TARTU ÜLIKOOL
MATEMAATIKA-INFORMAATIKATEADUSKOND
PUHTA MATEMAATIKA INSTITUUT

Marje Johanson

Kompaktsete operaatorite $M(r, s)$-võrratust rahuldavad ideaalid

Magistritöö

Juhendajad: Eve Oja,
prof., füüs.-mat. kand.,
Rainis Haller,
teadur, PhD

Tartu 2007

Sisukord

Sissejuhatus

Banachi ruumi $\mathcal{L}$ kinnist alamruumi $\mathcal{K} \neq \{0\}$ nimetatakse *ideaaliks* (vt. [GKS] või nt. [O3, lk. 2814]) ruumis $\mathcal{L}$, kui leidub projektor $\mathcal{P}$ (*ideaaliprojektor*) kaasruumis $\mathcal{L}^*$ nii, et $\|\mathcal{P}\| = 1$ ja $\ker \mathcal{P} = \mathcal{K}^\perp$ (hulka $\mathcal{K}^\perp = \{f \in \mathcal{L}^* : f(k) = 0 \ \forall k \in \mathcal{K}\} \subset \mathcal{L}^*$ nimetatakse $\mathcal{K}$ annullaatoriks). Kui

$$\|f\| = \|\mathcal{P}f\| + \|f - \mathcal{P}f\| \quad \forall f \in \mathcal{L}^*,$$

siis alamruumi $\mathcal{K}$ nimetatakse *M-ideaaliks* (vt. nt. [HWW, lk. 1]). Võrratuse

$$\|f\| \geq r\|\mathcal{P}f\| + s\|f - \mathcal{P}f\| \quad \forall f \in \mathcal{L}^*$$

kehtides etteantud $r, s \in (0, 1]$ korral, ütleme, et $\mathcal{K}$ on *$M(r, s)$-võrratust rahuldav ideaal* ruumis $\mathcal{L}$ (vt. [CNO] või nt. [O3, lk. 2814]).

Paneme tähele, et alamruum $\mathcal{K}$ on $M(1, 1)$-võrratust rahuldav ideaal Banachi ruumis $\mathcal{L}$ parajasti siis, kui ta on M-ideaal antud ruumis. M-ideaale on rohkem kui kolmekümne aasta jooksul uurinud paljud matemaatikud. M-ideaalide teooriale on pühendatud monograafia [HWW], mis ilmus 1993. aastal, ning mitmed hilisemad artiklid (nt. [KW], [LORW], [O2]).

Edaspidises olgu $X \neq \{0\}$ ja $Y \neq \{0\}$ mittetriviaalsed Banachi ruumid üle ühe ja sama korpuse $\mathbb{K}$, kus $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ või $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Sümboliga $L(X, Y)$ (kui $X = Y$, siis lühemalt $L(X)$) on tähistatud kõigi ruumist X ruumi Y tegutsevate pidevate lineaarsete operaatorite Banachi ruum ning sümboliga $K(X, Y)$ (kui $X = Y$, siis lühemalt $K(X)$) kõigi kompaktsete operaatorite alamruum ruumis $L(X, Y)$.

M-ideaalide teoorias on üheks huvipakkuvaks küsimuseks, milliste ruumide X ja Y korral $K(X, Y)$ on M-ideaal ruumis $L(X, Y)$. Huvi selle probleemi vastu tuntakse näiteks seetõttu, et M-ideaalil määratud igal pideval lineaarsel funktsionaalil leidub ühene normi säilitav jätk kogu ruumile. Lisaks annab M-ideaalide struktuuri olemasolu infot kaasruumi $L(X, Y)^*$ ehituse kohta. Sugugi vähetähtis pole ka M-ideaalide seos aproksimatsiooniomaduste teooriaga, kus veel tänapäevalgi on aastakümnetevanuseid kuulsaid lahendamist ootavaid probleeme.

Artikli [O1] üks põhitulemusi, mis on publitseeritud ka monograafias [HWW, lk. 301], näitab, kuidas kompaktsete operaatorite M-ideaalid tekitavad uusi kompaktsete operaatorite M-ideaale:

kui $K(X)$ ja $K(Y)$ on M-ideaalid vastavalt ruumides $L(X)$ ja $L(Y)$, siis $K(X, Y)$ on M-ideaal ruumis $L(X, Y)$.

Käesoleva magistritöö põhieesmärgiks on üldistada see tulemus M-ideaalidelt (ehk $M(1, 1)$-võrratust rahuldavatelt ideaalidelt) $M(r, s)$-võrratust rahuldavatele ideaalidele. Magistritöö põhitulemus, mis tõestatakse töö lõpus, on järgmine:

kui $K(X)$ ja $K(Y)$ on vastavalt $M(r_1, s_1)$- ja $M(r_2, s_2)$-võrratust rahuldavad ideaalid ruumides $L(X)$ ja $L(Y)$, kus $r_1 + \frac{s_1}{2} > 1$ ja $r_2 + \frac{s_2}{2} > 1$, siis $K(X, Y)$ on

$M(r_1 r_2, s_1 s_2)$-võrratust rahuldav ideaal ruumis $L(X,Y)$.

Magistritöö koosneb viiest osast. Esimeses ja teises osas tuuakse ära vajaminevad mõisted ja üldised tulemused. Kuna põhitulemuseni viiv tõestuskäik on küllaltki tehniline ning nõuab uute mõistete sissetoomist ja uurimist, siis magistritöö kolmandas osas tõestame alustuseks eespoolsõnastatud M-ideaalide tulemuse lähtudes selle originaaltõestusest artiklis [O1]. Järgides kolmandas osas väljaarendatud metoodikat ning tuginedes põhiliselt artiklis [O3] saadud tulemustele $M(r,s)$-võrratust rahuldavate ideaalide kohta, üldistame kolmanda osa põhitulemuse M-ideaalidelt $M(r,s)$-võrratust rahuldavatele ideaalidele. Saadud neljanda osa põhitulemus väidab, et ülaltoodud eeldustel on $K(X,Y)$ $M(r_1 r_2^2, s_1 s_2^2)$-võrratust rahuldav ideaal ruumis $L(X,Y)$. Magistritöö viiendas viimases osas töötame aga välja uue tõestusmetoodika, mis lisaks artiklile [O3] tugineb ka artiklitele [HO], [O2] ja [P]. See võimaldab tugevdada neljanda osa põhitulemust asendades parameetrid $r_1 r_2^2$ ja $s_1 s_2^2$ vastavalt parameetritega $r_1 r_2$ ja $s_1 s_2$.

Töös läheb vaja veel järgmisi tähistusi. Ruumi all mõistame Banachi ruumi ning alamruumi all kinnist alamruumi. Sümbol B_X märgib ruumi X kinnist ühikkera ning S_X tema ühiksfääri. Hulga $A \subset X$ kumera katte tähistame sümboliga $\operatorname{conv} A$, lineaarse katte $\operatorname{span} A$. Olgu I_X ruumi X ühikoperaator. Sümbol $J(X)$ tähistab ruumi $\operatorname{span}(K(X) \cup \{I_X\})$. Ruumi X kaasruum on $X^* = L(X, \mathbb{K})$. Kui $T \in L(X,Y)$, siis tema kaasoperaator $T^* \in L(Y^*, X^*)$. Operaatori T väärtustepiirkonda tähistame

$$\operatorname{ran} T = \{Tx : x \in X\}$$

ja tema tuuma

$$\ker T = \{x \in X : Tx = 0\}.$$

Kui $T_\alpha \in L(X)$ mingi indeksi α korral, siis tähisega T^α märgime operaatorit $I_X - T_\alpha$. Pere tähises jätame indeksite hulga märkimata, kui indeksite hulk selgub kontekstist või ei ole seda parajasti oluline rõhutada. Kui $x^{**} \in X^{**}$ ja $y^* \in Y^*$, siis sümboliga $x^{**} \otimes y^*$ tähistame pidevat lineaarset funktsionaali ruumil $L(X,Y)$, mis on defineeritud järgmiselt:

$$(x^{**} \otimes y^*)(T) = x^{**}(T^* y^*), \quad T \in L(X,Y).$$

Märgime, et $\|x^{**} \otimes y^*\| = \|x^{**}\| \|y^*\|$.

1. Üldised tulemused

Kompaktsete operaatorite M-ideaalide kirjeldamisel on osutunud võtmetingimuseks lähte- ja sihtruumi teatud struktuuriomadused (M) ja (M^*). Seejuures on oluline ka lähte- või sihtruumis tegutseva ning tugevas operaatortopoloogias ühikoperaatoriks koonduva erilise kompaktsete operaatorite pere olemasolu (vt. nt. teoreem 11). Järgnevates osades 1.1 ja 1.2 uurime neid tingimusi lähemalt.

Alamruumi omadus olla M-ideaal, või üldisemalt $M(r,s)$-võrratust rahuldav ideaal, tähendab erilise projektori, täpsemalt, teatud ideaaliprojektori (vt. Sissejuhatus) olemasolu. Osas 1.3 tõestatakse ideaaliprojektori oluline omadus.

Magistritöö põhitulemuste tõestusmetoodika toetub oluliselt ruumi $K(X,Y)$ kaasruumi kirjeldavale Feder-Saphari teoreemile, mis sõnastatakse osas 1.4. Märgime, et mõnikord nimetatakse seda tulemust ka Grothendik-Feder-Saphari teoreemiks.

1.1. Omadused (M) ja (M^*)

Pere $(x_\alpha) \subset X$ *koondub nõrgalt* (vt. nt. [M, lk. 213] või [DS, lk. 454]) elemendiks $x \in X$, kui

$$x^*(x_\alpha) \longrightarrow x^*(x) \quad \forall x^* \in X^*.$$

Märgime, et nõrgalt koonduv pere ei tarvitse olla tõkestatud, kuigi nõrgalt koonduv jada seda on.

Öeldakse, et ruumil X on *omadus* (M) (vt. [O1, lk. 76]), kui mistahes $u, v \in X$, $\|u\| \leq \|v\|$, ja tõkestatud nõrgalt nulliks koonduva pere $(x_\alpha) \subset X$ korral

$$\limsup_\alpha \|u + x_\alpha\| \leq \limsup_\alpha \|v + x_\alpha\|.$$

Kuigi artiklis [O1] kasutatakse siinkohal sümbolit (sM), on kaasaegsem tähistus (M) (vt. nt. [HWW, lk. 296]) ning Kaltoni originaalvariandis (vt. [K]) on tegu „omaduse (M) jadalise versiooniga". Analoogilist märkust tuleks silmas pidada omaduse (M^*) (vt. alljärgnevat) tähistuse juures.

Pere $(x^*_\alpha) \subset X^*$ *koondub $*$-nõrgalt* (vt. nt. [M, lk. 224] või [DS, lk. 500]) funktsionaaliks $x^* \in X^*$, kui

$$x^*_\alpha(x) \longrightarrow x^*(x) \quad \forall x \in X,$$

siinjuures kasutame ka tähist $w^*\text{-}\lim_\alpha x^*_\alpha = x^*$. Analoogiliselt nõrgalt koonduva perega, ei tarvitse ka $*$-nõrgalt koonduv pere tõkestatud olla.

Öeldakse, et ruumil X on *omadus* (M^*) (vt. [O1, lk. 76]), kui mistahes $u^*, v^* \in X^*$, $\|u^*\| \leq \|v^*\|$, ja tõkestatud $*$-nõrgalt nulliks koonduva pere $(x^*_\alpha) \subset X^*$ korral

$$\limsup_\alpha \|u^* + x^*_\alpha\| \leq \limsup_\alpha \|v^* + x^*_\alpha\|.$$

On teada (vt. nt. [HWW, lk. 297]), et kui ruumil X on omadus (M^*), siis on tal ka omadus (M). Vastupidine üldiselt ei kehti (vt. nt. [HWW, lk. 297]). Kui ruumil X on omadus (M^*), siis X on M-ideaal oma teises kaasruumis (vt. nt. [HWW, lk. 297]).

Lemma 1 (vt. [HWW, lk. 296–297]).
1. *Järgmised väited on samaväärsed.*

(a) *Ruumil X on omadus (M).*

(b) *Kui pered $(u_\alpha), (v_\alpha) \subset X$ on suhteliselt kompaktsed, kusjuures $\|u_\alpha\| \leq \|v_\alpha\|$ iga α korral, ja (x_α) on tõkestatud nõrgalt nulliks koonduv pere ruumis X, siis*

$$\limsup_\alpha \|u_\alpha + x_\alpha\| \leq \limsup_\alpha \|v_\alpha + x_\alpha\|.$$

2. *Järgmised väited on samaväärsed.*

(a^*) *Ruumil X on omadus (M^*).*

(b^*) *Kui pered $(u_\alpha^*), (v_\alpha^*) \subset X^*$ on suhteliselt kompaktsed, kusjuures $\|u_\alpha^*\| \leq \|v_\alpha^*\|$ iga α korral, ja (x_α^*) on tõkestatud $*$ - nõrgalt nulliks koonduv pere ruumis X^*, siis*

$$\limsup_\alpha \|u_\alpha^* + x_\alpha^*\| \leq \limsup_\alpha \|v_\alpha^* + x_\alpha^*\|.$$

Tõestus. Ilmselt kehtivad implikatsioonid $(b) \Rightarrow (a)$ ja $(b^*) \Rightarrow (a^*)$. Põhjendame veel vaid implikatsiooni $(a) \Rightarrow (b)$. (Implikatsioon $(a^*) \Rightarrow (b^*)$ tõestatakse analoogiliselt.)

Ülemise piirväärtuse mõiste kohaselt saame minna üle osaperele, mille korral

$$\lim_\beta \|u_\beta + x_\beta\| = \limsup_\alpha \|u_\alpha + x_\alpha\|$$

ning

$$\lim_\beta \|v_\beta + x_\beta\| = \limsup_\alpha \|v_\alpha + x_\alpha\|.$$

Oletame vastuväiteliselt, et

$$\lim_\beta \|u_\beta + x_\beta\| > \lim_\beta \|v_\beta + x_\beta\|.$$

Sobivad osapered $(u_\gamma) \subset (u_\beta)$ ja $(v_\gamma) \subset (v_\beta)$ koonduvad vastavalt piirelementideks $u, v \in X$. Siis $\|u\| \leq \|v\|$, kuid

$$\lim_\gamma \|u + x_\gamma\| = \lim_\beta \|u_\beta + x_\beta\| > \lim_\beta \|v_\beta + x_\beta\| = \lim_\gamma \|v + x_\gamma\|,$$

mis on vastuolus omadusega (M). □

Lemma 2 (vt. [O1, lk. 78–79]). *Olgu* $T \in B_{L(X,Y)}$.

1. *Kui ruumidel* X *ja* Y *on omadus* (M), *pered* $(v_\alpha) \subset X$ *ja* $(u_\alpha) \subset Y$ *on suhteliselt kompaktsed, kusjuures* $\|u_\alpha\| \leq \|v_\alpha\|$ *iga* α *korral, ning* (x_α) *on tõkestatud nõrgalt nulliks koonduv pere ruumis* X, *siis*

$$\limsup_\alpha \|u_\alpha + Tx_\alpha\| \leq \limsup_\alpha \|v_\alpha + x_\alpha\|.$$

2. *Kui ruumidel* X *ja* Y *on omadus* (M^*), *pered* $(u^*_\alpha) \subset X^*$ *ja* $(v^*_\alpha) \subset Y^*$ *on suhteliselt kompaktsed, kusjuures* $\|u^*_\alpha\| \leq \|v^*_\alpha\|$ *iga* α *korral, ning* (y^*_α) *on tõkestatud* $*$ *- nõrgalt nulliks koonduv pere ruumis* Y^*, *siis*

$$\limsup_\alpha \|u^*_\alpha + T^* y^*_\alpha\| \leq \limsup_\alpha \|v^*_\alpha + y^*_\alpha\|.$$

Tõestus. Tugineme raamatus [HWW, lk. 297] toodud suhteliselt skemaatilisele tõestusele.

