

TARTU ÜLIKOOL
Füüsika-keemiateaduskond
Eksperimentaalfüüsika- ja tehnoloogia instituut

HELI VALTNA

**SUPERLUMINAALSETE LOKALISEERITUD
VALGUSLAINETE TEKITAMISE VÕIMALIKKUS**

Magistritöö optikast ja spektroskoopiast

Juhendajad: TÜ korraline professor füüs.-mat.dokt. akad Peeter Saari
TÜ FI õppedirektor PhD Kaido Reivelt

Tartu 2006

SISUKORD

| | |
|--|----|
| 1. SISSEJUHATUS | 3 |
| 2. ÜLEVAADE LOKALISEERITUD LAINETEST | 6 |
| 2.1 Besseli kimp kui lihtsaim ruumis lokaliseeritud "difraktsioonivaba" laineväli | 6 |
| 2.2 Lokaliseeritud lained | 9 |
| 2.3 Lokaliseeritud lainete levi-invariantsus ja lõpmatu koguenergia | 10 |
| 2.4 Lokaliseeritud lainete liigitus | 11 |
| 2.5 Lokaliseeritud laineväljade moodustamine optilises piirkonnas | 12 |
| 2.5.1 Levi-invariantse lainefunktsiooniga superluminaalselt levivad lokaliseeritud lained | 14 |
| 2.5.2 Luminaalselt levivad lokaliseeritud lained | 15 |
| 3. SUPERLUMINAALSELT LEVIVAD LOKALISEERITUD LAINED | 17 |
| 3.1 Fokuseeritud X-laine uurimine | 17 |
| 3.1.1 Fokuseeritud X-laine lainefunktsiooni tuletus | 18 |
| 3.1.2 Fokuseeritud X-laine modifikatsioonid | 22 |
| 3.2 Superluminaalselt levivate lokaliseeritud lainete moodustamine optilises piirkonnas | 25 |
| 3.2.1 Superluminaalselt leviva lokaliseeritud lainevälja tuletus | 26 |
| 3.2.2 Superluminaalselt leviva lokaliseeritud lainevälja spektri kandja moodustamine | 28 |
| 3.2.3 Difraktsioonivõre koste | 30 |
| 3.2.4 Osaliselt mittekoherentse lainevälja ajas keskmistatud mõõtmised | 36 |
| 3.3 SLLW eksperimendi simulatsioon | 38 |
| 3.3.1 SLLW genereerimine difraktsioonivõre abil, eksperimendi simulatsioon | 38 |
| 3.4 Plaanid edaspidiseks | 51 |
| 4. KOKKUVÕTE | 52 |
| 5. SUMMARY | 54 |
| 6. AVALDATUD PUBLIKATSIOONID | 55 |
| KIRJANDUS | 57 |

1 SISSEJUHATUS

1983. a tuletas James Neill Brittingham [1] matemaatilised avaldised, mis kirjeldavad vaakumis muutumatu kujuga, ilma laialivalgumata, justkui difraktsioonivabalt levivaid elektromagnetlainete impulsse, nn fookuslaineid (*focus wave mode* - FWM¹). Tõestamaks, et tegu on tõepoolest eksootiliste omadustega laineväljaga, näitas Brittingham, et seda genereeriv lainefunktsioon rahuldab homogeenset lainevõrrandit, on levi-invariantne, ruumiliselt lokaliseeritud, kuid mittesingulaarne ja pidev. Levi-invariantseteks nimetame lainevälju, mille kuju ruumis levides ei muutu st lainefunktsiooni mooduli avaldises sisalduvad aeg t ja levikusuunaline koordinaat z lineaarse kombinatsioonina $z - vt$, kus v on kiiruse tähendusega konstant. Brittingham'i tööst arenes välja omaette uurimissuund matemaatilises füüsikas ja hiljem ka optikas, mis tegeleb laia spektriga levi-invariantsete ("mittedifrageeruvate") lainefunktsioonide – nn lokaliseeritud lainete (LL) – tuletamise ning teoreetilise ja eksperimentaalse uurimisega.

LL-te olemus, eriti füüsikaline realiseeritavus, tekitas elavat diskussiooni, sest näiteks Brittinghami fookuslaine omab lõpmatut koguenergiat ja ei ole põhjuslik selles mõttes, et seda ei saa tekitada allika apertuurist ühes suunas väljuva väljana. LL-te füüsikalise sisu avamiseks ja matemaatiliseks kirjeldamiseks on esitatud erinevaid lähenemisi nagu a) z -telje sihis liikuvad kompleksarvulise koordinaadiga allikad [2], b) neel-allikas-paarid kui fiktiivsed laengud [3], [4], [5], c) superluminaalselt (ülevalgusekiirusega) liikuvad elektrilaengud [6] ning d) erinevad esitused tasalainete superpositsiooni kaudu (vt näiteks [7], [8], [9] ja viited neis). Tänapäevaks on LL-te põhimõttelise füüsikalise realiseeritavuse probleem lahenenud: on võimalik konstrueerida lõpliku energiaga põhjuslikke lainevälju, mis kuitahes hästi aproksimeerivad seni tuletatud lokaliseeritud laineid.

Teine küsimuste ring, mis tõstas uurimissuuna arenedes, oli LL-te praktilise genereerimise võimalikkus reaalses eksperimendis. 1992. aastal avaldati esimene eksperimentaalne tõestus ühte tüüpi LL-e, nn X-laine, olemasolu kohta helilainetega ultraheli piirkonnas tehtud katsetes [10]. 1997. aastal õnnestus TÜ FI-s katseliselt tõendada elektromagnetiliste levi-invariantse LL-e olemasolu optilises piirkonnas [11], [12]. Teedrajavale eksperimendile järgnesid Bessel-X lainete ja fookuslainete eksperimentaalne

¹ Käesolevas töös kasutame laineväljade nimede lühendustena akronüüme ingliskeelsest nimetusest.

uurimine: [13], [14], [15], [16], [17].

Praegusel ajal on uurimise objektiks uute LL-lahendite ja nende lõpliku koguenergiaga modifikatsioonide otsimine lisaks seni tuntuile: fookuslaine, X-laine, fokuseeritud X-laine, silinderlaine, Bessel'i X-impulss, Bessel-Gauss'i impulss, Mackinnon'i impulss jne ([7], [8], [9], [18], viited neis). Samuti käsitletakse LL-te levimist dispergeerivas keskkonnas ning uuritakse X-tüüpi lainete formeerumist mittelineaarsetes kristallides ([19], [20] ja viited neis). Väljundina teistesse teoreetilise füüsika valdkondadesse, on LL-d õnnestunud rakendada kvantelektrodünaamikas täpsustamaks footoni ruumilise lokaliseerimise käsitlust [1].

LL-te võimalikud rakendused võiksid kuuluda järgmistesse valdkondadesse: mittelineaarne optika sh femtosekund-spektroskoopia, osakeste kiirendamine ja juhtimine elektromagnetväljade abil, optilised pintsetid, metroloogia, laser-kirurgia, juhtmevaba kommunikatsioon jne. ([21] ja viited selles).

Käesoleva magistritöö eesmärk on uurida ülevalguse kiirusega levivaid lokaliseeritud laineid, nende lainefunktsioonide omadusi ning laineväljade moodustamise võimalikkust ja põhimõtteid elektromagnetlainete optilises piirkonnas. Töö koosneb lainefunktsioonide tuletamisest ja laineväljade genereerimise põhimõtete teoreetilistest uuringutest, eksperimenti modelleerivast arvutisimulatsioonist, insenertehnilistest lahendusest vajalike skeemielementide ehitamiseks ning eksperimendiskeemi koostamiseks ja eeksperimentist.

Magistritöö esimeses osas on tutvustatud lihtsaima "mittedifrageeruva" lainevälja – monokromaatsesse Besseli kimbu – saamist. Näidatakse, et Besseli kimpude summeerimisel moodustuvad lokaliseeritud lained ning on tutvustatud nende liigitust. Samuti on antud lühike põhjendus LL-te lõpmatu koguenergiale. Analüüsitakse varasemalt läbiviidud LL-te eksperimente ülevalgusekiirusega leviva LL-ne moodustamise seisukohalt.

Magistritöö originaalosa võib jagada tinglikult kaheks. Esimeses pooles on uuritud ilmutatud kujul lainefunktsiooni omavat ülevalgusekiirusega levivat lokaliseeritud lainet – nn fokuseeritud X-lainet (FXW). FXW levib oma kuju muutmata ja superluminaalse rühmakiirusega ning pakub huvi võimalike praktiliste rakenduste seisukohalt erandlikult tugeva külgsuunalise lokaliseerituse tõttu. Töös on esitatud FXW ja tema lõpliku koguenergiaga analoogi (M1) tuletused ning tuletatud veel üks modifikatsioon (M2); on analüüsitud nimetatud lainefunktsioonide sõltuvust parameetritest ning uuritud

modifikatsioonide muutumatu levimise ulatust.

Originaalosa teises pooles on rõhuasetus ülevalgusekiirusega levivate laineväljade optilises piirkonnas moodustamise põhimõtete uurimisel ja (eel)eksperimendil. On tuletatud gaussiaani kujulise energiaspektriga superluminaalselt leviva lainevälja (SLLW) avaldis, leitud üldine põhimõte ülevalgusekiirusega levivate LL-te spektri kandja moodustamiseks difraktsioonivõre abil. Sellest lähtuvalt on uuritud difraktsioonivõre kostet ning SLLW moodustamist ülilühikestest valgusimpulssidest. On koostatud interaktiivne simulatsioon, mille abil leida optimaalsed parameetrid realselt läbiviidavaks eksperimendiks ning koostatud simulatsiooni põhjal eksperimendiskeem peegelsümmeetrilise SLLW moodustamiseks.

2 ÜLEVAADE LOKALISEERITUD LAINETEST

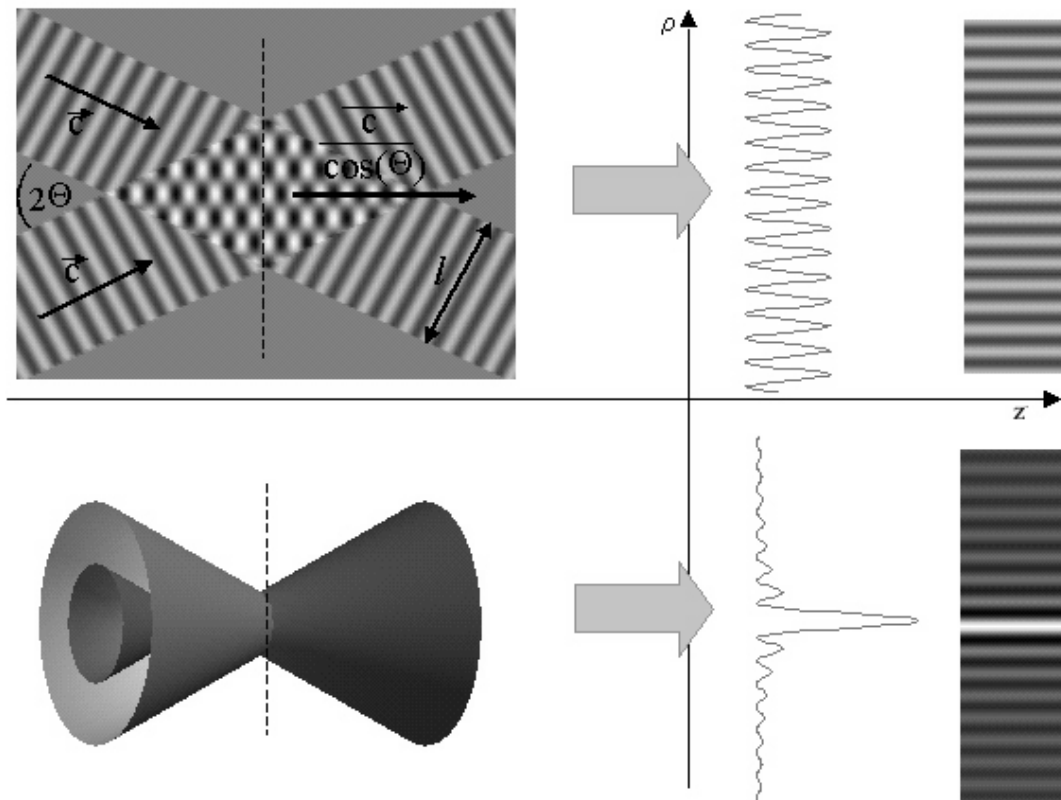
2.1 Besseli kimp kui lihtsaim ruumis lokaliseeritud "difraktsioonivaba" laineväli

Käesolevas töös uurime tugevalt lokaliseeritud mittedifrageeruvaid lainevälju. Lihtsaim mittedifrageeruv laineväli on tasalaine. Lõpliku ulatusega lained aga valguvad seda enam laiali, mida lokaliseeritumad need algul olid. Alustame LL-te tutvustamist Besseli kimpudest, kuigi viimastega tegelev valdkond arenes LL-te temaatikast sõltumatult ja ajaliselt hiljem. 1987. a publitseerisid Durnin jt artikli [24], kus käsitleti difraktsioonile justkui mitte alluvate lainevõrrandi lahendite peret, milliste teljesuunalise nõ energiakiire läbimõõt on lainepikkuse suurusjärgus. Veelgi tähelepanuväärsem on asjaolu, et lihtsaima kõnealuse lainevälja energiajaotus radiaalsuunas kirjeldub nullindat järku esimese astme Besseli funktsiooni ruuduga J_0^2 , st jaotuse esimene maksimum on ca 16 korda nõrgem 0.-ndast (tsentraalsest) maksimumist.

Besseli kimp on lihtsate optiliste elementide abil moodustatav. Artiklis [25] kasutati monokromaatse Besseli kimbu saamiseks kollimaatorit ja rõngakujulist pilu, kuid sama tulemuse saab ka koonilise läätse ehk aksikoni ja holograafiliste elementide (näiteks nn lensakoni) abiga [26]. Lõpmata suure apertuuri korral on Besseli kimbu invariantne levikusügavus lõpmatu, piiratud ava korral on see lõplik ning sõltub ava suurusest ning kasutatavate optiliste elementide parameetritest.

Besseli kimbu konstrueerimine toimub järgnevalt. Vaatleme esmalt kahte samal tasandil, üksteise suhtes nurga 2Θ all levivat tasalainet, z - ehk levimistelje sihiks määrame tasalainete lainevektorite suhtes nurga Θ all oleva suuna. Tasalaine kimpude lõikudes tekib lõpliku ulatusega interferentsmuster, mille amplituud z -teljega ristuv tasandis muutub kosinusoidaalselt ($\cos(2\pi \frac{\sin\Theta}{\lambda} \rho)$) ning kogu interferentsmuster levib z -telje sihis kiirusega $v > c$. Kolmedimensionaalse telgsümmeetrilise Besseli kimbu saamiseks summeerime kõik sellised tasalaine paarid, mille tasandit on pööratud z -telje ümber nurga vahemikus 0 kuni π . Selle tulemusena omandab lainevälja energiajaotus z -teljega ristuv tasandis nullindat järku esimese astme Besseli funktsiooni ruudu kuju J_0^2 (vt joonist 1).

Reaalses olukorras tuleb meil leppida piiratud apertuuriga: Besseli kimbu "difraktsioonivaba"

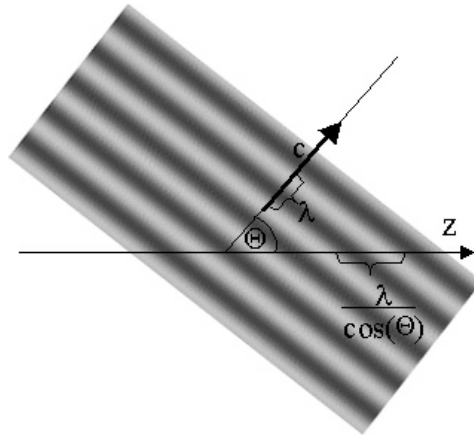


Joonis. 1 Kahest ristuvast tasalainekimbust Besseli kimbu saamine: kahemõõtmelisel juhul on meil lainete tasandis kosinusoidaalse jaotusega interferentsipilt. Kui laineväli on kolmemõõtmeline ja koosneb z -telje suhtes nurga Θ all levivatest tasalainetest, allub interferentsipildi energiajaotus funktsioonile J_0^2 . Joonise ülemine pool illustreerib kahemõõtmelist ja alumine kolmemõõtmelist olukorda.

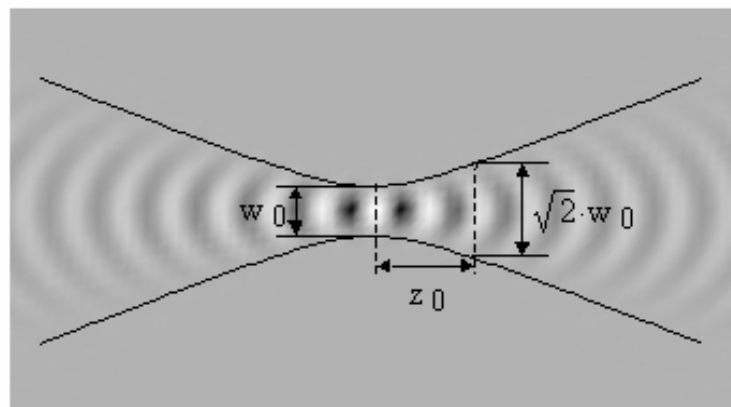
levikusügavus avaldub kiirtekimbu laiuse l ja lainete levimissuunaga moodustuva nurga Θ kaudu $z_{\max} = \frac{l}{\tan(\Theta)}$. Monokromaatse Besseli kimbu faasikiirus on $v = \frac{\omega}{k_{\parallel}} = \frac{\omega}{k \times \cos(\Theta)} = \frac{c}{\cos(\Theta)} \frac{k}{k} = \frac{c}{\cos(\Theta)} > c$ superluminaalne.

Lainevälja superluminaalne levikukiirus on lihtsasti mõistetav järgmise konstruktsiooni valguses: vaatleme z -telge ning sellega nurga Θ all levivat tasalaineimpulssi. Selle ajaga, mil lainefront oma levimissihis liigub edasi ühe meetri, läbitakse z -teljel pikkus $1m/\cos\Theta$. Et võnkesagedus on z -teljel ja laine levikusihis sama, aga lainepikkus z -teljel pikem, siis järelikult on z -telje suunaline kiirus suurem laine leviku kiirusest (vt joonist 2). Võib väita, et Besseli kimp ei ole midagi muud kui igal hetkel uutest tasalaine osadest moodustuv interferentsipilt, aga see on tänu superpositsiooniprintsiibi kehtimisele samavõrd laine kui iga teinegi.

Superluminaalsust esineb laineväljade levis palju sagedamini kui tavaliselt arvatakse.



Joonis. 2 Lainepikkuse suurenemine z -telje sihis võrreldes z -telje suhtes nurga Θ all oleva suunaga.



