variationem motus totalem cuiusque puncti compositam esse ex variationibss secundum lineas directae actionis in ipsum convenientes. Ad hanc rem generalius tractandam, quaeramus, quae sit directio eius variationis motus particularis, quam punctum p certo tempere ob eam causam subit, quod certae quaedam distantiae eius ab aliis punctis in data aequatione conditionali continentur.

Hae distantitae sint p_q, p_r, p_s. Substituamus in functionem datam F, quae proxime pendet e distantiis, eos valores omnium distantiarum, exceptis illis tribus, qui dato temporis puncto, per motus punctorum materialium conditionem servantes, realiter sunt: tum per aequationem conditionalem id tantum constituitur, distantias p_q, p_r, p_s, tales esse debere, quae satisfaciant aequationi $F(p_q, p_r, p_s$, const.) $=0$, i. e. aequationi $F=0$, si p_q, p_r, p_s, tantum variabiles, reliquae distantiae illos valores constantes habent. Deinde si altera puncta finalia linearum p_q, p_r, p_s, quae determinantur coordinatis punctorum materialium q, r, s, ut tum cum maxime sunt, pro constantibus habemus, omnia puncta geometrica certae cuiusdam superficiei talia sunt, quorum distantiae a punctis q, r, s illam servent conditionem. Quae superficies datur aequatione $F=0$, si coordinatae x_p, y_p, z_p eatenus tantum variabiles cogitantur, quatenus continentur in illis distantiis p_q, p_r, p_s; significabimus eam $F_{p\,(qrs)}=0$; sane hoc tempore puncto p per reliqua puncta systematis in uno et certo tantum loco illius superficiei esse licet; sed si tantum relationem eius, ut tum est, ad puncta q, r, s consideramus, eodem tempore ubicunque alias in hac superficie esse possit. Hinc concludimus ut supra: si punctum p dato tempore se moturum est quocunque versum in plano tangentiali superficiei $F_{p\,(qrs)}=0$, haec propensio ceterorum quidem punctorum actione tum afficitur, non vero sentiet coniunctiones inter p et q, r, s existentes; est enim haec propensio eadem, quam si p ad punctum proximum superficiei tenderet. Deinde statim intelligimus: „Quemcunque motum punctum quodvis systematis, p, certo temporis puncto facere tendit, directio eius variationis motus, quam tum subit ob distantias certas, p_q, p_r, p_s in aequatione conditionali $F=0$ contentas, non potest esse nisi normalis in puncto (x_p, y_p, z_p) ad superficiem $F_{p\,(qrs)}=0$." — Facile videtur, quomodo haec ad quotquot distantias tali modo specialiter considerandas amplificentur. Ita directio eius variationis particularis, quam tum subit punctum p, quia functio F continet distantiam quandam p_n, est normalis ad superficiem $F_{p\,(n)}=0$, quae expressio reducitur ad: $(x_p-x_n)^2+(y_p-y_n)^2+(z_p-z_n)^2=$ const., qua aequatione datur globus, cuius centrum est in loco momentaneo puncti n; ergo directio illius variationis est secundum lineam praesentem coniunctionis punctorum n et p. Quare confirmatur id, quod iam antea constituimus, coniunctionem systematis, quaecunque aequatione conditionali $F=0$ determinatur, semper repraesentari posse ope virgarum et filorum, sive variabilium, sive non, secundum quae puncta materialia se trahant vel trudant. — Etiam sequitur, omnes distantias, quae in functionem F intrant, et nullas alias, pro lineis directae actionis esse habendas. —

20) Sed distantiae punctorum systematis, quippe quae sunt lineae in spatio, ipsa rei natura certis inter se relationibus coniunctae sunt [1]): ita, si s est numerus punctorum, $(3s-6)$ tantum omnium $\frac{s(s-1)}{1.2}$ distantiarum, quae inter s puncta intercedunt, independentes sunt: nam si triangulum trium quorumlibet punctorum distantiis formatum pro basi habemus communi pyramidum triangularium, quarum cacumina sunt reliqua $(s-3)$ puncta, horum punctorum $\frac{(s-3)(s-4)}{1.2}$ inter se distantiae exprimi possunt ope $(3s-6)$ aliarum, quae illas formant pyramides. Itaque ex data functione F aliae distantiae eliminari possunt aliis in eam introducendis: sed superficies conditionales, quae respondent singulis punctis, quaecunque forma functionis F recipitur, eodem tempore semper eaedem sunt, quia conditio inter punctorum coordinatas in spatio talibus functionis transformationibus non mutatur. Sed in aliis aequationis formis aliae distantiae pro lineis directae actionis habentur: quare eadem conditio systematis variis modis ope virgarum etc. repraesentari potest; et etiam, si coniunctio realiter certo modo instituta est, cuique actioni directae, e. gr. tractui secundum

1) Poinsot, El. de Statique, in Appendice, p. 431.

filum inter duo puncta intercedens, aliae quaedam secundum alias lineas actiones, in quas illa quodammodo dissolvitur, substitutae cogitari possunt.

21) In (§§. 18 et 19) neque theoremata neque nova principia proposita sunt, sed analysis tantum facta est naturae coniunctionis, quae aequatione qualibet conditionali inter distantias, $F=0$, inter puncta materialia statuitur. Eandem rem nunc accuratius geometriae ope persequemur..

Expressio F est proxime functio certarum distantiarum et hac tantum re functio coordinatarum x_a, y_a, z_a; x_b, y_b, z_b; x_c, y_c, z_c etc. punctorum a, b, c etc., quorum massae: m_a, m_b, m_c, etc. Systema axium coordinatarum est rectangulum, sed ceterum arbitrarium. Anguli, quos facit lineae a_b (quae est absoluta $= b_a$) directio ex a versus b cum directionibus positivorum axium OX, OY, OZ, sint $\varphi_{ab}, \psi_{ab}, \vartheta_{ab}$; item generaliter hi anguli pro distantia p_q directione sumta ex p versus q sint $\varphi_{pq}, \psi_{pq}, \vartheta_{pq}$: qui singuli sunt aequales $\pi-\varphi_{qp}, \pi-\psi_{qp}, \pi-\vartheta_{qp}$. Puncta materialia systematis certo tempore motus certos sint factura, sive tum demum utcunque causa extera eos acceperunt, sive iam antea sub actione coniunctionum aequatione datarum se moverunt, sive hae coniunctiones tum demum inter puncta libere mota introductae sunt: tum punctum quodlibet materiale, n, motum, ad quem tendit, integrum realiter inchoare non potest, sed variatione afficitur hoc tempore quantitatis motus suae, cujus directio est normalis in puncto (x_n, y_n, z_n) in superficiem conditionalem $F_n=0$ illi temporis puncto respondentem. Valorem a b s o l u t u m et positivum variationis totalis, quam n tum subit, significabimus V_n: est igitur V_n, massa m_n ducta in velocitatem quandam absolutam. Deinde est proiectio variationis illius totalis

$$\text{in axem } OX = \frac{V_n}{R_n}\frac{dF}{dx_n}$$

$$\text{in axem } OY = \frac{V_n}{R_n}\frac{dF}{dy_n}$$

$$\text{in axem } OZ = \frac{V_n}{R_n}\frac{dF}{dz_n}$$

ubi $R_n = \sqrt{\left(\frac{dF}{dx_n}\right)^2+\left(\frac{dF}{dy_n}\right)^2+\left(\frac{dF}{dz_n}\right)^2}$, et quidem haec radix tali signo afficienda est, ut valores a dextera parte etiam algebraice componentes variationis totalis quantitatis motus puncti n secundum directiones OX, OY, OZ, repraesentent. Memorare non opus est, pro omnibus punctorum coordinatis in illis expressionibus eos substituendos esse valores, qui huic temporis puncto respondeant.

22) Nunc abhibeamus (§.19) ad cognoscendam rationem, qua variatio totalis componatur variationibus secundum lineas directae actionis in punctum n convenientes. Comprehendamus has lineas tribus quibuslibet partibus: pars prima contineat $n_p, n_q, \ldots$, secunda $n_s, n_u, \ldots$, tertia $n_b, n_c, \ldots$; in quaquaque parte variationes secundum lineas in ea contentas colligantur in resultantem: valores absoluti harum resultantium particularium, sint $V_{n\,(pq..)}$, $V_{n\,(su..)}$, $V_{n\,(bc..)}$; proiectio resultantis particularis primae in axem OX est (§. 19).

$$\frac{V_{n\,(pq..)}}{R_{n\,(pq..)}}\frac{dF_{n\,(pq..)}}{dx_n} = \frac{V_{n\,(pq..)}}{R_{n\,(pq..)}}\left(\frac{dF}{dn_p}\frac{dn_p}{dx_n}+\frac{dF}{dn_q}\frac{dn_q}{dy_n}+\cdots\right)$$

$$\text{si } R_{n\,(pq.)} = \sqrt{\left\{\left(\frac{dF_{n\,(pq..)}}{dx_n}\right)^2+\left(\frac{dF_{n\,(pq..)}}{dy_n}\right)^2+\left(\frac{dF_{n\,(pq..)}}{dz_n}\right)^2\right\}},$$

cum tali signo, ut etiam valor algebraicus huius proiectionis recte exprimatur. Analogae sunt proiectiones in OY et OZ, et simili modo inveniuntur proiectiones duarum aliarum resultantium particularium. At cum summa algebraica componentium harum trium resultantium secundum quemque axem debeat esse proiectio variationis totalis in eundem axem, habemus statim, si respicimus, ex quibus partibus consistunt quantitates $\frac{dF}{dx_n}, \frac{dF}{dy_n}, \frac{dF}{dz_n}$:

$$\frac{V_n}{R_n}\frac{dF}{dx_n} = \frac{V_n}{R_n}\left(\frac{dF_{n\,(pq..)}}{dx_n} + \frac{dF_{n\,(su..)}}{dx_n} + \frac{dF_{n\,(bc..)}}{dx_n}\right)$$

$$= \frac{V_{n\,(pq..)}}{R_{n\,(pq..)}}\frac{dF_{n\,(pq..)}}{dx_n} + \frac{V_{n\,(su..)}}{R_{n\,(su..)}}\frac{dF_{n\,(su..)}}{dx_n} + \frac{V_{n\,(bc..)}}{R_{n\,(bc..)}}\frac{dF_{n\,(bc..)}}{dx_n}$$

et duae aequationes similes coordinatis y et z respondentes; ex quo trium aequationum systemate sequitur:

$$\frac{V_{n\,(pq..)}}{R_{n\,(pq..)}} = \frac{V_{n\,(su..)}}{R_{n\,(su..)}} = \frac{V_{n\,(bc..)}}{R_{n\,(bc..)}} = \frac{V_n}{R_n}.$$