1. Vaatleme esmalt juhtu $\|T\| = 1$. Olgu $\varepsilon > 0$. Leidub $x \in B_X$ nii, et

$$\|Tx\| \geq (1-\varepsilon)\|T\| = 1 - \varepsilon.$$

Iga indeksi α korral võtame $\bar{v}_\alpha = \|v_\alpha\|\, x$. Seega

$$\|\bar{v}_\alpha\| \leq \|v_\alpha\|$$

ja

$$\|(1-\varepsilon)\, u_\alpha\| = (1-\varepsilon)\, \|u_\alpha\| \leq \|Tx\|\, \|v_\alpha\| = \Big\| T(\|v_\alpha\|\, x) \Big\| = \|T\bar{v}_\alpha\|.$$

Paneme tähele, et pered $(\bar{v}_\alpha) \subset X$, $(T\bar{v}_\alpha) \subset Y$ ja $((1-\varepsilon)\, u_\alpha) \subset Y$ on suhteliselt kompaktsed ning (Tx_α) on tõkestatud nõrgalt nulliks koonduv pere ruumis Y. (Pidev lineaarne operaator teisendab tõkestatud hulga tõkestatud hulgaks ja nõrgalt nulliks koonduva pere nõrgalt nulliks koonduvaks pereks.) Lemma 1 väite (b) põhjal

$$\begin{aligned}
\limsup_\alpha \|(1-\varepsilon)\, u_\alpha + Tx_\alpha\| &\leq \limsup_\alpha \|T\bar{v}_\alpha + Tx_\alpha\| \leq \\
&\leq \limsup_\alpha \|T\| \|\bar{v}_\alpha + x_\alpha\| = \\
&= \limsup_\alpha \|\bar{v}_\alpha + x_\alpha\| \leq \\
&\leq \limsup_\alpha \|v_\alpha + x_\alpha\|.
\end{aligned}$$

Seega

$$\limsup_\alpha \|(1-\varepsilon)\, u_\alpha + Tx_\alpha\| \leq \limsup_\alpha \|v_\alpha + x_\alpha\|.$$

Nüüd

$$\begin{aligned}
\limsup_\alpha \|u_\alpha + Tx_\alpha\| &\leq \limsup_\alpha \|(1-\varepsilon)\, u_\alpha + Tx_\alpha + \varepsilon\, u_\alpha\| \leq \\
&\leq \limsup_\alpha \|(1-\varepsilon)\, u_\alpha + Tx_\alpha\| + \limsup_\alpha \|\varepsilon\, u_\alpha\| \leq \\
&\leq \limsup_\alpha \|v_\alpha + x_\alpha\| + \varepsilon\, \limsup_\alpha \|u_\alpha\|.
\end{aligned}$$

Minnes saadud võrratuses piirile protsessis $\varepsilon \longrightarrow 0$, saamegi

$$\limsup_{\alpha} \|u_\alpha + Tx_\alpha\| \leq \limsup_{\alpha} \|v_\alpha + x_\alpha\|.$$

Juhul $0 < \|T\| < 1$ võtame $\widetilde{T} = \frac{T}{\|T\|}$ ning $T = 0$ korral valime $\widetilde{T} \in L(X, Y)$ nii, et $\|\widetilde{T}\| = 1$ (märgime, et mittetriviaalsete ruumide X ja Y korral on see võimalik). Elemendi Tx_α saame esitada elementide $\widetilde{T}x_\alpha$ ja $-\widetilde{T}x_\alpha$ kumera kombinatsioonina, täpsemalt

$$Tx_\alpha = \lambda\, \widetilde{T}\, x_\alpha + (1-\lambda)\,(-\widetilde{T}\, x_\alpha),$$

kus $\lambda = \frac{1+\|T\|}{2} \in (0,1)$. Funktsionaali $\|u_\alpha + t\, \widetilde{T}\, x_\alpha\|,\ t \in [-1, 1]$ kumeruse tõttu

$$\begin{aligned} \|u_\alpha + Tx_\alpha\| &= \|u_\alpha + \lambda\, \widetilde{T}\, x_\alpha + (1-\lambda)\,(-\widetilde{T}\, x_\alpha)\| \leq \\ &\leq \max\Big\{\|u_\alpha + \widetilde{T}x_\alpha\|, \|-u_\alpha + \widetilde{T}x_\alpha\|\Big\}. \end{aligned}$$

Kuna $\|\widetilde{T}\| = 1$, siis tõestatu põhjal

$$\begin{aligned} \limsup_{\alpha} \|u_\alpha + Tx_\alpha\| &\leq \limsup_{\alpha}\ \max\Big\{\|u_\alpha + \widetilde{T}x_\alpha\|, \|-u_\alpha + \widetilde{T}x_\alpha\|\Big\} = \\ &= \max\Big\{\limsup_{\alpha} \|u_\alpha + \widetilde{T}x_\alpha\|, \limsup_{\alpha} \|-u_\alpha + \widetilde{T}x_\alpha\|\Big\} \leq \\ &\leq \max\Big\{\limsup_{\alpha} \|v_\alpha + x_\alpha\|, \limsup_{\alpha} \|v_\alpha + x_\alpha\|\Big\} = \\ &= \limsup_{\alpha} \|v_\alpha + x_\alpha\|. \end{aligned}$$

2. Vaadeldava osa tõestus on analoogiline osa 1 tõestusega. Vaatleme esmalt juhtu $\|T\| = 1$. Olgu $\varepsilon > 0$. Leidub $y^* \in B_{Y^*}$ nii, et

$$\|T^* y^*\| \geq (1-\varepsilon)\|T^*\| = 1 - \varepsilon.$$

Iga indeksi α korral võtame $\bar{v}^*_\alpha = \|v^*_\alpha\|\, y^*$. Seega

$$\|\bar{v}^*_\alpha\| \leq \|v^*_\alpha\|$$

ja

$$\|(1-\varepsilon)\, u^*_\alpha\| = (1-\varepsilon)\, \|u^*_\alpha\| \leq \|T^* y^*\|\, \|v^*_\alpha\| = \Big\|T^*(\|v^*_\alpha\|\, y^*)\Big\| = \|T^* \bar{v}^*_\alpha\|.$$

Paneme tähele, et pered $(\bar{v}^*_\alpha) \subset Y^*$, $(T^* \bar{v}^*_\alpha) \subset X^*$ ja $((1-\varepsilon)\, u^*_\alpha) \subset X^*$ on suhteliselt kompaktsed ning $(T^* y^*_\alpha)$ on tõkestatud $*$-nõrgalt nulliks koonduv pere ruumis X^*. (Pideva lineaarse operaatori kaasoperaator teisendab $*$-nõrgalt nulliks koonduva pere $*$-nõrgalt nulliks koonduvaks pereks.) Lemma 1 väite (b^*) põhjal

$$\begin{aligned}
\limsup_\alpha \|(1-\varepsilon)\, u_\alpha^* + T^* y_\alpha^*\| &\leq \limsup_\alpha \|T^* \bar{v}_\alpha^* + T^* y_\alpha^*\| \leq \\
&\leq \limsup_\alpha \|T^*\| \|\bar{v}_\alpha^* + y_\alpha^*\| = \\
&= \limsup_\alpha \|\bar{v}_\alpha^* + y_\alpha^*\| \leq \\
&\leq \limsup_\alpha \|v_\alpha^* + y_\alpha^*\|.
\end{aligned}$$

Seega

$$\limsup_\alpha \|(1-\varepsilon)\, u_\alpha^* + T^* y_\alpha^*\| \leq \limsup_\alpha \|v_\alpha^* + y_\alpha^*\|.$$

Minnes piirile protsessis $\varepsilon \longrightarrow 0$, saamegi

$$\limsup_\alpha \|u_\alpha^* + T^* y_\alpha^*\| \leq \limsup_\alpha \|v_\alpha^* + y_\alpha^*\|.$$

Juhul $0 < \|T\| < 1$ võtame $\widetilde{T^*} = \frac{T^*}{\|T^*\|}$ ja $T^* = 0$ korral valime $\widetilde{T^*} \in L(Y^*, X^*)$ nii, et $\|\widetilde{T^*}\| = 1$. Elemendi $T^* y_\alpha^*$ saame esitada elementide $\widetilde{T^*} y_\alpha^*$ ja $-\widetilde{T^*} y_\alpha^*$ kumera kombinatsioonina, täpsemalt

$$T^* y_\alpha^* = \lambda\, \widetilde{T^*}\, y_\alpha^* + (1-\lambda)\, (-\widetilde{T^*}\, y_\alpha^*),$$

kus $\lambda = \frac{1+\|T^*\|}{2} \in (0,1)$. Funktsionaali $\|u_\alpha^* + t\widetilde{T^*}\, y_\alpha^*\|,\ t \in [-1,1]$ kumeruse tõttu

$$\begin{aligned}
\|u_\alpha^* + T^* y_\alpha^*\| &= \|u_\alpha^* + \lambda\, \widetilde{T^*}\, y_\alpha^* + (1-\lambda)\, (-\widetilde{T^*}\, y_\alpha^*)\| \leq \\
&\leq \max\Big\{ \|u_\alpha^* + \widetilde{T^*} y_\alpha^*\|, \|-u_\alpha^* + \widetilde{T^*} y_\alpha^*\| \Big\}.
\end{aligned}$$

Kuna $\|\widetilde{T^*}\| = 1$, siis tõestuse esimesele poolele tuginedes

$$\begin{aligned}
\limsup_\alpha \|u_\alpha^* + T^* y_\alpha^*\| &\leq \limsup_\alpha\ \max\Big\{ \|u_\alpha^* + \widetilde{T^*} y_\alpha^*\|, \|-u_\alpha^* + \widetilde{T^*} y_\alpha^*\| \Big\} = \\
&= \max\Big\{ \limsup_\alpha \|u_\alpha^* + \widetilde{T^*} y_\alpha^*\|, \limsup_\alpha \|-u_\alpha^* + \widetilde{T^*} y_\alpha^*\| \Big\} \leq \\
&\leq \max\Big\{ \limsup_\alpha \|v_\alpha^* + y_\alpha^*\|, \limsup_\alpha \|v_\alpha^* + y_\alpha^*\| \Big\} = \\
&= \limsup_\alpha \|v_\alpha^* + y_\alpha^*\|.
\end{aligned}$$

$\square$

1.2. Operaatorite koondumine

Öeldakse, et pere $(K_\alpha) \subset L(X,Y)$ koondub operaatoriks $K \in L(X,Y)$ *tugevas operaatortopoloogias* (vt. nt. [DS, lk. 513]), kui

$$K_\alpha x \longrightarrow Kx \quad \forall x \in X.$$

Pere $(K_\alpha) \subset L(X,Y)$ koondub operaatoriks $K \in L(X,Y)$ *nõrgas operaatortopoloogias* (vt. nt. [DS, lk. 513]), kui

$$y^*(K_\alpha x) \longrightarrow y^*(Kx) \quad \forall x \in X,\ \forall y^* \in Y^*.$$

Ruumis $L(X,Y)$ on iga kumera hulga sulund tugevas operaatortopoloogias võrdne tema sulundiga nõrgas operaatortopoloogias (vt. [DS, lk. 514]). Mõnikord räägitakse sellest tulemusest kui Mazuri teoreemi üldistusest (vrd. nt. [M, teoreem 2.5.16]). See asjaolu võimaldab nõrgas operaatortopoloogias koonduvalt perelt üle minna punktiviisi koonduvale perele.

Lemma 3. *Olgu pere $(K_\alpha)_{\alpha\in A} \subset B_{K(X)}$ selline, et*

$$K_\alpha^* x^* \longrightarrow x^* \quad \forall x^* \in X^*.$$

Siis leidub pere $(\bar{K}_{\bar\alpha})$, kus $\bar{K}_{\bar\alpha} \in \operatorname{conv}(K_\alpha)_{\alpha\succ\gamma},\ \gamma \in A$, nii, et

$$\bar{K}_{\bar\alpha} x \longrightarrow x \quad \forall x \in X.$$

Tõestus. Kuna

$$\begin{aligned} K_\alpha^* x^* \longrightarrow x^* \quad \forall x^* \in X^* \quad &\Longrightarrow \quad (K_\alpha^* x^*)x \longrightarrow x^*(x) \quad \forall x^* \in X^*,\ \forall x \in X \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \quad x^*(K_\alpha x) \longrightarrow x^*(x) \quad \forall x^* \in X^*,\ \forall x \in X, \end{aligned}$$

siis $K_\alpha \longrightarrow I_X$ nõrgas operaatortopoloogias. Seega võib öelda, et suvalise $\gamma \in A$ korral $I_X \in \overline{\operatorname{conv}}(K_\alpha)_{\alpha\succ\gamma}$ nõrgas operaatortopoloogias. Arvestades, et kumera hulga sulundid nõrgas ja tugevas operaatortopoloogias ühtivad, saame et (suvalise $\gamma \in A$ korral) $I_X \in \overline{\operatorname{conv}}(K_\alpha)_{\alpha\succ\gamma}$ tugevas operaatortopoloogias.

Olgu $\mathcal{B}$ operaatori I_X mingi ümbruste baas tugevas operaatortopoloogias. Iga $\gamma \in A$ ja $U \in \mathcal{B}$ korral eksisteerib selline $\bar{K}_{(\gamma,U)} \in \operatorname{conv}(K_\alpha)_{\alpha\succ\gamma}$, et $\bar{K}_{(\gamma,U)} \in U$. Defineerime hulgal

$$\bar{A} = \{(\gamma, U) : \gamma \in A,\ U \in \mathcal{B}\}$$

osalise järjestuse järgmiselt: kui $\bar\alpha_1 = (\gamma_1, U_1),\ \bar\alpha_2 = (\gamma_2, U_2) \in \bar{A}$, siis

$$\bar\alpha_1 \succ \bar\alpha_2 \iff \gamma_1 \succ \gamma_2,\ U_1 \subset U_2.$$

Niisiis on $\bar{A}$ suunatud hulk ning konstrueeritud pere $(\bar{K}_{\bar\alpha})_{\bar\alpha\in\bar{A}} \subset B_{K(X)}$ koondub, $\bar{K}_{\bar\alpha} \longrightarrow I_X$, ruumi $L(X)$ tugevas operaatortopoloogias. □

Märkus. Kuna $\bar{K}_{\bar{\alpha}} \in \operatorname{conv}(K_\alpha)_{\alpha \succ \gamma}$, $\gamma \in A$, ja $K_\alpha^* x^* \longrightarrow x^*$ iga $x^* \in X^*$ korral, siis ka $\bar{K}_{\bar{\alpha}}^* x^* \longrightarrow x^*$ iga $x^* \in X^*$ korral. Seega tähistades $A = \bar{A}$ ja $K_\alpha = \bar{K}_{\bar{\alpha}}$ võime üldisust kitsendamata eeldada, et $K_\alpha x \longrightarrow x$ iga $x \in X$ niipea, kui $K_\alpha^* x^* \longrightarrow x^*$ iga $x^* \in X^*$ korral.

Operaatorite pere punktiviisi koondumisest ei järeldu üldiselt selle pere normi järgi koondumine. Lemma 4 näitab, kuidas me sel juhul saame siiski teatud operaatorite pere koondumise normi järgi.

Lemma 4. 1. *Olgu pere* $(K_\alpha) \subset B_{K(X)}$ *selline, et*

$$K_\alpha^* x^* \longrightarrow x^* \quad \forall x^* \in X^*.$$

Siis

$$\lim SK_\alpha = S \quad \forall S \in K(X, Y).$$

2. *Olgu pere* $(K_\alpha) \subset B_{K(X)}$ *selline, et*

$$K_\alpha x \longrightarrow x \quad \forall x \in X.$$

Siis

$$\lim K_\alpha S = S \quad \forall S \in K(Y, X).$$

Tõestus. 1. Fikseerime vabalt $\varepsilon > 0$. Peame näitama, et

$$\exists \alpha_0 \quad (\|S - SK_\alpha\| \leq \varepsilon \quad \forall \alpha \succ \alpha_0).$$

Suvalise indeksi α korral

$$\begin{aligned}
\|S - SK_\alpha\| &= \|S^* - K_\alpha^* S^*\| = \\
&= \|(I_{X^*} - K_\alpha^*)S^*\| = \\
&= \sup_{y^* \in B_{Y^*}} \|(I_{X^*} - K_\alpha^*)S^* y^*\| = \\
&= \sup_{x^* \in U} \|x^* - K_\alpha^* x^*\|,
\end{aligned}$$

kus $U = S^*(B_{Y^*})$. Schauderi teoreemi (vt. nt. [OO, lk. 211]) põhjal on operaator S^* kompaktne. Järelikult on hulk U suhteliselt kompaktne ning Hausdorffi teoreemi (vt. nt. [OO, lk. 41]) kohaselt leidub tal lõplik $\frac{\varepsilon}{3}$ - võrk ehk leiduvad $n \in \mathbb{N}$ ja $x_1^*, ..., x_n^* \in U$ nii, et

$$\forall x^* \in U \ \exists i \in \{1, ..., n\} \quad \|x^* - x_i^*\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Kui $x^* \in U$ ning $x_i^* \in U$ on vastav $\frac{\varepsilon}{3}$ - võrgu element, siis iga α korral

$$\begin{aligned}
\|x^* - K_\alpha^* x^*\| &= \|x^* - x_i^* + x_i^* - K_\alpha^* x_i^* + K_\alpha^* x_i^* - K_\alpha^* x^*\| \leq \\
&\leq \|x^* - x_i^*\| + \|x_i^* - K_\alpha^* x_i^*\| + \|K_\alpha^* x_i^* - K_\alpha^* x^*\| \leq \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3} + \|x_i^* - K_\alpha^* x_i^*\| + \|K_\alpha^*\| \|x_i^* - x^*\| \leq \\
&\leq \frac{2\varepsilon}{3} + \|x_i^* - K_\alpha^* x_i^*\|.
\end{aligned}$$

Kuna $K_\alpha^* x_i^* \underset{\alpha}{\longrightarrow} x_i^*$ iga $i = 1, \ldots, n$ korral, siis leidub selline α_0, et $\alpha \succ \alpha_0$ korral

$$\|K_\alpha^* x_i^* - x_i^*\| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$

Järelikult

$$\begin{aligned}\|S - SK_\alpha\| &= \sup_{x^* \in U} \|x^* - K_\alpha^* x^*\| \leq \\ &\leq \frac{2\varepsilon}{3} + \max_{1 \leq i \leq n} \|x_i^* - K_\alpha^* x_i^*\| \leq \\ &\leq \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \quad \forall \alpha \succ \alpha_0.\end{aligned}$$

Seega tõepoolest $\lim SK_\alpha = S$.