Joonis. 3 Gaussi kimbu faasipinnad ja kimpu iseloomustavad suurused. Faasipindade kõveruse märgi muutumine fookust läbides põhjustab "tavaliste" Gaussi kimpude puhul valguse kiirusest pisut suuremat rühmakiirust. ("Tavaliste" Gaussi kimpude all mõeldaks spetsiaalsete keerukate skeemideta saadavaid kiirte kimpe.)

Lõpliku laiusega laineväljad valguvad seda enam laiali, mida kitsam nende läbimõõt algul oli. Laine leviku teljel on punkt, kus talje läbimõõt on vähim – fookus. Sealsamas kus laineamplituudi nõ taljeläbimõõt on vähim, tekib faasipinna nõgususe üleminekul kumeruseks faasinihe, mida nimetatakse Gouy efektiks, ning sellega kaasneb valguse kiirusest õige pisut suurem faasikiirus. Madalaimat järku Gaussi kimbu puhul väljendab täiendavat faasinihet seos $\phi(z) = \arctan\left(\frac{z}{z_0}\right)$, kus z on levimissuunaline koordinaat, z_0 fookuse ja punkti, kus kimbu läbimõõt on $\sqrt{2}$ korda suurem minimaalsest, vaheline kaugus (vt joonist 3 ja viidet [27]). Lõpliku kestvusega Gaussi kimbu (impulsi) puhul levimisteljel fookuse piirkonnas defineeritav rühmaikiirus on optikas tüüpiliste fokuseerimistingimuste juures samuti pisut suurem valguse kiirusest ([28] ja viited selles).

Teeme ka mõttelise eksperimendi info levimise kiiruse määramiseks: saadame signaali viisil, et katame kinni tasalainete allika. Hoiame katikut ees näiteks aja t kestel. Info sellisest elimineerimisest levib sama kiiresti kui tasalained ise – valguse kiirusega. Kui signaal z -telje sihis leviks superluminaalselt, peaks seal pimeda perioodi kestvus olema lühem kui valitud t väärtus, arvutus aga näitab, et $t_z = \frac{s_z}{v_z} = \frac{s \times \cos(\Theta)}{c \times \cos(\Theta)} = \frac{ct}{c} = t$, kus alaindeks z tähistab parameetrite väärtusi z -teljel. Seega, info levimise kiirus LL-s on võrdne valguse kiirusega.

2.2 Lokaliseeritud lained

LL-te lainefunktsioonid on skalaarse lainevõrrandi

$$\Delta\Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = 0$$

lahendid, mida üldkujul saab esitada tasalainete Fourier' superpositsioonina

$$\Psi(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int \int \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{k} \psi(\vec{k}, \omega) \exp\left(i\vec{k}\vec{r} - i\omega t\right),$$

kus $\vec{k} = \vec{e}_1 k_x + \vec{e}_2 k_y + \vec{e}_3 k_z$. Telgsümmeetrilise lainevälja jaoks saame siit silinderkoordinaadistikus

$$\Psi(\rho, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \int_{|k_z|}^{\infty} dk \Phi(k_z, k) J_0\left(\rho\sqrt{k^2 - k_z^2}\right) \exp(ik_z z - ikct), \quad (1)$$

kus z -telg on leviku siht, ρ radiaalne koordinaat, $\Phi(k_z, k)$ spektraalset jaotust kirjeldav funktsioon. Viimase valemi saamisel on arvestatud lainevõrrandist tulenevat seost $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$, mis telgsümmeetria puhul silinderkoordinaadistikus annab $k^2 = k_\rho^2 + k_z^2$. Valemi (1) abil saadavad lained on spektraalamplituudidega $\Phi(k_z, k)$ summeeritud Besseli

kimbud $J_0 \left(\rho \sqrt{k^2 - k_z^2} \right) \exp (ik_z z - ikct)$.

Konkreetses lainevälja saamiseks on otstarbekas valemisse (1) minevat spektraalset jaotusfunktsiooni käsitleda kahe teguri korrutisena $\Phi(k_z, k) = \phi(k_z, k) \varphi(k_z, k)$, milles tegur $\varphi(k_z, k)$ on üldiselt oma muutujatest nõrgalt sõltuv, "sile" funktsioon ja tegur $\phi(k_z, k)$ on tugevalt lokaliseeritud või singulaarne funktsioon, mis määrab laineimpulsi spektri kandjajoone: (k_z, k) -tasandil spektraalfunktsiooni $\Phi(k_z, k)$ puhul või (k_z, k_ρ) -tasandil, kui spektraalfunktsioon on antud muutujates k_z, k_ρ . Edaspidi, lühiduse huvides, nimetame funktsiooni $\varphi(k_z, k)$ spektriiks ja $\phi(k_z, k)$ – kuna see määrab LL-e omadused ja liigi – tinglikult liigifunktsiooniks.

2.3 Lokaliseeritud lainete levi-invariantsus ja lõpmatu koguenergia

Selles alapeatükis refereerime lühidalt LL-te levi-invariantsuse tingimusi [8]. Lainefunktsiooni mooduli levi-invariantsuseks on tarvis lõpmatut apertuuri ja lõpmatu kitsast spektri kandjat. See tähendab, et spektraalfunktsiooni $\Phi(k_z, k)$ kandja peab olema singulaarne, mis omakorda meie tähistustes tähendab, et liigifunktsioon $\phi(k_z, k)$ peab olema võrdeline δ -funktsiooniga. δ -funktsiooni sisaldumine lainefunktsiooni avaldises põhjustab lainevälja lõpmatu koguenergia:

$$E_\Sigma = \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^{\infty} d\rho \rho \int_0^{2\pi} d\varphi |\Psi(z, \rho, \varphi, t)|^2 = \infty,$$

sest integraal üle δ^2 on lõpmatus. Seega, praktiliselt ei ole meil ei lõpmatut apertuuri ega lõpmatut koguenergia ning seetõttu ei saa realiseerida ka täielikult levi-invariantset lainevälja. Siiski, lokaliseeritud lainete lõpliku koguenergia modifikatsioonid levivad piisavalt tugevalt δ -funktsiooni-sarnaselt lokaliseeritud liigifunktsiooni $\phi(k_z, k)$ puhul praktiliselt muutumatult üle pikkade distantide, valgudes levides laiali olulised vähem, kui seda näeb ette Rayleigh' kriteerium.

LL-d jagunevad omakorda laineteks, kus laineväli ise (lainefunktsioon) levib muutumatult (seejuures teljesuunaline rühma- ja faasikiirus on võrdsed) ja laineteks, kus ainult lainevälja moodul (mille ruut annab energiajaotuse) levib invariantset (faasi- ja rühmakiirus ei ole võrdsed). Kogu lainefunktsioon levib invariantset juhul, kui kõik lainevälja moodustavad tasalained levivad z -telje suhtes sama nurga all. See tingimus on täidetud vaid erandjuhul, mil spektri kandjaks on punkti $k_{z0} = 0$ läbivad sirged.

Ette ruttavalt täpsustame, et see tingimus on täidetud ainult superluminaalse levi-invariantse lainefunktsiooniga alamperekonda kuuluvate laineväljade jaoks.

2.4 Lokaliseeritud lainete liigitus

Selles alapeatükis refereerime lühidalt LL-te liigitust ([9] ja viited selles; kusjuures oleme lisanud omapoolsed selgitavad joonised).

Lokaliseeritud laineid saab liigitada mitmeti. Näiteks on otsitud lainefunktsioonide analüütilistest avaldistest sarnaseid radikaale või siis on grupeeritud lahendeid, mille nimes sisaldub mingi kindel fraas. Selline liigitus ei ole väga otstarbekas, kasvõi põhjusel, et LL-e lainefunktsioon ei pruugi ilmutatud kujul avalduda.

LL-d on hea liigitada nende spektri kandjajoone² kuju järgi. Näitamaks sellise liigituse häid külgi, uurime esmalt LL-te spektri kandjate saamist.

Kandjajoon (k_z, k) -tasandil on liigifunktsioonis $\phi(k_z, k)$ sisalduva δ -funktsiooni argumendiks olev sirge $k - \beta k_z - \frac{k_{z0}}{\gamma} = 0$, mille tõusu määrab lainevälja rühmakiiruse ja valguse kiiruse jagatis $\beta = v/c$. Kandja kuju (k_z, k_ρ) -tasandil näitab ära lainevälja moodustavate tasalainete suunad (vt joonist 4). Kandjajoone kuju (k_z, k_ρ) -tasandil saadakse k -ruumis koonusekujulise määramispiirkonna $(k^2 = k_\rho^2 + k_z^2)$ ja δ -funktsiooni argumendiks oleva tasandi $k - \beta k_z - \frac{k_{z0}}{\gamma} = 0$ lõike projektsioonist uuritavale tasandile. Sõltuvalt rühmakiirusest on spektri kandjajooneks (k_z, k_ρ) -tasandil hüperbool (erijuhuna sirge) $\beta > 1$, parabool $\beta = 1$ või ellips $\beta < 1$ (vt joonist 5).

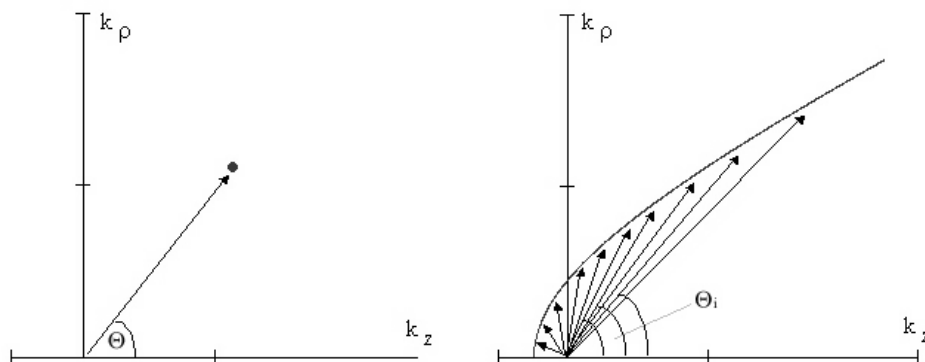
LL-te liigitus spektri kandjajoone põhjal on järgnev (vt joonist 5):

1 Üldine superluminaalne perekond: $v > c$, sirge $k - \beta k_z - \frac{k_{z0}}{\gamma} = 0$ tõus on suurem ühest ja sirge ei läbi koordinaatide alguspunkti, $\frac{k_{z0}}{\gamma} \neq 0$. Spektri kandjajooneks (k_ρ, k_z) -tasandil on hüperbool. Siia kuuluvad näiteks käesoleva töö uurimisobjektiks olevad lained, sh fokuseeritud X-laine (FXW) ja silinderlaine.

a Superluminaalsete levi-invariantse lainefunktsiooniga LL-te alamperekond: $v > c$,

² Funktsiooni kandja on selle hulga sulund, milles vaadeldava funktsiooni väärtused erinevad nullist.

Lõpmatu laia spektri korral on spektri kandjaks joonega $k - \beta k_z - \frac{k_{z0}}{\gamma} = 0$ määratud piirkond. Lõpliku ulatusega spektri korral on kandjaks ainult osa sellest joonest. Käesolevas töös nimetame (k_z, k) -tasandi sirgele $k - \beta k_z - \frac{k_{z0}}{\gamma} = 0$ vastavat joont (k_z, k_ρ) -tasandil spektri kandjajooneks, mis vastavalt liigitusele on hüperbool, parabool või ellips.



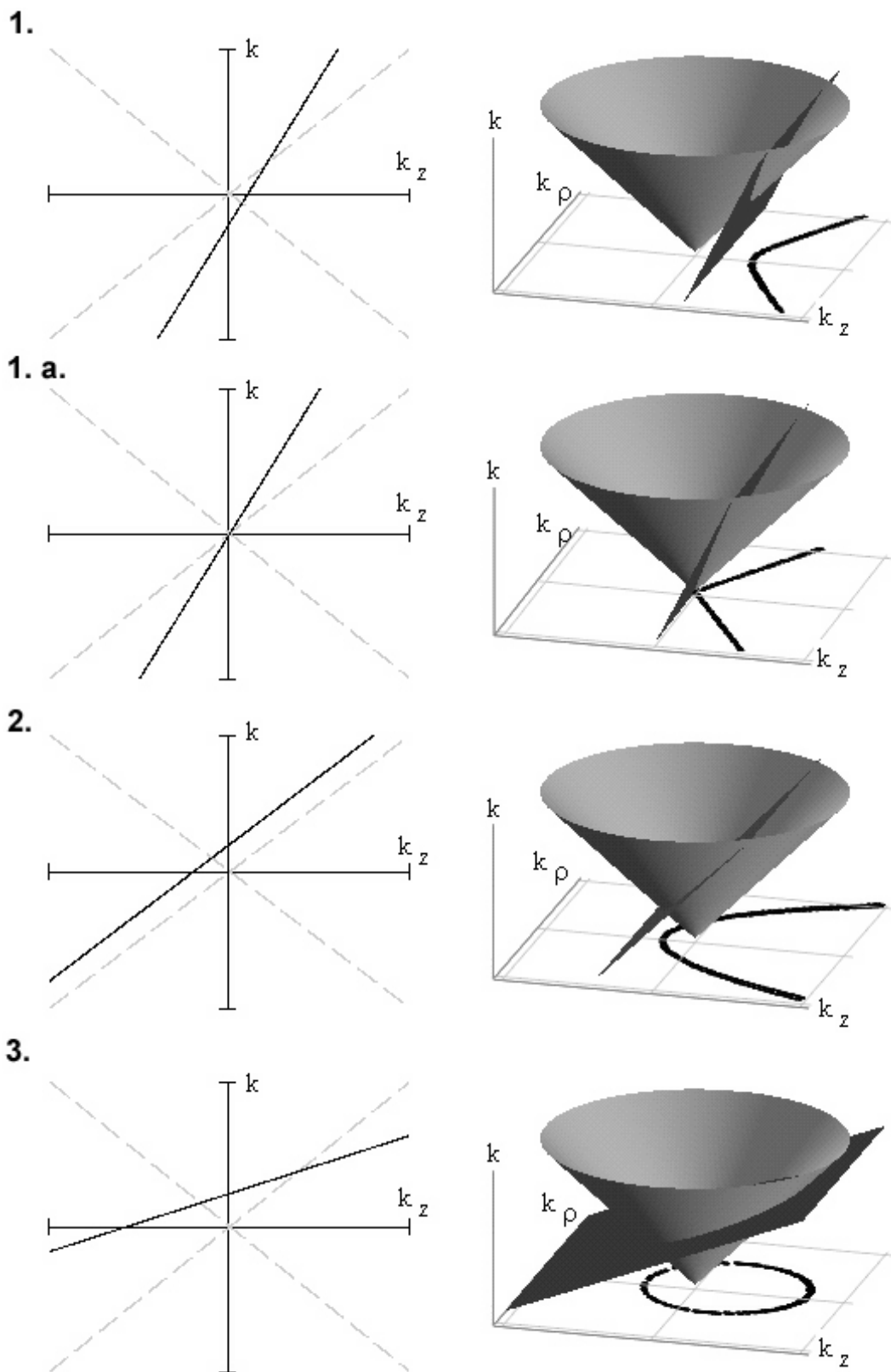
Joonis. 4 Tasalainet k -ruumis kirjeldab punkt. Koordinaatide alguspunktist tasalainet märkivasse punkti suunatud vektor määrab tasalaine leviku suuna, selle vektori pikkus on tasalaine lainearvu. Vasakpoolne graafik on esitatud silindersümmeetrilises teljestikus ning seal vastab punktile nurga Θ all levivatest tasalainetest koosnev Besseli kimp (vt Besseli kimbu saamist joonisel 1). Selles formalismis võime parempoolsel graafikul esitatud spektri kandjat kujutada pideva punktide jadana, mis kokkuvõtlikult näitab millise koonusenurgaga θ_i Besseli kimpudest laineväli moodustub.

sirge $k - \beta k_z - \frac{k_{z0}}{\gamma} = 0$ tõus on suurem ühest ja sirge läbib koordinaatide alguspunkti, $\frac{k_{z0}}{\gamma} = 0$. Spektri kandjajooneks (k_ρ, k_z) -tasandil on sirge. Esindajateks X-laine ja Bessel-X impulss.

- 2 Valguse kiirusel liikuvate LL-te perekond: $v = c$, sirge $k - \beta k_z - \frac{k_{z0}}{\gamma} = 0$ tõus on võrdne ühega ja sirge ei läbi koordinaatide alguspunkti, $\frac{k_{z0}}{\gamma} \neq 0$. Spektri kandjajooneks (k_ρ, k_z) -tasandil on parabool. Siia perekonda kuulub fookuslaine.
- 3 Subluminaalsete LL-te perekond: $v < c$, sirge $k - \beta k_z - \frac{k_{z0}}{\gamma} = 0$ tõus on väiksem ühest ja sirge ei läbi koordinaatide alguspunkti, $\frac{k_{z0}}{\gamma} \neq 0$. Spektri kandjajooneks (k_ρ, k_z) -tasandil on ellips (erandjuhul ring). Siia perekonda kuulub Mackinnon'i impulss.

2.5 Lokaliseeritud laineväljade moodustamine optilises piirkonnas

Käesolevas paragrahvis refereerime varasemalt läbiviidud eksperimentides lainevälja gene-reerimise põhimõtteid, lainevälja mõõtmise meetodeid jne. Käesoleva töö eesmärk on superluminaalsesse perekonda kuuluvate hüperboolse kandjajoonega LL-te moodustamise ja registreerimise meetodite väljatöötamine. Sellest lähtuvalt on ülevaates tähelepanu pööratud neile lahendustele, mida saame SLLW eksperimendi ettevalmistamisel rakendada (näiteks silindersümmeetriast loobumine FWM eksperimendis) või vastupidi, millised lahendused SLLW eksperimendi puhul rakendatavad ei ole (näiteks lainevälja moodustavate tasalainekimpude levimine väikse nurga all optilise telje suhtes ning selles



Joonis. 5 Eri perekondadesse kuuluvate LL-te kandja kuju nii (k, k_z) kui ka (k_z, k_ρ) -tasandil: 1. üldine superluminaalne perekond; 1. a. superluminaalsete levi-invariantse lainefunktsiooniga alamperekond; 2. valguse kiirusel liikuvate LL-te perekond; 3. subluminaalsete LL-te perekond.

lähtuvalt võimalus saavutada lainevälja registreerimisel piisav täpsus CCD-kaamera abil).

Varasemalt läbiviidud eksperimendid oleme grupeerinud LL-te perekondadesse kuuluvuse põhjal. Seda põhjusel, et eri perekondadesse kuuluvate LL-te spektri kandjate moodustamine on põhimõtteliselt erinev ning nn teedrajavat eksperimenti läbi viies töötatakse välja ka vastavale perekonnale omase spektri kandjajoonega lainevälja moodustamise põhimõtted.