Ergo, cum divisio illa tripartita omnino fuerit arbitraria, resultans particularis ex variationibus secundum quemlibet numerum linearum directae actionis puncti n talis est, ut expressio respondens $\frac{V}{R}$ sit aequalis $\frac{V_n}{R}$; et, quia valores V sunt omnes absoluti, omnes valores R eodem signo esse debent, quo R_n.

23) Si igitur unam tantum ex lineis dir. act. in n convenientibus, e. gr. n_r consideramus, habemus statim (§§. 19 et 22) proiectiones variationis motus, quam punctum n hoc temporis momento subit secundum n_r:

$$\text{in } OX:\ \frac{V_{n(r)}}{R_{n(r)}}\frac{dF_{n(r)}}{dx_n} = \frac{V_n}{R_n}\frac{dF}{dn_r}\frac{dn_r}{dx_n}$$

$$\text{in } OY:\ \frac{V_{n(r)}}{R_{n(r)}}\frac{dF_{n(r)}}{dy_n} = \frac{V_n}{R_n}\frac{dF}{dn_r}\frac{dn_r}{dy_n}$$

$$\text{in } OZ:\ \frac{V_{n(r)}}{R_{n(r)}}\frac{dF_{n(r)}}{dz_n} = \frac{V_n}{R_n}\frac{dF}{dn_r}\frac{dn_r}{dz_n}$$

ubi signum quantitatis R_n determinatum est ex (§. 21) secundum directionem variationis totalis. — Deinde cum sit distantia absoluta $n_r = \sqrt{(x_r - x_n)^2 + (y_r - y_n)^2 + (z_r - z_n)^2}$ et hac de causa $\frac{dn_r}{dx_n} = -\cos\varphi_{nr}$; $\frac{dn_r}{dy_n} = -\cos\psi_{nr}$; $\frac{dn_r}{dz_n} = -\cos\vartheta_{nr}$; (§. 21) facile ex forma illarum proiectionum perspicitur: valor absolutus variationis motus puncti

n secundum n_r est valor absolutus quantitatis $\frac{V_n}{R_n}\frac{dF}{dn_r}$; quantitate R_n positiva sumta, si derivatio $\frac{dF}{dn_r}$ tum valorem habet negativum, directio huius variationis est a puncto n versus r; si $\frac{dF}{dn_r}$ est positiva, illa directio est a puncto n in contrariam partem; deinde quae sint directiones, si R_n est negativum, manifestum est. Itaque variatio motus secundum quamque lineam directae actionis eiusdem puncti n exprimitur derivatione functionis datae secundum hanc distantiam multiplicata factore eodem $\frac{V_n}{R_n}$: directiones ambiguae singularum variationum certe determinari possunt ex signis singularum derivationum, si data est directio variationis totalis.

Ceterum valorem absolutum variationis secundum n_r, i. e. $V_{n(r)}$, statim ex (§. 22) cognoscere potuissemus: est enim $\frac{V_{n(r)}}{R_{n(r)}} = \frac{V_n}{R_n}$, ergo $V_{n(r)} = \frac{V_n\, R_{n\,(r)}}{R_n}$, (ubi $R_{n(r)}$ et R_n eodem sunt signo); est autem

$$R^2_{n(r)} = \left(\frac{dF}{dn_r}\frac{dn_r}{dx_n}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dn_r}\frac{dn_r}{dy_n}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dn_r}\frac{dn_r}{dz_n}\right)^2$$

$$= \left(\frac{dF}{dn_r}\right)^2 \left\{\left(\frac{dn_r}{dx_n}\right)^2 + \left(\frac{dn_r}{dy_n}\right)^2 + \left(\frac{dn_r}{dz_n}\right)^2\right\} = \left(\frac{dF}{dn_r}\right)^2;$$

itaque $V_{n\,(r)}$ est valor absolutus quantitatis $\frac{V_n}{R_n}\frac{dF}{dn_r}$. Observandum est, hunc valorem non pendere ex absoluta positione systematis in spatio neque e systemate, quod adhibetur, coordinatarum: id quod manifestum est de V_n et $\frac{dF}{dn_r}$, sed etiam valet de R_n; nam cum sit:

$$\frac{dF}{dx_n}=\frac{dF}{dn_p}\,\frac{dn_p}{dx_p}+\frac{dF}{dn_q}\,\frac{dn_q}{dx_n}+\frac{dF}{dn_r}\,\frac{dn_r}{dx_n}+\dots$$

(ubi n_p, n_q, n_r, etc. sunt lineae directae actionis puncti n) et similia valeant de $\frac{dF}{dy_n}$ et $\frac{dF}{dz_n}$, facile deducitur:

$$R_n^2=\left(\frac{dF}{dn_p}\right)^2+\left(\frac{dF}{dn_q}\right)^2+\left(\frac{dF}{dn_r}\right)^2+\dots+2\,\frac{dF}{dn_p}\,\frac{dF}{dn_q}\cos(p_n,q_n)$$
$$+\,2\,\frac{dF}{dn_p}\,\frac{dn_r}{dn_q}\cos(p_n,q_n)+2\,\frac{dF}{dn_p}\,\frac{dF}{dn_r}\cos(r_n,p_n)+\dots$$

ubi $(p_n.q_n)$, (p_n,r_n), etc. sunt anguli, quos faciunt binae distantiae n_p, n_q, n_r etc., directionibus ex ipsis notationibus facile intelligendis. Quare valor R_n et ita etiam expressio illa variationis secundum n_r pendet tantum, ut esse debet, e relativis punctorum locis, ut dato temporis puncto sunt.

Ita rationem, qua quovis momento variatio totalis motus puncti n componitur ex variationibus secundum lineas directae actionis, cognovimus nulla habita ratione punctorum aliorum, ad quae illae lineae conducant. Quare quae supra posita sunt valent etiam, si quae lineae directae actionis, e. gr. n_o, iungit punctum materiale n cum puncto o, cuius massa est $=0$, i. e. cum nodo (§. 15): variatio motus puncti n secundum n_o semper erit $=\frac{V_n}{R_n}\,\frac{dF}{dn_o}$, directione e signis algebraicis factorum definienda.

24) Causa, qua fit, ut componentes variationis totalis secundum lineas directae actiones sint proportionales derivationibus functionis datae secundum illas ipsas lineas, est ratio peculiaris qua derivationes totales $\frac{dF}{dx_n}$, $\frac{dF}{dy_n}$, $\frac{dF}{dz_n}$, compositae sunt (vide supra); ita proiectiones variationis totalis secundum tres axes statim in partes summandas dissolvi possunt: unde habemus:

$$\frac{V_n}{R_n}\frac{dF}{dx_n}=\frac{V_n}{R_n}\left(\frac{dF}{dn_p}\cos\varphi_{pn}+\frac{dF}{dn_q}\cos\varphi_{qn}+\frac{dF}{dn_r}\cos\varphi_{rn}+\dots\right)$$

$$\frac{V_n}{R_n}\frac{dF}{dy_n}=\frac{V_n}{R_n}\left(\frac{dF}{dn_p}\cos\psi_{pn}+\frac{dF}{dn_q}\cos\psi_{qn}+\frac{dF}{dn_r}\cos\psi_{rn}+\dots\right)$$
$$\frac{V_n}{R_n}\frac{dF}{dz_n}=\frac{V_n}{R_n}\left(\frac{dF}{dn_p}\cos\vartheta_{pn}+\frac{dF}{dn_q}\cos\vartheta_{qn}+\frac{dF}{dn_r}\cos\vartheta_{rn}+\dots\right)$$

Hinc statim apparet, $\frac{V_n}{R_n}\,\frac{dF}{dn_p}$, $\frac{V_n}{R_n}\,\frac{dF}{dn_q}$, $\frac{V_n}{R_n}\,\frac{dF}{dn_r}$, etc. esse componentes, in quas variatio totalis dissolvi possit: et si tres tantum sunt lineae dir. act. puncti n, haec dissolutio possibilis debet esse ea, quae realiter fit; si vero plures sunt lineae dir. act., paragrapho (19) opus est ad demonstrandum, etiam hac conditione variationem totalem realiter illa ratione esse compositam.

Hanc methodum legis illius demonstrandae hic attingere voluimus, ut rei simplicitas clarius perspiciatur.

25) Ponamus abhinc, in functionem datam F distantias tantum intrare inter puncta massarum finitaram; casus speciales punctorum nulla aut infinita massa praeditorum postea tractabimus.