2. Analoogiliselt eelmise osaga fikseerime vabalt $\varepsilon > 0$. Peame näitama, et

$$\exists \alpha_0 \quad (\|S - K_\alpha S\| \leq \varepsilon \quad \forall \alpha \succ \alpha_0).$$

Suvalise indeksi α korral

$$\begin{aligned}\|S - K_\alpha S\| &= \|(I_X - K_\alpha)S\| = \\ &= \sup_{y \in B_Y} \|(I_X - K_\alpha)Sy\| = \\ &= \sup_{x \in U} \|x - K_\alpha x\|,\end{aligned}$$

kus $U = S(B_Y)$. Kuna U on suhteliselt kompaktne, siis leidub tal lõplik $\frac{\varepsilon}{3}$ - võrk ehk leiduvad $n \in \mathbb{N}$ ja $x_1, \ldots, x_n \in U$ nii, et

$$\forall x \in U \ \exists i \in \{1, \ldots, n\} \quad \|x - x_i\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Kui $x \in U$ ning $x_i \in U$ on vastav $\frac{\varepsilon}{3}$ - võrgu element, siis iga α korral

$$\begin{aligned}\|x - K_\alpha x\| &= \|x - x_i + x_i - K_\alpha x_i + K_\alpha x_i - K_\alpha x\| \leq \\ &\leq \|x - x_i\| + \|x_i - K_\alpha x_i\| + \|K_\alpha x_i - K_\alpha x\| \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \|x_i - K_\alpha x_i\| + \|K_\alpha\| \|x_i - x\| \leq \\ &\leq \frac{2\varepsilon}{3} + \|x_i - K_\alpha x_i\|.\end{aligned}$$

Kuna $K_\alpha x_i \underset{\alpha}{\longrightarrow} x_i$ iga $i = 1, \ldots, n$ korral, siis leidub selline α_0, et $\alpha \succ \alpha_0$ korral

$$\|K_\alpha x_i - x_i\| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$

Järelikult

$$\begin{aligned}\|S - K_\alpha S\| &= \sup_{x\in U} \|x - K_\alpha x\| \le \\ &\le \frac{2\varepsilon}{3} + \max_{1\le i\le n} \|x_i - K_\alpha x_i\| \le \\ &\le \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \quad \forall \alpha \succ \alpha_0.\end{aligned}$$

Seega tõepoolest $\lim K_\alpha S = S$. □

1.3. Ideaaliprojektor

Operaatorit $P \in L(X,X)$ nimetatakse *projektoriks* ruumis X, kui $P^2 = P$. Paneme tähele, et kui $P \neq 0$, siis projektori norm $\|P\| \ge 1$, sest $\|P\| \le \|P\|^2$. Ideaaliprojektoril (vt. Sissejuhatust) on seega vähim võimalik positiivne norm. Märgime, et ideaaliprojektorit P ei pruugi leiduda isegi siis, kui tema definitsioonis lubada $\|P\| > 1$.

Järgmine tulemus annab ideaaliprojektori olulise omaduse.

Lemma 5. *Olgu $K(X,Y)$ ideaal ruumis $L(X,Y)$ ja $P : L(X,Y)^* \longrightarrow L(X,Y)^*$ vastav ideaaliprojektor. Siis*

$$\operatorname{ran} P \cong K(X,Y)^*,$$

kusjuures funktsionaali $f \in L(X,Y)^*$ kujutis $Pf \in \operatorname{ran} P$ samastatakse tema ahendiga $f|_{K(X,Y)} = Pf|_{K(X,Y)} \in K(X,Y)^*$. Täpsemalt, kujutus

$$\varphi : K(X,Y)^* \longrightarrow \operatorname{ran} P, \quad \varphi(g) = Pf,$$

kus $g \in K(X,Y)^*$ ja $f \in L(X,Y)^*$ on tema mingi normi säilitav jätk, on isomeetriline isomorfism.

Tõestus. Vaja on näitame, et φ on lineaarne sürjektsioon, mis säilitab normi.

Veendume esmalt definitsiooni korrektsuses. Olgu $g \in K(X,Y)^*$ ning $f_1, f_2 \in L(X,Y)^*$ tema suvalised jätkud; siis $Pf_1 = Pf_2$, sest $f_1 - f_2 \in K(X,Y)^\perp = \ker P$.

Kujutus φ on lineaarne. Tõepoolest, olgu $\alpha \in \mathbb{K}$ ja $g_1, g_2 \in K(X,Y)^*$, mille normi säilitavad jätkud on vastavalt $f_1, f_2 \in L(X,Y)^*$. Kui $f \in L(X,Y)^*$ on funktsionaali $g_1 + \alpha g_2$ normi säilitav jätk, siis $f = (f_1 + \alpha f_2) \in \ker P$ ja

$$\varphi(g_1 + \alpha\, g_2) = Pf = P(f_1 + \alpha\, f_2) = Pf_1 + \alpha\, Pf_2 = \varphi(g_1) + \alpha\, \varphi(g_2).$$

Olgu $f \in L(X,Y)^*$. Siis $\varphi(f|_{K(X,Y)}) = Pf$ ja on selge, et tegu on sürjektsiooniga.

Paneme veel tähele, et φ on isomeetria. Ühtpidi,

$$\|\varphi(f|_{K(X,Y)})\| = \|Pf\| \le \|P\|\|f\| = \|f|_{K(X,Y)}\|,$$

teistpidi,

$$\|Pf\| \geq \|f|_{K(X,Y)}\|,$$

sest ka Pf on funktsionaali $f|_{K(X,Y)}$ jätk.

Seega on φ tõepoolest isomeetriline isomorfism. $\square$

1.4. Feder-Saphari teoreem

Öeldakse, et kaasruumil X^* on *Radon-Nikodými omadus*, kui sellest, et alamruum $Z \subset X$ on separaabel, järeldub, et Z^* on separaabel.

On teada (vt. [FS, teoreem 1]), et Radon-Nikodými omaduse eeldusel on kompaktsete operaatorite kaasruum kirjeldatav teatavate lineaarsete operaatorite abil. Tulenevalt funktsionaalide $x^{**} \otimes y^* \in L(X,Y)^*$ definitsioonist (vt. Sissejuhatus), on selge, et

$$\operatorname{span}\{x^{**} \otimes y^*|_{K(X,Y)} : x^{**} \in X^{**},\, y^* \in Y^*\} \subset K(X,Y)^*.$$

Osutub, et viimatidefineeritud hulk on ruumis $K(X,Y)^*$ kõikjal tihe.

Teoreem 6 (vrd. [FS, teoreem 1])**.** *Kui X^{**} või Y^* on Radon-Nikodými omadusega, siis*

$$K(X,Y)^* = \overline{\operatorname{span}}\{x^{**} \otimes y^*|_{K(X,Y)} : x^{**} \in X^{**},\, y^* \in Y^*\}.$$

2. Johnsoni projektor

2.1. Definitsioon

Käesoleva töö seisukohalt on otstarbekas sisse tuua artikli [P] eeskujul Johnsoni projektori mõiste, mis on motiveeritud alljärgnevast J. Johnsoni poolt 1979. aastal tõestatud tulemusest.

Lemma 7 (vt. [J, lemma 1])**.** 1. *Olgu pere* $(K_\alpha) \subset B_{K(X)}$ *selline, et*

$$K_\alpha^* x^* \longrightarrow x^* \quad \forall x^* \in X^*.$$

Kui pere (K_α) *koondub* $*$*-nõrgalt ruumis* $K(X)^{**}$ *siis* $P : L(X,Y)^* \longrightarrow L(X,Y)^*$*, kus*

$$(Pf)(T) = \lim_\alpha f(TK_\alpha) \quad \forall f \in L(X,Y)^*, \ \forall T \in L(X,Y),$$

on projektor, $\|P\| = 1$ *ning* $\ker P = K(X,Y)^\perp$.

2. *Olgu pere* $(K_\alpha) \subset B_{K(X)}$ *selline, et*

$$K_\alpha x \longrightarrow x \quad \forall x \in X.$$

Kui pere (K_α) *koondub* $*$*-nõrgalt ruumis* $K(X)^{**}$*, siis* $P : L(Y,X)^* \longrightarrow L(Y,X)^*$*, kus*

$$(Pf)(T) = \lim_\alpha f(K_\alpha T) \quad \forall f \in L(Y,X)^*, \ \forall T \in L(Y,X),$$

on projektor, $\|P\| = 1$ *ning* $\ker P = K(Y,X)^\perp$.

Märkus. Alaoglu teoreemi (vt. nt. [M, lk. 245]) kohaselt saame igast perest $(K_\alpha) \subset B_{K(X)}$ eraldada ruumis $K(X)^{**}$ $*$-nõrgalt koonduva osapere.

Tõestus. 1. Fikseerime vabalt $f \in L(X,Y)^*$ ja $T \in L(X,Y)$. Veendume kõigepealt, et P on korrektselt defineeritud kujutus. Selleks piisab näidata, et eksisteerib $\lim_\alpha f(TK_\alpha)$. Vaatleme operaatorit

$$\mathfrak{T} \in L(K(X), L(X,Y)), \quad \mathfrak{T}(S) = TS \quad \forall S \in K(X).$$

Kuna $\mathfrak{T}^* f \in K(X)^*$ ja (K_α) koondub $*$-nõrgalt, siis eksisteerib piirväärtus

$$\lim_\alpha (\mathfrak{T}^* f)(K_\alpha) = \lim_\alpha f(\mathfrak{T} K_\alpha) = \lim_\alpha f(TK_\alpha).$$

Ilmselt P on lineaarne ning

$$|(Pf)(T)| = |\lim_\alpha f(TK_\alpha)| = \lim_\alpha |f(TK_\alpha)| \leq \limsup_\alpha \|f\|\|T\|\|K_\alpha\| \leq \|f\|\|T\|.$$

Järelikult $\|P\| \leq 1$.

Kui $T \in K(X,Y)$, siis lemma 4 põhjal $\lim_\alpha TK_\alpha = T$ ja seega

$$f(T) = f(\lim_\alpha TK_\alpha) = \lim_\alpha f(TK_\alpha) = (Pf)(T).$$

Järelikult $f - Pf \in K(X,Y)^\perp$, mille põhjal $\ker P \subset K(X,Y)^\perp$ ning P on projektor, kui $K(X,Y)^\perp \subset \ker P$. Viimane sisalduvus aga kehtib, sest $f \in K(X,Y)^\perp$ korral alati $TK_\alpha \in K(X,Y)$ ja seega

$$(Pf)(T) = \lim_\alpha f(TK_\alpha) = \lim_\alpha 0 = 0.$$

Kui $P = 0$, siis $K(X,Y)^\perp = \ker P = L(X,Y)^*$, mis on vastuolus asjaoluga, et $K(X,Y) \neq \{0\}$. Seega $P \neq 0$.

2. Fikseerime vabalt $f \in L(Y,X)^*$ ja $T \in L(Y,X)$. Veendume kõigepealt, et P on korrektselt defineeritud kujutus. Selleks piisab näidata, et eksisteerib $\lim_\alpha f(K_\alpha T)$. Vaatleme operaatorit

$$\mathfrak{T} \in L(K(X), L(Y,X)), \quad \mathfrak{T}(S) = ST \quad \forall S \in K(K).$$

Kuna $\mathfrak{T}^* f \in K(X)^*$ ja (K_α) koondub $*$-nõrgalt, siis eksisteerib piirväärtus

$$\lim_\alpha (\mathfrak{T}^* f)(K_\alpha) = \lim_\alpha f(\mathfrak{T} K_\alpha) = \lim_\alpha f(K_\alpha T).$$

Ilmselt P on lineaarne ning

$$|(Pf)(T)| = |\lim_\alpha f(K_\alpha T)| = \lim_\alpha |f(K_\alpha T)| \leq \limsup_\alpha \|f\|\|K_\alpha\|\|T\| \leq \|f\|\|T\|.$$

Järelikult $\|P\| \leq 1$.

Kui $T \in K(Y,X)$, siis lemma 4 põhjal $\lim_\alpha K_\alpha T = T$ ja seega

$$f(T) = f(\lim_\alpha K_\alpha T) = \lim_\alpha f(K_\alpha T) = (Pf)(T).$$

Järelikult $f - Pf \in K(Y,X)^\perp$, mille põhjal $\ker P \subset K(Y,X)^\perp$. Ning P on projektor, kui $K(Y,X)^\perp \subset \ker P$. Viimane sisalduvus aga kehtib, sest $f \in K(X,Y)^\perp$ korral alati $TK_\alpha \in K(Y,X)$ ja seega

$$(Pf)(T) = \lim_\alpha f(K_\alpha T) = \lim_\alpha 0 = 0.$$

Analoogiliselt esimese osaga võime veenduda, et $P \neq 0$. $\square$

Operaatorit $P_r : L(X,Y)^* \longrightarrow L(X,Y)^*$, mille korral

$$(P_r f)(T) = \lim_\alpha f(TK_\alpha) \quad \forall f \in L(X,Y)^*, \ \forall T \in L(X,Y),$$

kus pere $(K_\alpha) \subset B_{K(X)}$ on selline, et

$$K_\alpha x \longrightarrow x \quad \forall x \in X, \qquad K_\alpha^* x^* \longrightarrow x^* \quad \forall x^* \in X^*,$$

nimetame *parempoolseks Johnsoni projektoriks.*
Operaatorit $P_l : L(X,Y)^* \longrightarrow L(X,Y)^*$, mille korral

$$(P_l f)(T) = \lim_\alpha f(K_\alpha T) \quad \forall f \in L(X,Y)^*, \ \forall T \in L(X,Y),$$

kus pere $(K_\alpha) \subset B_{K(Y)}$ on selline, et

$$K_\alpha y \longrightarrow y \quad \forall y \in Y, \qquad K_\alpha^* y^* \longrightarrow y^* \quad \forall y^* \in Y^*,$$

nimetame *vasakpoolseks Johnsoni projektoriks.* Nende mõlema operaatori ühise nimetusena räägime *Johnsoni projektorist.* Nagu nähtub lemma 7 tõestusest, on Johnsoni projektor ideaaliprojektor.

2.2. Omadused

Johnsoni projektori ühe omadusena võib tähele panna, et ta jätab teatavad pidevad lineaarsed funktsionaalid paigale ehk käitub nendel ühikoperaatorina.

Lemma 8. *Olgu P Johnsoni projektor. Siis*

$$P(x^{**} \otimes y^*) = x^{**} \otimes y^* \quad \forall x^{**} \in X^{**}, \ \forall y^* \in Y^*.$$

Tõestus. Fikseerime suvaliselt funktsionaali $x^{**} \otimes y^* \in L(X,Y)^*$. Lemma tõestuseks on vaja näidata, et

$$(P(x^{**} \otimes y^*))(T) = (x^{**} \otimes y^*)(T) \quad \forall T \in L(X,Y).$$

Fikseerime vabalt $T \in L(X,Y)$. Kasutades lemmat 4, saame parempoolse Johnsoni projektori korral

$$\begin{aligned}(P(x^{**} \otimes y^*))(T) &= \lim_\alpha (x^{**} \otimes y^*)(TK_\alpha) = \\ &= \lim_\alpha x^{**}(K_\alpha^* T^* y^*) = x^{**}(T^* y^*) = \\ &= (x^{**} \otimes y^*)(T)\end{aligned}$$

ja vasakpoolse Johnsoni projektori korral

$$\begin{aligned}(P(x^{**} \otimes y^*))(T) &= \lim_\alpha (x^{**} \otimes y^*)(K_\alpha T) = \\ &= \lim_\alpha x^{**}(T^* K_\alpha^* y^*) = x^{**}(T^* y^*) = \\ &= (x^{**} \otimes y^*)(T).\end{aligned}$$

Sellega on väite kehtivus tõestatud. $\square$

Radon-Nikodými omaduse (vt. Feder-Saphari teoreem) mõju Johnsoni projektorile näeb kahes järgmises tulemuses.