2.5.1 Levi-invariantse lainefunktsiooniga superluminaalselt levivad lokaliseeritud lained

Levi-invariantse lainefunktsiooniga superluminaalsete LL-te alamperekonda kuuluvate laineväljade (e X-tüüpi lainete) kandjajooneks (k_ρ, k_z) -tasandil on sirge. See vastab olukorrale, kus kõik lainevälja moodustavad eri lainepikkusega tasalained levivad optilise telje suhtes nurga θ all. Väga heas lähenduses saame sellist kandjajoont moodustada a) rõngakujulise pilu ning sobiva fookuskaugusega läätse, b) koonilise läätse ehk aksikoni ja c) holograafilise elemendi, näiteks lensakoni abil. Just seetõttu, et kõnealust spektri kandjat on suhteliselt lihtne moodustada, on levi-invariantse lainefunktsiooniga superluminaalsete LL-te alamperekonda kuuluvaid LL-d kõige enam uuritud.

Esimese eksperimentaalse kinnituse LL-te eksisteerimise kohta elektromagnetlainete optilises piirkonnas andsid TÜ FI tööruhma katsed [11], [12]. Töös [11] (Bessel-X impulsi tuletus [22] ja teoreetiline eeluuring [29]) genereeriti gaussiaani kujulise spektriga, 210 fs kestvusega valgusimpulsi abil Bessel-X impuss. Laineväli, mille spektri kandjajoon (k_ρ, k_z) -tasandil on sirge, moodustati lensakoni abiga. Eksperimendis uuriti lainevälja tsentraalse maksimumi koospüsimumist levimisel disperseerivas keskkonnas. Mõõtmiseks kasutati autokorrelatsiooni tehnikat. Sisuliselt tehti järgmist: moodustati Bessel-X kimp ning jagati see kiirepoolitajaga kaheks. Üks kimp suunati disperseerivas keskkonda, teine kimp läbis sama pika optilise teepikkuse õhus. Skeemi väljundis suunati erinevad kimbud kokku ning mõõdeti nende korrelatsioonifunktsioon.

Lainevälja moodustavate tasalainete nurk optilise telje suhtes (ehk nn aksikoninurk) oli 0.01 rad, mistõttu J_0^2 -jaotust omava lainevälja tsentraalse maksimumi ristsuunaline ulatus oli 20 mikronit. Väikeste aksikoninurkade puhul on lainevälja muutumatu levimise ulatus suhteliselt pikk, tsentraalne valgustäpp mõõdetav piisava lahutusvõimega CCD kaameraga ning täidetud paraksiaalsuse tingimused.

Interferomeetrilises korrelatsiooni eksperimendis [12] mõõdeti ära Bessel-X impulsi ajalise-ruumiline profiil. Rõngaspilu abil moodustati ülevalgusekiirusega liikuv Bessel-X impulss, millele suunati valgusekiirusega leviv tasalaineimpulss. Bessel-X generaatori taga moodustus ajast sõltumatu laineväli, mille profiil ruumis on LL-e reaalosa. Juhul, kui tasalainete levimise suuna kalle optilise telje suhtes on väga väike, on vaja kasutada kitsaid impulsse, ehk lühikese korrelatsiooniajaga ($\tau < 10fs$) kiirgust ehk laia spektriga valgusallikat. Vastasel juhul ei eristu saadav laineväli tasalainete interferentspildist.

Mõõtes lainevälja ilma ajalise lahutuseta, registreerime üle aja keskmistatud intensiivsust. Töös [12] on näidatud, et sellistes mõõtmistes ei sõltu registreeritav lainemuster seda moodustavate tasalainete faasidest. Sellest lähtuvalt saab femtosekundi pikkuseid impulsse genereeriva laseri impulsi asemel kasutada statsionaarset laiaribalist müra. Antud töös kasutati Xe kaarlampi. Laineväli moodustati rõngaspilu ning läätse abil. Valguskimbu väikesed langemisenurgad optilise telje suhtes võimaldasid moodustuvat lainevälja vajaliku lahutusvõimega registreerida CCD kaamera abil.

Bessel-X lainevälja käitumist on uuritud töös [16] (eeleksperimendid: [30], [31]). Laineväli genereeriti femtosekundlaseri ja a) peegeldava aksikoni ning b) mikroaksikonide matriksi abil. Lainevälja autokorrelatsiooni mõõdeti mittelineaarse kristalli tagumisele pinnale tekkiva kujutise suurenduse registreerimisel CCD elemendiga. Aksikoni nurga suuruseks oli 0.1° .

Nn X-tüüpi lainete rühmakiiruse superluminaalsust uurivaid eksperimente on läbi viidud mikrolainete piirkonnas [13] (töös kasutatud analüüsimeetodika kohta tehti tugevat kriitikat: [32] ja [33]) ja femtosekundlaseri abiga genereeritud lokaliseeritud lainevälja levimisel argoonis tekkiva ionisatsiooni teekonda registreerides [14].

Töodes [17] ja [20] jälgiti X-tüüpi lainevälja moodustumist mittelineaarses kristallis.

2.5.2 Luminaalselt levivad lokaliseeritud lained

Luminaalsesse perekonda kuuluvate LL-te kandjajooneks on parabool, mistõttu on vaja eri lainepikkusega tasalainetele anda sobiv leviku suund z -telje suhtes. Ühest ning lihtsalt lahendust kandja moodustamiseks seni teada ei ole.

Seni ainsas, 2002. aastal TÜ FI-s läbiviidud eksperimendis [15] (vt ka eksperimendi ettevalmistust kirjeldavaid artikleid [34] ja [35]) õnnestus kasutatava spektri

ulatuses moodustada heas lähenduses paraboolne kandja aksikoni nurka, klaasi paksust, klaasisorti ning sobiva sammuga difraktsioonivõre põhjustatavaid dispersioone kombineerides. Interferomeetrilises korrelatsiooniekspriimendis jagati valguskimp kaheks enne lokaliseeritud lainevälja moodustamist. Ühest kimbust moodustati uuritav laineväli, teise, nn tasalainekimbu, teele seati viivitusahel, et kompenseerida käiguvahesid ning väljundis suunati kimbud taas kokku. Sel viisil moodustus skeemi väljundis ajast sõltumatu (ent ruumikoordinaatidest ja viivituse suuruselt sõltuv) laineväli, mille profiil ruumis on LL-ne reaalosa (vt põhjalikku ülevaadet [8]). (Et vajalike tsentraalsümmeetriliste optiliste elementide vajaliku täpsusega lihvimine on keerukas, genereeriti eksperimendis nn 2D fookuslaine.) Nurk lainevälja moodustavate tasalainete levimise suuna ja optilise telje vahel oli väike ning seetõttu lainevälja levimisulatus suhteliselt pikk. Interferomeetrilises korrelatsiooniekspriimendis registreeriti lainevälja ruumiline käitumine. Valgusallikana kasutati Xe-kaarlampi lainepikkuste vahemikus 600 – 1000 mikronit, mis annab korrelatsiooniajaks orienteeruvalt $6fs$.

Üldisesse superluminaalsesse või subluminaalsesse perekonda kuuluvate laineväljade eksperimendis genereerimisest seni teateid ei ole.

3 SUPERLUMINAALSELT LEVIVAD LOKALISEERITUD LAINED

Käesolevas töös on uuritud üldisesse superluminaalsesse perekonda kuuluvaid LL-d. Töö võib jagada mõtteliselt kaheks osaks.

Esmalt uurime ilmutatud kujul lainefunktsioone omavaid lahendeid: eksponentsiaalselt kustuva energiaspektriga fokuseeritud X-lainet (FXW) ja tema lõpliku koguenergiaga modifikatsioone (M1 ja M2). Lisaks FXW parameetritest sõltuvuse analüüsimisele, on tuletanud kaks lõpliku koguenergiaga modifikatsiooni ning uuritud FXW-tüüpi laineväljade lokaliseeritust ning muutumatu levimise ulatust.

Teises osas keskendume ülevalgusekiirusega levivate LL-te eksperimendis moodustamisele. On tuletatud eksperimendis realiseeritava Gaussi-kõvera kujulise spektriga superluminaalselt leviv lokaliseeritud laine (SLLW). On uuritud seda tüüpi laineväljade spektri kandja moodustamise üldiseid põhimõtteid ning töötatud välja eksperimendi simulatsioon ning optilise eksperimendi läbiviimise üldised alused. On kokku pandud eksperimendiskeem ja saadud esialgne kinnitus lainevälja eksisteerimise kohta elektromagnetlainete optilises piirkonnas.

Matemaatiliste arvutuste läbiviimisel on kasutatud tarkvarapakette Mathcad (versioonid 2001i, 13) ja Scientific Workplace (versioon 5.00, MuPAD arvutusmootor) ning integraalide tabeleid [36]. Kolmemõõtmelised graafikud, simulatsioonid ja animatsioonid on tehtud Mathcad'is.

3.1 Fokuseeritud X-laine uurimine

Fokuseeritud X laine on eksponentsiaalselt kustuva spektriga üldisesse superluminaalsesse perekonda kuuluv laineväli, mille lainefunktsioon on ilmutatud kujul avaldatav. Käesolevas peatükis tuletame fokuseeritud X-laine lainefunktsiooni ning uurime FXW ning selle lõpliku koguenergiaga modifikatsioonide omadusi ja levimist ruumis. Märkus: peatükk refereerib artiklites [I] ja [II] avaldatud tulemusi.

3.1.1 Fokuseeritud X-laine lainefunktsiooni tuletus

FXW lainefunktsiooni ilmutatud kuju saadakse z-telje sihis leviva silindersümmeetrilise lainevälja üldavaldisest Besseli kimpude superpositsioonina

$$\Psi(\rho, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \int_{|k_z|}^{\infty} dk \Phi(k_z, k) J_0\left(\rho\sqrt{k^2 - k_z^2}\right) \exp(ik_z z - ikct), \quad (1)$$

kuhu asendatakse, reeglina kahedimensionaalne, spektraalfunktsioon $\Phi(k_z, k)$ (vt ka lk 9).

FXW liigifunktsioon avaldub $\phi(k_z, k) = \delta(\gamma(k_z - \beta k) - k_{z0})$, kus k_{z0} määrab seose $k_0 = k_{z0}\sqrt{1+\beta}/\sqrt{1-\beta}$ abil lainevälja moodustavate tasalainekomponentide pikima lainepikkuse $2\pi/k_0$ ja on ühtlasi k vähim väärtus; β ja γ relatiivsusteoorias tuntud parameetrid $\beta = v/c$ ja $\gamma = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}$. Näeme, et liigifunktsiooni argumendiks oleva sirge $\gamma(k_z - \beta k) - k_{z0} = 0$ tõus $k(k_z)$ -teljestikus on suurem ühest, mis näitab FXW kuuluvust LL-te üldisesse superluminaalsesse perekonda ning kandjajooneks (k_z, k_ρ) -tasandil on hüperbool.

FXW spektriiks $\varphi(k_z, k)$ valitakse kustuv eksponent: $\varphi(k_z, k) = e^{-\Delta\gamma(k - \beta k_z)}$ (joonis 9 annab hea ettekujutuse FXW spektrist). Kogu FXW spektraalfunktsioon avaldub:

$$\Phi(k_z, k) = e^{-\Delta\gamma(k - \beta k_z)} \times \delta(\gamma(k_z - \beta k) - k_{z0}). \quad (2)$$

Kõrvalmärkusena olgu mainitud, et liikmed $\gamma(k - \beta k_z)$ ja $\gamma(k_z - \beta k)$ valemis (2) on lainevektori komponendid k ja k_z Lorentzi teisenduse esituses. Lähenemine, kus LL-e tuletatakse lihtsamatest, nn prototüüp-lainetest, mida vaadeldakse kiirusega v liikuvates inertsiaalsetes taustsüsteemides, on esitatud artiklites [7] ja [9].

FXW saamiseks tuleb integreerida avaldist (1), kuhu on asendatud FXW spektraalne funktsioon (2)

$$\Psi(\rho, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \int_{|k_z|}^{\infty} dk e^{-\Delta\gamma(k - \beta k_z)} \delta(\gamma(k_z - \beta k) - k_{z0}) J_0\left(\rho\sqrt{k^2 - k_z^2}\right) \times \exp(ik_z z - ikct).$$

Saadud avaldise integreerimiseks teeme muutujavahetuse $k' = \gamma(k - \beta k_z)$ ja $k'_z = \gamma(k_z - \beta k)$ (sisuliselt vahetasime taustsüsteemi). Sellega teiseses integraalavaldis kujule:

$$\Psi(\rho, z, t) = const \int_{-\infty}^{\infty} dk'_z \int_{|k'_z|}^{\infty} dk' e^{-\Delta k'} \delta(k'_z - k_{z0}) J_0\left(\rho\sqrt{k'^2 - k'^2_z}\right) \times \exp(ik'_z \gamma(\beta z - ct)) \exp(-ik' \gamma(\beta z - ct)),$$

kus on kasutatud seost $k_z z - kct = k'_z \gamma(z - \beta ct) + k' \gamma(\beta z - ct)$ ning üldkujuliselt tähistatud

konstantse kordaja väärtus. Nüüd on võimalik avaldada lainefunktsioon $\Psi(\rho, z, t)$, selleks integreerime saadud valemit üle k' (kasutades Laplace'i pöörde tabelit [36])

$$\Psi(\rho, z, t) = \text{const} \int_{-\infty}^{\infty} dk'_z \frac{\exp\left(-|k'_z| \sqrt{\rho^2 + (\Delta - i\gamma(\beta z - ct))^2}\right)}{\sqrt{\rho^2 + (\Delta - i\gamma(\beta z - ct))^2}} \times \\ \times \delta(k'_z - k_{z0}) \exp(ik'_z \gamma(z - \beta ct))$$

ja seejärel üle k'_z :

$$\Psi_{FXW}(\rho, z, t) = \text{const} \frac{\exp\left(-|k_{z0}| \sqrt{\rho^2 + (\Delta - i\gamma(\beta z - ct))^2}\right)}{\sqrt{\rho^2 + (\Delta - i\gamma(\beta z - ct))^2}} \times \quad (3) \\ \times \exp(i\gamma k_{z0}(z - \beta ct)) .$$

Saime FXW lainefunktsiooni ilmutatud kujul. Käesolev tulemus põhineb, kuid ei korda varasemaid, mis on esitatud artiklites [7], [9].

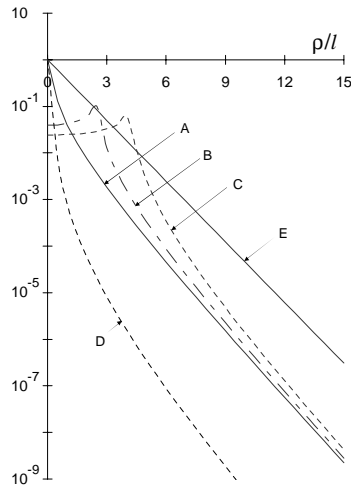
Edaspidi, et valemid oleksid ülevaatlikud ja sisaldaksid vahetult laineimpulsi superluminaalset rühmakiirust v_{sl} , asendame relativistlikud parameetrid β ja γ nende superluminaalsete ekvivalentidega $\beta_{sl} = \frac{v_{sl}}{c} = \frac{c^2}{v}$, $\gamma_{sl} = (\beta_{sl}^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} = \gamma\beta$:

$$\Psi_{FXWsl}(\rho, z, t) = \text{const} \frac{\exp\left(-|k_{z0}| \left(\sqrt{\rho^2 + (\Delta - i\gamma_{sl}(z - v_{sl}t))^2}\right)\right)}{\sqrt{\rho^2 + (\Delta - i\gamma_{sl}(z - v_{sl}t))^2}} \times \quad (4) \\ \times \exp\left(ik_{z0}\gamma_{sl}\left(\frac{v_{sl}}{c}z - ct\right)\right) .$$

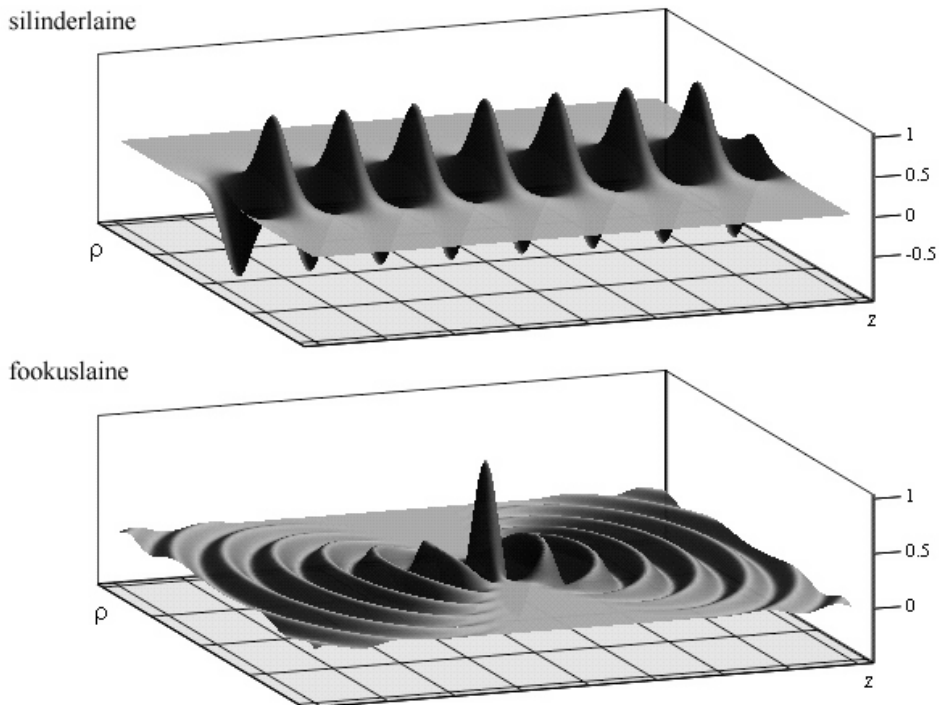
FXW reaalosa ja mooduli kujutab heas lähenduses joonis 10 (vt ka animatsioone *FXW_moodul.avi*, *FXW_reaalosa.avi*, *FXW_imaginaarosa.avi* ja näidistöölehte *FXWnäidistööleht.mcd* elektroonses lisas C).

Analüüsimise saadud lainefunktsiooni:

- FXW moodul on levi-invariantne, kuna amplituudi määrav tegur sisaldab sõltuvust levimis-suunalistest koordinaatidest liikme $z - v_{sl}t$ kaudu. Selle põhjal saame väita, et lainevälja leviku kiirus on v_{sl} ehk superluminaalne. (Märkus: need omadused tulenevad lainevälja spektri kujust, kus võtsime $\beta_{sl} > 1$ ja $k_{z0} \neq 0$ sellega määrasime lainevälja kuuluma üldisesse superluminaalsesse perekonda).
- FXW lainefunktsioon ise ei ole levi-invariantne ehk faasi- ja rühmakiirused ei ole võrdsed kuna faasi määrav tegur sõltub levikusuunalisest muutujast viisil $\frac{v_{sl}}{c}z - ct$, kui amplituudi



Joonis. 6 Radiaalsuunalise sõltuvuse kõverad logaritmilises teljestikus. Kõver A kujutab FXW-d ja silinderlainet seisundis $|\Psi(\rho, z = 0, t = 0)|$, kõver B silinderlainet $|\Psi_{sil}(\rho, z = 0, t = 2.5l/c)|$, kõver C – FXW-t $|\Psi_{FXW}(\rho, z = 0, t = 2.5l/c)|$, kõver D – silinderlaine ajaline tuletis $|\frac{d}{dt}\Psi_{sil}(\rho, z = 0, t = 0)|$ ja kõver E esitab võrdluseks sõltuvuse $e^{-\rho/l}$. FXW ja silinderlaine tugevat lokaliseeritust näitab nende asümptootiliselt kiirem langus kui eksponentfunktsioonil. Joonisel on valitud pikkusühikuks $l = 1/|k_{z0}|$, mille põhjal $\Delta = 0.1l$, $\beta_{sl} = 1.25c$.