Iam cum iis, quae supra cognovimus, principium coniungamus unicum proprie mechanicum. Valor algebraicus proiectionis eius variationis, quam certo temporis momento subit punctum n secundum lineam quandam directae actionis n_r, in OX est $\frac{V_n}{R_n}\,\frac{dF}{dn_r}\,\frac{dn_r}{dx_n}$. Sed eodem tempore etiam punctum materiale r variatione afficitur motus sui, illi aequali et contraria (§. 12); quam variationem si proiicimus in eundem axem OX, habemus valorem proiectionis algebraicum $\frac{V_r}{R_r}\,\frac{dF}{dr_n}\,\frac{dr_n}{dx_r}$; ergo debet esse

$$\frac{V_n}{R_n}\,\frac{dF}{dn_r}\,\frac{dn_r}{dx_n}=-\frac{V_r}{R_r}\,\frac{dF}{dr_n}\,\frac{dr_n}{dx_r}.$$

est autem $\frac{dn_r}{dx_n}=-\frac{dr_n}{dx_r}$ et $\frac{dF}{dn_r}=\frac{dF}{dr_n}$; quare sequitur:

$\frac{V_n}{R_n} = \frac{V_r}{R_r}$. At a puncto r eodem modo ad alia puncta procedere possumus et ita facile pro omnibus systematis punctis materialibus, a, b, c, p, q, etc. invenimus

$$\frac{V_a}{R_a} = \frac{V_b}{R_b} = \frac{V_c}{R_c} = \text{etc.}$$

Valores V cum sint omnes absoluti, sequitur, omnes valores R eodem signo algebraico esse debere: ergo si certo temporis momento unius tantum puncti systematis variationis directio sine ambiguitate data est, omnium etiam aliorum punctorum variationum directiones simul sine ambiguitate definitae sunt.

Haec omnia valent stricte, quocunque mathematico temporis puncto motus systematis consideramus; nam continue quodque punctum certas motus variationes effectu coniunctionum subit; cuique temporis puncto mathematico respondet valor quidam $\frac{V}{R}$, omnibus punctis materialibus communis, qui est, ut ita dicam, character datae conditionis pro datis motibus punctorum originalibus; non pendet hic valor e coordinatarum systemate neque e positione absoluta punctorum in spatio; signum eius algebraicum ex unius cuiuslibet puncti variationis directione cognoscitur, quae directio e motibus punctorum pendet originalibus.

26) Nihil refert, quae distantiae aliis eliminandis (§. 20) in functionem F ut lineae directae actionis introductae cogitentur: quomodocunque eadem conditio inter punctorum coordinatas expressa cogitatur aequatione inter distantias, semper singulorum punctorum et variationes motus totales et superficies conditionales eodem tempore eaedem sunt: quare etiam valores $\frac{V}{R}$ alia dispositione linearum directae actionis, eadem conditione systematis, non mutantur.

Ceterum si eam functionis F formam, quae directe

coniunctiones systematis reales virgarum variabilium etc. ope effectas repraesentat, eliminationibus secundum (§. 20) in aliam quandam mutamus, tamen componentes singularum variationum totalium secundum distantias in nova functionis forma contentas, binae in singulis lineis debent esse aequales et contrariae: originali enim functionis forma adhibita, sequitur omnes valores $\frac{V}{R}$ eodem temporis momento esse aequales: qui valores manent iidem, si eodem tempore singulorum punctorum variationes motus secundum distantias in functione transformata contentas dissolutae cogitantur: quare cum eos aequales esse sciamus, statim componentes variationum totalium secundum has quoque distantias binas aequales et contrarias esse cognoscimus.

Sed haec etiam a priori ex generali principio de aequalibus actionibus et reactionibus concludi possint: nam in quacunque forma datur functio F, invenimus ex (§. 19), ea re, quod duorum quorundam punctorum distantia in illam functionem intret, actionem eorum inter se secundum lineam coniunctionis indicari; quae cum aut trudento aut trahendo effecta concipienda sit, ex principio generali aequali actione et reactione fieri debet.

27) Iamiam consideremus systemata libera, quae pluribus conditionibus simul servandis constituuntur: quae conditiones datae sint aequationibus inter punctorum materialium distantias $F'=0$; $F''=0$; $F'''=0$; etc. — Sequitur ex (§. 18): Quemcunque motum punctum quodlibet systematis, n, certo temporis momento est facturum, fieri non potest, ut ulla aequatione conditionali, e. gr. $F'=0$, variatio efficiatur motus illius puncti in directionem tangentis cuiuscunque superficiei conditionali illi aequationi tum respondenti, $F'_n=0$, in puncto (x_n, y_n, z_n) applicatae.

Ergo omnes conditiones datae non possunt nisi variationes motus efficere puncti n normales ad suam quaeque superficiem conditionalem: ex quibus componentibus normalibus in (x_n, y_n, z_n) ad superficies $F'_n = 0$; $F''_n = 0$; $F'''_n = 0$; etc. variatio motus consistit totalis, quam dato temporis momento punctum n est subiturum.

Nihil praeterea de variationibus particularibus singulis conditionibus respondentibus scire opus est: sufficit, quod ea variatio motus puncti n, quae tum efficitur e. gr. aequatione $F' = 0$, est normalis in superficiem $F'_n = 0$: inde enim deducimus ut in §§. (23 et 24), eam componentem huius variationis particularis secundum distantiam quamlibet n_p, quae eo nascitur, quod functio F' hanc continet distantiam, esse aequalem $\frac{V'_n}{K'_n} \frac{dF'_n}{dn_p}$, directione ex signis algebraicis accuratius definienda. (V'_n est valor absolutus variationis motus puncti n soli aequationi $F' = 0$ tum respondentis; notatio K'_n clara est).

Eodem modo pro omnibus punctis et pro omnibus aequationibus conditionalibus exprimamus variationes motus respondentes secundum singulas lineas dir. act., ita ut omnes habeamus actiones secundum omnes distantias in datis functionibus contentas. Primum manifestum est, si distantia quaedam, e. gr. n_p, in *unam* tantum datarum conditionum, e. gr. in $F' = 0$ tantum intrat, duas, quae secundum hanc distantiam inveniantur, actiones ex principio generali aequales et contrarias esse debere: unde sequitur, ut in (§. 25): $\frac{V'_n}{K'_n} = \frac{V'_p}{K'_p}$ (literis adhibitis analogis, ut supra).

Deinde consideremus talem distantiam, in qua, quia in plures intrat aequationum datarum, plures etiam actiones cumulatae inveniantur, e. gr. distantiam qr in functionibus F', F'', F''', etc. contentam: hoc casu ex principio generali directe id tantum sequitur, variationes totales motus punctorum q et r, cumulatis illis actionibus effectas, esse aequales et contrarias. Sed ponamus dato temporis puncto distantiam qr ex omnibus aliis functionibus F'', F''', etc. secundum (§. 20.) subito eliminatam, ita ut in unica functione F' tantum maneat: eandem hoc tempore subiret quodque punctum variationem motus totalem et eadem etiam afficeretur variatione particulari ob solam conditionem $F' = 0$, quam originalibus functionum formis et originali linearum directae actionis dispositione; ita revenimus ad casum primum, quo nempe puncta q et r ob unicam tantum aequationem $F' = 0$ directe in se agunt: sunt igitur nunc duae variationes in linea qr illi soli aequationi respondentes aequales et contrariae; unde deducitur $\frac{V'_q}{K'_q} = \frac{V'_r}{K'_r}$: at hi valores non mutati sunt, quod cogitatione eliminationes illas factas posuimus; ergo etiam originali linearum directae actionis distributione aequales sunt. Eadem consideratio ad omnes alias distantias in plures datarum functionum intrantes adhiberi potest; unde tandem generaliter deducimus, quotquot conditionum effectus in singulis lineis cumulantur, dato temporis puncto esse simul pro conditione $F' = 0$: $\frac{V'_a}{K'_a} = \frac{V'_b}{K'_b} = \frac{V'_c}{K'_c} =$ etc.; pro conditione $F'' = 0$ item: $\frac{V''_a}{K''_a} = \frac{V''_b}{K''_b} = \frac{V''_c}{K''_c} =$ etc.; (signa sine explicatione intelliguntur); item pro conditione $F''' = 0$ valores $\frac{V'''}{K'''}$ pro omnibus punctis, quorum coordinatae in functione F''' insunt, esse aequales, et simile pro omnibus aliis conditionibus valere.

V. De motu absoluto singulorum punctorum, sive de vi viva systematis.

28) Quantitas motus totalis systematis liberi semper,

quaecunque introducuntur coniunctiones, manet constans, quia variationes in quaque linea directae actionis semper sunt aequales et contrariae: sed hac re nihil omnino determinatum est de singulorum punctorum quantitatibus motus **absolutis**, iis nempe, in quibus nulla habetur ratio signorum algebraicorum relativorum. Itaque e. gr. si quantitas motus totalis est $= 0$, alio tempore omnia puncta certos possunt habere motus, alio vero omnia ad quietem redacta esse possunt, quantitate motus algebraica totali semper conservata.

Ut penitiorem quandam absoluti punctorum motus cognitionem adipiscamur, facile adducimur ad consideranda **quadrata** velocitatum, quippe functiones simplicissimas non pendentes e signis algebraicis.