Lause 9. *Kui X^{**} või Y^* on Radon-Nikodými omadusega, siis Johnsoni projektor on ühene.*

Tõestus. Olgu Q ja P Johnsoni projektorid ja $f \in L(X,Y)^*$. Kasutades lemmat 5 saame, et

$$Pf = \varphi(f|_{K(X,Y)}), \quad Qf = \psi(f|_{K(X,Y)}),$$

kus φ ja ψ on projektoritele P ja Q vastavad isomeetrilised isomorfismid. Seega on lause tõestuseks vaja näidata, et

$$\varphi f = \psi f \quad \forall f \in K(X,Y)^*.$$

Feder-Saphari teoreemi põhjal (vt. teoreem 6)

$$K(X,Y)^* = \overline{\operatorname{span}}\{x^{**} \otimes y^*|_{K(X,Y)} : x^{**} \in X^{**},\ y^* \in Y^*\}.$$

Kuna $x^{**} \otimes y^*$ on funktsionaali $x^{**} \otimes y^*|_{K(X,Y)}$ normi säilitav jätk, siis jääb vaid kasutada lemmat 8, saamaks

$$\varphi(x^{**} \otimes y^*|_{K(X,Y)}) = P(x^{**} \otimes y^*) = x^{**} \otimes y^* = Q(x^{**} \otimes y^*) = \psi(x^{**} \otimes y^*|_{K(X,Y)})$$

iga $x^{**} \otimes y^* \in L(X,Y)^*$ korral. $\square$

Teoreem 10 (vt. [P, lemma 1.2])**.** *Olgu X^{**} või Y^* Radon-Nikodými omadusega ja olgu P Johnsoni projektor ruumil $L(X,Y)^*$. Siis kehtivad järgmised väited.*

1. *Kui $(K_\alpha) \subset B_{K(X)}$ on selline, et*

$$K_\alpha x \longrightarrow x \quad \forall x \in X, \quad K_\alpha^* x^* \longrightarrow x^* \quad \forall x^* \in X^*,$$

siis

$$\lim_\alpha Pf(TK_\alpha) = Pf(T) \quad \forall f \in L(X,Y)^*,\ \forall T \in L(X,Y).$$

2. *Kui $(K_\alpha) \subset B_{K(Y)}$ on selline, et*

$$K_\alpha y \longrightarrow y \quad \forall y \in Y, \quad K_\alpha^* y^* \longrightarrow y^* \quad \forall y^* \in Y^*,$$

siis

$$\lim_\alpha Pf(K_\alpha T) = Pf(T) \quad \forall f \in L(X,Y)^*,\ \forall T \in L(X,Y).$$

Tõestus. 1. Fikseerime suvaliselt $f \in L(X,Y)^*$, $T \in L(X,Y)$ ja $\varepsilon > 0$. Peame näitama, et

$$\exists \alpha_0 \quad |Pf(T) - Pf(TK_\alpha)| < \varepsilon \quad \forall \alpha \succ \alpha_0.$$

Kuna

$$K(X,Y)^* = \overline{\operatorname{span}}\{x^{**} \otimes y^*|_{K(X,Y)} : x^{**} \in X^{**},\ y^* \in Y^*\}$$

(vt. teoreem 6), siis eksisteerib

$$g = \sum_{i=1}^{n} x_i^{**} \otimes y_i^*, \quad x_i^{**} \in X^{**},\ y_i^* \in Y^*,$$

nii, et

$$\|f|_{K(X,Y)} - g|_{K(X,Y)}\| < \frac{\varepsilon}{3\|T\|}.$$

Seega lemma 5 kohaselt

$$\|Pf - Pg\| = \|f|_{K(X,Y)} - g|_{K(X,Y)}\| < \frac{\varepsilon}{3\|T\|}.$$

Tulenevalt pere (K_α) valikust, eksisteerib α_0 nii, et iga $\alpha \succ \alpha_0$ korral

$$\|T^* y_i^* - K_\alpha^* T^* y_i^*\| < \frac{\varepsilon}{3n\|x_i^{**}\|}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Niisiis, arvestades, et $Pg = g$ (vt. lemma 8), saame suvalise $\alpha \succ \alpha_0$ korral

$$\begin{aligned}
|Pf(T) - Pf(TK_\alpha)| &= |Pf(T) - Pg(T) + Pg(T) - Pg(TK_\alpha) + \\
&\quad + Pg(TK_\alpha) - Pf(TK_\alpha)| \le \\
&\le \|Pf - Pg\|\|T\| + |Pg(T - TK_\alpha)| + \\
&\quad + \|Pg - Pf\|\|T\|\|K_\alpha\| < \\
&< \frac{2\varepsilon}{3} + |\sum_{i=1}^{n} x_i^{**}((T - TK_\alpha)^* y_i^*)| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

2. Teoreemi teine osa tõestatakse analoogiliselt. Fikseerime suvaliselt $f \in L(X,Y)^*$, $T \in L(X,Y)$ ja $\varepsilon > 0$. Peame näitama, et

$$\exists \alpha_0 \quad |Pf(T) - Pf(K_\alpha T)| < \varepsilon \quad \forall \alpha \succ \alpha_0.$$

Kuna

$$K(X,Y)^* = \overline{\operatorname{span}}\{x^{**} \otimes y^*|_{K(X,Y)} : x^{**} \in X^{**},\ y^* \in Y^*\}$$

(vt. teoreem 6), siis eksisteerib

$$g = \sum_{i=1}^{n} x_i^{**} \otimes y_i^*, \quad x_i^{**} \in X^{**},\ y_i^* \in Y^*,$$

nii, et

$$\|f|_{K(X,Y)} - g|_{K(X,Y)}\| < \frac{\varepsilon}{3\|T\|}.$$

Seega lemma 5 kohaselt

$$\|Pf - Pg\| = \|f|_{K(X,Y)} - g|_{K(X,Y)}\| < \frac{\varepsilon}{3\|T\|}.$$

Tulenevalt pere (K_α) valikust, eksisteerib α_0 nii, et iga $\alpha \succ \alpha_0$ korral

$$\|T^* y_i^* - T^* K_\alpha^* y_i^*\| < \frac{\varepsilon}{3n\|x_i^{**}\|}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Niisiis arvestades, et $Pg = g$ (vt. lemma 8), saame suvalise $\alpha \succ \alpha_0$ korral

$$\begin{aligned}
|Pf(T) - Pf(K_\alpha T)| &= |Pf(T) - Pg(T) + Pg(T) - Pg(TK_\alpha) + \\
&\quad + Pg(K_\alpha T) - Pf(K_\alpha T)| \leq \\
&\leq \|Pf - Pg\|\|T\| + |Pg(T - K_\alpha T)| + \\
&\quad + \|Pg - Pf\|\|K_\alpha\|\|T\| < \\
&< \frac{2\varepsilon}{3} + |\sum_{i=1}^{n} x_i^{**}((T - K_\alpha T)^* y_i^*)| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Märkus. Seega suvaline pere $(K_\alpha) \subset B_{K(X)}$, kus

$$K_\alpha x \longrightarrow x \quad \forall x \in X, \quad K_\alpha^* x^* \longrightarrow x^* \quad \forall x^* \in X^*,$$

defineerib „ise“ parempoolse Johnsoni projektori, st ei ole vajalik üleminek osaperele (vt. märkus peale lemmat 7) ja pere $(K_\alpha) \subset B_{K(Y)}$, kus

$$K_\alpha y \longrightarrow y \quad \forall y \in Y, \quad K_\alpha^* y^* \longrightarrow y^* \quad \forall y^* \in Y^*,$$

defineerib „ise“ vasakpoolse Johnsoni projektori. Seejuures on Johnsoni projektor ühene, seega erinevad pered defineerivad ühe ja sama Johnsoni projektori.

3. Kompaktsete operaatorite M-ideaalid

Käesolevas osas esitame üksikasjaliku tõestuse Sissejuhatuses sõnastatud tulemusele, et $K(X,Y)$ on M-ideaal ruumis $L(X,Y)$ niipea, kui $K(X)$ ja $K(Y)$ on M-ideaalid vastavalt ruumides $L(X)$ ja $L(Y)$ (vt. järeldus 14). Alljärgnevas tõestuses järgime artikli [O1] originaaltõestuse skeemi.

3.1. Abitulemused

Järgmine abitulemus on üksikasjalikult põhjendatud näiteks semestritöös [H] ning siinkohal me selle tõestust ei esita.

Teoreem 11 (vt. [O1, teoreem 5])**.** *Järgmised väited on samaväärsed.*

(*a*) *Ruum $K(X)$ on M-ideaal ruumis $L(X)$.*

(*b*) *Ruumil X on omadus (M) ja leidub pere $(K_\alpha) \subset B_{K(X)}$ nii, et*

$$K_\alpha^* x^* \longrightarrow x^* \quad \forall x^* \in X^*$$

ja

$$\limsup_\beta \ \limsup_\alpha \|K_\beta + K^\alpha\| \leq 1.$$

(*c*) *Ruumil X on omadus (M^*) ja leidub pere $(K_\alpha) \subset B_{K(X)}$ nii, et*

$$K_\alpha^* x^* \longrightarrow x^* \quad \forall x^* \in X^*$$

ja

$$\limsup_\alpha \|K_\beta + K^\alpha\| \leq 1 \quad \forall \beta.$$

(*d*) *Ruum $K(X)$ on M-ideaal ruumis $J(X)$.*

Lause 12 (vt. [O1, lause 7])**.** 1. *Kui leidub pere $(K_\alpha) \subset B_{K(X)}$ nii, et*

$$K_\alpha^* x^* \longrightarrow x^* \quad \forall x^* \in X^*$$

ja

$$\limsup_\alpha \|S + TK^\alpha\| \leq 1 \quad \forall S \in B_{K(X,Y)},\ \forall T \in B_{L(X,Y)}, \tag{1}$$

siis $K(X,Y)$ on M-ideaal ruumis $L(X,Y)$.

2. *Kui leidub pere $(K_\alpha) \subset B_{K(X)}$ nii, et*

$$K_\alpha x \longrightarrow x \quad \forall x \in X$$

ja

$$\limsup_\alpha \|S + K^\alpha T\| \leq 1 \quad \forall S \in B_{K(Y,X)},\ \forall T \in B_{L(Y,X)}, \tag{2}$$

siis $K(Y,X)$ on M-ideaal ruumis $L(Y,X)$.

Tõestus. Vajadusel minnes üle osaperele, võime eeldada, et pere (K_α) koondub $*$-nõrgalt ruumis $K(X)^{**}$(vt. märkus pärast lemmat 7).

1. Olgu P projektor lemma 7 osast 1. Lause esimese osa tõestuseks piisab näidata, et

$$\|Pf\| + \|f - Pf\| \leq \|f\| \quad \forall f \in L(X,Y)^*.$$

Olgu $f \in L(X,Y)^*$ ja $\varepsilon > 0$. Kuna lemma 5 järgi samastame $Pf \in L(X,Y)^*$ ja $Pf|_{K(X,Y)} \in K(X,Y)^*$, siis $\|Pf\| = \|Pf|_{K(X,Y)}\|$. Funktsionaali normi definitsiooni põhjal leiduvad $S \in B_{K(X,Y)}$ ja $T \in B_{L(X,Y)}$ nii, et

$$\begin{aligned}\|Pf|_{K(X,Y)}\| + \|f - Pf\| - \varepsilon &\leq (Pf)(S) + (f - Pf)(T) = \\ &= (Pf)(S) + f(T) - (Pf)(T).\end{aligned}$$

Niisiis saame projektori P definitsiooni ja lemma 4 kohaselt

$$\begin{aligned}\|Pf\| + \|f - Pf\| - \varepsilon &\leq \lim_\alpha f(SK_\alpha) + f(T) - \lim_\alpha f(TK_\alpha) = \\ &= f(\lim_\alpha SK_\alpha) + f(T) - \lim_\alpha f(TK_\alpha) = \\ &= \lim_\alpha f(S + TK^\alpha) \leq \limsup_\alpha \|f\| = \|f\|.\end{aligned}$$

Minnes nüüd piirile protsessis $\varepsilon \longrightarrow 0$, tekib võrratus

$$\|Pf\| + \|f - Pf\| \leq \|f\|$$

ning olemegi näidanud, et $K(X,Y)$ on M-ideaal ruumis $L(X,Y)$.

2. Olgu P projektor lemma 7 osast 2. Lause esimese osa tõestuseks piisab näidata, et

$$\|Pf\| + \|f - Pf\| \leq \|f\| \quad \forall f \in L(Y,X)^*.$$

Olgu $f \in L(Y,X)^*$ ja $\varepsilon > 0$. Kuna lemma 5 järgi samastame $Pf \in L(Y,X)^*$ ja $Pf|_{K(Y,X)} \in K(Y,X)^*$, siis $\|Pf\| = \|Pf|_{K(Y,X)}\|$. Funktsionaali normi definitsiooni põhjal leiduvad $S \in B_{K(Y,X)}$ ja $T \in B_{L(Y,X)}$ nii, et

$$\begin{aligned}\|Pf|_{K(Y,X)}\| + \|f - Pf\| - \varepsilon &\leq (Pf)(S) + (f - Pf)(T) = \\ &= (Pf)(S) + f(T) - (Pf)(T).\end{aligned}$$

Niisiis saame projektori P definitsiooni ja lemma 4 kohaselt

$$\begin{aligned}\|Pf\| + \|f - Pf\| - \varepsilon &\leq \lim_\alpha f(K_\alpha T) + f(T) - \lim_\alpha f(K_\alpha T) = \\ &= f(\lim_\alpha K_\alpha S) + f(T) - \lim_\alpha f(K_\alpha T) = \\ &= \lim_\alpha f(S + K^\alpha T) \leq \lim_\alpha \|f\| = \|f\|.\end{aligned}$$

Minnes nüüd piirile protsessis $\varepsilon \longrightarrow 0$, tekib võrratus

$$\|Pf\| + \|f - Pf\| \leq \|f\|$$

ning oleme näidanud, et $K(Y,X)$ on M-ideaal ruumis $L(Y,X)$. $\square$

3.2. Põhitulemus

Teoreem 13 (vt. [O1, teoreem 8])**.** *Olgu X selline Banachi ruum, et $K(X)$ on M-ideaal ruumis $L(X)$. Siis $K(X,Y)$ on M-ideaal ruumis $L(X,Y)$ iga Banachi ruumi Y korral, millel on omadus (M), ning $K(Y,X)$ on M-ideaal ruumis $L(Y,X)$ iga Banachi ruumi Y korral, millel on omadus (M^*).*

Tõestus. Alustame teoreemi esimese poolega. Paneme tähele, et teoreemi 11 põhjal on ruumil X omadus (M) ja leidub pere $(K_\alpha)_{\alpha\in A} \subset B_{K(X)}$ nii, et

$$K_\alpha^* x^* \longrightarrow x^* \quad \forall x^* \in X^*$$

ja

$$\limsup_\beta \ \limsup_\alpha \|K_\beta + K^\alpha\| \leq 1. \tag{3}$$

Vastavalt lausele 12 on väite tõestuseks piisav kontrollida tingimuse (1) kehtivust. Olgu $S \in B_{K(X,Y)}$ ja $T \in B_{L(X,Y)}$. Iga $\beta \in A$ korral

$$\begin{aligned}
\limsup_\alpha \|S + TK^\alpha\| &= \limsup_\alpha \|S - SK_\beta + SK_\beta + TK^\alpha\| \leq \\
&\leq \limsup_\alpha (\|S - SK_\beta\| + \|SK_\beta + TK^\alpha\|) = \\
&= \|S - SK_\beta\| + \limsup_\alpha \|SK_\beta + TK^\alpha\|.
\end{aligned}$$

Seega tuginedes lemmale 4

$$\begin{aligned}
\limsup_\alpha \|S + TK^\alpha\| &\leq \limsup_\beta \|S - SK_\beta\| + \limsup_\beta \ \limsup_\alpha \|SK_\beta + TK^\alpha\| = \\
&= \limsup_\beta \ \limsup_\alpha \|SK_\beta + TK^\alpha\|
\end{aligned}$$

ning tingimuse (1) täidetuseks on piisav näidata, et

$$\limsup_\beta \ \limsup_\alpha \|SK_\beta + TK^\alpha\| \leq 1. \tag{4}$$

Fikseerime vabalt $\beta \in A$. Minnes üle perelt (K_α) perele $(K_{(\alpha,n)})$, kus $\alpha \in A$, $n \in \mathbb{N}$, ning defineerides $\varepsilon_{(\alpha,n)} = \frac{1}{n}$ iga $\alpha \in A$ korral ja $K_{(\alpha,n)} = K_\alpha$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral. Võime üldisust kitsendamata eeldada, et meie pere (K_α) jaoks leidub pere (ε_α), $\varepsilon_\alpha > 0$ nii et $\varepsilon_\alpha \longrightarrow 0$. Valime $(x_\alpha) \subset B_X$ selliselt, et

$$\|SK_\beta x_\alpha + TK^\alpha x_\alpha\| \geq \|SK_\beta + TK^\alpha\| - \varepsilon_\alpha.$$

Siis

$$\begin{aligned}
\limsup_\alpha \|SK_\beta x_\alpha + TK^\alpha x_\alpha\| &\leq \limsup_\alpha \|SK_\beta + TK^\alpha\| \|x_\alpha\| \leq \\
&\leq \limsup_\alpha (\|SK_\beta x_\alpha + TK^\alpha x_\alpha\| + \varepsilon_\alpha) = \\
&= \limsup_\alpha \|SK_\beta x_\alpha + TK^\alpha x_\alpha\| + \limsup_\alpha \varepsilon_\alpha = \\
&= \limsup_\alpha \|SK_\beta x_\alpha + TK^\alpha x_\alpha\|.
\end{aligned}$$

Järelikult

$$\limsup_{\alpha} \|SK_\beta + TK^\alpha\| = \limsup_{\alpha} \|SK_\beta x_\alpha + TK^\alpha x_\alpha\|.$$

Teame, et ruumidel X ja Y on omadus (M). Paneme tähele, et pered $(SK_\beta x_\alpha)_{\alpha\in A} \subset Y$ ning $(K_\beta x_\alpha)_{\alpha\in A} \subset X$ on suhteliselt kompaktsed. (Operaatorid SK_β ja K_β on kompaktsed.) Seejuures

$$\|SK_\beta x_\alpha\| \leq \|S\|\|K_\beta x_\alpha\| = \|K_\beta x_\alpha\| \quad \forall \alpha \in A.$$

Pere $(K^\alpha x_\alpha)$ on tõkestatud ja koondub nõrgalt nulliks ruumis X, sest

$$\|K^\alpha x_\alpha\| = \|(I_X - K_\alpha)x_\alpha\| \leq \|x_\alpha\| + \|K_\alpha\|\|x_\alpha\| \leq 1 + 1 = 2$$

ning iga $x^* \in X^*$ korral

$$\begin{aligned}|x^*(K^\alpha x_\alpha)| &= |x^*((I_X - K_\alpha)x_\alpha)| = \\ &= |(((I_X - K_\alpha)^* x^*)(x_\alpha)| = \\ &= |(((I_{X^*} - K_\alpha^*)^* x^*)(x_\alpha)| \leq \\ &\leq \|x^* - K_\alpha^* x^*\| \longrightarrow 0.\end{aligned}$$

Lemma 2 osa 1 põhjal saame

$$\begin{aligned}\limsup_{\alpha} \|SK_\beta x_\alpha + TK^\alpha x_\alpha\| &\leq \limsup_{\alpha} \|K_\beta x_\alpha + K^\alpha x_\alpha\| \leq \\ &\leq \limsup_{\alpha} \|K_\beta + K^\alpha\|\|x_\alpha\| \leq \\ &\leq \limsup_{\alpha} \|K_\beta + K^\alpha\|.\end{aligned}$$

Järelikult iga $\beta \in A$ korral

$$\limsup_{\alpha} \|SK_\beta + TK^\alpha\| = \limsup_{\alpha} \|SK_\beta x_\alpha + TK^\alpha x_\alpha\| \leq \limsup_{\alpha} \|K_\beta + K^\alpha\|,$$

millest võrratuse (3) abil saame

$$\limsup_{\beta}\ \limsup_{\alpha} \|SK_\beta + TK^\alpha\| \leq \limsup_{\beta}\ \limsup_{\alpha} \|K_\beta + K^\alpha\| \leq 1.$$

Seega kehtib tingimus (4), järelikult ka (1), ning oleme näidanud, et $K(X,Y)$ on M-ideaal ruumis $L(X,Y)$.