Joonis. 7 Piiril $v \rightarrow \infty$ läheb FXW üle silinderlaineaks ja piiril $v \rightarrow c$ fookuslaineaks. Silinderlaine jaoks on vähim jaotise väärtus nii z kui ρ -teljel $1\mu m$, fookuslaine jaoks vastavalt $3\mu m$. $\Delta = \frac{1}{3}\mu m$, $k_{0z} = -\frac{2\pi}{\mu m}$ silinderlaine korral, $b = -k_{0z}$ fookuslaine jaoks.

määrav tegur sisaldab sõltuvust $z - v_{sl}t$.

- Uurime FXW külgsuunalist lokaliseeritust. Külgsuunalise lokaliseerituse avaldamiseks valime $t = 0$ ja $z = 0$: $\Psi_{FXW}(\rho \rightarrow \infty, z = 0, t = 0) \sim \frac{\exp(-\rho)}{\rho}$, tulemuseks tugev, eksponentsiaalne lokaliseeritus. Levikusuunaline lokaliseeritus on nõrk, avaldades $\Psi_{FXW}(\rho = 0, z \rightarrow \infty, t = 0) \sim \frac{1}{z}$ (vt ka joonist 6).

On huvitav märkida, et FXW oma tugeva külgsuunalise lokaliseeritusega on andnud väljundi teise füüsika valdkonda. Nimelt, FXW-st konstrueeritud ühefotoonne seisund osutub külgsuunas eksponentsiaalselt lokaliseerituks [1]. See on tugevam lokaliseeritus kui sfääriliselt sümmeetrilisele ühefotoonsele seisundile hiljuti näidatud peaaegu eksponentsiaalne kahanemine [37]. Mis omakorda on oluliselt tugevam lokaliseeritus, kui kvantielektrodünaamikas aastakümnetega tavapäraseks muutunud käsitlusest on tulenenud.

- $k_{z0} = 0$ juures muutuvad hüperbooli haarad sirgeteks ning FXW läheb üle X-laineiks, mille lainefunktsioon on levi-invariantne, aga lokaliseeritus nõrk (kahanemine on võrdeline koordinaadi negatiivse astmega):

$$\Psi_X(\rho, z, t, k_{z0} = 0) = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (\Delta - i\gamma(\beta z - ct))^2}}. \quad (5)$$

- Rühmakiirus v_{sl} on FXW avaldises parameetrina ning on määratud vahemikus $c < v_{sl} < \infty$. Juhul $v_{sl} \rightarrow \infty$ läheb FXW üle z-teljega ristsuunas levivatest tasalainetest koosnevaks silinderlaineks [9]:

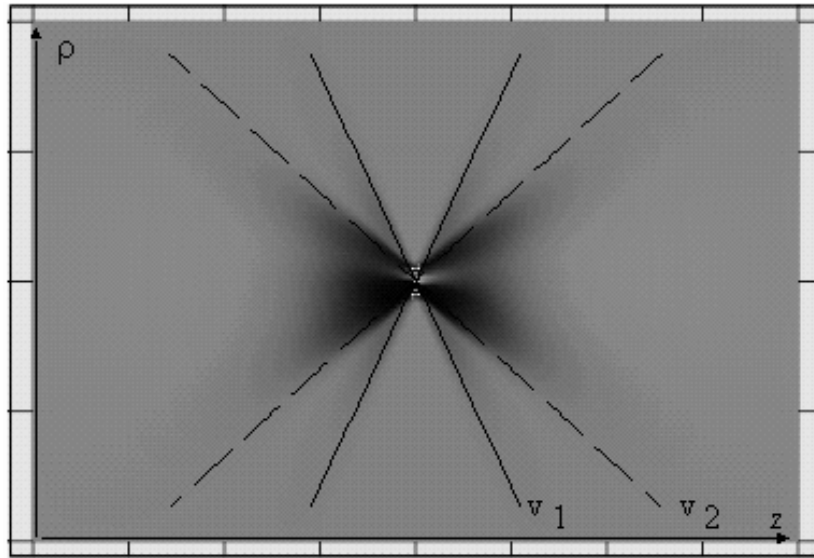
$$\Psi_{silinder}(\rho, z, t) = \frac{\exp\left(-|k_{z0}|\sqrt{\rho^2 + (\Delta + ict)^2}\right)}{\sqrt{\rho^2 + (\Delta + ict)^2}} \exp(ik_{z0}z). \quad (6)$$

Juhul $v_{sl} \rightarrow c$ ja $\Delta \rightarrow a_1\gamma$, $|k_{z0}| \rightarrow B\gamma$ teiseneb FXW luminaalsesse perekonda kuuluvaks fookuslaineiks, mille kandjajoon (k, k_ρ) -tasandil on parabool, $k_{z0} \neq 0$ [1], [9]:

$$\Psi_{FWM}(\rho, z, t) = \frac{\exp\left(-\rho^2 \frac{B}{2(2\Delta - i(z-ct))}\right)}{(2\Delta - i(z-ct))} \exp\left(-i\frac{B}{2}(z+ct)\right) \quad (7)$$

vt joonist 7 ja animatsioone *fookuslaine.avi* ja *silinderlaine.avi* lisas C.

- Kujutame FXW moodulit koosnevana kahest tippu pidi kokku pandud koonusest. Rühmakiiruse suurenedes muutuvad koonuste sisenurgad θ väiksemaks seaduspärasuse $\theta = \arctan(\gamma_{sl})$ järgi (vt 8). Märkus: edaspidises näitame, et superluminaalsesse perekonda kuuluvaid LL-d saame moodustada difraktsioonivõre abil. Difraktsioonivõre ja LL-te parameetrid on seotud viisil $\beta = \sin(\theta_i)$, kus θ_i on võrele langeva valgusimpulsi levimise



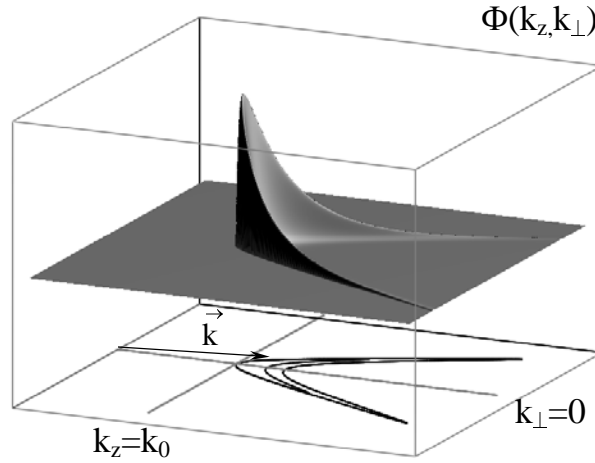
Joonis. 8 Näitamaks haarade vahelise nurga sõltuvus rühmakiirusest v_{sl} , on ühisel graafikul kahe erineva kiirusega liikuva FXW lainefunktsiooni moodulid. $v_1 = 1.05c$ ja $v_2 = 1.25c$; $k_{z0} = -15 \frac{2\pi}{\mu m}$, $\Delta = \frac{1}{5} \mu m$.

suund. Nii võrele langev, kui ka võrele diffrageeruv maksimaalselt lokaliseeritud valgusimpulss levivad difraktsioonivõre suhtes nurga $\theta = \theta_i$ all.

3.1.2 Fokuseeritud X-laine modifikatsioonid

FXW, tänu singulaarse liigifunktsiooni sisaldumisele spektris, levib ruumis mooduli kuju muutmata, kuid omab ka lõpmatut koguenergia. Käesolevas peatükis tuletame FXW modifikatsioonid, mis omavad lõpliku koguenergia ning on selles mõttes füüsikaliselt realiseeritavad. Modifikatsioonid saadakse LL-le omase singulaarse liigifunktsiooni asendamisel lõplikku laiust omava liigifunktsiooniga ning mistõttu modifikatsioonid ei ole levi-invariantsed. Modifikatsiooni liigifunktsioon valitakse nii, et saadav mitte levi-invariantne lainefunktsioon järgiks heas lähenduses FXW ajalis-ruumilist käitumist. Uurime modifikatsioonide muutumatu leviku ulatust.

Esmakordselt tuletasid lõpliku koguenergia versiooni FXW-st, mida hakati nimetama modifitseeritud fokuseeritud X-laineks (M1), Besieris *et al* artiklis [7]. M1 saamiseks tuleb z-telje sihis leviva silindersümmeetrilise lainevälja üldavaldisse asendada FXW spektraalse funktsiooni (2) asemele mittesingulaarne spektraalne jaotus. Besieris jt on



Joonis. 9 FXW teise modifikatsiooni M2 spekter $\Phi(k_z, k_\perp)$ -teljestikus, $k_\perp = \pm k_\rho$. Valitud parameetrid võimaldaksid kõnealust lainevälja optilises eksperimendis realiseerida: impulsi levimise kiirus $v = 1.001c$; vähim lainearv $k_0 = 2\pi(0.8\mu\text{m})^{-1}$ ehk punaseim lainepikkus on $0.8\mu\text{m}$; spektri laiust iseloomustavad parameetrid $\Delta = 5\mu$, $a_2 = 100\mu\text{m}$ ja $q = 2$. Graafiku ulatus külgsuunas on $2.5\mu\text{m}$ ja telje suunas $25\mu\text{m}$. Kontuurid graafiku põhjal kujutavad läbilõikeid tasandis $1/10$ ja $1/100$ Φ maksimaalväärtusest. Noolega on märgitud impulssi moodustava tasalaine-komponendi lainevektor.

valinud liigifunktsiooni sarnase fookuslaine lõpliku koguenergiaga modifikatsioonile:

$$\Phi_{M1}(k_z, k) = \exp(-\gamma(k - \beta k_z)\Delta) \times \quad (8)$$

$$\times \frac{(\gamma(k_z - \beta k) - k_{z0})^{q-1}}{\Gamma(q)} \exp(-a_2(\gamma(k_z - \beta k) - k_{z0})) ,$$

$k_z > b$. $\Gamma(q)$ tähistab gammafunktsiooni, a_2 ja q on liigifunktsiooni laiust kirjeldavad parameetrid.

Asendades M1 spektri (8) skalaarse lainevõrrandi üldlahendisse (1) ning Laplace'i pöörde tabelite abil, saame M1 avaldise ilmutatud kujul:

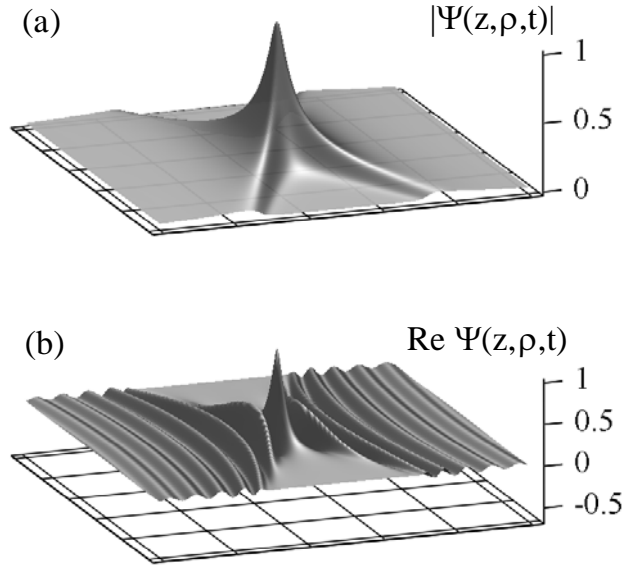
$$\Psi_{M1sl}(\rho, z, t) = \text{const} \Psi_{FXW}(\rho, z, t) F(\rho, z, t)^{-q} ,$$

mis erineb FXW avaldisest funktsiooni

$$F(\rho, z, t) = \sqrt{\rho^2 + (\Delta - i\gamma_{sl}(z - v_{sl}t))^2 + a_2 - i\gamma_{sl}\left(\frac{v_{sl}}{c}z - ct\right)} ,$$

mida nimetame modifitseerijaks, negatiivse astme võrra.

Modifitseerija levib z -teljel valguse kiirusega c . Säilitamiseks võimalikult pikas levikuulatuses lainevälja tsentraalse maksimumi kuju, tuleb lainevälja rühmakiirus valida võimalikult lähedane c -le või suruda modifitseerija põhjustatud maksimumi kahanemine maha sobiva parameetrite a_2 ja q valikuga. Märkime ära, et M1 on võrreldes FXW-ga külgsuunas ρ^{-q} korda paremini lokaliseeritud.



Joonis. 10 M2 moodul (a) ja reaalosa (b). Kujutatud on lainefunktsiooni sõltuvus levikusuunalisest z -koordinaadist (kasvab vasakult paremale) ja külgsuunalisest koordinaadist $x = \pm\rho$ ajahetkel $t = 0$. Graafikud on normeeritud ja parameetrid võimaldaksid lainevälja realiseerida optilises piirkonnas (vt eelmise joonise allkirja). Graafik on levikusuunas välja venitatud: skaala ulatus z - ehk levimisteljel on $10\mu\text{m}$ ja külgsuunas $100\mu\text{m}$. Graafikute iseärasusi on rõhutatud valgustusega.

On võimalik avaldada ka teine, ilmutatud kuju omav FXW modifikatsioon: M2. Selle spekter omab kuju:

$$\Phi_{M2}(k_z, k) = \frac{1}{\gamma(k_z - \beta k)} \Phi_{M2}(k_z, k).$$

M2 lainefunktsioon avaldub:

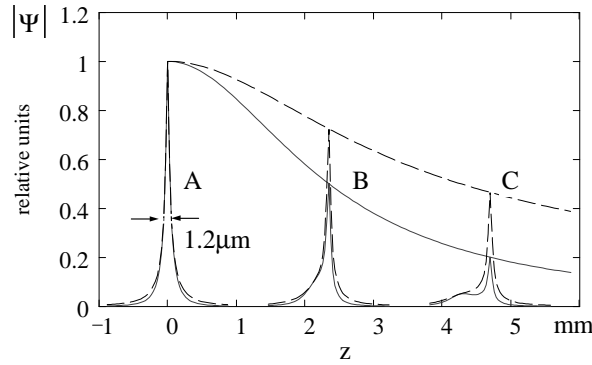
$$\Psi_{M2sl}(\rho, z, t) = \frac{k_{z0}^{q-1} e^{a_2 k_{z0}} \Gamma(1-q, k_{z0} F(\rho, z, t))}{\sqrt{\rho^2 + (\Delta - i\gamma_{sl}(z - v_{sl}t))^2}},$$

kus $\Gamma(\dots, \dots)$ tähistab mittetäielikku gammafunktsiooni. M2 spekter on kujutatud joonisel 9 ning lainefunktsiooni moodul ja reaalosa joonisel 10. Heas lähenduses kujutavad graafikud ka FXW ja M1 spektrit ning lainefunktsiooni.

z -telje positiivses suunas leviv M1 maksimum kahaneb seaduspärasuse

$$\Psi_{M1}(0, z, t = z/v_{sl}) = \left| \frac{a_2 + \Delta}{a_2 + \Delta + it\sqrt{v_{sl}^2 - c^2}} \right|^q, \quad (9)$$

järgi, samas M2 maksimumi kahanemine uuritud parameetrite muutumise piirkonnas on küllalt hästi lähendatav erijuhule kus $q = 1$. M1 ja M2 lainefunktsioonide läbilõiked levimisel mööda z -telge on kujutatud joonisel 11. Võime näha, et mõlema lõpliku koguenergiaga modifikatsiooni tsentraalne maksimum püsib praktiliselt muutumatuna levides üle vahemaade, mis mitme tuhande kordselt ületavad nende levikusuunalise läbilõike.



Joonis. 11 Modifikatsioonide M1 (pidevjoon) ja M2 (punktirjoon) lainefunktsiooni tsentraalse maksimumi ajaline evolutsioon levimisel mööda z -telge. Lainefunktsioonide läbilõiked tasandiga $\rho = 0$ on arvatud kaugustel A: $t = 0$; B: $t = \Delta z/v_{sl}$ ja C: $t = 2\Delta z/v_{sl}$, kus Δz tähistab nn muutumatu levimise ulatust ja on defineeritud valemiga (10), kus $q = 1$. Graafikud on normeeritud ning parameetrite väärtuste valik võimaldaks lainevälju genereerida optilises piirkonnas (vt joon 9). Rõhutamaks lainefunktsioonide profiili, on need z -telje suunas 100 korda laiemaks venitatud. Punktis C võime märgata M2 modifitseerija mahajäämist FXW komponendist.

M1 muutumatu levimise ulatuse tuletame valemist (9): Δz on vahemaa, mille läbimisel lainefunktsiooni M1 maksimum väheneb $\sqrt{2}$ korda.

$$\Delta z = v_{sl} \frac{a_2 + \Delta}{\sqrt{v_{sl}^2 - c^2}} \sqrt{\sqrt{2} - 1} \quad (10)$$

Valem kehtib M2 jaoks hea lähenduses erijuhul, kui $q = 1$.

Lainefunktsioonide M1 ja M2 sümmeetria kaasa leviva telje $z = v_{sl}t$ suhtes säilib leviku staadiumis kui $ct \ll \gamma_{sl} (a_2 + \sqrt{\rho^2 + \Delta^2})$. Levides üle pikemate vahemaade kaotavad M1 ja M2 oma sümmeetria. Modifitseerija eraldumine lainefunktsiooni FXW-komponendist on jälgitav joonisel 11.

3.2 Superluminaalselt levivate lokaliseeritud lainete moodustamine optilises piirkonnas

Meie eesmärk on uurida üldisesse superluminaalsesse perekonda kuuluvate lokaliseeritud lainete (SLLW) eksperimendis realiseeritavust. Laiaribaliste impulsslaserite (eriti femtosekundlaserite) kiiratud spekter on heas lähenduses Gaussi-kõvera kujuline. Seda silmas pidades alustame Gaussi kujulise spektriga SLLW lainefunktsiooni tuletamisest. Edasises uurime superluminaalselt levivate LL-te hüperboolse kandja moodustamise üldiseid põhimõtteid ja piiranguid valgusallika valimisele.