Sint igitur s puncta materialia certo tempore ad systema liberum coniuncta aequationibus conditionalibus inter distantias: $F' = 0$; $F'' = 0$; $F''' = 0$; etc. Consideramus punctum quodvis n (cuius massa $= m_n$): licet generaliter viam elementarem, quam hoc punctum per temporis elementum dt sub actione coniunctionum describit, $n\nu$, pro recta habere linea; idem punctum cum eodem temporis spatio motu libero viam permensum esset nN, actione coniunctionum continua per elementum dt deflexum est lineola $N\nu$: cuius actionis directio per hoc tempus pro constanti haberi licet, quia haec directio pendet tantum e coordinatis punctorum, quae, finitis velocitatibus praedita, per infinite parvum tempus infinite paullum tantum locos suos mutent. Pro velocitate puncti n per hoc tempus dt habemus valorem quendam medium, nempe $\frac{n\nu}{dt}$: quae efficitur, si cum quantitate motus originali, $m_n \frac{nN}{dt}$ componitur ipso initio momenti dt quantitas motus $m_n \frac{N\nu}{dt}$ in directionem actionis coniunctionum; huic igitur actioni continuae, sed eandem di-

rectionem servanti per tempus dt, substituimus illam quantitatem motus semel et subito illius temporis initio communicatam, qua impulsum punctum n eodem tempore eodem deflectitur spatio $N\nu$ de via originali [1]. Insequentis momenti dt initio licet poni punctum n illa velocitate $\frac{n\nu}{dt}$ cursum suum esse perrecturum, nisi, actione continua tum quoque simili modo collecta, nova denuo variatione illo ipso temporis puncto afficeretur, etc. Nunc sequitur statum ex consideratione trianguli $n\nu N$:

$$\overline{nN}^2 = \overline{n\nu}^2 + \overline{\nu N}^2 - 2\,\overline{n\nu}.\overline{\nu N} \cos (n\nu, \nu N)$$

ubi $(n\nu, \nu N)$ est angulus, quem facit directio velocitatis realis cum directione actionis coniunctionum. Multiplicamus ab utraque parte massa m_n et dividimus dt^2; velocitas originalis significetur w_n, realis: v_n, tandem ea, quae respondet variationi motus puncti n per dt sit u_n: habemus:

$$m_n w_n^2 = m_n v_n^2 + m_n u_n^2 - 2\, m_n v_n u_n \cos (n\nu, \nu N)$$

Similibus aequationibus pro omnibus punctis materialibus formatis additisque ab utraque parte, erit, si nulla aequationum conditionalium tempus continet explicite:

$$\Sigma\, m_n w_n^2 = \Sigma\, m_n v_n^2 + \Sigma\, m_n u_n^2 \qquad (A)$$

$$\text{quia } \Sigma\, m_n v_n u_n \cos (n\nu, \nu N) = 0 \qquad (B)$$

(pro n successive ponendum est a, b, c, etc.)

Nam si anguli directionis motus realis puncti n cum axibus OX, OY, OZ significantur α_n, β_n, γ_n, anguli directionis actionis totalis coniunctionum cum iisdem axibus Φ_n, Ψ_n, Θ_n, habemus: $\Sigma m_n v_n u_n \cos (n\nu, \nu N) =$

---

1) Si $(t + \tau)$ est temporis quodvis punctum intra t et $(t + dt)$, V variatio motus totalis, quam punctum n hoc mathematico temporis puncto est subiturum, facile perspicitur illam quantitatem motus actioni continuae in eandem directionem substitutam esse

$$m_n \frac{n\nu}{dt} = \Sigma\, \frac{dt - \tau}{dt}\, V.$$

$$\Sigma\, m_n\, v_n\, u_n (\cos\alpha_n \cos\Phi_n + \cos\beta_n \cos\Psi_n + \cos\gamma_n \cos\Theta) = \Sigma\, v_n \cos\alpha_n (m_n\, u_n \cos\Phi_n) + \Sigma\, v_n \cos\beta_n (m_n\, u_n \cos\Psi_n) + \Sigma\, v_n \cos\gamma_n\, (m_n\, u_n \cos\Theta_n)$$

$m_n u_n$ est quantitas motus actioni coniunctionum per tempus dt substituta: quam appellabimus „effectum aequipollentem" coniunctionum: at $m_n u_n \cos\Phi_n$ est algebraice proiectio eius in axem OX; quae debet esse summa algebraica proiectionum singulorum effectuum aequipollentium, qui actionibus singularum aequationum conditionalium in punctum n per tempus dt respondent (§. 27): quarum actionum singularum directiones per dt pro constantibus habere licet; est igitur:

$$m_n\, u_n \cos\Phi_n = \frac{m_n\, u'_n}{R'_n}\frac{dF'}{dx_n} + \frac{m_n\, u''_n}{R''_n}\frac{dF''}{dx_n} + \frac{m_n\, u'''_n}{R'''_n}\frac{dF'''}{dx_n} + \cdot\cdot$$

(significationes facile intelliguntur).

Porro, etsi $\frac{m_n\, u'_n}{R'_n}$ non est idem, quod $\frac{V'_n}{R'_n}$, (§. 27) tamen, cum quovis tempore pro omnibus punctis materialibus $a, b, c \ldots n$ etc. valor $\frac{V'}{R'}$ respondens sit idem, facile deducitur [1]), esse etiam: $\frac{m_a\, u'_a}{R'_a} = \frac{m_b\, u'_b}{R'_b} = \frac{m_c\, u'_c}{R'_c} = \frac{m_n\, u'_n}{R'_n} =$ etc. Item pro effectibus conditionis $F'' = 0$ est $\frac{m_a\, u''_a}{R''_a} = \frac{m_b\, u''_b}{R''_b} =$ etc. Similia valent de $F''' = 0$, etc.

---

1) Si $(t + \tau)$ est temporis quodvis punctum mathematicum intra t et $(t+dt)$, V'_n variatio motus, quam punctum n illo ipso tempore est subiturum ob conditionem $F' = 0$, est $m_n u_n = \Sigma \frac{dt - \tau}{dt} V'_n$, ubi valor V'_n per dt quomodocunque variare potest, modo directio maneat eadem. At pro quovis τ est: $\frac{dt - \tau}{dt}\frac{V'_n}{R'_a} = \frac{dt - \tau}{dt}\frac{V'_b}{R'_b} =$ etc. ergo etiam $\frac{m_a\, u'_a}{R'_a} = \frac{m_b\, u_b}{R'_b} =$ etc.

Hinc, quantitatibus $m_n\, u_n \cos\psi_n$ et $m_n\, u_n \cos\vartheta_n$ modo analogo in partes suas dissolutis, habemus:

$$\Sigma\, m_n\, v_n\, u_n \cos(nv, vN) =$$

$$\frac{m_n\, u'_n}{R_n}\, \Sigma\left(\frac{dF'}{dx_n} v_n \cos\alpha_n + \frac{dF'}{dy_n} v_n \cos\beta_n + \frac{dF'}{dz_n} v_n \cos\gamma_n\right) + \frac{m_n\, u''_n}{R''_n}\Sigma\left(\frac{dF''}{dx_n} v_n \cos\alpha_n + \frac{dF''}{dy_n} v_n \cos\beta_n + \frac{dF''}{dz_n} v_n \cos\gamma_n\right) + \text{etc.}$$

Est autem $v_n \cos\alpha_n = \frac{dx_n}{dt}$; $v_n \cos\beta_n = \frac{dy_n}{dt}$; $v_n \cos\gamma_n = \frac{dz_n}{dt}$, ubi dx_n, dy_n, dz_n sunt et absolute et algebraice variationes coordinatarum motui reali puncti n per dt respondentes: quae cum debeant congruere cum aequationibus omnibus conditionalibus, efficiunt: $\Sigma m_n\, u_n\, v_n \cos(nv, vN)$

$$= \frac{1}{dt}\left\{\frac{m_n\, u'_n}{R'_n}\, \Sigma\left(\frac{dF'}{dx_n} dx_n + \frac{dF'}{dy_n} dy_n + \frac{dF'}{dz_n} dz_n\right) + \frac{m_n\, u''_n}{R''_n}\, \Sigma\left(\frac{dF''}{dx_n} dx_n + \frac{dF''}{dy_n} dy_n + \frac{dF''}{dz_n} dz_n\right) + \text{etc.}\right\} = 0,$$

si nulla aequatio continet tempus explicite. Hac igitur re posita, valet aequatio (A).

Si tempus intrat in quasdam datarum conditionum $\overset{(\nu)}{F} = 0$, $\overset{(\mu)}{F} = 0$, etc. facile invenimus:

$$\Sigma m_n\, w_n^2 = \Sigma m_n\, v_n^2 + \Sigma m_n\, u_n^2 + \frac{2 m_n\, u_n^{(\nu)}}{R_n^{(\nu)}}\frac{dF^{(\nu)}}{dt} + \frac{2 m_n\, u_n^{(\mu)}}{R_n^{(\mu)}}\frac{dF^{(\mu)}}{dt} + \text{etc.}$$

29) Theorema generalissimum aequatione (A) datum plures comprehendit propositiones ut casus speciales.

Primum manifestum est, si puncta materialia per finitum quoddam temporis spatium sub actione earundem coniunctionum, nullis intercedentibus percussionibus etc., se moveant, variationem motus, quam punctum n per elementum quodlibet dt illius spatii subit, generaliter esse infinite parvam;

quare u sive $\frac{N\nu}{dt}$ est infinite parvum ad v et w, et lineola $N\nu$ est eodem ordine, quo est distantia finium elementi curvae et elementi tangentis. $\Sigma m_n u^2_n$ igitur cum sit pro quovis elemento dt secundi ordinis, negligi potest, et quoniam semper velocitates originales (w) pro elemento dt insequente sunt velocitates reales (v) pro elemento praecedenti. facile perspicimus, summam $\Sigma_t m_n v_n^2$ pro tempore t aequalem esse habendam $\Sigma_T m_n v_n^2$ pro tempore T, spatio quolibet finito $T-t$ sub conditionibus supra positis elapso. Itaque, cum $m_n v_n^2$ appelletur „vis viva" puncti n, supra invenimus legem, quae proprie vocatur conservationis virium vivarum. Sed videmus eam tamdiu tantum valere, quam nulla intercedit variatio motus finita per tempus infinite parvum dt: tum enim $\Sigma m_n u_n^2$ apparet ut quantitas finita.