Põhjendame teoreemi teise väite. Põhijoontes on tõestus analoogiline eelmise poolega. Paneme tähele, et teoreemi 11 põhjal on ruumil X omadus (M^*) ja leidub pere $(K_\alpha)_{\alpha\in A} \subset B_{K(X)}$ nii, et

$$K_\alpha^* x^* \longrightarrow x^* \quad \forall x^* \in X^*$$

ja

$$\limsup_{\alpha} \|K_\beta + K^\alpha\| \le 1 \quad \forall \beta \in A. \tag{5}$$

Minnes üle kumerate kombinatsioonide perele (vt. lemma 3 ja märkus selle järel) võime üldisust kitsendamata eeldada, et $K_\alpha x \longrightarrow x$ iga $x \in X$ korral, kusjuures kehtima jääb võrratus (5). Seega on lause 12 põhjal tõestuse lõpetamiseks piisav kontrollida tingimuse (2) kehtivust. Olgu $S \in B_{K(Y,X)}$ ja $T \in B_{L(Y,X)}$. Iga $\beta \in A$ korral

$$\begin{aligned}\limsup_{\alpha} \|S + K^\alpha T\| &= \limsup_{\alpha} \|S - K_\beta S + K_\beta S + K^\alpha T\| \le \\ &\le \limsup_{\alpha} (\|S - K_\beta S\| + \|K_\beta S + K^\alpha T\|) = \\ &= \|S - K_\beta S\| + \limsup_{\alpha} \|K_\beta S + K^\alpha T\|.\end{aligned}$$

Seega tuginedes lemmale 4

$$\begin{aligned}\limsup_{\alpha} \|S + K^\alpha T\| \le \limsup_{\beta} &\|S - K_\beta S\| + \\ &+ \limsup_{\beta} \limsup_{\alpha} \|S^* K_\beta^* + T^*(K^\alpha)^*\| = \\ &= \limsup_{\beta} \limsup_{\alpha} \|S^* K_\beta^* + T^*(K^\alpha)^*\|,\end{aligned}$$

sest

$$\|K_\beta S + K^\alpha T\| = \|(K_\beta S + K^\alpha T)^*\| = \|S^* K_\beta^* + T^*(K^\alpha)^*\|.$$

Nüüd on tingimuse (2) täidetuseks piisav näidata, et iga $\beta \in A$

$$\limsup_{\alpha} \|S^* K_\beta^* + T^*(K^\alpha)^*\| \le 1. \tag{6}$$

Fikseerime vabalt $\beta \in A$. Valime pere $(x_\alpha^*) \subset B_{X^*}$ selliselt, et

$$\|S^* K_\beta^* x_\alpha^* + T^*(K^\alpha)^* x_\alpha^*\| \ge \|S^* K_\beta^* + T^*(K^\alpha)^*\| - \varepsilon_\alpha,$$

kus $\varepsilon_\alpha > 0$ ja $\varepsilon_\alpha \longrightarrow 0$. Siis

$$\begin{aligned}\limsup_{\alpha} \|S^* K_\beta^* x_\alpha^* + T^*(K^\alpha)^* x_\alpha^*\| &\le \limsup_{\alpha} \|S^* K_\beta^* + T^*(K^\alpha)^*\| \, \|x_\alpha^*\| \le \\ &\le \limsup_{\alpha} (\|S^* K_\beta^* x_\alpha^* + T^*(K^\alpha)^* x_\alpha^*\| + \varepsilon_\alpha) = \\ &= \limsup_{\alpha} \|S^* K_\beta^* x_\alpha^* + T^*(K^\alpha)^* x_\alpha^*\| + \\ &\quad + \limsup_{\alpha} \varepsilon_\alpha = \\ &= \limsup_{\alpha} \|S^* K_\beta^* x_\alpha^* + T^*(K^\alpha)^* x_\alpha^*\|.\end{aligned}$$

Järelikult

$$\limsup_{\alpha} \|S^* K_\beta^* + T^*(K^\alpha)^*\| = \limsup_{\alpha} \|S^* K_\beta^* x_\alpha^* + T^*(K^\alpha)^* x_\alpha^*\|.$$

Teame, et ruumidel X ja Y on omadus (M^*). Paneme tähele, et pered $(S^* K_\beta^* x_\alpha^*)_{\alpha \in A} \subset Y^*$ ning $(K_\beta^* x_\alpha^*)_{\alpha \in A} \subset X^*$ on suhteliselt kompaktsed. (Operaatorid $S^* K_\beta^*$ ja K_β^* on kompaktsed.) Seejuures

$$\|S^* K_\beta^* x_\alpha^*\| \leq \|S^*\| \|K_\beta^* x_\alpha^*\| \leq \|K_\beta^* x_\alpha^*\| \quad \forall \alpha \in A.$$

Pere $((K^\alpha)^* x_\alpha^*)$ on tõkestatud ja koondub $*$- nõrgalt nulliks ruumis X^*, sest

$$\|(K^\alpha)^* x_\alpha^*\| = \|(I_{X^*} - K_\alpha^*) x_\alpha^*\| \leq \|x_\alpha^*\| + \|K_\alpha^*\| \|x_\alpha^*\| \leq 1 + 1 = 2$$

ning iga $x \in X$ korral

$$\begin{aligned} |((K^\alpha)^* x_\alpha^*)(x)| &= |((I_X - K_\alpha)^* x_\alpha^*)(x)| = \\ &= |x_\alpha^*((I_X - K_\alpha)(x))| = \\ &= |x_\alpha^*(x - K_\alpha x)| \leq \\ &\leq \|x - K_\alpha x\| \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Lemma 2 osa 2 põhjal saame, et

$$\begin{aligned} \limsup_{\alpha} \|S^* K_\beta^* x_\alpha^* + T^*(K^\alpha)^* x_\alpha^*\| &\leq \limsup_{\alpha} \|K_\beta^* x_\alpha^* + (K^\alpha)^* x_\alpha^*\| \leq \\ &\leq \limsup_{\alpha} \|K_\beta^* + (K^\alpha)^*\| \|x_\alpha^*\| \leq \\ &\leq \limsup_{\alpha} \|(K_\beta + K^\alpha)^*\| = \\ &= \limsup_{\alpha} \|K_\beta + K^\alpha\|. \end{aligned}$$

Järelikult iga $\beta \in A$ korral kehtib võrratuse (5) abil

$$\begin{aligned} \limsup_{\alpha} \|S^* K_\beta^* + T^*(K^\alpha)^*\| &= \limsup_{\alpha} \|S^* K_\beta^* x_\alpha^* + T^*(K^\alpha)^* x_\alpha^*\| \leq \\ &\leq \limsup_{\alpha} \|K_\beta + K^\alpha\| \leq 1. \end{aligned}$$

Seega kehtib tingimus (6) ja järelikult ka (2), ning oleme näidanud, et $K(Y, X)$ on M-ideaal ruumis $L(Y, X)$. □

Järgnev tulemus on teoreemide 11 ja 13 vahetu järeldus ning käesoleva kolmanda osa üks põhitulemusi.

Järeldus 14 (vt. [O1, järeldus 9] või nt. [HWW, lk. 301])**.** *Kui $K(X)$ ja $K(Y)$ on M-ideaalid vastavalt ruumides $L(X)$ ja $L(Y)$, siis $K(X, Y)$ on M-ideaal ruumis $L(X, Y)$.*

Tõestus. Teoreemi 11 põhjal on ruumil Y omadus (M). Teoreemi 13 põhjal on $K(X, Y)$ M-ideaal ruumis $L(X, Y)$. □

4. Kompaktsete operaatorite $M(r,s)$-võrratust rahuldavad ideaalid M-ideaalide tõestusmetoodika valguses

4.1. Omadus $M^*(r,s)$

M-ideaalide korral on olulised mõisted omadus (M) ja (M^*). $M(r,s)$-võrratuse korral kasutame omaduse (M^*) analoogi, omadust $M^*(r,s)$ (saaks ka defineerida omaduse $M(r,s)$, kuid kuna seda mõistet edaspidi vaja ei ole, siis seda siin ei defineeri).

Olgu $r,s \in (0,1]$. Öeldakse, et ruumil X on *omadus* $M^*(r,s)$ (vt. [CN]), kui mistahes $u^*, v^* \in X^*$, $\|u^*\| \le \|v^*\|$, ja tõkestatud $*$-nõrgalt nulliks koonduva pere $(x^*_\alpha) \subset X^*$ korral

$$\limsup_\alpha \|r\,u^* + s\,x^*_\alpha\| \le \limsup_\alpha \|v^* + x^*_\alpha\|.$$

Omadus $M^*(1,1)$ on ilmselt omadus (M^*).

Osutub, et omaduse $M^*(r,s)$ jaoks saab tõestada analoogilised väited nagu kehtivad omaduse (M) ja (M^*) korral (lemma 1, lemma 2). Kuigi omaduse $M^*(r,s)$ puhul tõestatakse neid analoogiliselt, siis töö täielikkuse huvides esitame nad siiski tõestustega.

Lemma 15. *Järgmised väited on samaväärsed.*

(a^*) *Ruumil X on omadus $M^*(r,s)$.*

(b^*) *Kui pered $(u^*_\alpha), (v^*_\alpha) \subset X^*$ on suhteliselt kompaktsed, kusjuures $\|u^*_\alpha\| \le \|v^*_\alpha\|$ iga α korral, ja (x^*_α) on tõkestatud $*$-nõrgalt nulliks koonduv pere ruumis X^*, siis*

$$\limsup_\alpha \|r\,u^*_\alpha + s\,x^*_\alpha\| \le \limsup_\alpha \|v^*_\alpha + x^*_\alpha\|.$$

Tõestus. Ilmselt kehtib implikatsioon $(b^*) \Rightarrow (a^*)$. Põhjendame veel implikatsiooni $(a^*) \Rightarrow (b^*)$.

Ülemise piirväärtuse mõiste kohaselt saame minna üle osaperele, mille korral

$$\lim_\beta \|r\,u^*_\beta + s\,x^*_\beta\| = \limsup_\alpha \|r\,u^*_\alpha + s\,x^*_\alpha\|$$

ning

$$\lim_\beta \|v^*_\beta + x^*_\beta\| = \limsup_\alpha \|v^*_\alpha + x^*_\alpha\|.$$

Oletame vastuväiteliselt, et

$$\lim_\beta \|r\,u^*_\beta + s\,x^*_\beta\| > \lim_\beta \|v^*_\beta + x^*_\beta\|.$$

Sobivad osapered $(u^*_\gamma) \subset (u^*_\beta)$ ja $(v^*_\gamma) \subset (v^*_\beta)$ koonduvad vastavalt piirelementideks $u^*, v^* \in X^*$. Siis $\|u^*\| \le \|v^*\|$, kuid

$$\lim_\gamma \|r\, u^* + s\, x^*_\gamma\| = \lim_\beta \|r\, u^*_\beta + s\, x^*_\beta\| > \lim_\beta \|v^*_\beta + x^*_\beta\| = \lim_\gamma \|v^* + x^*_\gamma\|,$$

mis on vastuolus omadusega $M^*(r,s)$. $\square$

Lemmat 15 kasutame järgmise tulemuse tõestamisel.

Lemma 16. *Olgu $T \in B_{L(X,Y)}$. Kui ruumidel X ja Y on vastavalt omadus $M^*(r_1,s_1), M^*(r_2,s_2)$, pered $(u^*_\alpha) \subset X^*$ ja $(v^*_\alpha) \subset Y^*$ on suhteliselt kompaktsed, kusjuures $\|u^*_\alpha\| \le \|v^*_\alpha\|$ iga α korral, ning (y^*_α) on tõkestatud $*$ - nõrgalt nulliks koonduv pere ruumis Y^*, siis*

$$\limsup_\alpha \|r_1 r_2\, u^*_\alpha + s_1 s_2\, T^* y^*_\alpha\| \le \limsup_\alpha \|v^*_\alpha + y^*_\alpha\|.$$

Tõestus. Olgu $\varepsilon > 0$. Leidub $y^* \in B_{Y^*}$ nii, et

$$\|T^* y^*\| \ge (1-\varepsilon)\|T^*\| = 1-\varepsilon.$$

Iga indeksi α korral võtame $\bar{v}^*_\alpha = \|v^*_\alpha\|\, y^*$. Seega

$$\|\bar{v}^*_\alpha\| \le \|v^*_\alpha\|$$

ja

$$\|(1-\varepsilon)\, u^*_\alpha\| = (1-\varepsilon)\, \|u^*_\alpha\| \le \|T^* y^*\|\, \|v^*_\alpha\| = \Big\| T^*(\|v^*_\alpha\|\, y^*) \Big\| = \|T^* \bar{v}^*_\alpha\|.$$

Paneme tähele, et pered $(\bar{v}^*_\alpha) \subset Y^*$, $(T^* \bar{v}^*_\alpha) \subset X^*$ ja $((1-\varepsilon)\, u^*_\alpha) \subset X^*$ on suhteliselt kompaktsed ning $(T^* y^*_\alpha)$ on tõkestatud $*$ - nõrgalt nulliks koonduv pere ruumis X^*. (Pideva lineaarse operaatori kaasoperaator teisendab $*$ - nõrgalt nulliks koonduva pere $*$ - nõrgalt nulliks koonduvaks pereks.) Lemma 15 väite (b^*) põhjal

$$\begin{aligned}
\limsup_\alpha \|r_1 r_2\, (1-\varepsilon)\, u^*_\alpha + s_1 s_2\, T^* y^*_\alpha\| &\le \limsup_\alpha \|r_2\, T^* \bar{v}^*_\alpha + s_2\, T^* y^*_\alpha\| \le \\
&\le \limsup_\alpha \|T^*\| \|r_2\, \bar{v}^*_\alpha + s_2\, y^*_\alpha\| = \\
&= \limsup_\alpha \|r_2\, \bar{v}^*_\alpha + s_2\, y^*_\alpha\| \le \\
&\le \limsup_\alpha \|v^*_\alpha + y^*_\alpha\|.
\end{aligned}$$

Seega

$$\limsup_\alpha \|r_1 r_2\, (1-\varepsilon)\, u^*_\alpha + s_1 s_2\, T^* y^*_\alpha\| \le \limsup_\alpha \|v^*_\alpha + y^*_\alpha\|.$$

Nüüd

$$\begin{aligned}\limsup_\alpha \|r_1r_2u_\alpha^* + s_1s_2T^*y_\alpha^*\| &\le \limsup_\alpha \|r_1r_2\,(1-\varepsilon)\,u_\alpha^* + T^*y_\alpha^* + r_1r_2\,\varepsilon\,u_\alpha^*\| \le \\ &\le \limsup_\alpha \|r_1r_2\,(1-\varepsilon)\,u_\alpha^* + T^*y_\alpha^*\| + \\ &\quad + \limsup_\alpha \|r_1r_2\,\varepsilon\,u_\alpha^*\| \le \\ &\le \limsup_\alpha \|v_\alpha^* + y_\alpha^*\| + \varepsilon\, \limsup_\alpha \|r_1r_2\,u_\alpha^*\|.\end{aligned}$$

Minnes saadud võrratuses piirile protsessis $\varepsilon \longrightarrow 0$, saamegi

$$\limsup_\alpha \|r_1r_2\,u_\alpha^* + s_1s_2\,T^*y_\alpha^*\| \le \limsup_\alpha \|v_\alpha^* + y_\alpha^*\|.$$

Juhul $0 < \|T\| < 1$ võtame $\widetilde{T^*} = \frac{T^*}{\|T^*\|}$ ja $T^* = 0$ korral valime $\widetilde{T^*} \in L(Y^*, X^*)$ nii, et $\|\widetilde{T^*}\| = 1$. Elemendi $T^*y_\alpha^*$ saame esitada elementide $\widetilde{T^*}y_\alpha^*$ ja $-\widetilde{T^*}y_\alpha^*$ kumera kombinatsioonina, täpsemalt

$$T^*y_\alpha^* = \lambda\,\widetilde{T^*}\,y_\alpha^* + (1-\lambda)\,(-\widetilde{T^*}\,y_\alpha^*),$$

kus $\lambda = \frac{1+\|T^*\|}{2} \in (0,1)$. Funktsionaali $\|u_\alpha^* + t\widetilde{T^*}\,y_\alpha^*\|,\ t \in [-1,1]$ kumeruse tõttu

$$\begin{aligned}\|r_1r_2\,u_\alpha^* + s_1s_2\,T^*y_\alpha^*\| &= \|r_1r_2\,u_\alpha^* + s_1s_2\,\lambda\,\widetilde{T^*}\,y_\alpha^* + s_1s_2\,(1-\lambda)\,(-\widetilde{T^*}\,y_\alpha^*)\| \le \\ &\le \max\Big\{\|r_1r_2\,u_\alpha^* + s_1s_2\,\widetilde{T^*}y_\alpha^*\|, \\ &\qquad \|-r_1r_2\,u_\alpha^* + s_1s_2\,\widetilde{T^*}y_\alpha^*\|\Big\}.\end{aligned}$$

Kuna $\|\widetilde{T^*}\| = 1$, siis tõestuse esimesele poolele tuginedes

$$\begin{aligned}\limsup_\alpha \|r_1r_2\,u_\alpha^* + s_1s_2\,T^*y_\alpha^*\| &\le \limsup_\alpha\ \max\Big\{\|r_1r_2\,u_\alpha^* + s_1s_2\,\widetilde{T^*}y_\alpha^*\|, \\ &\qquad \|-r_1r_2\,u_\alpha^* + s_1s_2\,\widetilde{T^*}y_\alpha^*\|\Big\} = \\ &= \max\Big\{\limsup_\alpha \|r_1r_2\,u_\alpha^* + s_1s_2\,\widetilde{T^*}y_\alpha^*\|, \\ &\qquad \limsup_\alpha \|-r_1r_2\,u_\alpha^* + s_1s_2\,\widetilde{T^*}y_\alpha^*\|\Big\} \le \\ &\le \max\Big\{\limsup_\alpha \|v_\alpha^* + y_\alpha^*\|, \limsup_\alpha \|v_\alpha^* + y_\alpha^*\|\Big\} = \\ &= \limsup_\alpha \|v_\alpha^* + y_\alpha^*\|.\end{aligned}$$

□

4.2. Abitulemused

Alloleva lemma 17 tõestuse võib leida artiklist [O3]. Siinkohal me lemma tõestust ei esita. Märgime üksnes, et tema tõestus on suhteliselt pikk ja raskepärane.