3.2.1 Superluminaalselt leviva lokaliseeritud lainevälja tuletus

Käesolevas peatükis tuletame Gaussi spektriga y, z -tasandi suhtes peegelsümmeetrilise ja silindersümmeetrilise SLLW lainefunktsioonid. Lainefunktsiooni avaldame skalaarse lainevõrrandi üldlahendi tasalainete superpositsioonina:

$$\Psi(x, y, z, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \iiint_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k_x, k_y, k_z, \omega) \exp[i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)] d\omega dk_x dk_y dk_z$$

Arvestame üldlahendis dispersiooniseost δ -funktsiooni kirjutuse kaudu: $\Phi(k_x, k_y, k_z, \omega) = \Phi(k_x, k_y, k_z) \delta(\omega^2 - c^2 k^2)$, kusjuures $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$:

$$\Psi(x, y, z, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \iiint_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k_x, k_y, k_z) \delta(\omega^2 - c^2 k^2) \exp[i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)] d\omega dk_x dk_y dk_z$$

$$\Psi(x, y, z, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi'(k_x, k_y, k_z)}{2|k|} (\delta(\omega - ck) + \delta(\omega + ck)) \exp[i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)] d\omega dk_x dk_y dk_z$$

Edaspidi, nagu laineoptikas tavaks, opereerime reaalse lahendi asemel sellele vastava analüütilise signaaliga, st teostame integreerimise ainult üle positiivsete sageduste:

$$\Psi(x, y, z, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(k_x, k_y, k_z)}{|ck|} \exp[i(k_x x + k_y y + k_z z - ckt)] dk_x dk_y dk_z \quad (11)$$

Silindersümmeetrilise lainefunktsiooni avaldamiseks läheme k -ruumis üle silindrilistele koordinaatidele $k_x = k_\rho \sin \theta$, $k_y = k_\rho \cos \theta$, $dk_x dk_y = k_\rho dk_\rho d\theta$. Koordinaatide ruumis vaatleme tasandit $y = 0$, $\rho = |x|$. Tähistame $\Phi(k_x, k_y, k_z) = \frac{\Phi(k_\rho, \theta, k_z)}{2|ck|}$:

$$\Psi(x, y, z, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \int_0^{\infty} dk_\rho k_\rho \int_0^{2\pi} d\theta \Phi(k_\rho, \theta, k_z) \exp[i(k_z z - ckt)] \exp(ik_\rho \rho \sin \theta).$$

ning avaldame k_ρ , k ja k_z kaudu: $k_\rho = \sqrt{k^2 - k_z^2}$, $dk = \frac{dk}{\sqrt{k^2 - k_z^2}}$. Sellisel juhul teiseneb $\Phi(k_z, k) = \Phi(k_\rho, \theta, k_z) / \sqrt{k^2 - k_z^2}$ ning võime kirjutada lainefunktsiooni kujul:

$$\Psi(x, y, z, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \int_0^{\infty} dk \int_0^{2\pi} d\theta \Phi(k_z, k) \exp[i(k_z z - ckt)] \exp\left(i\sqrt{k^2 - k_z^2} \rho \sin \theta\right).$$

Integreerime üle θ , tegemist on tabeli-integraaliga [36]:

$$\Psi(x, y, z, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \int_0^{\infty} dk \Phi(k_z, k) \exp[i(k_z z - kct)] J_0\left(\rho \sqrt{k^2 - k_z^2}\right).$$

Asendame lainevälja avaldisse singulaarse Gaussi-kujulise energijaotusega spektri

$$\Phi(k_z, k) = \delta[(k_z - \beta k)\gamma - k_{z0}] \exp\left[-\left(\frac{k - k_k}{\Delta k}\right)^2\right],$$

kus k_k on keskmine sagedus ning Δk iseloomustab spektri laiust. Integreerime üle k_z :

$$\begin{aligned} \Psi(x, y, z, t) &= \frac{1}{\gamma(2\pi)^3} \int_0^{\infty} dk \exp\left[-\left(\frac{k - k_k}{\Delta k}\right)^2\right] \\ &\quad \exp\left[i\left(\beta k + \frac{k_{z0}}{\gamma}\right)z - ikct\right] J_0\left(\rho \sqrt{k^2 - \left(\beta k + \frac{k_{z0}}{\gamma}\right)^2}\right). \end{aligned}$$

Saadud lainefunktsioonile ei ole õnnestunud leida ilmutatud kuju.

Tuletame y, z -tasandi suhtes sümmeetriliselt leviva SLLW. Eristamaks silindersümmeetriaga lahendit peegelsümmeetriaga lahendist, nimetagem esimest 3D SLLW-ks ning teist 2D SLLW-ks.

Vaatleme lainevälja x, z -tasandis, võtame valemis (11) $y = 0$ ja $k_\rho = |k_x|$, $\rho = |x|$. Tähistame $\Phi(k_x, k_y, k_z) / |ck| = \Phi(k_\rho, k_z) \delta(k_y)$ ja integreerime üle k_y .

$$\Psi(x, y, z, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_0^{\infty} dk_\rho \int_0^{\infty} dk_z \Phi(k_\rho, k_z) \exp[i(k_z z - kct)] (\exp(ik_\rho \rho) + \exp(-ik_\rho \rho)).$$

Teisendame:

$$\Psi(x, y, z, t) = \frac{1}{2(2\pi)^4} \int_0^{\infty} dk_\rho \int_0^{\infty} dk_z \Phi(k_\rho, k_z) \exp[i(k_z z - kct)] \cos(k_\rho \rho).$$

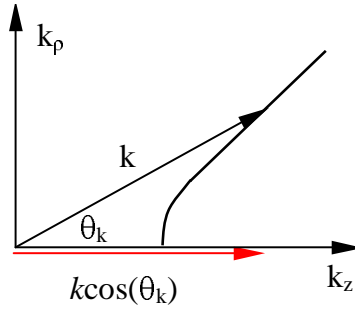
Teeme muutujavahetuse $k_\rho = \sqrt{k^2 - k_z^2}$, $dk = \frac{dk}{\sqrt{k^2 - k_z^2}}$ ja asendame avaldisse SLLW singulaarse, gaussiaani-kujulise energijaotusega spektri argumentidega k_z ja k :

$$\Phi(k_z, k) = \delta[(k_z - \beta k)\gamma - k_{z0}] \exp\left[-\left(\frac{k - k_k}{\Delta k}\right)^2\right] \sqrt{k^2 - k_z^2}$$

ja integreerime üle k_z :

$$\begin{aligned} \Psi(x, y, z, t) &= \frac{1}{2(2\pi)^4 \gamma} \int_0^{\infty} dk \exp\left[-\left(\frac{k - k_k}{\Delta k}\right)^2\right] \\ &\quad \exp\left[i\left(\left(\beta k + \frac{k_{z0}}{\gamma}\right)z - kct\right)\right] \cos\left(\sqrt{k^2 - \left(\beta k + \frac{k_{z0}}{\gamma}\right)^2} \rho\right). \end{aligned}$$

Saime 2D SLLW lainefunktsiooni ilmutamata kujul, kuna integraal üle k ei oma analüütilist



Joonis. 12 Hüperboolse kandjaga SLLW nurkspekter. Eri spektri komponendid levivad eri suunas.

lahendit. Saadud lainefunktsioon erineb silindersümmeetriaga 3D SLLW lainefunktsioonist konstantse kordaja võrra ning 0-järku Besseli funktsioon on asendunud kosiinusega.

3.2.2 Superluminaalselt leviva lokaliseeritud lainevälja spektri kandja moodustamine

SLLW-de genereerimisel on esimeseks väljakutseks sobiva kujuga lainevälja spektri kandja moodustamine. Meenutusena LL-te teooriast ja varasematest eksperimentidest: X-laine kandjajooneks on (k_z, k_ρ) -tasandil sirge, milline saadakse juhul kui tasalainete kimp läbib näiteks koonilist läätse ehk aksikoni. Fookuslaine paraboolse kandja saamiseks ühtne ning lihtne põhimõte puudub. 2000. aastal K. Reivelti läbi viidud eksperimentis [15] saadi paraloobikujuline kandja vajalikus spektri ulatuses optiliste kiilude kaldenurki ning sobivat tüüpi klaasisordi dispersiooni kombineerides. Seda kaalukam on käesoleva töö raames saadud tulemus (k_z, k_ρ) -tasandil hüperboolse spektrikandja genereerimisest difraktsioonivõre abil.

Superluminaalsesse perekonda kuuluvate lokaliseeritud lainete spektri kandjajoon on kirjeldatav (k, k_z) -tasandil sirgena:

$$k_z - \beta k - \frac{k_{z0}}{\gamma} = 0.$$

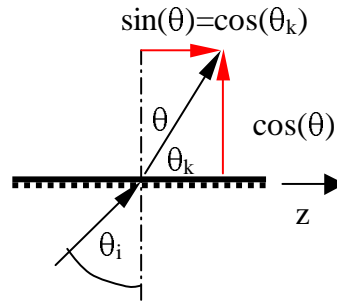
Siit nurkspekter (kirjeldab millise nurga all konkreetne spektrikomponent levib):

$$\cos \theta_k = \beta + \frac{k_{z0}}{\gamma k}. \quad (12)$$

Difraktsioonivõre valem, mis on avaldatud nurga θ_k kaudu:

$$\cos \theta_k = \sin \theta_i + m \frac{\lambda}{d}, \quad (13)$$

kus θ_i on võrele langeva kimbu langemisnurk, m – difraktsiooni järk, λ lainepikkus, d võre



Joonis. 13 Võrel difrageerunud kimbud levivad võre normaali suhtes suuna $\sin(\theta)$ all. Antud juhul $\sin(\theta) = \cos(\theta_k)$ ning saame kõrvutada võre dispersiooni ja lainevälja nurkspektri avaldisi.

samm ja θ_k nurk, mille all difrageerunud kimbud levivad. Valemid (12) ja (13) sisaldavad ühesugust sõltuvust lainearvust k . Neid avaldisi kõrvutades saame samasused superluminaalse lainevälja ja difraktsioonivõre parameetrite vahel:

$$\beta = \sin \theta_i \quad (14)$$

ja et $\lambda = \frac{2\pi}{k}$:

$$\frac{k_{z0}}{\gamma} = m \frac{2\pi}{d}. \quad (15)$$

Seega oleme näidanud, et difraktsioonivõre abil on võimalik moodustada superluminaalsesse perekonda kuuluvate lokaliseeritud lainete kandjaid ning sidunud difraktsioonivõre ja superluminaalselt leviva lainevälja parameetrid. Märkime ära, et levi-invariantse lainefunktsiooniga superluminaalsete LL-te alamperekonda kuuluvate lainete puhul $k_{z0} = 0$, mis tähendab, et sellesse perekonda kuuluvad lokaliseeritud lained moodustuvad 0. järku difrageerunud lainete liitumisel ehk valguskimbu peegeldumisel võrelt.

Põhinedes äsja esitatud tulemusele ning intuitsioonile, võime väita, et pelgalt difraktsioonivõre abil ei ole võimalik dispergeerida tasalaineid nii, et need moodustaksid luminaalsesse või subluminaalsesse perekonda kuuluvate lokaliseeritud lainete kandjaid. Esitame siinkohal ka matemaatilise põhjenduse.

Vaatleme LL-te luminaalsesse perekonda kuuluvate laineväljade kandjajoont määravat võrrandit:

$$k_z - k - \frac{k_{z0}}{\gamma} = 0.$$

Siit lainevälja nurkspekter:

$$\cos(\theta) = 1 + \frac{k_{z0}}{\gamma k}.$$

Saadud kandjajoone avaldist võre valemiga (13) kõrvutades saame tingimuse $\sin(\theta) = 1$,

mis tähendab, et $\theta = 90^\circ$ ehk tasalainete levimissuund on võre tasapinnas. Seega ei ole võimalik pelgalt difraktsioonivõre abil moodustada luminaalsesse perekonda kuuluvate LL-te kandjat.

Subluminaalsesse perekonda kuuluvate LL-te kandjajoone valem üldkujul avaldub:

$$\beta k_z - k - \frac{k_{z0}}{\gamma} = 0.$$

siit nurkspekter

$$\cos(\theta) = \frac{1}{\beta} + \frac{k_{z0}}{\gamma\beta k},$$

mis difraktsioonivõre avaldisega kõrvutades annab vastuolulise tingimuse $\sin(\theta) = 1/\beta > 1$, mistõttu seda tüüpi LL-te spektri kandjat ei ole võimalik difraktsioonivõre moodustada.

Oleme näidanud, et difraktsioonivõre on võimalik moodustada ainult superluminaalsesse perekonda kuuluvate LL-te spektri kandjat.

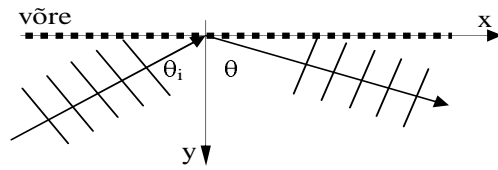
3.2.3 Difraktsioonivõre koste

Ülilühikeste, paari võnke pikkuste valgusimpulsside võrelt difrageerudes mängivad faasid väga tähtsat rolli. Et moodustuks lainepikkuste vahemikuga määratud lühim impulss, peavad eri tasalainekomponendid olema faasis. Kujutlegem, et selline impulss langeb difraktsioonivõrele. Võrelt difrageerudes saab iga tasalainekomponent isemoodi faasinihke, mis ei sõltu lineaarselt lainearvust. Selle tulemusena tekib nn rühmakiiruse dispersioon ning algne ülilühike impulss pikeneb oluliselt.

Soovides moodustada maksimaalselt lokaliseeritud SLLW-d, kasutades selleks vaid paari võnke pikkuseid valgusimpulsse, on vaja, et võrelt difrageerunud impulss oleks optilisel teljel ajaliselt kokku surutud. Selle saavutamiseks tuleb difraktsioonivõre poolt tekitatud mittelineaarne faasinihe eelnevalt kompenseerida. Käesolevas peatükis uurime, milline on difraktsioonivõre koste ning millised peavad olema võrele langevas lainepaketis etteantud faasiseosed selleks, et pärast difrageerumist moodustuks lühim võimalik impulss.

Leiame difraktsioonivõrelt difrageerunud valgusimpulssi moodustavate tasalainete faasiseosed [39] (vt joonist 14). Võrele langeva laineimpulsi lainearvuga k tasalaine-komponendi väli avaldub:

$$E_{langev} = E_0 \exp(ik(x \sin \theta_i - y \cos \theta_i)) ,$$



Joonis. 14 Võrele langeb vasakult tasalaine nurga θ_i all. Difrageerunud laine levib nurga θ all. Ristjooned laine levikusuunal märgivad faasipindu.

kus E_0 on välja amplituud ja θ_i langemisnurk. x -telg on suunatud piki võret ja y -telg võre normaali suunas. Võrelt difrakteerunud välja faasi avaldises asendub langemisnurk θ_i difrakteerumisnurgaga θ (θ on kindla sagedusega tasalaine levikunurk normaali suhtes pärast difrakteerumist). Asendame difrakteerunud tasalainekimpude välja kirjeldavasse avaldisse difrakteerumisnurga difraktsioonivõre valemist $\sin \theta = \sin \theta_i + 2\pi K/k$ kus K on võrekonstant:

$$E_{dif} = E_0 \exp \left\{ i \left[x (k \sin \theta_i + 2\pi K) + y \sqrt{k^2 - (k \sin \theta_i + 2\pi K)^2} \right] \right\}$$

siit avaldub sageduskomponendi faas välja punktis, mis asub võre tasandist kaugusel d :

$$\phi(k) = x (k \sin \theta_i + 2\pi K) + d \sqrt{k^2 - (k \sin \theta_i + 2\pi K)^2}. \quad (16)$$

Lainearvust k sõltumatu konstantne kordaja faasiavaldises on kõigile tasalainekomponentidele ühesugune algfaas. Faasi sõltuvus k -st lineaarselt toob kaasa viivise, kuid ei muuda impulsi kuju. Juhul, kui faas ei sõltu k -st ainult lineaarselt, vaid omab keerukamat sõltuvust lainearvust, kaasnevad sellega eri lainearvuga tasalainekomponentide erinev levimiskiirus ning moonutused impulsi kujus. Lainearvu ruudust sõltuvat mittelineaarset faasimoonutust nimetatakse sirtsuks (*chirp*). Võrreldes kõrgemat järku liikmetega, põhjustab sirts valgusimpulsis kõige tugevamat rühmakiiruste dispersiooni, dispersioon toob kaasa lainepaketi laialivalgumise. Juhul, kui algne impulss juba omab vastasmärgilist sirtsu, kompenseerib võrelt difrakteerumisest põhjustatud sirts lainepaketi enda faasimoonutused ja toob kaasa lainepaketi kokkusurumise.

Saadud faasi avaldis (16) sõltub koordinaadi x suunas (ehk mööda võre pinda) lainearvust lineaarselt, järelikult selles suunas liikudes valgusimpulsi kuju ei moonutata. y -telje ehk võre normaali suunal sõltub faas aga hüperboolselt lainearvust ning võrdelisel ka kaugusest võre pinnast. Paneme tähele, et juhul $d = 0$ ehk võre pinnal faasimoonutust ei teki. Kui $d \neq 0$, kehtib seaduspärasus: mida kaugemal asub välja punkt võre pinnast, seda suurem on selles

punktis faasimoonutus ehk seda enam on impulss laiuli valgunud. Just seda, võre normaali suunas kasvavat faasimoonutust peame kompenseerima, kui soovime võrest kaugusel d saada võimalikult lühikest impulssi.

Avaldame faasisõltuvuse (16) Tayloriga ritta lainearvu k järgi kohal k_0 . Võtame arvesse esimesed kolm liiget (konstantse faasinihke, lineaarse faasinihke ja sirtsu), järgmiste liikmete mõju on väike ning seda me ei arvesta.

$$\phi(k) \approx \phi_0 + \phi'(k - k_0) + \phi''(k - k_0)^2, \quad (17)$$

kus konstantne faasinihe

$$\phi_0 = x(k_0 \sin \theta_i + 2\pi K) + d\sqrt{k_0^2 - (k_0 \sin \theta_i + 2\pi K)^2},$$

lineaarne faasinihe

$$\phi' = x \sin \theta_i + d \frac{k_0 - (k_0 \sin \theta_i + 2\pi K) \sin \theta_i}{\sqrt{k_0^2 - (k_0 \sin \theta_i + 2\pi K)^2}},$$

ja sirts

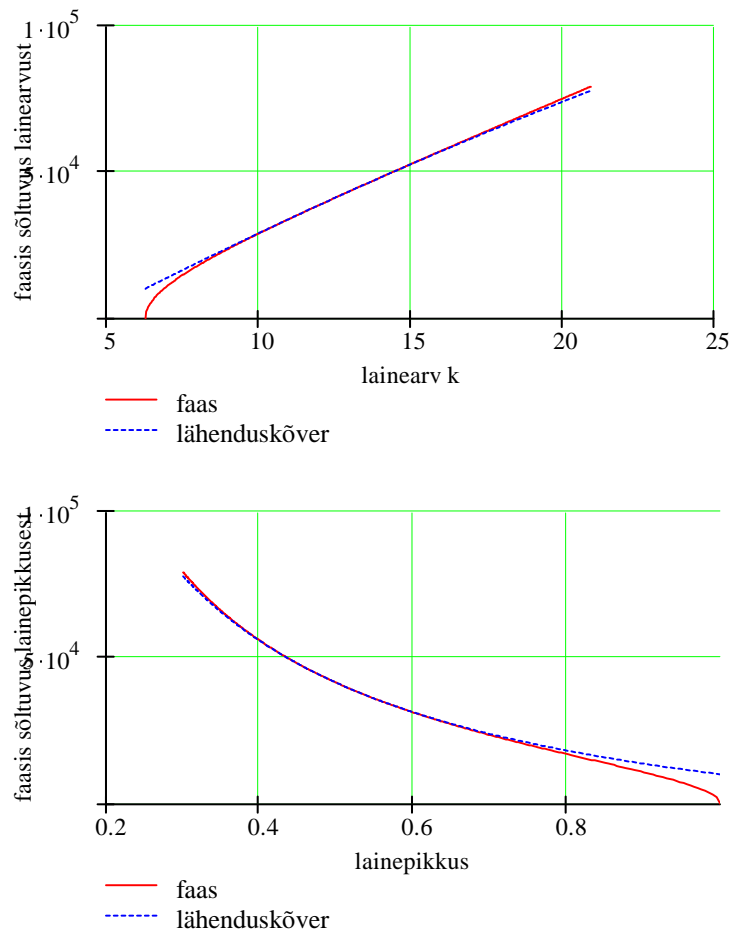
$$\phi'' = -\frac{d}{2} \frac{(2\pi K)^2}{\left(\sqrt{k_0^2 - (k_0 \sin \theta_i + 2\pi K)^2}\right)^2}. \quad (18)$$

Märgime ära, et difraktsioonivõrele langeva ja võrelt difrakteerunud väljade avaldise kõrvutades saame esitada difraktsioonivõre sageduskoste:

$$H(k) = \text{const} \exp(i\phi(k)).$$

Eelnevas uurisime lainepakettide käitumist sagedusesituses, nüüd vaatleme olukorda ajalises esituses.