Tales generaliter efficiuntur variationes motus subitae

a) si puncta materialia libere mota subito conditionibus iunguntur: quae si repraesentantur aequationibus inter distantias tempus explicite non continentibus, statim de viribus vivis cognoscimus ex aequatione (A)

$$\Sigma m_n \omega_n^2 = \Sigma m_n v_n^2 + \Sigma m_n u_n^2$$

ubi ω_n est velocitas puncti n libere moti, v_n volocitas eius statim post introductas coniunctiones, $m_n u_n$ effectus aequipollens coniunctionum in punctum n per primum temporis elementum dt [1]): insequente quantitas respondens $\Sigma m_n u_n^2$ iterum evanescit.

b) Si inter puncta materialia iamiam sub actione coniunctionum quarundam mota, novae subito coniunctiones introducuntur: valet etiam aequatio supra scripta: ω_n hic est velocitas, cum qua punctum n motum suum pergeret, si ante id ipsum temporis punctum, quo novae coniunctiones

1) Ceterum sufficeret solius actionis subitae, quae fit ipso initio temporis dt, rationem habere.

introducuntur, liberum redderetur; v_n est velocitas eius realis statim post variationem subitam et $m_n u_n$ est effectus aequipollens totalis omnium coniunctionum, et priorum et novarum, per primum temporis elementum post novas introductas.

Quae sub a) et b) posita sunt comprehendi possunt: „si punctorum materialium motus, coniunctionibus subito introducendis, per tempus infinite parvum, variationibus afficiuntur finitis, summa virium vivarum eorum hoc tempore diminuitur summa earum virium vivarum, quae respondent illis variationibus subitis."

Ita e. gr. novae coniunctiones introducuntur, si primum fila antea nondum tensa, motu punctorum tenduntur; item, si puncta absolute dura systematis fortuito collidunt; theorema igitur, quod vocatur Carnoti de percussione in propositione illa generaliori ut corollarium continetur [1]).

c) Si punctis systematis, dum sub actionibus coniunctionum se movent, certas quantitates motus subito (e. gr. percussionibus extrinsecus applicatis) in quaslibet directiones addi cogitamus, erit etiam

$$\Sigma m_n v_n^2 = \Sigma m_n \omega_n^2 - \Sigma m_n u_n^2$$

ubi ω_n est velocitas resultans ex ea, quam punctum n originaliter illo temporis puncto habuit et ea, quam causa extera, si liberum tum fuisset, accepisset. Reliqua sine explicatione intelliguntur.

Ita motus punctorum systematis liberi absolutus aequa-

1) Sturm amplifationem theorematis Carnoti proposuit, (Comptes rendus XIII. p. 1041) cuius demonstrationem attulit Bertrand (Ib. XLIII. p 1065). Sed theorema, quod Bertrand demonstrat, non plane idem est, quod supra positum est: hoc accuratius videtur. Ceterum Cauchy demonstrationes a Bertrand et aliis datas non sufficere censet et propositionem illam non generaliter admittere videtur. Credimus, nostram demonstrationem, ex aliis principiis deductam, omnes obscuritates et dubitationes removere. — Cf. Comptes rend. XLIII. et XLIV. passim.

tione regitur (A): unde videmus, etiamsi quantitas motus totalis eorum sit $= 0$, tamen causis externis non agentibus, systema ad quietem absolutam non posse pervenire nisi percussionibus et tractibus subitis inter ipsa puncta intervenientibus. Si consideramus methodum, qua aequatio (B) demonstrata est (§. 28), statim perspicimus, esse etiam:

$$\Sigma P_n\, v_n \cos(nv, vN) = 0 \qquad \text{(C)}$$

ubi P_n non est quod appellavimus „effectum aequipollentem" in punctum n per dt, sed summa omnium variationum motus, quas punctum n continua coniunctionum actione per elementum dt subit: nihil ponitur de valoribus harum variationum: solum directio actionis per dt pro constante habetur, id quod semper permissum est.

VI. Theoremata, quae praecedunt pro omnibus systematibus, sive liberis, sive non liberis, valere demonstratur.

30) In paragraphis superioribus coniunctiones systematis aequationibus conditionalibus inter distantias punctorum massis finitis datae cogitantur: restat ceteras considerare coniunctiones possibiles, quas ad illas reduci licet ponendo, massas quasdam aut $= 0$, aut infinitas esse.

Ponamus primum aequationem conditionalem $F = 0$ praeter alias etiam continere distantias punctorum materialium a talibus, quae nulla massa sint praedita, et hac de causa neque motu suo agere neque repugnantiam ullam obiicere possint (§. 15); quorum nodorum loci quovis tempore ceterorum punctorum motibus et positionibus ita determinantur, ut summa actionum, quae fiunt secundum lineas directae actionis in talem nodum convenientes sit $= 0$.

Ita conveniant in punctum materiale n lineae directae actiones $n_a, n_b, \ldots$ a punctis materialibus $a, b \ldots$ et prae-

terea n_o a nodo o. Etiam hic valet (§. 23), id quod sequitur ex ipsa demonstrationis natura: significationibus igitur notis utentes habemus pro quovis temporis puncto variationem motus puncti n secundum n_o aequalem $\frac{V_n}{R_n}\frac{dF}{dn_o}$, directione ex signis algebraicis definienda. Deinde est etiam pro omnibus punctis materialibus systematis $\frac{V_n}{R_n} = \frac{V_p}{R_p} = \frac{V_q}{R_q} =$ etc. Nam pro illis punctis materialibus, a, $b, \ldots$ quae directe cum n coniuncta sunt, statim sequitur ex (§. 25): $\frac{V_n}{R_n} = \frac{V_a}{R_a} = \frac{V_b}{R_b} =$ etc.; deinde ab his punctis eadem ratione ad alia procedimus: sed etiam si punctum quoddam p non directe cum aliis materialibus, sed tantum cum nodo (vel cum pluribus nodis,) coniunctum est, dato temporis momento lineam directae actionis n_o ita eliminatam cogitare possumus, ut pro ea in n conveniant lineae directae actionis a tribus punctis quibusvis materialibus, q, r, s, quae tria nunc cum o coniuncta sunt (§. 26.); qua re neque superficies conditionales, neque variationes motus totales, quas puncta tum subitura sunt, mutantur: ergo etiam priori distributione linearum directae actionis, quae respondet coniunctionibus realibus filis etc. effectis, est $\frac{V_p}{R_p} = \frac{V_q}{R_q} = \frac{V_r}{R_r} = \frac{V_s}{R_s}$.[1] Nihil refert, quot nodorum coordinatas functio data F contineat; etiam distantias nodorum inter se continere potest.

Etiam si iidem nodi in plures aequationum conditiona-

---

1) Hic plura quam quattuor puncta (sive materialia sive non) in systemate esse positum est; pro ceteris casibus facile idem directe demonstrari potest.

lium, quae systema constituunt, intrant: $F'=0$; $F''=0$; etc. eadem methodo, lineis directae actionis varie disponendis demonstratur (cf. §. 27.) $\frac{V'_n}{R'_n}=\frac{V'_p}{R'_p}=\frac{V'_q}{R'_q}=\ldots$; item $\frac{V''_n}{R''_n}=\frac{V''_p}{R''_p}=\frac{V''_q}{R''_q}=\ldots$; etc.

Concipiamus igitur puncta materialia systematis originaliter motus quoslibet accepisse; in nodum o conveniant certo tempore a punctis materialibus[1]) $n, p, q, \ldots$ lineae directae actionis n_o, p_o, q_o, etc., quas non necesse est omnes in quoque datarum aequationum contineri; cum resultans ex omnibus variationibus modus secundum illas lineas quovis temporis puncto debeat esse $=0$, habemus proiectiones earum in axem OX:

$$\frac{V'}{R'}\left(\frac{dF'}{dn_o}\frac{dn_o}{dx_n}=\frac{dF'}{dp_o}\frac{dp_o}{dx_p}+\ldots\right)+\frac{V''}{R''}\left(\frac{dF''}{dn_o}\frac{dn_o}{dx_n}+\frac{dF''}{dp_o}\frac{dp_o}{dx_p}+\ldots\right)$$

$+\ldots=0$ — sive, cum sit $\frac{dn_o}{dx_n}=-\frac{dn_o}{dx_o}$ etc.

$$(\alpha)\begin{cases}\frac{V'}{R'}\frac{dF'}{dx_o}+\frac{V''}{R''}\frac{dF''}{dx_o}+\ldots=0;\text{ item invenimus}\\ \frac{V'}{R'}\frac{dF'}{dy_o}+\frac{V''}{R''}\frac{dF''}{dy_o}+\ldots=0\\ \frac{V'}{R'}\frac{dF'}{dz_o}+\frac{V''}{R''}\frac{dF''}{dz_o}+\ldots=0\end{cases}$$

Pro quoque alio nodo (oo) similes sunt relationes. Hae aequationes etiam valent, si pro variationibus $V', V''\ldots$ continue quoque mathematico temporis puncto effectis substituimus effectus aequipollentes per elementum dt: mu', mu'', etc. (cf. §. 28). Tandem cum variationes coordinatarum punctorum systematis, sive materialium, sive non, quae

1) Functiones datae semper eliminationibus ita transformari possunt, ut nullas contineant distantias inter nodos ipsos.

motibus eorum realibus per tempus dt efficiuntur, conditionibus debeant sufficere:

$$\Sigma\left(\frac{dF'}{dx_n}dx_n+\frac{dF'}{dy_n}dy_n+\frac{dF'}{dz_n}dz_n\right)+$$
$$\Sigma\left(\frac{dF'}{dx_o}dx_o+\frac{dF'}{dy_o}dy_o+\frac{dF'}{dz_o}dz_o\right)=0$$
$$\Sigma\left(\frac{dF''}{dx_n}dx_n+\frac{dF''}{dy_n}dy_n+\frac{dF''}{dz_n}dz_n\right)+$$
$$\Sigma\left(\frac{dF''}{dx_o}dx_o+\frac{dF''}{dy_o}dy_o+\frac{dF''}{dz_o}dz_o\right)=0$$

etc. etc.