Lemma 17 (vt. [O3, järeldus 4.4])**.** *Olgu* $r, s \in (0, 1]$, $r + \frac{s}{2} > 1$. *Järgmised väited on samaväärsed.*

(*a*) *Ruum* $K(X)$ *on* $M(r, s)$*-võrratust rahuldav ideaal ruumis* $J(X)$*.*

(*b*) *Ruumil* X *on omadus* $M^*(r, s)$ *ja leidub pere* $(K_\alpha) \subset B_{K(X)}$ *nii, et*

$$K_\alpha x \longrightarrow x \quad \forall x \in X.$$

(*c*) *Leidub pere* $(K_\alpha) \subset B_{K(X)}$ *nii, et*

$$K_\alpha x \longrightarrow x \quad \forall x \in X, \quad K_\alpha^* x^* \longrightarrow x^* \quad \forall x^* \in X^*$$

ja

$$\limsup_\alpha \|r\, SK_\alpha + s\, TK^\alpha\| \leq 1 \quad \forall S, T \in B_{J(X)}. \tag{7}$$

Järeldus 18. *Olgu* $r, s \in (0, 1]$, $r + \frac{s}{2} > 1$. *Kui ruum* $K(X)$ *rahuldab* $M(r, s)$*-võrratust ruumis* $J(X)$*, siis ruumil* X *on omadus* $M^*(r, s)$ *ja leidub pere* $(K_\alpha) \subset B_{K(X)}$ *nii, et*

$$K_\alpha x \longrightarrow x \quad \forall x \in X, \quad K_\alpha^* x^* \longrightarrow x^* \quad \forall x^* \in X^*$$

ja

$$\limsup_\alpha \|r\, S + s\, K^\alpha\| \leq 1 \quad \forall S \in B_{K(X)}. \tag{8}$$

Tõestus. Tegu on vahetu järeldusega eelmisest lemmast. Põhjendamist vajaks vaid võrratus (8).

Tuginedes lemmale 4, saame

$$\begin{aligned}\limsup_\alpha \|r\, S + s\, K^\alpha\| &\leq \limsup_\alpha \|r\, S - r\, SK_\alpha + r\, SK_\alpha + s\, K^\alpha\| \leq \\ &\leq \limsup_\alpha (\|r\, S - r\, SK_\alpha\| + \|r\, SK_\alpha + s\, K^\alpha\|) \leq \\ &\leq \lim_\alpha \|r\, S - r\, SK_\alpha\| + \limsup_\alpha \|r\, SK_\alpha + s\, K^\alpha\| = \\ &= \limsup_\alpha \|r\, SK_\alpha + s\, K^\alpha\| \leq 1,\end{aligned}$$

sest kehtib võrratus (7), kus võtame $T = I_X$. $\square$

4.3. Põhitulemus

Käesoleva magistritöö neljanda osa põhitulemus on järgmine.

Teoreem 19. *Olgu X ja Y Banachi ruumid, $r_1, r_2, s_1, s_2 \in (0,1]$ sellised arvud, et $r_1 + \frac{s_1}{2} > 1, r_2 + \frac{s_2}{2} > 1$ ning olgu $K(X)$ ja $K(Y)$ vastavalt $M(r_1, s_1)$- ja $M(r_2, s_2)$-võrratust rahuldavad ideaalid ruumides $J(X)$ ja $J(Y)$. Siis $K(X,Y)$ on $M(r_1{r_2}^2, s_1{s_2}^2)$-võrratust rahuldav ideaal ruumis $L(X,Y)$.*

Tõestus. Järelduse 18 põhjal saame, et ruumil X on omadus $M^*(r_1, s_1)$ ja ruumil Y on omadus $M^*(r_2, s_2)$ ning leidub pere $(K_\alpha)_{\alpha\in A} \subset B_{K(Y)}$ nii, et

$$K_\alpha y \longrightarrow y \quad \forall y \in Y, \quad K_\alpha^* y^* \longrightarrow y^* \quad \forall y^* \in Y^*$$

ja

$$\limsup_\alpha \|r_2\, K_\beta + s_2\, K^\alpha\| \le 1 \quad \forall \beta \in A.$$

Tuginedes lemmale 7 ja märkusele peale lemmat 7 on $K(X,Y)$ ideaal ruumis $L(X,Y)$ antud lemma osas 2 defineeritud projektori P suhtes. Niisiis, peres (K_α) osaperele minnes, võime üldisust kitsendamata eeldada, et projektor P on defineeritud võrdusega

$$(Pf)(T) = \lim_\alpha f(K_\alpha T), \quad f \in L(X,Y)^*,\ T \in L(X,Y).$$

Tähistame $r = r_1{r_2}^2$ ja $s = s_1{s_2}^2$. Olgu $f \in L(X,Y)^*$ ja $\varepsilon > 0$. Kuna lemma 5 järgi samastame $Pf \in L(X,Y)^*$ ja $Pf|_{K(X,Y)} \in K(X,Y)^*$, siis $\|Pf\| = \|Pf|_{K(X,Y)}\|$. Funktsionaali normi definitsiooni põhjal leiduvad $S \in B_{K(X,Y)}$ ja $T \in B_{L(X,Y)}$ nii, et

$$\begin{aligned} r\,\|Pf|_{K(X,Y)}\| + s\,\|f - Pf\| - \varepsilon \le r\,(Pf)(S) + s\,(f - Pf)(T) = \\ = r\,(Pf)(S) + s\,f(T) - s\,(Pf)(T). \end{aligned}$$

Kasutades projektori P definitsiooni ja lemmat 4, saame

$$\begin{aligned} r\,\|Pf\| + s\,\|f - Pf\| - \varepsilon &\le \lim_\alpha f(r\,K_\alpha S) + s\,f(T) - \lim_\alpha f(s\,K_\alpha T) = \\ &= f(\lim_\alpha r\,K_\alpha S) + s\,f(T) - \lim_\alpha f(s\,K_\alpha T) = \\ &= f(r\,S) + s\,f(T) - \lim_\alpha f(s\,K_\alpha T) = \\ &= \lim_\alpha f(r\,S + s\,(T - K_\alpha T)) \le \\ &\le \|f\| \limsup_\alpha \|r\,S + s\,K^\alpha T\| \le \|f\|, \end{aligned}$$

niipea, kui

$$\limsup_\alpha \|r\,S + s\,K^\alpha T\| \le 1. \tag{9}$$

Näitame, et kehtib võrratus (9). Selleks paneme tähele (toetudes lemmale 4), et

$$\begin{aligned}\limsup_\alpha \|r\,S + s\,K^\alpha T\| &= \limsup_\beta \limsup_\alpha \|r\,S - r\,K_\beta S + r\,K_\beta S + s\,K^\alpha T\| \leq \\ &\leq \lim_\beta r\,\|S - K_\beta S\| + \limsup_\beta \limsup_\alpha \|r\,K_\beta S + s\,K^\alpha T\| = \\ &= \limsup_\beta \limsup_\alpha \|r\,K_\beta S + s\,K^\alpha T\| = \\ &= \limsup_\beta \limsup_\alpha \|r\,S^* K_\beta^* + s\,T^*(K^\alpha)^*\|.\end{aligned}$$

Fikseerime vabalt $\beta \in A$. Minnes üle perelt (K_α^*) perele $(K_{(\alpha,n)}^*)$, kus $\alpha \in A,\ n \in \mathbb{N}$, ning defineerides $\varepsilon_{(\alpha,n)} = \frac{1}{n}$ iga $\alpha \in A$ korral ja $K_{(\alpha,n)}^* = K_\alpha^*$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral võime üldisust kitsendamata eeldada, et meie pere (K_α^*) jaoks leidub pere $(\varepsilon_\alpha),\ \varepsilon_\alpha > 0$ nii, et $\varepsilon_\alpha \longrightarrow 0$. Valime $(y_\alpha^*) \subset B_{Y^*}$ selliselt, et

$$\|r\,S^* K_\beta^* y_\alpha^* + s\,T^*(K^\alpha)^* y_\alpha^*\| \geq \|r\,S^* K_\beta^* + s\,T^*(K^\alpha)^*\| - \varepsilon_\alpha.$$

Siis

$$\begin{aligned}\limsup_\alpha \|r\,S^* K_\beta^* y_\alpha^* + s\,T^*(K^\alpha)^* y_\alpha^*\| &\leq \limsup_\alpha \|r\,S^* K_\beta^* + s\,T^*(K^\alpha)^*\|\,\|y_\alpha^*\| \leq \\ &\leq \limsup_\alpha (\|r\,S^* K_\beta^* y_\alpha^* + s\,T^*(K^\alpha)^* y_\alpha^*\| + \varepsilon_\alpha) = \\ &= \limsup_\alpha \|r\,S^* K_\beta^* y_\alpha^* + s\,T^*(K^\alpha)^* y_\alpha^*\| + \\ &\quad + \limsup_\alpha \varepsilon_\alpha = \\ &= \limsup_\alpha \|r\,S^* K_\beta^* y_\alpha^* + s\,T^*(K^\alpha)^* y_\alpha^*\|.\end{aligned}$$

Seega

$$\limsup_\alpha \|r\,S^* K_\beta^* + s\,T^*(K^\alpha)^*\| = \limsup_\alpha \|r_1 r_2 r_2\,S^* K_\beta^* y_\alpha^* + s_1 s_2 s_2\,T^*(K^\alpha)^* y_\alpha^*\|.$$

Teame, et ruumidel X ja Y on vastavalt omadus $M^*(r_1, s_1)$ ja $M^*(r_2, s_2)$. Paneme tähele, et pered $(S^* K_\beta^* y_\alpha^*)_{\alpha\in A} \subset X^*$ ning $(K_\beta^* y_\alpha^*)_{\alpha\in A} \subset Y^*$ on suhteliselt kompaktsed. (Operaatorid $S^* K_\beta^*$ ja K_β^* on kompaktsed.) Seejuures

$$\|S^* K_\beta^* y_\alpha^*\| \leq \|S^*\|\|K_\beta^* y_\alpha^*\| \leq \|K_\beta^* y_\alpha^*\| \quad \forall \alpha \in A.$$

Pere $((K^\alpha)^* y_\alpha^*)$ on tõkestatud ja koondub $*$- nõrgalt nulliks ruumis X^*, sest

$$\|(K^\alpha)^* y_\alpha^*\| = \|(I_{Y^*} - K_\alpha^*) y_\alpha^*\| \leq \|y_\alpha^*\| + \|K_\alpha^*\|\|y_\alpha^*\| \leq 1 + 1 = 2$$

ning iga $y \in Y$ korral

$$\begin{aligned}|((K^\alpha)^* y_\alpha^*)(y)| &= |((I_Y - K_\alpha)^* y_\alpha^*)(y)| = \\ &= |y_\alpha^*((I_Y - K_\alpha)(y))| = \\ &= |y_\alpha^*(y - K_\alpha y)| \leq \\ &\leq \|y - K_\alpha y\| \longrightarrow 0.\end{aligned}$$

Nüüd saame lemma 16 põhjal, et

$$\begin{aligned}\limsup_\alpha \|r_1r_2r_2\, S^* K_\beta^* y_\alpha^* + s_1s_2s_2\, T^*(K^\alpha)^* y_\alpha^*\| &\le \limsup_\alpha \|r_2\, K_\beta^* y_\alpha^* + s_2\,(K^\alpha)^* y_\alpha^*\| \le \\ &\le \limsup_\alpha \|r_2\, K_\beta^* + s_2\,(K^\alpha)^*\|\|y_\alpha^*\| \le \\ &\le \limsup_\alpha \|(r_2\, K_\beta + s_2\, K^\alpha)^*\| = \\ &= \limsup_\alpha \|r_2\, K_\beta + s_2\, K^\alpha\| \le 1.\end{aligned}$$

Järelikult

$$\begin{aligned}\limsup_\alpha \|r\, S + s\, K^\alpha T\| &= \limsup_\beta \limsup_\alpha \|r\, S^* K_\beta^* + s\, T^*(K^\alpha)^*\| = \\ &= \limsup_\beta \limsup_\alpha \|r_1r_2r_2\, S^* K_\beta^* y_\alpha^* + s_1s_2s_2\, T^*(K^\alpha)^* y_\alpha^*\| \le 1.\end{aligned}$$

Sellega on võrratus (9) tõestatud, mistõttu

$$r\,\|Pf\| + s\,\|f - Pf\| - \varepsilon \le \|f\|.$$

Minnes nüüd piirile protsessis $\varepsilon \longrightarrow 0$ saamegi, et $K(X,Y)$ rahuldab $M(r_1{r_2}^2, s_1{s_2}^2)$-võrratust ruumis $L(X,Y)$.

□

Kui teoreemis 19 võtame $r_1, r_2, s_1, s_2 = 1$, siis jõuame juba tuntud tulemuseni (vrd. järeldus 14 ja teoreem 13).

Järeldus 20. *Kui $K(X)$ ja $K(Y)$ on M-ideaalid vastavalt ruumides $J(X)$ ja $J(Y)$, siis $K(X,Y)$ on M-ideaal ruumis $L(X,Y)$.*

Vaadeldes teoreemis 19 olukorda $X = Y$, saame järgmise tulemuse.

Järeldus 21. *Olgu $r, s \in (0,1]$ sellised arvud, et $r + \frac{s}{2} > 1$. Kui $K(X)$ on $M(r,s)$-võrratust rahuldav ideaal ruumis $J(X)$, siis $K(X)$ on $M(r^3, s^3)$-võrratust rahuldav ideaal ruumis $L(X)$.*

Nagu Sissejuhatuses märgitud, parendame me järgmises osas nii teoreemi 19 kui järeldust 21 (vt. teoreem 32 ja järeldus 33).

Kui järelduses 21 võtame $r = s = 1$, siis jõuame teoreemist 11 teada oleva väiteni, mis separaabli ruumi X korral pärineb Kaltoni artiklist [K].

Järeldus 22. *Kui $K(X)$ on M-ideaal ruumis $J(X)$, siis $K(X)$ on M-ideaal ruumis $L(X)$.*

5. Kompaktsete operaatorite $M(r,s)$-võrratust rahuldavate ideaalide põhiteoreemid

5.1. Abitulemused

Selles ja järgmises osas kasutame alljärgnevat tähistust. Olgu $A \subset X^{**}$ ja $B \subset Y^*$ osahulgad. Siis tähistame

$$A \otimes B = \{x^{**} \otimes y^* : x^{**} \in A,\ y^* \in B\}.$$

Seega $A \otimes B \subset L(X,Y)^*$.