Modelleerime paari võnke pikkuse impulsi difrakteerumist võrel, mille pikkus (mõõde, mis on risti võre joontega) ja laius (mõõde piki võre jooni) on lõplikud. Saab näidata, et nii nagu kitsaribaliste lainete difrakteerumisel, nii ka laiaribaliste kuid bipolaarsete lainete difrakteerumisel võre laius ei oma tähtsust. Seetõttu kasutame difraktsiooniprotsessi ajalise koste numbriliseks arvutamiseks järgmist mudelit: difraktsioonivõret kujutame järjestikuste punkthajutajate-allikate jadana. Punktallikate intensiivsus võre tasandis muutub kosinusoidaalselt, selle tulemusena tekivad difrakteerumise tagajärjel ainult +1 ja -1. järku difraktsioonimaksimumid. 0. järku levi jälgimiseks lisame võre matemaatilisele profiilile väikses kaaluga konstandi – alaliskomponendi. Võrele langeb gaussiaani-kujulise profiiliga



Joonis. 15 Kõrvutame faasikõvera (pidev joon) ja selle ritta arendamisel saadud lähendust (punktirjoon). Lainearvust k sõltuval graafikul (ülemine) on näha, et Taylori rea abil leitud lähenduskõver järgib faasikõvera käiku heas lähenduses. Lainepikkuste põhjal arvutatud graafikult (alumine) aga ilmneb antud parameetrite väärtuste korral oluline lahknevus lähenduskõvera ja faasikõvera vahel 0.7 mikronist pikematel lainepikkustel. Võre konstant $K = 500 \frac{1}{mm}$, langemisnurk $\theta_i = 30^\circ$, ritta arendatud lainearvu $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ ümbruses, $\lambda_0 = 500nm$.

laineimpulss, mis ergastab punktallikad. Iga punktallikas kiirgab ergastuse mõjul sfäärilisi laineid (Huygens-Fresneli printsiip), mille ajaline käik radiaalses läbilõikes kopeerib ergastava impulsi ajalist käiku (Kirchoffi seadus). Resulteerivat lainevälja vaatame radiaalsuunas, võreaga samas tasandis.

Ühe punktallika poolt kiiratud väli avaldub:

$$F(x, y, ct) = \frac{1}{R(x, y)} \int_0^{\infty} \exp \left[- \left(\frac{k - k_0}{\Delta k} \right)^2 \right] \exp [i\phi'' (k - k_0)^2] \exp [ik (R(x, y) - ct)] ,$$

kus Δk on spektri laiust iseloomustav parameeter, ϕ'' difraktsioonivõre põhjustatud sirts (18) ja $R(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Lainefunktsiooni F ilmutatud kuju on leitav Fourier' pöördena:

$$F(x, y, ct) = \frac{1}{R(x, y)} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{i\phi'' + \frac{1}{\Delta k^2}}} \exp [ik_0 (R(x, y) - ct)] \left[-\frac{1}{4} \frac{(R(x, y) - ct)^2}{i\phi'' + \frac{1}{\Delta k^2}} \right] .$$

Võrele langeb nurga θ_i all impulss, mis kaldu langemisest tingitud ajalise viivisega ergastab võrepunktid. Võrelt lähtuv kiirgus on üksikute võrepunktide kiirguste summa:

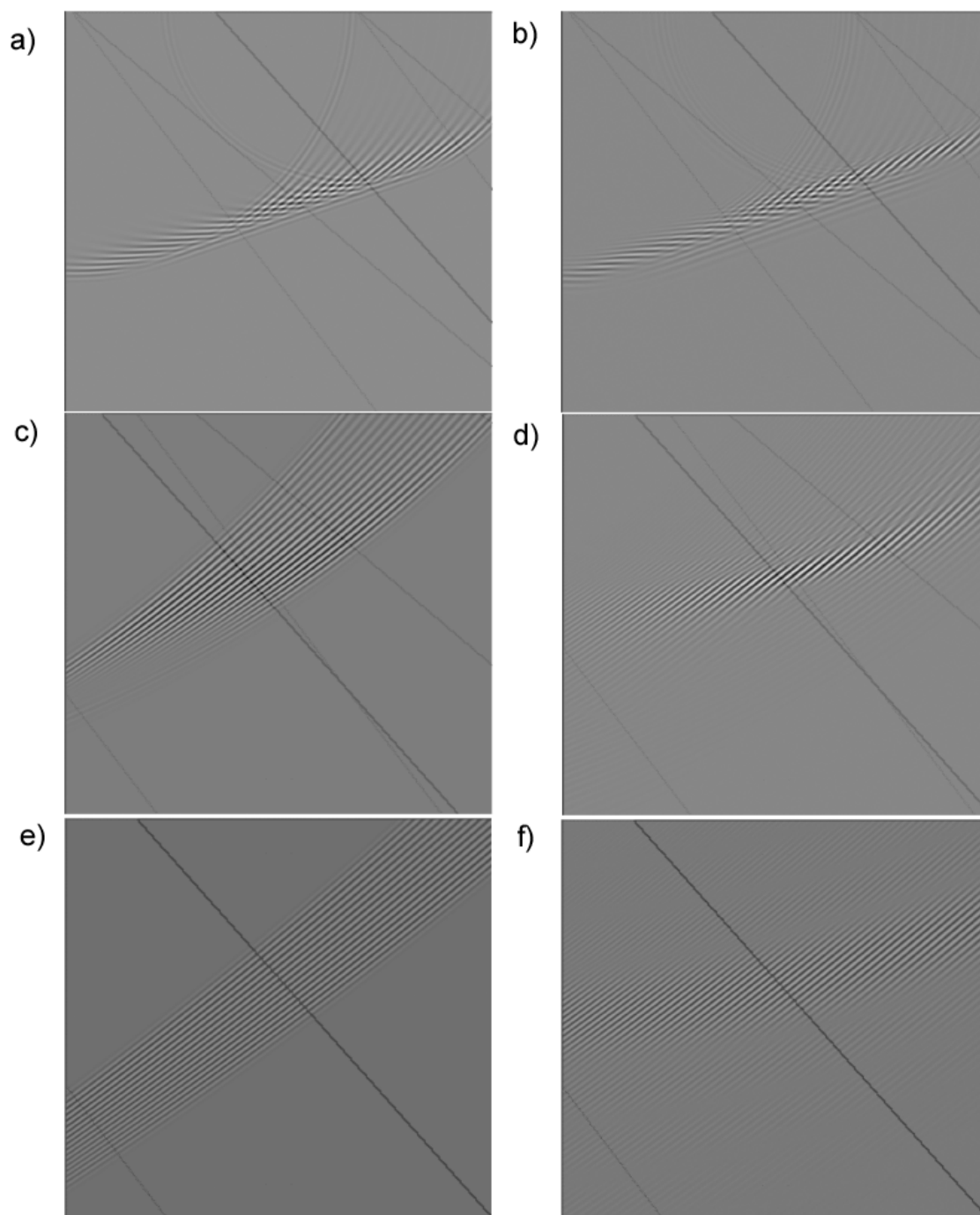
$$G(x, y, ct) = \int_0^L \cos(2\pi K) F(x - z, y, ct - z \sin \theta_i) dz ,$$

kus L on võre pikkus, koosinust sisaldav liige moduleerib allikate ehk võrepunktide intensiivsust ning liige $ct - z \sin \theta_i$ võtab arvesse faasinihke, mis tekib impulsi langemisel võrele nurga θ_i all. Sirtsu avaldis tuleneb eelpool leitud faasi avaldisest (16).

Joonisel 16 oleme arvutanud võrelt lähtuvad impulsid erinevatel kaugustel võrest ning eelnevalt kompenseeritud sirtsuga ja ilma. Esitatud välja puhul on arvestatud 0,2 kaaluga alaliskomponenti (ehk nullindat difraktsiooni järku). Võime näha, et 0-järk järgib täpselt peale langeva impulsi kuju. Sirtsuga joonisel on 0-järku võnkeid märksa enam, kui ilma sirtsuta joonisel. Põhjus seisneb selles, et sirts venitab impulsi ajaliselt pikemaks. Samas on võrelt lähtuv impulss ruumiliselt kokku surutud ja võimaldab optilisel teljel (mis asub difraktsioonivõrest kaugusel $d = ct \cos \theta_i$) saada lokaliseeritud lainet.

Sirtsu abil ruumiliselt komprimeeritud impulss levib nurga θ_i all, mis ka on algse impulsi levimise suund difraktsioonivõre suhtes.

Asjaolu, et juba kaugusel $ct = 500 \mu m$ ei ole sirtsuga impulss väga tugevalt kokku surutud, võib tuleneda sellest, et väga laia spektri ja tiheda sammuga difraktsioonivõre korral ei ole meie lähendus, kus arvestame vaid kolme esimest rittaarenduse liiget, piisavalt täpne. Faasi-



Joonis. 16 Võre kosted. Koste ajalise evolutsiooni on arvutatud võrekonstandiga $K = 500 \text{ 1/mm}$ difraktsioonivõre jaoks, millele langeb nurga $\theta_i = 20^\circ$ all gaussiaani-kujulise spektriga laiaribaline impulss. Joonistel a) ja b) on ajamuutuja $ct = 30 \mu\text{m}$; c) ja d) $ct = 150 \mu\text{m}$; e) ja f) $ct = 500 \mu\text{m}$. Vasakus tulbas on võre kosted Gaussi impulsi jaoks, millele ei ole antud sirtsu; paremas tulbas esitatud graafikutel langeb difraktsioonivõrele võre mõju eelkompenseeriva sirtsuga valgusimpulss lokaliseerimaks lainepaketti difraktsioonivõrest kaugusel $d = ct \cos(\theta_i)$. Difraktsioonivõre pikkus on $30 \mu\text{m}$ ja joonise mõõtmed $45 \times 45 \mu\text{m}^2$. Joonistel a) ja b) asub difraktsioonivõre ülemises vasakus nurgas. Difraktsioonivõre nurkadelt lähtuvad jooned, mis märgivad siniseima ja punaseima sageduskomponendi levimise suundi. Tugevam joon, mis lähtub võre keskelt, näitab ära keske sageduskomponendi levimise suuna.

ja lähenduskõveraaid on kujutatud joonisel 15.

Käesolevas peatükis oleme avaldanud võrelt difrageerumisel tekkiva mittelineaarse faasimoonutuse. Juhul, kui võrele langevas valgusimpulsis difrageerumisel tekkiv sirts eelnevalt kompenseerida, saame ruumiliselt maksimaalselt kokkusurutud valgusimpulsi. Koostatud võre mudel aitab luua paremat ettekujutust difraktsioonijärkude moodustumisest ja impulsside ajalisest kokkusurumisest.

3.2.4 Osaliselt mittekoherentse lainevälja ajas keskmistatud mõõtmised

Lokaliseeritud laineväli moodustub ülilühikeste, maksimaalselt kokkusurutud laineväljade interfereerumisel. Sellest lähtuvalt saame lokaliseeritud lainet registreerida femtosekundilist lahutust omava mõteseadmega. Femtosekundilise ajalise lahutusega lainevälja registreerimisele on alternatiiviks statsionaarse korrelatsioonifunktsiooni mõõtmine. Seda meetodit on kasutatud töödes [12] ja [15]. Ilmneb, et korrelatsioonifunktsiooni kuju ei sõltu eri tasalainekomponentide omavahelistest faasidest st ei ole vahet, kas laineväli moodustub femtosekundilistest impulssidest või statsionaarsest laiaribalise müra.

Käesolevas töös piirdume laineväljade ajas keskmistatud intensiivsuse registreerimisega. Näitame, et lainevälja ajas keskmistatud intensiivsuse mõõtmiseks saame samuti kasutada ruumiliselt koherentse laiaribalise statsionaarse müra allikat.

Punktallika-kujuliselt termiliselt kiirgajalt lähtuvate valguslainete faasid on suvalised ning ajas mittekorrelleeritud, samas on see väli ruumiliselt koherentne. Võime vaadelda lõplike mõõtmetega kiirgajaid kokku panduna punktallika kujulistest termilistest kiirgajatest. Sellise kiirgusallika vahetus läheduses on sellelt lähtuv väli eri ruumipunktides mittekoherentne. Et iga punktallikas kiirgab ruumis paisuvaid keralaineid saab levivat välja vaadelda osaliselt koherentsena. Van Cittert-Zernike teoreem [27], [38] võimaldab leida väljapunktide vahelise ruumilise korrelatsiooni avaldise. Selle põhjal saame raadiusega a ning kogu pinna ulatuses ühtlase intensiivsusega kaootilise kiirgaja külgsuunalise ruumilise koherentuse ulatuse ρ_c jaoks allikast kaugusel d järgmise seose:

$$\rho_c = 0.16 \frac{\lambda}{a} d.$$

Selleks, et kiirgajast $2.25m$ kaugusel saaksime ristlõikes $1.5cm$ raadiusega koherentse lainevälja, peame kaarlahenduslambist lähtuva välja ette asetama $15\mu m$ raadiusega ruumilise filtri (ehk mikromeeterava).

Kaarlahenduslambi kiiritava valguse korrelatsiooniaja saame seostest

$$\tau_c = \frac{1}{\Delta\nu},$$

kus

$$\Delta\nu = -\frac{c}{\lambda^2}\Delta\lambda.$$

Märgime, et Xe kaarlahenduslambi spektrivahemiku 400–1000nm jaoks on korrelatsiooniaeg 2fs.

Lambist lähtuv kiirgus on müra selles mõttes, et eri sageduskomponentide algfaasid on juhuslikud. Uurime kuidas mõjutavad faasiseosed eksperimendis mõõdetavat lainevälja ajas keskmistatud intensiivsust. Juhul, kui sageduskomponentide faasid on üksteise suhtes nihkes $\phi(k) \neq 0$, saame ajas keskmistatud intensiivsuseks:

$$\begin{aligned} I &= \int U^*(t)U(t)dt = \\ &= \int \left[\int dk_1 J_0[\rho k_\rho(k_1)] \Phi(k_1) \exp[ik_z(k_1)z - ik_1ct - i\phi(k_1)] \right. \\ &\quad \left. \int dk_2 J_0[\rho k_\rho(k_2)] \Phi^*(k_2) \exp[-ik_z(k_2)z + ik_2ct + i\phi(k_2)] \right] dt = \\ &= \int dk_1 \int dk_2 \left[\delta(k_2 - k_1) \begin{array}{l} J_0[\rho k_\rho(k_1)] \Phi(k_1) \exp[ik_z(k_1)z - ik_1ct - i\phi(k_1)] \\ J_0[\rho k_\rho(k_2)] \Phi^*(k_2) \exp[-ik_z(k_2)z + ik_2ct + i\phi(k_2)] \end{array} \right] = \\ &= \int dk J_0^2[\rho k_\rho(k)] |\Phi(k)|^2 \end{aligned}$$

Märkus: siin oleme keskmistamise üle erinevate realisatsioonide ansambli asendanud integreerimisega üle aja.

Ideaalset juhul, kus algfaasid ühtivad ehk $\phi(k) = 0$ avaldub lainevälja intensiivsus:

$$I = \int U^*(t)U(t)dt = \int dk J_0^2[\rho k_\rho(k)] |\Phi(k)|^2.$$

Saadud tulemus ühtib eelpool toodud tulemusega, kus eri sageduskomponentide algfaasid olid üksteise suhtes juhuslikud. Seega oleme näidanud, et ei ole vahet, kas mõõdame femtosekundilise kestvusega valgusimpulsside või (ruumiliselt koherentse) laiaribalise müra ajas keskmistatud intensiivsust.

Kokkuvõttes oleme näidanud, et mõõtes moodustuva lainevälja ajas keskmistatud intensiivsust, on võimalik laiaribaliste lokaliseeritud lainete allikana kasutada osaliselt mittekoherentse välja allikat. Samas tuleb märkida, mikromeeter avaga kiirgusvälja filtreerides (ruumilise koherentsuse saavutamise eesmärkidel) kaotame olulisel määral valgusjõus.

3.3 SLLW eksperimendi simulatsioon

3.3.1 SLLW genereerimine difraktsioonivõre abil, eksperimendi simulatsioon

Eespool näitasime, et hüperboolse spektri kandjaga lainevälja on võimalik moodustada difraktsioonivõre abil. Käesolevas peatükis uurime difraktsioonivõrede abil saadava SLLW eksperimendiskeemi omadusi ja iseärasusi.

Difraktsioonivõresid kasutatakse laialdaselt spektroskoopias, spektri lahutamiseks. Oleme harjunud nägema skeeme, kus võre tasand on enam-vähem risti optilise teljega. Samuti kehtib põhimõte: mida väiksem võre samm, seda parema lahutuse saame.

Uurime difraktsioonivõre ja SLLW nurkspektri avaldisi (12) ja (13). Saadud seoste (14) ja (15) põhjal võime väite, et võrelt difrageerunud valgusimpulsi spektri kandja on k -ruumis (k_z, k_ρ) -tasandil hüperbool. k -ruumi k_z -telje suunad ühtib koordinaatide ruumi z -telje suunaga ja k_ρ -telje suund ρ -telje suunaga (vt joonist 12). Sellest tuleneb, et lokaliseeritud lainevälja levimise siht ehk z -telg on paralleelne difraktsioonivõre pinnaga (mitte risti, nagu on harjumuspärane).