— ubi litera n ad omnia deinceps pertinet puncta materialia, quorum coordinatae in singulas functiones intrant, litera o autem ad nodos, — facile deducitur eodem modo ut in (§. 28.), ratione habita aequationum (α):

$$\frac{1}{dt}\left[\frac{mu'}{R'}\Sigma\left(\frac{dF'}{dx_n}dx_n+\frac{dF'}{dy_n}dy_n+\frac{dF'}{dz_n}dz_n\right)+\right.$$
$$\left.\frac{mu''}{R''}\Sigma\left(\frac{dF''}{dx_n}dx_n+\frac{dF''}{dy_n}dy_n+\frac{dF''}{dz_n}dz_n\right)+\cdots\right]$$
$$=\Sigma m_n u_n v_n \cos(nv, \nu N)=0.$$

Ergo etiam pro systematibus nodos continentibus valent aequationes (A) et (C).

31) Iamiam transeamus ad systemata non libera, i. e. ad ea, quae non solis conditionibus inter distantias punctorum, sed aequationibus conditionalibus quibuscunque inter coordinatas punctorum constituta sunt: quare generaliter actiones punctorum inter se pendent e locis eorum absolutis in spatio. Sed quamque illarum aequationum conditionalium ita transformare possumus, ut nullas alias contineat variabiles, quam distantias punctorum systematis a tribus punctis arbitrariis absolute fixis in spatio[1]), quorum coordinatae pro numeris constantibus habentur. Deinde etiam

1) Cf. Poinsot, l. c. p. 452.

quaelibet aliae distantiae aliis eliminandis introduci possunt. Ita quodammodo habemus systema liberum, quod tria continet puncta massis infinitis praedita et originaliter non mota, quorum coordinatae finitis ceterorum actionibus mutari non possunt.

Directiones variationum motus cuiusque puncti singulis conditionibus $F' = 0$; $F'' = 0$; etc. effectarum, et dissolutiones earum secundum lineas directae actionis inveniuntur ut in (§. 23).

Deinde ex principio generali de actione et reactione, lineis directae actionis convenienter distribuendis, demonstratur, quovis tempore esse pro omnibus punctis massarum finitarum $\frac{V'_n}{R'_n} = \frac{V'_p}{R'_p} = \frac{V'_q}{R'_q} = \text{etc.}$; item $\frac{V''_n}{R''_n} = \frac{V''_p}{R''_p} = \ldots$; etc.

Tandem cum variationes coordinatarum, motibus punctorum realibus per tempus dt respondentes, sufficiant conditionibus

$$\Sigma \left(\frac{dF'}{dx_n} dx_n + \frac{dF'}{dy_n} dy_n + \frac{dF'}{dz_n} dz_n \right) = 0$$

$$\Sigma \left(\frac{dF''}{dx_n} dx_n + \frac{dF''}{dy_n} dy_n + \frac{dF''}{dz_n} dz_n \right) = 0$$

etc. etc.

ubi n solum pertinet ad puncta mobilia, paragraphos (28) et (29) generaliter valere facile perspicitur.

Itaque si puncta materialia quomodocunque ad systema coniuncta sunt — e. gr. si filis et virgis variantibus secundum legem ex punctorum coordinatis pendente connexa sunt et nonnulla praeterea in curvis vel superficiebus item cariantibus retinentur, — si motus quoslibet originaliter acceperunt, dummodo ne conditiones explicite pendeant e tempore, semper valet aequatio (A): ergo summa virium vivarum constans conservatur, donec variationes motus punctorum continue fiunt per incrementa infinite parva; si vero collisionibus vel quibuscunque novis coniunctionibus introducendis

subito variationes efficiuntur finitae, vires vivae deminuuntur summa earum, quae respondent illis variationibus.

Item valet pro omnibus systematibus, sive liberis, sive non, aequatio (C) (cf. §. 29)

$$\Sigma\, P_n\, v_n \cos\,(nv,\, vN) = 0.$$

VIII. De motu accelerato et de aequilibrio.

32) Hucusque puncta materialia systematis initio certis quibuslibet quantitatibus motus praedita cogitavimus, quae externis causis non varientur. Si certo temporis puncto novas iis quantitates motus addimus, hoc tempus iterum pro initio est habendum, ex quo summa totalis quantitatis motus systematis, quae nunc est, constans servatur. Sed nihil obstat, quominus continue cuique puncto per incrementa infinite parva secundum certam quandam legem quantitates motus subvehi ponamus, ita ut punctum praeter variationem motus internam, mutuis actionibus in systemate effectam, etiam continue subeat variationem motus externam. Ita puncto n, certo tempore et in certo loco, utcunque addatur extrinsecus quantitas quaedam infinite parva motus in directionem axis OX per temporis elementum dt; concipiamus quantitatem motus eius quoque temporis elemento aequabiliter et continue per unitatem temporis eadem ratione in illam directionem accrescere, quam primo elemento, et significemus incrementum motus finitum ita per unitatem temporis acquisitum X_n, manifestum est, variationem externam motus secundum OX, qua per primum illud temporis momentum punctum n afficiatur, esse $= X_n\, dt$. Simili modo variationes externae secundum axes OY et OZ exprimi possunt: $Y_n\, dt$, $Z_n\, dt$ (significationes sine explicatione intelliguntur). Itaque cum X_n, Y_n, Z_n functiones esse possint

quaecunque coordinatarum puncti n vel aliorum vel quoque temporis, lex variationum motus externarum cuiuslibet puncti, quaecunque est, generaliter — neglectis quantitatibus superiorum ordinum — exprimi potest.

33) In (§§. 23 - 27) mathematicum tantum consideratur temporis punctum: puncta materialia certas tum habent quantitates motus et certas variationes earum ob coniunctiones systematis subitura sunt, quarum directiones e locis tantum punctorum praesentibus, non e quantitatibus motus pendent; nihil refert unde et quando puncta motus illos acquisiverint: ergo illae paragraphi, pro omnibus systematibus (cap. VI.) amplificatae, etiam valent quoque temporis puncto, si motus continue accelerantur. Quare si V'_n, V''_n, etc. sunt variationes motus, quibus mathematico temporis puncto ob conditiones $F'=0$; $F''=0$; etc. punctum n afficitur, omnes tum valores $\frac{V'_n}{R'}$, item omnes $\frac{V''}{R''}$ etc. sunt aequales; deinde cum, etiam motibus acceleratis, tamen directiones variationum motus singulis conditionibus respondentium (unde pendent R', R'', etc.) per tempus dt, relativis punctorum locis infinite paullum tantum variantibus, pro constantibus habere liceat, est quoque $\frac{P'_n}{R'_n}=\frac{P'_q}{R'_q}=$ etc., ubi P'_n significat summam variationum continuarum, quas quantitas motus puncti n per elementum temporis dt ob conditionem $F'=0$ subit; $P'_q=\Sigma V'_q$, etc.; item omnes valores $\frac{P''}{R''}$, etc. sunt aequales. De valoribus summarum P', P'', etc., qui pendent etiam e variationibus externis per tempus dt, nihil omnino ponitur.

Quantitates motus puncti cuiusdam systematis, n, (cuius massa m_n) secundum axes OX, OY, OZ sint certo temporis puncto: $m_n\frac{dx_n}{dt}$, $m_n\frac{dy_n}{dt}$, $m_n\frac{dz_n}{dt}$, post elementum

dt autem: $\left(m_n\frac{dx_n}{dt}+m_n\Delta\frac{dx_n}{dt}\right)$, $\left(m_n\frac{dy_n}{dt}+m_n\Delta\frac{dy_n}{dt}\right)$, $\left(m_n\frac{dz_n}{dt}+m_n\Delta\frac{dz_n}{dt}\right)$; variationes totales motus per hoc temporis elementum cum sint compositae e quantitatibus motus extrinsecus additis et variationibus actione coniunctionum effectis, habemus:

$$(\mathrm{I})\begin{cases} m_n\Delta\frac{dx_n}{dt}=X_n\,dt+\frac{P'_n}{R'_n}\frac{dF'}{dx_n}+\frac{P''_n}{R''_n}\frac{dF''}{dx_n}+\ldots\\ m_n\Delta\frac{dy_n}{dt}=Y_n\,dt+\frac{P'_n}{R'_n}\frac{dF'}{dy_n}+\frac{P''_n}{R''_n}\frac{dF''}{dy_n}+\ldots\\ m_n\Delta\frac{dz_n}{dt}=Z_n\,dt+\frac{P'_n}{R'_n}\frac{dF'}{dz_n}+\frac{P''_n}{R''_n}\frac{dF''}{dz_n}+\ldots \end{cases}$$