Lause 23. *Olgu X ja Y Banachi ruumid vastavalt omadusega $M^*(r_1,s_1)$ ja $M^*(r_2,s_2)$ ning eksisteerigu pere $(K_\alpha) \subset K(Y)$ nii, et*

$$K_\alpha y \longrightarrow y \quad \forall y \in Y, \qquad K_\alpha^* y^* \longrightarrow y^* \quad \forall y^* \in Y^*,$$

siis iga $f \in \overline{B_{X^{**}} \otimes B_{Y^*}}^{w^*}$ korral

$$\limsup_\alpha |f(rS + sK^\alpha T)| \leq 1 \quad \forall S \in B_{K(X,Y)},\ \forall T \in B_{L(X,Y)},$$

kus $r = r_1 r_2$ ja $s = s_1 s_2$.

Tõestus. Fikseerime $S \in B_{K(X,Y)}$ ja $T \in B_{L(X,Y)}$. Olgu $f = w^*\text{-} \lim x_\beta^{**} \otimes y_\beta^*$, kus $x_\beta^{**} \in B_{X^{**}}$ ja $y_\beta^* \in B_{Y^*}$. Kuna kaasruumi ühikkera on $*$-nõrgalt kompaktne (vt. märkus lemma 7 järel), siis osaperele üle minnes võime eeldada, et (y_β^*) koondub $*$-nõrgalt mingiks elemendiks $y^* \in B_{Y^*}$. Kuna kompaktse operaatori kaasoperaator teisendab tõkestatud $*$-nõrgalt nulliks koonduva pere normi järgi nulliks koonduvaks pereks (vt. nt. [M, lk. 324]), siis

$$\lim_\beta \|rS^*(y_\beta^* - y^*)\| = 0.$$

Niisiis

$$\begin{aligned}
|f(rS + sK^\alpha T)| &= |\lim_\beta x_\beta^{**}((rS + sK^\alpha T)^* y_\beta^*)| = \\
&= \lim_\beta |x_\beta^{**}(rS^* y_\beta^* + sT^* y_\beta^* - K_\alpha^* T^* y_\beta^*)| \leq \\
&\leq \limsup_\beta \|x_\beta^{**}\| \|rS^* y_\beta^* + sT^* y_\beta^* - K_\alpha^* T^* y_\beta^*\| \leq \\
&\leq \limsup_\beta\ (\|rS^* y_\beta^* - rS^* y^*\| + \\
&\quad + \|rS^* y^* + sT^* y_\beta^* - sT^* y^*\| + \|sT^* y^* - sT^* K_\alpha^* y_\beta^*\|) \leq \\
&\leq \limsup_\beta \|rS^* y^* + sT^* y_\beta^* - sT^* y^*\| + |s| \|T^*\| \|y^* - K_\alpha^* y^*\|.
\end{aligned}$$

Seega

$$\limsup_{\alpha} |f(rS + sK^{\alpha}T)| \le \limsup_{\beta} \|rS^*y^* + sT^*y^*_{\beta} - sT^*y^*\|.$$

Kuna $\|S^*y^*\| \le \|y^*\|$ ja $(T^*(y^*_\nu - y^*))$ on tõkestatud $*$-nõrgalt nulliks koonduv pere ruumis X^*, siis on täidetud lemma 16 eeldused ning lemmat rakendades saame

$$\limsup_{\beta} \|rS^*y^* + sT^*(y^*_{\beta} - y^*)\| \le \limsup_{\beta} \|y^* + (y^*_{\beta} - y^*)\| \le 1.$$

□

Lemma 24 (vt. [O3, lk. 2807]). *Olgu Banachi ruumil Y omadus $M^*(r,s)$, kus $r+s>1$, ja leidugu selline pere $(K_\alpha) \subset B_{K(Y)}$, et*

$$K_\alpha y \longrightarrow y \quad \forall y \in Y.$$

Siis

$$K^*_\alpha y^* \longrightarrow y^* \quad \forall y^* \in Y^*.$$

Lemma 25 (vt. [O3, lk. 2809-2810]). *Olgu Y separaabel Banachi ruum. Siis järgmised väited on samaväärsed.*

(*a*) *Ruumil Y on omadus $M^*(r,s)$ ja eksisteerib selline pere $(K_\alpha) \subset K(Y)$, et*

$$K_\alpha y \longrightarrow y \quad \forall y \in Y, \quad K^*_\alpha y^* \longrightarrow y^* \quad \forall y^* \in Y^*.$$

(*b*) *Ruumil Y eksisteerib selline jada $(K_n)_{n=1}^{\infty} \subset B_{K(Y)}$, et*

$$K_n y \longrightarrow y \quad \forall y \in Y, \quad K^*_n y^* \longrightarrow y^* \quad \forall y^* \in Y^*$$

ja iga $S \in B_{K(Y)}$ korral kehtib võrratus

$$\limsup_{n} \|rS + sK^n\| \le 1.$$

Järgmine klassikaline tulemus kuulub Simonsile [S]. Selle tulemuse lihtsa tõestuse võib leida artiklist [O3, lk. 2807-2808].

Lemma 26 (Simonsi sup-limsup teoreem). *Olgu Y Banachi ruum ja $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subset Y$ tõkestatud jada. Olgu $G \subset Y^*$ tõkestatud hulk ja $F \subset G$ olgu selline, et*

$$\forall y = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n y_n,\ \lambda_n \ge 0,\ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = 1,\ \exists f \in F \quad \operatorname{Re}\ f(y) = \sup_{g\in G} \operatorname{Re} g(y).$$

Siis kehtib järgmine võrdus

$$\sup_{f\in F} \limsup_{n} \operatorname{Re} f(y_n) = \sup_{g\in G} \limsup_{n} \operatorname{Re} g(y_n).$$

Lemma 27 (vt. [O3, lk. 2806]). *Kui Banachi ruumil X on omadus $M^*(r,s)$, kus $r+s>1$, siis tema kaasruumil X^* on Radon-Nikodými omadus.*

Lemma 28 (vt. [O3, lk. 2804]). *Kui Banachi ruumil X on omadus $M^*(r,s)$, siis igal alamruumil $E \subset X$ on ka omadus $M^*(r,s)$.*

5.2. Põhitulemus

Allolevat teoreemi, mis annab piisava tingimuse selleks, et $K(X,Y)$ oleks $M(r_1r_1, s_1s_2)$-võrratust rahuldav ideaal ruumis $L(X,Y)$ juhul, kui Y on separaabel ruum, kasutame ka magistritöö põhitulemuse (teoreem 32) tõestamisel.

Teoreem 29. *Olgu X ja Y Banachi ruumid vastavalt omadustega $M^*(r_1, s_1)$ ja $M^*(r_2, s_2)$, kus $r_1 + s_1 > 1$ ja $r_1 + s_1 > 1$. Kui Y on separaabel ja eksisteerib selline pere $(K_\alpha) \subset B_{K(Y)}$, et*

$$K_\alpha y \longrightarrow y \quad \forall y \in Y,$$

siis $K(X,Y)$ on $M(r,s)$-võrratust rahuldav ideaal ruumis $L(X,Y)$ mingi Johnsoni projektori suhtes, kus $r = r_1r_2$ ja $s = s_1s_2$.

Tõestus. Lemmade 24 ja 25 põhjal eksisteerib ruumil Y selline jada $(K_n)_{n=1}^\infty \subset B_{K(Y)}$, et

$$K_n y \longrightarrow y \quad \forall y \in Y, \quad K_n^* y^* \longrightarrow y^* \quad \forall y^* \in Y^*.$$

Johnsoni projektori omaduste juures sai näidatud, et jada $(K_n)_{n=1}^\infty \subset B_{K(Y)}$ määrab Johnsoni projektori üheselt. Vaatleme vasakpoolset Johnsoni projektorit

$$(Pf)(T) = \lim_n f(K_nT), \quad f \in L(X,Y)^*, \ T \in L(X,Y).$$

Olgu $\varepsilon > 0$ ning olgu $f \in L(X,Y)^*$ selline, et $\|f\| = 1$. Kuna lemma 5 järgi samastame $Pf \in L(X,Y)^*$ ja $Pf|_{K(X,Y)} \in K(X,Y)^*$, siis $\|Pf\| = \|Pf|_{K(X,Y)}\|$. Funktsionaali normi definitsiooni põhjal leiduvad $S \in B_{K(X,Y)}$ ja $T \in B_{L(X,Y)}$ nii, et

$$r\,\|Pf|_{K(X,Y)}\| + s\,\|f - Pf\| - \varepsilon \leq \operatorname{Re}\left(r\,(Pf)(S) + s\,(f - Pf)(T)\right).$$

Kasutades projektori P definitsiooni ja lemmat 4, saame

$$\begin{aligned} r\,\|Pf\| + s\,\|f - Pf\| - \varepsilon &\leq \operatorname{Re}\left(\lim_n f(r\,K_nS) + s\,f(T) - \lim_n f(s\,K_nT)\right) = \\ &= \operatorname{Re}\left(f(\lim_n r\,K_nS) + s\,f(T) - \lim_n f(s\,K_nT)\right) = \\ &= \operatorname{Re}\left(f(r\,S) + s\,f(T) - \lim_n f(s\,K_nT)\right) = \\ &= \operatorname{Re}\left(\lim_n f(r\,S + s\,(T - K_nT))\right) \leq \\ &\leq \limsup_n \operatorname{Re}\left(f(r\,S + s\,K^nT)\right). \end{aligned}$$

Seega on teoreemi tõestuseks vaja näidata, et

$$\limsup_n \operatorname{Re}\ \left(f(r\,S + s\,K^nT)\right) \leq 1. \tag{10}$$

Viimase võrratuse kehtivust piisab aga näidata iga $f \in \overline{S_X \otimes S_{Y^*}}^{w^*}$ jaoks. Tõepoolest, võtame Simonsi sup-limsup teoreemis (vt. lemma 26) tõkestatud jadaks $(r\,S + s\,K^nT)_{n=1}^{\infty} \subset L(X,Y)$ ja hulkadeks F ning G vastavalt $\overline{S_X \otimes S_{Y^*}}^{w^*}$ ja $B_{L(X,Y)^*}$. Teame, et kaasruumi $L(X,Y)^*$ ühikkera $B_{L(X,Y)^*}$ on $*$-nõrgalt kompaktne. Kuna

$$\overline{S_X \otimes S_{Y^*}}^{w^*} \subset B_{L(X,Y)^*},$$

siis $\overline{S_X \otimes S_{Y^*}}^{w^*}$ on w^*-nõrgalt kompaktne. Seega suvalise $A \in L(X,Y)$ korral

$$\begin{aligned}
&\sup\{\operatorname{Re} f(A) : f \in B_{L(X,Y)^*}\} = \\
&= \|A\| = \sup_{x \in S_X} \|Ax\| = \sup_{x \in S_X} \sup_{y^* \in S_{Y^*}} \operatorname{Re} y^*(Ax) = \\
&= \sup\{\operatorname{Re}\,(x \otimes y^*)(A) : x \otimes y^* \in S_Y \otimes S_{X^*}\} = \\
&= \max\{\operatorname{Re} f(A) : f \in \overline{S_X \otimes S_{Y^*}}^{w^*}\}.
\end{aligned}$$

Seetõttu suvalise operaatori $A \in L(X,Y)$ korral leidub selline $f \in \overline{S_X \otimes S_{Y^*}}^{w^*}$, et

$$\operatorname{Re} f(A) = \sup\{\operatorname{Re} f(A) : f \in B_{L(X,Y)^*}\}.$$

Simonsi teoreemi kohaselt seega

$$\sup_{f \in \overline{S_X \otimes S_{Y^*}}^{w^*}} \limsup_n \operatorname{Re} f(r\,S + s\,K^nT) = \sup_{f \in B_{L(X,Y)^*}} \limsup_n \operatorname{Re} f(r\,S + s\,K^nT).$$

Lemma 23 kohaselt teame, et iga $f \in \overline{B_{X^{**}} \otimes B_{Y^*}}^{w^*}$ korral

$$\limsup_\alpha |f(rS + sK^nT)| \leq 1 \quad \forall S \in B_{K(X,Y)},\ \forall T \in B_{L(X,Y)}.$$

Kasutades ruumi X loomulikku sisestust tema teise kaasruumi, saame

$$\overline{S_X \otimes S_{Y^*}}^{w^*} \subset \overline{B_{X^{**}} \otimes B_{Y^*}}^{w^*},$$

mistõttu teoreemi tõestamiseks vajalik võrratus (10) kehtib. □

Meenutame, et järgmise teoreemi eeldused tagavad Johnsoni projektori eksisteerimise ja ühesuse (vt. teoreem 10 ja lause 9). Teoreem annab kaks tarvilikku ja piisavat tingimust selleks, et $K(X,Y)$ oleks $M(r,s)$-võrratust rahuldav ideaal ruumis $L(X,Y)$ Johnsoni projektori suhtes.

Teoreem 30. *Olgu X ja Y Banachi ruumid, olgu $r, s \in (0,1]$ arvud ja leidugu pere $(K_\alpha) \subset B_{K(Y)}$ nii, et*

$$K_\alpha y \longrightarrow y \quad \forall y \in Y, \quad K_\alpha^* y^* \longrightarrow y^* \quad \forall y^* \in Y^*.$$

Kui Y^* on Radon-Nikodými omadusega, siis järgmised väited on samaväärsed.

(*a*) *$K(X,Y)$ on $M(r,s)$-võrratust rahuldav ideaal ruumis $L(X,Y)$ Johnsoni projektori P suhtes.*

(*b*) *Iga $\varepsilon > 0$, $S \in B_{K(X,Y)}$, $T \in B_{L(X,Y)}$ ja pere $(K_\alpha) \subset B_{K(Y)}$, kus*

$$K_\alpha y \longrightarrow y \quad \forall y \in Y, \quad K_\alpha^* y^* \longrightarrow y^* \quad \forall y^* \in Y^*,$$

korral leidub selline $K \in \operatorname{conv}\{K_\alpha\}$, et

$$\|rS + s(T - KT)\| \leq 1 + \varepsilon. \tag{11}$$

(*c*) *Iga $S \in B_{K(X,Y)}$ ja $T \in B_{L(X,Y)}$ korral eksisteerib selline pere $(K_\alpha) \subset B_{K(Y)}$, kus*

$$K_\alpha y \longrightarrow y \quad \forall y \in Y, \quad K_\alpha^* y^* \longrightarrow y^* \quad \forall y^* \in Y^*$$

ja

$$\limsup_\alpha \|rS - sK^\alpha T\| \leq 1. \tag{12}$$

Tõestus. Teoreemi tõestus järgib [HO, lk. 229] ja [P, lk. 1655] tõestusideesid.

(*a*) $\Rightarrow$ (*b*) Fikseerime vabalt $\varepsilon > 0$, $S \in B_{K(X,Y)}$, $T \in B_{L(X,Y)}$ ja pere $(K_\alpha) \subset B_{K(Y)}$, kus

$$K_\alpha y \longrightarrow y \quad \forall y \in Y, \quad K_\alpha^* y^* \longrightarrow y^* \quad \forall y^* \in Y^*.$$

Oletame vastuväiteliselt, et võrratus (11) ei kehti. Seega tähistades $C = \operatorname{conv}\{K_\alpha T\}$,

$$sC \cap B(rS + sT, 1 + \varepsilon) = \emptyset,$$

kus $B(rS + sT, 1 + \varepsilon)$ on lahtine kera ruumis $L(X,Y)$ keskpunktiga $rS + sT$ ja raadiusega $1 + \varepsilon$. Hahn-Banachi eralduvusteoreemi kohaselt leidub selline $f \in S_{L(X,Y)^*}$, et

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\, f(rS + sT) - (1 + \varepsilon) &= \inf \{\operatorname{Re}\, f(U) : U \in B(rS + sT, 1 + \varepsilon)\} \geq \\ &\geq s \operatorname{Re}\, f(K) = s \operatorname{Re}\, Pf(K) \quad \forall K \in C. \end{aligned}$$

Seega

$$\begin{aligned} 1 + \varepsilon &\leq \operatorname{Re}\, f(rS + sT) - s \operatorname{Re}\, Pf(K) = \\ &= r \operatorname{Re}\, Pf(S) + s \operatorname{Re}\, (f - Pf)(T) + s \operatorname{Re}\, Pf(T - K) \leq \\ &\leq 1 + s \operatorname{Re}\, Pf(T - K) \quad \forall K \in C. \end{aligned}$$

Viimasest aga järeldub, et $\varepsilon \leq 0$, mis on vastuolu.