Selleks, et võrele langevatest valgusimpulssidest moodustuks lihtsaim, peegelsümmeetriline lokaliseeritud laineväli, tuleb samas tasandis kokku suunata kaks difrageerunud valgusimpulssi. Sellest lähtuvalt peavad difraktsioonivõred asetsema skeemis vastakuti, paralleelselt optilise telje ja üksteisega. Difraktsioonivõrede jooned on risti optilise teljega. Sellist lähenemisviisi edasi arendades saame silindersümmeetriaga SLLW-d moodustada silindrilise difraktsioonivõre abil, mille võre jooned on ringikujulised. (Hõlbustamaks võre ettekujutamist võime mõelda, et üksteise otsa laotud seibidest moodustuv toru on silindrilise difraktsioonivõre mudel, iga seibi serv on üks võrejoon ja võresamm on määratud seibi paksusega.)

Suuname kahele vastastikku asuvale võrele võrede normaali suunas leviva valgusimpulsi. Seose (14) põhjal ilmneb, et võrede vahel moodustuva lainevälja rühmakiirus on lõpmatu suur $v_{sl} = c/\beta = c/0 = \infty$. Seda erijuhtu SLLW-st, mille rühmakiirus on lõpmatu, nimetatakse silinderlaineks (6). Silinderlaine püsib koos vaid lõpmata lühikese aja kestel.

Seose (14) sisu saame edasi anda järgmiselt: mida suurem on valgusimpulsi langemisnurk θ_i difraktsioonivõre normaali suhtes, seda väiksem on moodustuva

lainevälja rühmakiirus. Piirjuhul $\theta_i = 90^\circ$ ning $v_{sl} = c$. Optiliste eksperimentide puhul on otstarbekas valida lainevälja rühmakiirus lähedane valguse kiirusele ja sellest tulenevalt $\theta_i \lesssim 90^\circ$ ehk silindervõret ei valgustata otse (normaali suunas), vaid libamisi, külgsuunast. Olukorda saame hästi ette kujutada järgmiselt: silindri sees asuva peegeldava difraktsioonivõre valgustamiseks suuname ühest silindri otsast silindrisse valguskoonuse.

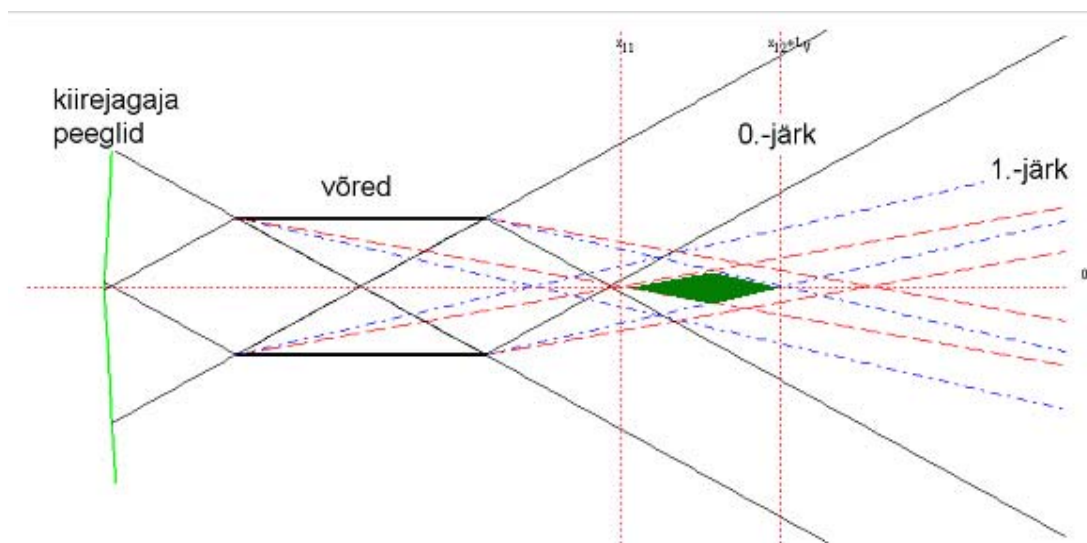
SLLW eksperimendiseade tarvis peame leidma optimaalsed väärtused mitmetele omavahel seotud parameetritele. Näiteks võre(de)lt difrageerunud valguskimbu kui lokaliseeritud lainevälja levimise ulatus sõltub lainevälja spektri laiusest; võrede vahelisest kaugusest, mis peab olema parasjagu nii suur, et silindri otsast on võimalik valgustada võret kogu ulatuses; spektri kandja nihkest kandjajoone ja k_z -telje löikepunkti suhtes – seda suurust nimetame nihkeks, ja nihke suurusest sõltub kimpude langemisnurk võrele jne. Sellest lähtuvalt oleme koostanud interaktiivse Mathcad'i töölehe, mis võimaldab simuleerida SLLW eksperimenti ja leida parameetritele optimaalseid väärtusi. Simulatsiooni väljatrükk on töö lisan A ja simulatsioon Mathcad'i töölehenähtena *SLLWsimulatsioon.mcd* lisan C.

Simulatsiooni sõltumatuteks sisendparameetriteks on spektri punaseim ja sinisem lainepikkus, spektri punaseima lainepikkuse nihe spektri kandjajoone algusest suhtarvuna, võrekonstant ja võre pikkus. Simulatsioon väljastab:

- eksperimendi geomeetria põhiparameetrid: lainevälja muutumatu levimise ulatuse, difraktsioonivõrede ning kiirejagaja ja detektori vahelised kaugused, optimaalse (silindrilise) difraktsioonivõre raadiuse, SLLW muutumatu levimise ulatuse ning kontrolli, et eri difraktsioonimaksimumid ei kattuks;
- eksperimendi geomeetria graafilise skeemina (vt joonis 17);
- optilist skeemi iseloomustavad suurused: spektri asukoha kandjajoonel graafiliselt, kasutatavad difraktsioonivõre pinna kvaliteedi hinnangu, võrdluse Gaussi kimbu koospüsümise ulatusega;
- lainevälja ruumilised energiajaotused: eksperimendiparameetritega seotud SLLW lainefunktsiooni ruumilise energiajaotuse; SLLW ristsuunalise energiajaotuse, millise registreeriks ideaalse lahutusega mõõteseade; etteantud mõõtmega piksli abil registreeritava energiajaotuse.

Simulatsiooni põhjal saame teha järgmised järeldused SLLW moodustamisest eksperimendis:

- Saamaks SLLW-d, on vaja difraktsioonivõret valgustada külgsuunas võimalikult suure



Joonis. 17 Kierte käik SLLW skeemis. Kombineeritud on kiirte optika ja laineoptika lähenemised. Pidevjooned märgivad võrele langeva ning võrele peegelduva 0. difraktsioonijärgu moodustava valguskimbu ääri. Kalduste punktiirjoontega on näidatud 1. järgu käitumine (suunad arvutatud difraktsioonivõre valemist). Vertikaalsete punktiirjoonte vahele moodustub rombi sarnases mittekorrapärasel nelinurgas levib uuritav laineväli. (Joonis on väljavõte interaktiivsest eksperimendi simulatsioonist.)

ulatuses. Seega on otstarbekas kasutada peegelvõret läbiva võre asemel (vt joonis 17). Samuti ei teki sel juhul valguskimbus võre alusmaterjali läbimise kaasnivat täiendavat dispersiooni.

- SLLW-d on võimalik eksperimendis genereerida kahe tasaparralleelse peegelvõrega (nn 2D SLLW) või kasutades klaas-silindrit, mille sisemisele pinnale on kantud peegelvõre (nn 3D SLLW). 2D SLLW ning 3D SLLW laineväljad erinevad tsentraalse maksimumi intensiivsuse poolest. 2D juhul levivad z -teljega ristuvast läbilõikes muutumatuna valgus-triibud, 3D juhul kontsentrilised rõngad, mille energiajaotus vastab J_0 -jaotusele (vt joon. 1). 3D juhul on energia koondunud väiksemasse ruumiulatusse.
- Valemi (15) põhjal moodustub lokaliseeritud laineväli ka esimesest kõrgemate difraktsioonijärgude omavahelisel interfereerumisel. Kõrgemate järkude valguskimbud levivad võre suhtes rohkem libamisi, aga eri lainepikkused on omavahel praktiliselt samal määral disperseeritud. Seega, moodustuva SLLW muutumatu levimise ulatus ja apertuur on oluliselt väiksemad, kui madalama difraktsioonijärgu korral. Seetõttu oleme käesolevas töös vaadelnud SLLW moodustumist ainult 1. järku difraktsioonimaksimumide liitumisel.
- Joonisel 17 on esitatud skeem SLLW moodustamiseks. Näeme, et esimest järku difragerunud

kimp ei ole kogu levimistelje ulatuses ühtlase spektraalkoosseisuga. Kimbu võrede poolses osas koosneb see omavahel interfereeruvatest spektri siniseimate lainepikkustega tasalainekomponentidest ning võredest kaugemale jäävas osas punaseimate lainepikkustega tasalainekomponentidest. Lokaliseeritud laineväli, mille mooduli kuju levides ei muutu, moodustub z -teljel selles ulatuses, kus korruga on esindatud kõigi spektri sagedustega tasalainekomponendid. Seda piirkonda nimetame *SLLW muutumatu levimise ulatuseks* ΔX :

$$\Delta X = l_{võre} + d \left(\frac{(\sin \theta_i + \lambda_s K)}{\sqrt{1 - (\sin \theta_i + \lambda_s K)^2}} - \frac{(\sin \theta_i + \lambda_p K)}{\sqrt{1 - (\sin \theta_i + \lambda_p K)^2}} \right),$$

kus $l_{võre}$ on difraktsioonivõre pikkus, θ_i võrele langeva kiirtekimbu nurk võre normaali suhtes, λ_s ja λ_p vastavalt spektri siniseim ja punaseim lainepikkus, d difraktsioonivõre raadius ja K võrekonstant.

- SLLW maksimaalne muutumatu levimise ulatus on võrdne levimissuunas valgustatud võre ulatusega. Maksimaalne lokaliseeritud lainevälja levimise ulatus, saavutatakse monokromaatsel juhul. Laia spektriga laineväljade puhul on see veelgi lühem kuna eri sageduskomponendi disperseeritakse üksteise suhtes laiali. Näeme, et SLLW genereerimine on põhimõtteliselt erinev varasemate LL-ne eksperimentidega võrreldes. Lainevälja levimise ulatus näiteks X-tüüpi lainete puhul avaldub apertuuri l ja aksikoninurga θ kaudu: $z_{\max} = l / \tan \theta$.
- SLLW levimise ulatus optilisel teljel sõltub lainevälja moodustava silindervõre läbimõõdust (või 2D juhul paralleelselt paigutatud võrede vahelisest kaugusest). Mida suurem on silindri läbimõõt, seda väiksemaks jääb muutumatu levimise ulatus. Teisalt peab silindri diameeter olema nii suur, et see oleks võimalik kogu-ulatuses ära valgustada. (vt joonis 17)
- SLLW hüperboolne kandjajoon lõikub k_z -teljega. Meenutame, et lainearvu k vektorite suunad määravad lainevälja moodustavate tasalainete levikusuunad. Kui spekter algaks kandjajoone ja levimissuunalise telje lõikepunktist ehk spektri kandjajoone algusest, disperseeritakse eri sageduskomponendid levima väga erinevatesse suundadesse ning optilisel teljel ei teki piirkonda, kus oleks esindatud kõik sageduskomponendid samaaegselt. Mis tähendab, et SLLW-d kui muutumatult levivat lainevälja ei teki. Võimalikult suurt SLLW muutumatu levimise ulatust võimaldab saada suhteliselt kitsas spekter, mille punaseim tasalainekomponent on spektri kandjajoone algusest (ehk lõikumispunktist levimis-

teljega) kandjajoone haarade peale nihutatud. (Suhteliselt kitsas on SLLW spekter võrreldes varasemates LL-te eksperimentides kasutatud spektriga. SLLW jaoks on küllaltki optimaalne spekter laiusel $\Delta\lambda = 10 - 100nm$ optilises piirkonnas.)

- Eelmises punktis saadud järeldust toetab ka järgmine arutus. Kui spekter algab kandjajoone algusest, on meil vaja lainevälja moodustamiseks optilise telje sihis või sellega väga väikse nurga all levivaid tasalaineid. Selliste tasalainete apertuur, kui need teljel kohtuvad, on äärmiselt väike ning mõõdetav lainevälja intensiivsus ei eristu monokromaatsete tasalainete interferentspildist.
- Hinnangu perioodilise interferentsmusteri intensiivsuse muutumise lainepikkusele saame anda interferentsiteooriast tuntud Euleri valemi alusel $\Lambda = \lambda/2 \sin(\Theta_i)$, kus λ on interfereeruvate tasalainete lainepikkus ja Θ_i tasalainete levimise suuna ja optilise telje vaheline nurk. Näiteks CCD-kaameraga, mille piksli suurus on $9 \times 9\mu m^2$ (nimetatud piksli suurusega kaamera on KSL laboris olemas) suudame adekvaatselt registreerida interferentsmusterit, kus tasalainete levimise suund on optilise telje suhtes 1° -st väiksema nurga all. SLLW, kus tasalainekomponendid levivad optilise telje suhtes ca 1 kraadiste nurkade all, saab moodustada difraktsioonivõrega, mille samm on $1mm$ suurusjärgus. Teisalt, et $1mm$ -se sammuga difraktsioonivõre abil moodustatud SLLW perioodiline lainemuster erineks tasalainete interferentsmusterist, vajame suurt apertuuri. Seda on võimalik saavutada kasutades ca $0.5m$ pikkuseid difraktsioonivõresid. Suurema sammuga difraktsioonivõrede puhul peame kasutama suuremaid nurki ning sellest lähtuvalt on SLLW registreerimiseks vaja lahutust mikromeetri suurusjärgus või veelgi paremat.

Selgitamaks SLLW moodustamiseks sobivaima difraktsioonivõre parameetreid, võrdleme simulatsiooni abil kolme erineva võrekonstandiga difraktsioonivõret ning nende abil moodustuvate SLLW-de parameetreid. Spekter jääb kõigil kolmel juhul lainepikkuste vahemikku $510nm - 610nm$ ning difraktsioonivõre pikkus on $60mm$. Spektri nihe kandjajoone algusest on valitud nii, et SLLW levimise ulatus ΔX oleks maksimaalne, st võre algusest lähtuvate punaseima lainepikkusega tasalainekomponendid kohtuvad optilisel teljel samas punktis, kus kohtuvad võre tagumistelt punktidele lähtuvad 0-järku moodustavad kimbud. See tingimus garanteerib ka selle, et 0-järk ja 1-järk meid huvitavas piirkonnas ei kattu.

Kõrvutame tabelis arvatud suuruseid: valguskimbu langemisnurk (võre pinna normaali

suhtes) – θ_i , keskmise lainepikkusega λ_k tasalainekomponendi levimise suund võre normaali suhtes pärast difrakteerumist – θ_k , lainevälja superluminaalne levimiskiirus – β_{sl} , SLLW muutumatu levimise ulatus – ΔX , hinnang difraktsioonivõre pinna suurimale konarusele – Δ , optimaalne (vähim võimalik raadius selleks, et võre saaks kogu ulatuses valgustatud ning me ei kaotataks SLLW levimise ulatuses) silindrilise võre raadius/tasapinnaliste võrede kaugus optilisest teljest – d , moodustuva perioodilise interferentsmustrilainepikkus – $\Delta\Lambda = \lambda_k/2 \cos(\theta_k)$.

| K /mm | θ_i / deg | θ_k / deg | β_{sl} | ΔX /mm | Δ / μm | d /mm | $\Delta\Lambda$ / μm |
|---------|------------------|------------------|--------------|----------------|--------------------|---------|---------------------------|
| 500 | 37.9 | 62.9 | 1.63 | 37.2 | 0.4 | 38.6 | 0.61 |
| 50 | 74.9 | 83.2 | 1.04 | 30.2 | 1.5 | 8.1 | 2.34 |
| 1 | 87.9 | 89.1 | 1.00 | 28.2 | 11.3 | 1.1 | 17.01 |

Märkus: antud arvutustes on parameetrid valitud nii, et SLLW levimise ulatus ΔX oleks maksimaalne. SLLW registreerimise lahutusvõime probleemi silmas pidades võime langemisenurkade vähendamisega lühendada lainevälja levimisulatust ja saada pikema perioodiga lainemustri.

Näeme, et etteantud difraktsioonivõre pikkuse korral on SLLW levimise ulatus ΔX samas suurusjärgus.

Silindrilise difraktsioonivõre võrekonstandiga $K = 500$ joont/mm valgustamine ca 50° nurga all on keeruline ülesanne. Samuti ei tohi sellise võre pind omada konarusi, mis on suuremad kui $0.4\mu m$ ning SLLW registreerimiseks on vaja seadet, mis suudab piisava lahutusega registreerida perioodilist lainevälja lainepikkusega $1.1\mu m$. Sellest lähtuvalt on SLLW moodustamiseks otstarbekas kasutada oluliselt väiksema võrekonstandiga difraktsioonivõresid.

Tabelis on kõrvutatud ka võresid võrekonstantidega 50 joont/mm ja 1 joont/mm. Näeme, et võrekonstandiga 1 joont/mm difraktsioonivõre korral on nõudmised võre pinna kvaliteedile ning registreerimisseadme lahutusvõimele oluliselt väiksemad. Ometi tõstatub sellise võre korral apertuuri probleem. Nimelt ei eristu väljundis saadav lainemuster tasalainete interferentsist.

Leiame, et optimaalsete parameetritega difraktsioonivõre SLLW eksperimendiks on silindriline võre, läbimõõduga $15mm$, võrekonstandiga 50 joont/mm ning pikkusega $50mm$. Apertuuri probleemi nimetatud difraktsioonivõreaga ei teki: $330fs$ korrelatsiooniajaga värvilaseri kiiratavast kimbust moodustub SLLW apertuur on piisav eristamiseks seda tasalainete interferentsmustrist. Natuke väiksema võrekonstandiga

võrede korral ei võida me oluliselt lahtusvõimes, küll aga peab väiksema võrekonstandiga võre läbimõõt olema oluliselt väiksem selleks, et SLLW levimise ulatus ei lüheneks. Paarist sentimeetrist väiksema läbimõõduga silindrite lihvimine on tehniliselt keeruline.

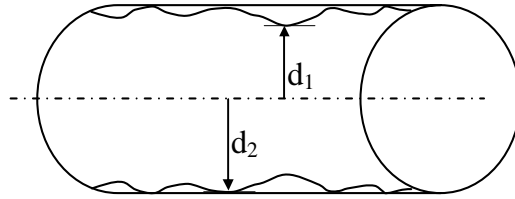
Ülalöeldust selgub, et eksperimendi läbiviimise eeldusteks on lahenduste leidmine järgmistele probleemidele: spetsiifiliste optiliste elementide (sobiva kvaliteediga silindrilise difraktsioonivõre) valmistamine, ca mikromeetrist lahtust võimaldavate lainevälja registreerimisseadmete väljatöötamine, difraktsioonivõre valgustamine vajalikus ulatuses ning sobiva spektriga valgusallika leidmine. Järgneb ülevaade seni uuritud lahendustest neile probleemidele.