34) Si nullae collisiones, tractus subiti etc. inter puncta systematis intercedunt, variationes P', P'', etc. sunt infinite parvae et $\frac{P'_n}{dt.\,R'_n}$ est quantitas finita K'; item $\frac{P''_n}{dt.\,R''_n}=K''$; etc.; tum etiam $m_n\Delta\frac{dx_n}{dt}$, variatio quantitatis motus infinite parva totalis secundum OX, potest scribi $m_n\frac{d^2x_n}{dt^2}\,dt$; item $m_n\Delta\frac{dy_n}{dt}=m\frac{d^2y_n}{dt^2}\,dt$; $m_n\Delta\frac{dz_n}{dt}=m_n\frac{d^2z_n}{dt^2}\,dt$; ita habemus:

$$(\mathrm{II})\begin{cases} m_n\frac{d^2x_n}{dt^2}=X_n+K'\frac{dF'}{dx_n}+K''\frac{dF''}{dx_n}+\ldots\\ m_n\frac{d^2y_n}{dt^2}=Y_n+K'\frac{dF'}{dy_n}+K''\frac{dF''}{dy_n}+\ldots\\ m_n\frac{d^2z_n}{dt^2}=Z_n+K'\frac{dF'}{dz_n}+K''\frac{dF''}{dz_n}+\ldots \end{cases}$$

et similes aequationes pro quoque alio puncto systematis, in quas omnes iidem intrant valores K', K'', etc.: quae notae aequationes motus differentiales servant ad determinandas traiectorias et velocitates punctorum, donec K', K'', etc. non sunt infinitae. Sed ponamus certo tempore collisiones intercedere punctorum, vel fila antea non tensa subito tendi, vel generaliter novas introduci coniunctiones, ita ut internis actionibus per tempus infinite parvum variationes motus efficiantur finitae: tum aequationes (II) non adhiberi possunt, sed redeundum est ad generaliores (I): $m_n \Delta \frac{dx_n}{dt}$ tum est $m_n\left(\frac{dx_n}{dt} - \frac{d'x_n}{dt}\right)$, ubi $\frac{dx_n}{dt}$ est velocitas puncti n secundum OX proxime ante variationem subitam, et $\frac{d'x_n}{dt}$ eadem velocitas post elementum dt.

Item hoc tempore est $m_n \Delta \frac{dy_n}{dt} = m_n \left(\frac{dy_n}{dt} - \frac{d'y_n}{dt}\right)$; $m_n \Delta \frac{dz_n}{dt} = m_n \left(\frac{dz_n}{dt} - \frac{d'z_n}{dt}\right)$; tandem, cum variationes externae $X_n\,dt$, $Y_n\,dt$, $Z_n\,dt$, ut infinite parvae negligi possint, ternas tum pro quoque puncto habemus aequationes, ut

$$m_n\left(\frac{dx_n}{dt} - \frac{d'x_n}{dt}\right) = \frac{P'_n}{R'_n}\frac{dF'}{dx_n} + \frac{P''_n}{R''_n}\frac{dF''}{dx_n} + \dots$$

in quibus omnes valores $\frac{P'}{R'}$, item omnes $\frac{P''}{R''}$ etc. sunt aequales: unde, punctorum velocitatibus proxime ante variationes subitas ex aequationibus (II) notis, adhibitis omnibus aequationibus conditionalibus, velocitates punctorum statim post illas variationes deduci possunt. — Deinde quoad denuo variationes internae finitae subito interveniunt, iterum valent aequationes (II).

Si externa causa punctis quibusdam systematis quantitates motus finitae subito adduntur, sufficit hoc tempore pro quantitatibus $X_n\,dt$, $Y_n\,dt$, $Z_n\,dt$ in aequationibus (I) quantitates motus substituere finitas respondentes; tum etiam generaliter P', P'', etc. sunt finitae. Hanc rem non opus est hic latius tractare.

35) Consideremus aequationem (C) (§. 29)

$$\Sigma P_n v_n \cos(n\nu, \nu N) = 0$$

haec summa facta est $= 0$, et quia omnes valores $\frac{P'}{R'}$, omnes $\frac{P''}{R''}$ etc. sunt aequales et, quia variationes coordinatarum punctorum motibus per tempus dt respondentes datas servant conditiones systematis: ergo illa aequatio etiam valet si variationes fiunt externae motus punctorum per tempus dt: P_n tum est summa variationum motus puncti n continuarum per dt resultantium ex omnibus coniunctionum actionibus; v_n est velocitas media per tempus dt; nam duae illae causae, quibus existit aequatio (C), manent etiam motibus acceleratis. Est autem variatio i n t e r n a motus puncti n secundum OX per tempus dt algebraice $(m_n \Delta \frac{dx_n}{dt} - Q_{xn})$, ubi Q_{xn} est quantitas motus puncto n per dt secundum OX extrinsecus addita, $m_n \Delta \frac{dx_n}{dt}$ autem, ut supra, variatio motus totalis secundum OX, qua punctum post dt realiter affectum est; proiectionibus variationis internae in OY et OZ simili modo expressis, aequatio (C) facile transformatur:

$$\Sigma\left\{\left(m_n \Delta \frac{dx_n}{dt} - Q_{xn}\right)\frac{dx_n}{dt} + \left(m_n \Delta \frac{dy_n}{dt} - Q_{yn}\right)\frac{dy}{dt} + \left(m_n \Delta \frac{dz_n}{dt} - Q_{zn}\right)\frac{dz_n}{dt}\right\} = 0 \qquad \text{(D)}$$

Si variationes externae continue fiunt per incrementa infinite parva pro infinito parvo tempore, ita ut sit $Q_{xn} = X_n\,dt$; etc.; porro si nullae interveniunt variationes subitae internae, ita ut sit $\Delta \frac{dx_n}{dt} = \frac{d^2x_n}{dt^2}\,dt$; etc. ex aequatione (D) deducitur

$$\Sigma\, m_n \left(\frac{dx_n}{dt}\, \frac{d^2x_n}{dt^2} + \frac{dy_n}{dt}\, \frac{d^2y_n}{dt^2} + \frac{dz_n}{dt}\, \frac{d^2z_n}{dt^2} \right) dt$$
$$= \Sigma (X_n\, dx_n + Y_n\, dy_n + Z_n\, dz_n);$$

hinc si summa a dextera parte e solis pendet coordinatis punctorum et ex differentialibus completis consistit, nota sequitur formula de vi viva: quae pro omnibus systematibus, sive liberis, sive non, valet, dum nullae fiant collisiones punctorum, tractus subiti etc. Si vero quacunque causa subito efficiuntur variationes motus internae finitae, hoc ipso tempore variationes externae Xdt, Ydt, Zdt ut infinite parvae negligi possunt et aequatio (A) est adhibenda. Ita, si velocitates puncti n temporibus t et T sunt v_n et V_n, si temporibus $t_1, t_2, t_3, \ldots t_\varrho$ intra t et T variationibus subitis internis $m_n u_{1n}$, $m_n u_{2n}$, $m_n u_{3n}$, ... $m_n u_{\varrho n}$ affectum est, habemus theorema generalius de vi viva:

$$\Sigma \tfrac{1}{2} m_n V_n^2 = \Sigma \tfrac{1}{2} m_n v_{1n}^2 - \Sigma \tfrac{1}{2} m_n u_{2n}^2 - \ldots$$
$$- \Sigma \tfrac{1}{2} m_n u_{\varrho n}^2 + \Sigma \int (X_n\, dx_n + Y_n\, dy_n + Z_n\, dz_n),$$

ubi limites integralium sunt coordinatae punctorum, quae respondent temporibus t et T: quodque enim integrale est summa integralium definitorum, quorum limites sunt coordinatae temporibus t et t_1; t_1 et t_2; t_2 et t_3; .... t_ϱ et T respondentes. Facile etiam perspicitur, quae fiat formula, si externae praeterea variationes motus finitae subito addantur.

36) Ultima qua aequatio (D) efficitur causa est, quod variationes coordinatarum reales dx, dy, dz, motibus punctorum per tempus dt respondentes, conditionibus sufficiunt systematis. Quare si illam aequationem ut formulam mere analyticam consideramus, statim aliam ponere possumus, quae pro variationibus realibus dx, dy, dz, alias quaslibet continet variationes coordinatarum δx, δy, δz quae et ipsae aequationibus conditionalibus satis faciant:

$$\Sigma \left\{ \left(m_n \Delta \frac{dx_n}{dt} - Q_{xn} \right) \delta x_n + \left(m_n \Delta \frac{dy_n}{dt} - Q_{yn} \right) \delta y_n \right.$$

$$\left. + \left(m_n \Delta \frac{dz_n}{dt} - Q_{zn} \right) \delta z_n \right\} = 0 \qquad \text{(E)}$$

quae aequatio etiam conditionibus systematis tempus explicite continentibus valet, dummodo δx, δy, δz tales cogitentur variationes coordinatarum, quae ipso initio temporis dt congruant cum aequationibus conditionalibus, dum tempus in iis, ut tum est, pro numero habetur constanti.

Ita prorsus generaliter pro omnibus systematibus principium demonstratum est, quod vocatur „d'Alemberti cum principio velocitatum virtualium coniunctum." Ex tota demonstrationis methodo apparet, nihil omnino referre, num variationes motus fiant subito an continue per incrementa infinite parva, i. e., ut usitatis verbis utamur, num vires agant momentaneae an continuae. Ceterum sufficit ponere, variationes finitas per elementum temporis infinite parvum dt fieri, neque necesse est, eas stricte mathematico temporis puncto effici. Generaliter, illa aequatio, quaecunque fiunt variationes motus internae et externae, semper valet catenus, quatenus directiones variationum internarum (quae directiones pendent e coordinatis punctorum per infinite parvum tempus infinite paullum variantibus) per elementum temporis pro constantibus habere licet.