(*b*) $\Rightarrow$ (*c*) Olgu $(L_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} \subset B_{K(Y)}$ suvaline selline pere, kus

$$L_\gamma y \longrightarrow y \quad \forall y \in Y, \quad L_\gamma^* y^* \longrightarrow y^* \quad \forall y^* \in Y^*.$$

Defineerime hulgas $\mathcal{A} = \{(\gamma, \varepsilon) : \gamma \in \Gamma,\ \varepsilon > 0\}$ osalise järjestuse järgmiselt: $\alpha_1 = (\gamma_1, \varepsilon_1),\ \alpha_2 = (\gamma_2, \varepsilon_2) \in \mathcal{A}$ puhul

$$\alpha_1 \succ \alpha_2 \iff \gamma_1 \succ \gamma_2,\ \varepsilon_1 < \varepsilon_2.$$

Seega on $\mathcal{A}$ suunatud hulk. Nüüd osa (a) põhjal eksisteerib iga $\alpha = (\gamma, \varepsilon) \in \mathcal{A}$ korral $K_\alpha \in \operatorname{conv}\{L_\beta : \beta \succ \gamma\}$ nii, et

$$\|rS + s(T - K_\alpha T)\| \leq 1 + \varepsilon.$$

Järelikult

$$\limsup_\alpha \|rS + s(T - K_\alpha T)\| \leq 1.$$

$(c) \Rightarrow (a)$ Olgu P Johnsoni projektor, mis on defineeritud pere $(K_\alpha) \subset B_{K(Y)}$ poolt (vt. teoreem 10 ja talle järgnevat märkus). Olgu $f \in L(X,Y)^*$ ja $\varepsilon > 0$. Kuna lemma 5 järgi samastame $Pf \in L(X,Y)^*$ ja $f|_{K(X,Y)} = Pf|_{K(X,Y)} \in K(X,Y)^*$, siis $\|Pf\| = \|Pf|_{K(X,Y)}\|$. Funktsionaali normi definitsiooni põhjal leiduvad $S \in B_{K(X,Y)}$ ja $T \in B_{L(X,Y)}$ nii, et

$$r\,\|Pf|_{K(X,Y)}\| + s\,\|f - Pf\| - \varepsilon \leq rf(S) + s(f - Pf)(T).$$

Lemma 10 põhjal teame, et

$$\lim_\alpha (Pf)(T - K_\alpha T) = 0,$$

seega võrratuse (11) eeldusel

$$\begin{aligned} r\|Pf\| + s\|f - Pf\| - \varepsilon &\leq rf(S) + s(f - Pf)(T) + s\lim_\alpha (Pf)(T - K_\alpha T) \leq \\ &\leq \limsup_\alpha |rf(S) + sf(T) - s(Pf)(T) + \\ &\quad + s(Pf)(T) - sf(K_\alpha T)| = \\ &= \limsup_\alpha |f(rS + sT - sK_\alpha T)| \leq \\ &\leq \|f\| \limsup_\alpha \|r\,S + s\,K^\alpha T\| \leq \|f\|. \end{aligned}$$

□

Osutub, et nii nagu M-ideaalid on separaablilt määratud (vt. [O2]), on seda ka $M(r,s)$-võrratust rahuldavad ideaalid.

Teoreem 31. *Olgu X ja Y Banachi ruumid, olgu ruumil Y omadus $M^*(r,s)$, kus $r + s > 1$, ja leidugu pere $(K_\alpha) \subset B_{K(Y)}$ nii, et*

$$K_\alpha y \longrightarrow y \quad \forall y \in Y.$$

Eeldame, et $K(E,F)$ on $M(r,s)$-võrratust rahuldav ideaal ruumis $L(E,F)$ mingi Johnsoni projektori suhtes, mistahes separaablite alamruumide $E \subset X$ ja $F \subset Y$ korral, kus ruumil F leidub pere $(L_\beta) \subset B_{K(F)}$ nii, et

$$L_\beta y \longrightarrow y \quad \forall y \in F.$$

Siis $K(X,Y)$ on $M(r,s)$-võrratust rahuldav ideaal ruumis $L(X,Y)$.

Tõestus. Oletame vastuväiteliselt, et $K(X,Y)$ ei ole $M(r,s)$-võrratust rahuldav ideaal ruumis $L(X,Y)$. Kuna ruumil Y on omadus $M^*(r,s)$, siis kaasruumil Y^* on Radon-Nikodými omadus (vt. lemma 27) ja tuginedes lemmale 24 saame, et

$$K_\alpha^* y^* \longrightarrow y^* \quad \forall y^* \in Y^*.$$

Seega teoreemi 31 kohaselt eksisteerivad $\varepsilon > 0$, $S \in B_{K(X,Y)}$, $T \in B_{L(X,Y)}$ ja pere $(K_\alpha) \subset B_{K(Y)}$, kus

$$K_\alpha y \longrightarrow y \quad \forall y \in Y, \quad K_\alpha^* y^* \longrightarrow y^* \quad \forall y^* \in Y^*,$$

nii, et

$$\|rS + s(T - KT)\| > 1 + \epsilon \quad \forall K \in \operatorname{conv}\{K_\alpha\}.$$

Vastuolu saamiseks konstrueerime separaablid alamruumid $E \subset X$ ja $F \subset Y$, kus ruumil F leidub pere $(L_\beta) \subset B_{K(F)}$ nii, et

$$L_\beta y \longrightarrow y \quad \forall y \in F,$$

ja $K(E,F)$ ei ole $M(r,s)$-võrratust rahuldav ideaal ruumis $L(E,F)$ Johnsoni projektorti suhtes. Oma konstruktsioonis lähtume [P, teoreem 2.3] tõestuse ideest.

Fikseerime suvaliselt indeksi α_1 ja elemendi $x \in B_X$. Tähistame $E_1 = \{x\}$ ja $F_1 = \{Sx, Tx\}$. Edasi leiame indeksi $\alpha_2 \succ \alpha_1$ nii, et

$$\|K_{\alpha_2} y - y\| \leq \frac{1}{2} \quad \forall y \in F_1.$$

Nüüd valime hulga $\operatorname{conv}\{K_{\alpha_1}, K_{\alpha_2}\}$ jaoks lõpliku $\frac{1}{2}$- võrgu V_2 ning leiame lõpliku hulgas $B_2 \subset B_X$ nii, et iga $K \in V_2$ korral leiduks $x_K \in B_2$ nii, et

$$\|(rS + s(T - KT))x_K\| > \|rS + s(T - KT)\| - \frac{1}{2}.$$

Seejärel tähistame

$$E_2 = E_1 \cup B_2$$

ja

$$F_2 = F_1 \cup S(E_2) \cup T(E_2) \cup K_{\alpha_1}(F_1) \cup K_{\alpha_2}(F_1).$$

Analoogiliselt jätkates leiame indeksite jada $\alpha_1 \prec \alpha_2 \prec \ldots$, hulgad $E_1, E_2, \dots \subset B_X$, $B_2, B_3, \dots \subset B_X$, $F_1, F_2, \dots \subset Y$, lõplikud $\frac{1}{n}$-võrgud V_n hulkade $\mathrm{conv}\{K_{\alpha_1}, \ldots, K_{\alpha_n}\}$ jaoks nii, et

$$\|K_{\alpha_n} y - y\| \le \frac{1}{n} \quad \forall y \in F_n.$$

Niisiis iga $K \in V_n$ korral leidub $x_K \in B_n$ nii, et

$$\|(rS + s(T - KT))x_K\| > \|rS + s(T - KT)\| - \frac{1}{n},$$

ning kehtivad võrdused

$$E_{n+1} = E_n \cup B_{n+1}$$

ja

$$F_{n+1} = F_n \cup S(E_{n+1}) \cup T(E_{n+1}) \cup K_{\alpha_1}(F_{n+1}) \cup \dots \cup K_{\alpha_{n+1}}(F_n).$$

Tähistame

$$E = \overline{\mathrm{span}} \bigcup_{n+1}^{\infty} E_n, \quad F = \overline{\mathrm{span}} \bigcup_{n+1}^{\infty} F_n.$$

Siis E ja F on vastavalt ruumide X ja Y separaablid alamruumid, kusjuures

$$K_{\alpha_n} y \longrightarrow y \quad \forall y \in F.$$

Edasi tähistame $L_n = K_{\alpha_n}|_F$, $\overline{S} = S|_E$ ja $\overline{T} = T|_E$. Kõigi nende operaatorite väärtused kuuluvad alamruumi F. Seetõttu võime eeldada, et $L_n \in B_{K(F)}$, $\overline{S} \in B_{K(E,F)}$ ja $\overline{T} \in B_{L(E,F)}$.

Kuna omadus $M^*(r,s)$ pärandub alamruumidesse (vt. lemma 28) siis on ka ruumil F omadus $M^*(r,s)$ ning kuna $L_n y \longrightarrow y$ iga $y \in F$, siis $L_n^* y^* \longrightarrow y^*$ iga $y^* \in F^*$(vt. lemma 24). Seejuures on ruumil Y^* Radon-Nikodými omadus (vt. lemma 27). Kui $K(E,F)$ oleks $M(r,s)$-võrratust rahuldav ideaal ruumis $L(E,F)$ mingi Johnsoni projektori suhtes, siis teoreemi 30 kohaselt leidub selline $L \in \mathrm{conv}\{L_1, \ldots, {}_n\}$, et

$$\|r\overline{S} + s(\overline{T} - L\overline{T})\| \le 1 + \varepsilon.$$

Kuna aga $L = K|_F$ mingi $K \in conv\{K_{\alpha_1}, \ldots, K_{\alpha_n}\}$, siis

$$\|r\overline{S} + s(\overline{T} - L\overline{T})\| \ge \|rS + s(T - LT)\| > 1 + \varepsilon.$$

Saadud vastuolu lõpetab tõestuse. $\square$

Teoreem 32. *Olgu X ja Y Banachi ruumid, olgu $r_1, r_2, s_1, s_2 \in (0,1]$ sellised arvud, et $r_1 + \frac{s_1}{2} > 1$, $r_2 + \frac{s_2}{2} > 1$ ning olgu $K(X)$ ja $K(Y)$ vastavalt $M(r_1, s_1)$- ja $M(r_2, s_2)$-võrratust rahuldavad ideaalid ruumides $J(X)$ ja $J(Y)$. Siis $K(X,Y)$ on $M(r_1 r_2, s_1 s_2)$-võrratust rahuldav ideaal ruumis $L(X,Y)$.*

Tõestus. Näitame, et on rahuldatud teoreemi 31 eeldused. Järelduse 17 kohaselt on Banachi ruumidel X ja Y vastavalt omadused $M^*(r_1, s_1)$ ja $M^*(r_2, s_2)$ ning leidub pere $(K_\alpha) \subset B_{K(Y)}$ nii, et

$$K_\alpha y \longrightarrow y \quad \forall y \in Y.$$

Olgu $E \subset X$ ja $F \subset Y$ separaablid alamruumid. Eelame, et ruumil F leidub pere $(L_\beta) \subset B_{K(F)}$ nii, et

$$L_\beta y \longrightarrow y \quad \forall y \in F.$$

Kuna omadus $M^*(r, s)$ pärandub alamruumidesse (vt. lemma 28), siis on ruumidel E ja F vastavalt omadused $M^*(r_1, s_1)$ ja $M^*(r_2, s_2)$. Seega on täidetud teoreemi 29 eeldused ja $K(E, F)$ on $M(r_1 r_2, s_1 s_2)$-võrratust rahuldav ideaal ruumis $L(E, F)$ mingi Johnsoni projektori suhtes. Rakendades nüüd teoreemi 31, saamegi, et $K(X, Y)$ on $M(r_1 r_2, s_1 s_2)$-võrratust rahuldav ideaal ruumis $L(X, Y)$. $\square$

Teoreemi vahetu rakendusena, võtab järeldus 21 järgmise kuju.

Järeldus 33. *Olgu $r, s \in (0, 1]$ sellised arvud, et $r + \frac{s}{2} > 1$. Kui $K(X)$ on $M(r, s)$-võrratust rahuldav ideaal ruumis $J(X)$, siis $K(X)$ on $M(r^2, s^2)$-võrratust rahuldav ideaal ruumis $L(X)$.*

Ideals of compact operators satisfying the $M(r,s)$-inequality

Marje Johanson

Summary

The main contsept of this Thesis are M-ideals and ideals satisfying the $M(r,s)$-inequality. We are mainly interested in spaces of operators. The subspace $K(X,Y)$ of all compact operators from X to Y is called an ideal satisfying the $M(r,s)$-inequality in the Banach space $L(X,Y)$ of all bounded linear operators, if it is an ideal in $L(X,Y)$, and a corresponding ideal projection P satisfies

$$\|f\| \geq r\|Pf\| + s\|f - Pf\| \quad \forall f \in L(X,Y)^*.$$

If, in particular, $r = s = 1$, i.e.

$$\|f\| = \|Pf\| + \|f - Pf\| \quad \forall f \in L(X,Y)^*,$$

then $K(X,Y)$ is said to be an M-ideal in $L(X,Y)$.

The starting point of the Thesis is the following result of Oja.

Corollary 20 ([O1, Cor. 9]). *If $K(X)$ is an M-ideal in $L(X)$ and $K(Y)$ is an M-ideal in $L(Y)$. Then $K(X,Y)$ is an M-ideal in $L(X,Y)$.*

The objective of the Thesis is to investigate whether a similar result is valid for ideals satisfying the $M(r,s)$-inequality. More precisely, if $K(X)$ and $K(Y)$ are ideals satisfying the $M(r_1,s_1)$- and the $M(r_2,s_2)$-inequality in $L(X)$ and $L(Y)$, respectively, then for which r and s $K(X,Y)$ satisfies the $M(r,s)$-inequality in $L(X,Y)$?

The Thesis consists of five chapters.

In Chapter 1, the basic background results on property (M) and (M^*), approximating the identity operators by compact operators in operator topologies, and ideal projections are given with detailed proofs. Property (M) and (M^*) have turned out to be the key structure condition for X in order for $K(X)$ to be an M-ideal in $L(X)$. The Feder-Saphar characterisation of the dual of $K(X,Y)$ on which our methods of proof heavily rely on, has been given without proof.

Chapter 2 is dedicated to the Johnson projection and its properties. Johnson projection is an ideal projection in $L(X,Y)$ which is induced by certain net of compact operators.

Chapter 3 deals with M-ideals of compact operators. Here we give a detailed proof of aforementioned Corollary 20.

In Chapter 4, we extend Corollary 20 for ideals satisfying the $M(r,s)$-inequality. The following theorem is one of the main results of the Thesis.

Theorem 19. *Let X and Y be Banach spaces, $r_1, r_2, s_1, s_2 \in (0,1]$, where $r_1 + \dfrac{s_1}{2} > 1, r_2 + \dfrac{s_2}{2} > 1$, and let $K(X)$ and $K(Y)$ be ideals satisfying $M(r_1, s_1)$- and $M(r_2, s_2)$-inequalities in $J(X)$ and $J(Y)$, respectively. Then $K(X,Y)$ is an ideal satisfying $M(r_1 {r_2}^2, s_1 {s_2}^2)$-inequality in $L(X,Y)$.*

Using new proving method based on ideas from [O3], [HO], [O2] and [P], the following refinement of Theorem 19 is obtained in Chapter 5.

Theorem 32. *Let X and Y be Banach spaces, $r_1, r_2, s_1, s_2 \in (0,1]$, where $r_1 + \dfrac{s_1}{2} > 1, r_2 + \dfrac{s_2}{2} > 1$, and let $K(X)$ and $K(Y)$ be ideals satisfying $M(r_1, s_1)$- and $M(r_2, s_2)$-inequalities in $J(X)$ and $J(Y)$, respectively. Then $K(X,Y)$ is an ideal satisfying $M(r_1 r_2, s_1 s_2)$-inequality in $L(X,Y)$.*

Kirjandus

[CN] J. C. Cabello, E. Nieto, *On M-type structures and the fixed point property*, Houston J. Math. **26** (2000), 549−560.

[CNO] J. C. Cabello, E. Nieto, E. Oja *On ideals of compact operators satisfying the $M(r,s)$-inequality*, J. Math. Anal. and Appl. **220** (1998), 334−348.

[FS] M. Feder, P. D. Saphar, *Spaces of compact operators and their dual spaces*, Israel J. Math. **21** (1975), 38-49.

[GKS] G. Godefroy, N. J. Kalton, P. D. Saphar, *Unconditional ideals in Banach spaces*, Studia Math. **104** (1993), 13−59.

[H] R. Haller, *Kompaktsete operaatorite ruum kui M-ideaal. Semestritöö*, Tartu, 1995.

[HO] R. Haller, E. Oja *Geometric characterizations of positions of Banach spaces in their biduals*, Arch. Math. **69** (1997), 227−233.

[HWW] P. Harmand, D. Werner, W. Werner, *M-ideals in Banach Spaces and Banach Algebras*, Springer, Berlin, 1993.

[J] J. Johnson, *Remarks on Banach spaces of compact operatoes*, J. Funct. Anal. **32** (1979), 304−311.

[K] N. J. Kalton, *M-ideals of compact operators*, Illinois J. Math. **37** (1993), 147−169.

[KW] N. J. Kalton, D. Werner, *Property (M), M-ideals, and almost isometric structure of Banach spaces*, J. Rein Angew. Math. **461** (1995), 137−178.

[LORW] A. Lima, E. Oja, T. S. S. R. K. Rao, D. Werner *Geometry of operator spaces*, Michigan Math. J. **41** (1994), 473−490.

[M] R. E. Megginson, *An Introduction to Banach Space Theory*, Springer, New York, 1998.

[O1] E. Oja, *A note on M-ideals of compact operators*, Acta Comment. Univ. Tartuensis **960** (1993), 75−92.

[O2] E. Oja, *M-ideals of compact operators are separabely determined*, Proc. Amer. Math. Soc. **126** (1998), 2747−2753.

[O3] E. Oja, *Geometry of Banach spaces having shrinking approximations of the identity*, Trans. Amer. Math. Soc. **352** (2000), 2801−2823.

[OO] E. Oja, P. Oja, *Funktsionaalanalüüs*, Tartu Ülikool, Tartu, 1991.

[P] M. Põldvere, *Phelps' uniqueness property for $K(X,Y)$ in $L(X,Y)$*, Rocky Mountain J. Math. **36** (2000), 1651−1663.

[S] S. Simons, *A convergence theorem with boundary* Patcific J. Math. **40** (1972), 703−708.

[DS] Н. Данфорд, Дж. Шварц, *Линейные операторы. Общая теория*, Издательство иностранной литературы, Москва, 1962.