Animadvertendum est, aequationem (E) non esse principium primarium proprie mechanicum, sed relationem tantum mere analyticam, omnes sane casus mechanices complectentem, sed nullam rerum ipsarum, quae fiunt, notionem claram praebentem.

37) Ponamus variationes motus reales singulorum punctorum $m\Delta \frac{dx}{dt}$, $m\Delta \frac{dy}{dt}$, $m\Delta \frac{dz}{dt}$ (quae ex variationibus internis et externis componuntur) omnes esse $= 0$, et omnia puncta systematis originaliter motus non habere. Tum igitur omnia puncta, etsi extrinsecus certae iis communicantur quantitates motus Q_x, Q_y, Q_z suum quodque locum

in spatio retinent: quantitates autem Q_x, Q_y, Q_z conditionem debent servare:

$$\Sigma\ (Q_{xn}\ \delta x_n + Q_{yn}\ \delta y_n + Q_{zn}\ \delta z_n) = 0 \qquad (F)$$

Ita pervenimus ad principium aequilibrii, quod vocatur velocitatum virtualium; quod et ipsum secundarium pro casu speciali aequationis (E) habendum est [1]).

Conditionem (F) ad aequilibrium constituendum sufficere, eo cognoscitur, quod inde aequationes (I) (§. 33) deduci possunt, in quibus variationes totales $m\Delta\frac{dx}{dt}$, $m\Delta\frac{dy}{dt}$, $m\Delta\frac{dz}{dt}$ positae sint $= 0$. In hac ipsa etiam re consistit elegantia analytica aequationis generalis (E), quod ob quantitates δx, δy, δz non plane determinatas totum illud complectitur systema aequationum motus (§. 33); sed manifestum est, hanc transformationem ad rerum naturam minus pertinere.

38) Non opus est multis verbis illustrare id, quod ex tota quam secuti sumus methodo luculente apparet: aequationem (F) ut casum specialem ad aequationem (E) esse revocandam. Ergo si staticae omnia subiunguntur problemata, quae ad aequationem (F) referenda sunt, dynamicae vero omnia, quae ad (E) conducunt, statica est casus specialis dynamices. Et profecto non de quiete, sed de tensionibus ad motum, quae effectu coniunctionum systematis compensentur, agitur in statica; nam ea res, quae in hac doctrina vocatur „vis,“ si hoc verbum omni notione clara carere uolumus, pro tensione ad certam quandam quantitatem motus habenda est: quare, cum semper notio motus sit primaria, via quam hic ingressi sumus, naturae rei maxime convenire videtur.

1) Si puncta systematis originaliter non sunt in quiete, ne ullae appareant variationes motus singulorum punctorum, necesse est, omnia eadem velocitate in eandem directionem moveri. Ceterum hoc quoque casu variationes externae Q_x, Q_y, Q_z semper conditionem (F) servare debent.

Multa sane primo aspectu apparent faciliora, si a statica proficiscimur: tamen omnes difficultates, quas nos fortasse non plane removimus, aut latent, aut non re, sed forma tantum superantur. Ita e. gr. principium velocitatum virtualium demonstrari solet punctis systematis in quiete positis principioque adhibito auxiliari, aequilibrium non perturbari, si totum systema solidum vel quaelibet linea directae actionis rigida fiat; deinde, quia vires perditae semper in aequilibrio esse debeant, statim ab aequatione simpliciore (F) ad complicatiorem multoque magis perspicuitate carentem (E) proceditur, etsi nunc neque puncta sunt in quiete, neque principium illud auxiliare, ut antea, adhiberi potest.

Tandem si systema nodos continet, etiam magis aequatio (E) directe comprobetur necesse videtur, quia nodi in statica a ceteris punctis non distinguuntur.

---

39) Iamiam legibus mechanices, quatenus propositum erat, tractatis, fundamenta quibus haec scientia nititur profundissima uno comprehendamus conspectu.

a) Praemittitur certis terminis inclusa notio „quantitatis motus,“ quae ex definitione pro ea re habetur, de qua agitur in mechanica. Notio vis ad eam non pertinet, cum solum variationes quantitatis motus respiciantur: quibus sane „vires,“ his effectibus ex definitione proportionales, substituere licet: sic autem manifestum est, vires momentaneas et continuas simul eadem theoria esse tractandas.

b) Deinde ut principium unicum proprie mechanicum (reliqua enim, quae postulantur, iam in definitione generali quantitatis motus continentur ponitur lex de aequali actione et reactione. (Lex tertia Newtoni.)

c) Tandem, cum problema generale mechanices vertatur circa puncta materialia mota certis servandis aequationibus conditionalibus, directa analysi naturae talium coniunctionum generaliter cognoscitur, quae sint directiones variationum motus, quas puncta mota ob singulas aequationes conditionales quovis temporis momento subeant. — Alia omnia deinde ope geometriae deducuntur.

Methodus, quam secuti sumus ab usitata eo praecipue differt, quod directe ad haec principia redimus, quae ipsam mechanices naturam quam proxime attingant: imprimis igitur principium d'Alemberti pro secundario est habendum, quippe quod substantialiter efficitur per aequalitatem actionis et reactionis.

40) Sed ea, quae sub a) et b) ponuntur, omnino non a priori constitui possunt: notiones primariae mechanices inductione animo humano suggestae sunt, id quod cum contra alios, tum contra V. D. Apelt [1]) est contendendum. Nullo modo enim a priori scire possumus, notionem quantitatis motus, nempe massae in velocitatem ductae, quodammodo arbitrario conceptam, accurate repraesentare id, de quo substantialiter agitur in phaenomenis mechanicis naturae, quod mutatur, quod afficitur, quod pro effectu virium habetur; unde scimus effectum integrum illa notione penitus exhauriri? Immo si concedimus, aequalitatem actionis et reactionis esse principium philosophicum, quo iure a priori in mechanice pro actione et reactione habemus variationes quantitatis motus? Unde scimus has non partes tantum esse integrae actionis et reactionis, cum ignoremus, quid fiat in ipsa materia?

Inductio autem, quibus principia illa nituntur, omnium fere est certissima. Itaque sine dubitatione mechanicen

1) Theorie d. Induction (Leipzig 1854), p. 107.

puram, his fundamentis, ut disciplina peculiaris mathematica, superstructam, statim ad theoriam motuum quos observamus corporum naturalium applicare possumus. Id tantum videndum est, quomodo haec phaenomena optume ad formas generales mechanices purae revocentur. Vix unquam obtineri posse videtur id, quod Poncelet [1]) postulat, omnia reducenda esse ad mechanicen punctorum aut liberorum aut viribus mutuis et continuis per distantiam in se agentium. Facilius, et vix minus accurate, difficultates mechanices physicae superari posse videntur, si systematibus naturalibus filis, virgis etc. institutis, substituimus systemata geometrica quam simillima: tales quidem coniunctiones stricte geometricae in natura existere non possunt, quippe quibus interdum vis viva perdi potest; tamen haec systemata pro protypis haberi possunt physicorum, si ratio habetur errorum, qui illis substitutionibus adducuntur. Manifestum autem est, primum naturam systematum geometricorum penitus esse cognoscendam, et indagandum, quatenus valeant leges mechanices purae: id quod non assequemur, nisi res ipsas, quae fiunt, quam minime formulis velatas directe perquirimus.

1) Comptes rend. t. XLIV. (1857) p. 82. sqq.

EMENDANDA.

P. 1, linea 2 ab imo, et p. 12, linea 4 ab imo l. „lex tertia Newtoni,“ pro „l. secunda N.“

VITA.

Natus sum Guilelmus Hector Lexis die XVII. mensis Iulii a. MDCCCXXXVII Eschweiler in oppido Rhenano, patre Ernesto, M. D., matre Gertrudi, e gente Stassen, quos adhuc vivos animo intimo veneror. Fidei addictus sum catholicae. Literarum elementis imbutus auctumno anni MDCCCXLVII gymnasium adii Friderico-Guilelmeum Coloniense, tum cel. Knebel directore florens. Quo relicto Octobri a. MDCCCLV huius almae universitatis civibus adscriptus sum, ubi primo semestri iurisprudentiae, deinde autem disciplinis mathematicis et physicis operam dedi. Audivi autem V. V. Ill. Haelschner, Nicolovium, Sell, Walter, Argelander, Beer, Bischof, Knoodt, Landolt, Lange, Lipschitz, Nasse, Noeggerath, Plücker, Schaaffhausen, Schönfeld, Treviranum, Troschel. Quibus viris clarissimis de me optime meritis gratias nunc ago semperque habebo quam maximas.

THESES.

1) *Theoria Mellonii et Volpicellii de inductione electrostatica probanda non videtur.*
2) *Teleologia ne in naturalibus quidem rebus indagandis spernendum instrumentum heuristicum est.*
3) *Melius videtur, in mechanica a doctrina motus proficisci, quam a statica.*
4) *Opiniones, quas V. C. Faraday de conservatione virium (cf. e. gr. Phil. Mag. March 1859) protulit, non sunt confundendae cum theoria illa physica, observationibus confirmata, quam Rankine vocat „conservation of energy."*
5) *Heuristice est pars methodi inductivae generalis.*
6) *Consentaneum videtur, notionem integralis definiti pro fundamento calculi superioris habere.*
7) *Atomi et vires pro notionibus auxiliaribus sunt habendae: quibus quid realiter respondeat, scientia physica diiudicare non potest.*
8) *Lingua Latina ad modernam scientiam physicam tractandam apta non est.*