3.3.1.1 Optilised elemendid SLLW genereerimiseks

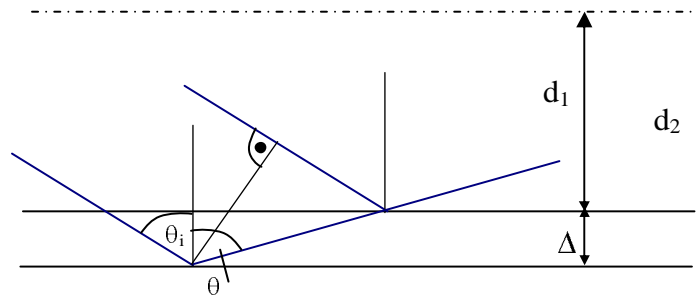
SLLW-d saab genereerida kahe tasapinnalise difraktsioonivõre või silindrilise difraktsioonivõre abil. Silindrilise difraktsioonivõre väljundis moodustuva silindersümmeetrilise monokromaatse lainevälja energiajaotus külgsuunas kirjeldub nullindat järku esimese astme Besseli funktsiooni ruuduga. Laiaribalise spektri korral on kontrast eri maksimumide vahel veelgi tugevam. Tasaparalleelseid võresid kasutades saame peegelsümmeetrilise, heas lähenduses kosinusoidaalse energiajaotusega lainevälja. Näeme, et silindrilise võre abil moodustunud lainevälja energia on koondunud väiksemasse ruumiulatusse. Eksperimendi läbiviimisel on eelistame kasutada silindrilist difraktsioonivõret.

Kaks tasapinnalist difraktsioonivõret tuleb skeemi asetada vastakuti ning seada need paralleelseks. Meile sobiva võrekonstandiga (so 100 *joont/mm* ja väiksem võrekonstant) difraktsioonivõred ei ole küll standardsed, kuid nende hankimine ei tohiks olla ületamatu probleem.

Silindrilise difraktsioonivõre näol on tegemist optilise elemendiga, millist meie teada ei ole maailmas varem valmistatud. Päringud optikafirmade seas on päädinud äraütle misega 39-l korral 40-st ning seda isegi difraktsioonivõre aluseks oleva silindri valmistamisest. Kuna kompetents seda tüüpi detaili valmistamiseks puudub ning tehnoloogiate väljatöötamine on nii ajamahukas kui ka kulukas, on äraütle miseks põhjuseks ka tellitavate detailide väike kogus. Ainus sõelale jäänud tootja on Venemaa optikafirmaga Tydex. Läbirääkimised Tydex'i difraktsioon-optika sektsiooni esindajaga on jõudnud faasi, kus tehases on alustatud katsetusi moodustamiseks kolmest sektorist 50mm pikkuse,



Joonis. 18 Karikatuurne joonis silindri sisekonaruste kujutamiseks. R_1 tähistab vähimat raadiust ning R_2 suurimat raadiust.



Joonis. 19 Mõtteline konstruktsioon silindervõre sisepinna kvaliteedi hindamiseks. Kõrvutame suurimalt konaruselt ning nõgususelt lähtuvaid kiiri ning määrame, et nende käiguvähe ei tohi olla suurem $\lambda/4$, kus λ tähistab lühimat lainepikkust.

15mm läbimõõduga ja võre konstandiga 50 joont/mm difraktsioonivõret.

Difraktsioonivõre joonistamine 15mm läbimõõduga silindri sisse kui äärmiselt väljakutsuv insenerivaldkonna probleem on huvi äratanud TÜ FI madalate temperatuuride labori teadurites. On asunud välja töötama spetsiaalset tööpinkki silindri sisse spiraali ehk võre joonistamiseks. Tööpingi kirjeldus on valminud Martin Langel'i bakalaureuse tööna [40].

Järgnevas on esitatud hinnang silindrilise difraktsioonivõre sisepinna siledusele.

Silindervõre sisepinna kvaliteedi hindamine

Kujutame silindri sisepinda konarlikuna (vt joon. 18). Meie eesmärk on hinnata suurimat lubatavat konaruste suurust, mis ei rikuks ära silindri pinnalt peegelduvate kimpude konstruktiivset interferentsi. Suurimalt ja vähimalt konaruselt peegeldunud ja difrageerunud kimpude käiguvähe ei tohi olla suurem kui veerand lühimast lainepikkusest, mis lähtub valgusallikast. Joonisel 19 esitatud konstruktsiooni ja difraktsioonivõre faasiseoste (16) põhjal saame silindri pinna sileduse maksimaalse kõikumise Δ jaoks järgmise seose:

$$\Delta = \frac{\pi}{2\sqrt{k^2 - (k \sin \theta_i + 2\pi K)^2}},$$

kus θ_i on võret valgustava kimbu langemisnurk ja k lühim lainevälja moodustava

tasalainekomponendi lainearv. (Saadud tulemuse põhjal on leitud ka tabelis esitatud hinnang.)

Kui $\lambda_{\min} = 500nm$, $n_{iie} = 0.87$ (sellest lähtuvalt langemisnurk $\theta_i = 75^\circ$) ja võrekonstant $K = 50 \text{ joont/mm}$, siis maksimaalne lubatud pinnakonarus $\Delta = 1.5\mu m$.

3.3.1.2 Kiirusallikad

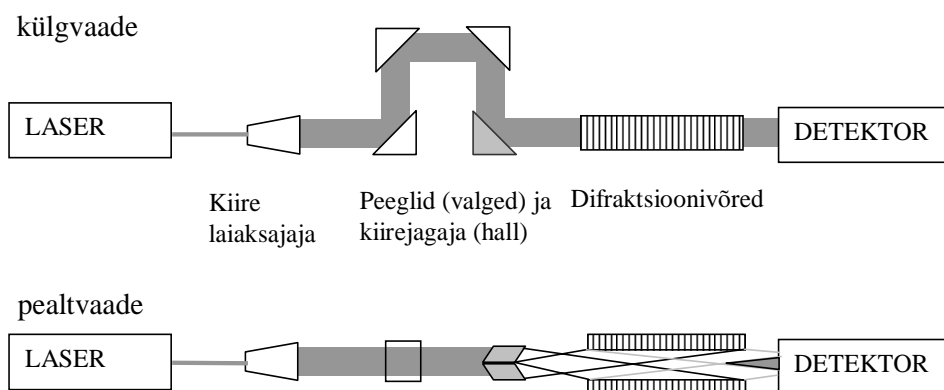
SLLW genereerimiseks vajame laiaribalist optilist valgusallikat. Kuni $6nm$ lainepikkuste vahemikuga (ca $200fs$) valgusimpulsse saame genereerida värvilaseri abil. Värvilaseri kiirguse korrelatsiooniteepikkus on suurusjärgus $60\mu m$. Kuna SLLW-d moodustavad tasalained levivad optilise telje suhtes suurema nurga all, kui X-tüüpi lainete puhul tehtud eksperimentides, eristub juba värvilaseriga saadav interferentsmuster paari millimeetri laiuses registreerimisalas monokromaatsete tasalainete interferentsist. SLLW-de tugev lokaliseeritus ja iseloomulik lainemuster ilmnevad aga oluliselt paremini laiema spektriga valgusallika puhul.

Piisavalt laia spektri ja võimsusega valgusallikas SLLW-de genereerimiseks on femtosekundlaser. See võimaldab saada kuni $10fs$ -kestvusega valgusimpulsse (lainepikkuste vahemik $600nm$ juures kuni $120nm$) ning impulsi võimsusega suurusjärgus kuni $5mJ$. Probleemiks on femtosekundlaserite kõrge hind ja vähene kättesaadavus. TÜ FI-le 2006 aasta algul soetatud titaan-safiirlaser on üles seadmisel.

Eelpool oleme näidanud, et mõõtes ajas keskmistatud lainevälja, saame LL-te korrelatsiooni-lainevälja moodustada ka nn laiaribalise statsionaarse müra allikaga. Kaarlahenduslambi kui laiaribalise müra allika eeliseks femtosekundlaseri ees on äärmiselt lai spekter. Siiski LL-te genereerimist kaarlahenduslambiga vaatame kui varuvarianti juhuks, kui laseri abil ei ole võimalik sobivat välja tekitada. Samuti on kaarlahenduslambist tulev ja mikromeeteravaga filtreeritud valgusvälja intensiivsus äärmiselt madal ning difraktsiooni 1. järgu mõõtmine, eriti mikromeetrise lahutusega, võib osutuda teostamatuks.

3.3.1.3 Võre valgustamine

SLLW muutumatu levimise ulatus sõltub sellest, millises ulatuses lainevälja moodustav valgusimpulss valgustab difraktsioonivõre(sid). Käesolevas uurime difraktsioonivõre valgustamise võimalusi nii 2D kui 3D SLLW genereerimiseks.



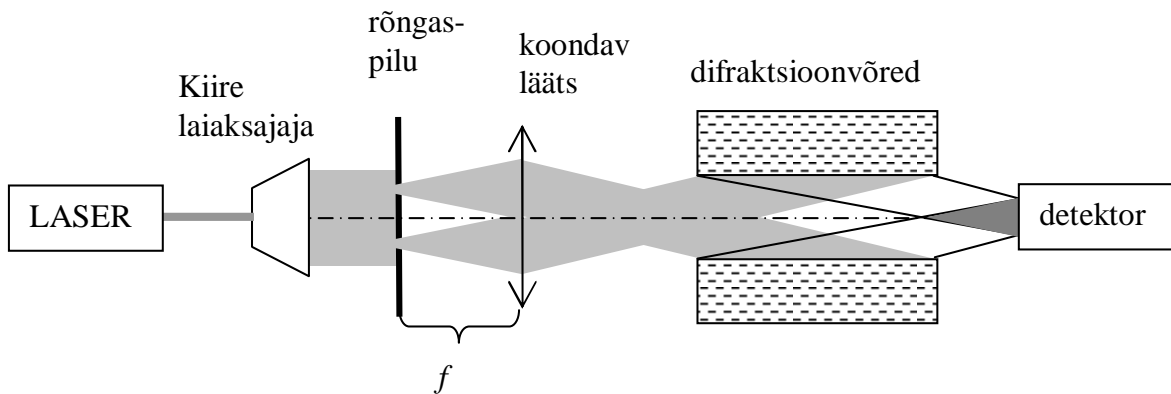
Joonis. 20 Skeem SLLW genereerimiseks tasaparalleelsete difraktsioonivõrede abil. Laserist lähtuv kiir läbib kiire laiendaja, seejärel suunatakse kiir kolme peegli abil kiirejagajale (hall kolmnurk, kõlgvaates). Kiirejagaja koosneb kahest peeglist, mille omavahelist kaldenurka on võimalik muuta. Kiirejagaja abil valgustatakse difraktsioonivõred. Võredelt lähtuvas valguskimbus moodustub SLLW. SLLW muutumatu levimise ulatus on märgitud pealtvaates halli kolmnurgana detektori ees.

2D SLLW juhul saame paralleelselt asetsevad tasapinnalised difraktsioonivõred valgustada kahest peeglist koosneva kiirejagaja abil. Valgustuskeem on kujutatud joonisel 20. Esitatud skeemi suur pluss seisneb selles, et difraktsioonivõrele langevas valguskimbus ei teki optiliste elementide materjali läbimisega kaasnevat täiendavat dispersiooni.

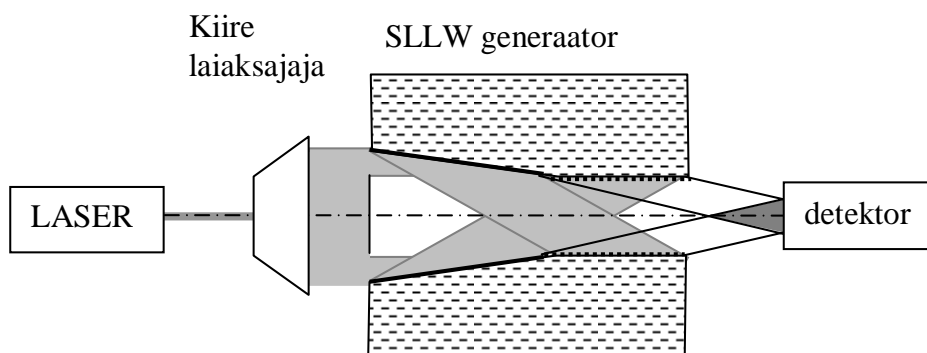
Silindrilist difraktsioonivõret on võimalik valgustada rõngaspilu ja koondava läätse abil (vt skeemi 21). Skeemilt võime näha, difraktsioonivõre valgustamine optilise telje suhtes suure nurga moodustava valguskoonusega on keerukas. Väljudes paraksiaalse lähenduse kehtivuspiirkonnast, hakkavad läätse aberratsioonid põhjustama laia spektriga valguskoonuses moonutusi.

On võimalik konstrueerida spetsiaalseid optilisi elemente SLLW genereerimiseks. Üks võimalik SLLW generaator on kujutatud joonisel 22. See koosneb koonilisest peeglist ja silindrilisest difraktsioonivõrest. Toodud detaili suur eelis on see, SLLW õnnestub moodustada praktiliselt üheainsa optilise elemendi abil ning lainevälja moodustav valgusimpulss ei läbi klaasdetaili, mis võiksid põhjustada täiendava dispersiooni.

Juhime tähelepanu asjaolule, et SLLW genereerimise skeemides difraktsioonivõresid valgustavas koonuses (valgusristis) moodustub samuti lokaliseeritud laineväli. Tegemist levi-invariantse lainefunktsiooniga superluminaalsesse perekonda kuuluva X-tüüpi laineväljaga. Juhul, kui valgusallikas omab Gaussi spektrit, moodustub valguskoonuse teljel Bessel-X impulss.



Joonis. 21 Skeem silindrilise difraktsioonivõre valgustamiseks. Laserist lähtuv valgusimpulsssuunatakse kiire laiendajale, sealt edasi rõngaspilule, mis asub koondava lääts fookuses. Pärast lääts läbimist moodustub valguskoonus, millega valgustatakse difraktsioonivõre. Difrageerunud valguses moodustub SLLW, mille levimise piirkond on märgitud halli kolmnurgana detektori ees.



Joonis. 22 Skeem SLLW genereerimiseks ühe optilise elemendi abil (võrdle skeemiga 21). SLLW generaator on optiline element, mis koosneb peegeldavast koonusest ning selle kaelalt jätkuvast silindrilisest difraktsioonivõrest. SLLW generaatorile suunatakse tasaparalleelne kiirte kimp. Difraktsioonivõre valgustatakse ära sellele eelneva koonilise peegli abil. Kiirtekimbu osa, mis ei lange SLLW generaatori koonilisele peeglile on blokeeritud katikuga. Eemaldades katiku, saame läbi viia interferomeetrilisi eksperimente.

3.3.1.4 Registreerimisseadmed

Nõuded registreerimisseadmele on küllalt ranged: vaja on mõõta lainevälja kuni $1 \times 1 \text{ cm}^2$ ulatuses, resolutsiooniga suurusjärgus üks mikron. Suure lahutusega kaasneb ka asjaolu, et vaja on registreerida väga nõrka signaali.

Laineväljade registreerimiseks on mugav kasutada CCD-kaamerat. See võimaldab praktiliselt hetkeliselt ära mõõta ja arvutisse lugeda kogu lainevälja pildi. Kaasaegseimate must-valgete CCD kaamerate piksli mõõtmed on suurusjärgus $4 \times 4 \mu\text{m}^2$. Selline kaamera võimaldaks läbi viia eeleksperimente mõnevõrra suurema usaldusväärsusega, kui olemasolev $9 \times 9 \mu\text{m}^2$ piksli mõõtmetega kaamera. Vajalikku lahutust CCD kaameraga paraku ei ole võimalik saada ning $4 \times 4 \mu\text{m}^2$ piksli suurusega kaamera abil saadav tulemus ei õigustaks seadme ostuks tehtud kulutust.

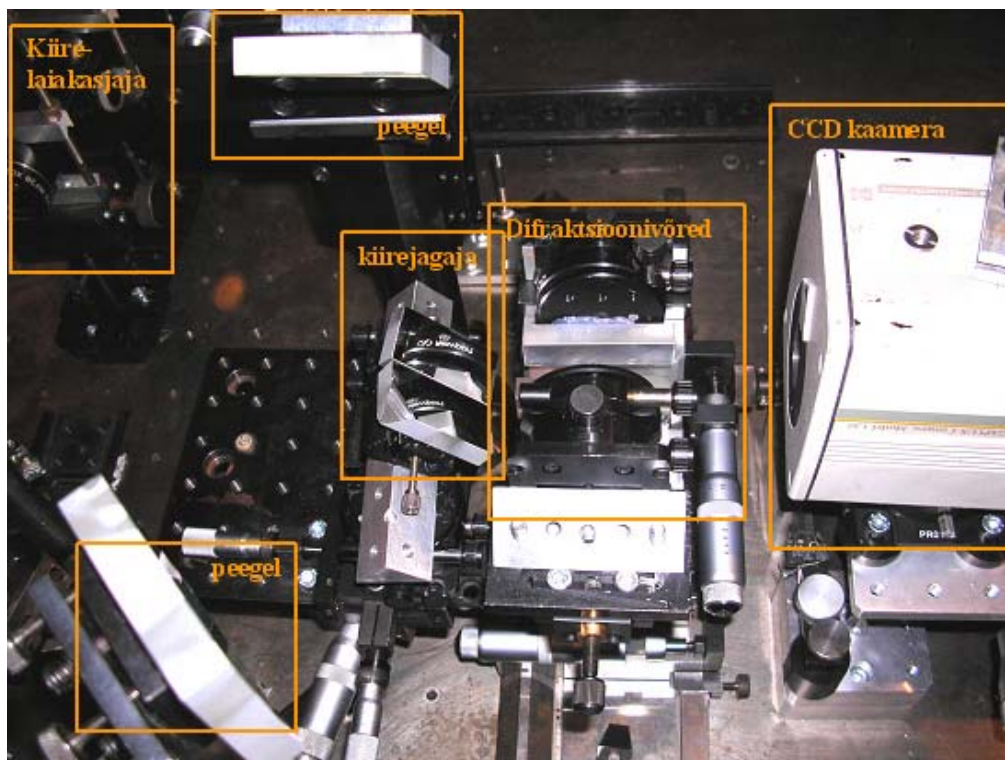
Mikroni suurusjärgus lahutust on võimalik saavutada fotoelektronkordisti ja mikromeeterava abil. (Osatakse valmistada kuni $0,5 \mu\text{m}$ läbimõõduga mikromeeteravasid.) Kõnealuse lahenduse ülesseadmine eeldab ka arvutijuhitava mikromeeter-translaatori seadmist ning fotoelektronkordistilt andmete mahalugemise tarkvara olemasolu. Lahenduse miinuseks on aeglane skaneerimiskiirus.

Soovides mõõta lainevälja, mille lainemuster alla $0,5 \mu\text{m}$ (täpsemalt $0,6^{-1}$ korda väiksem lühimast lainepikkusest), on ainuke võimalus kasutada lähivälja mikroskoopi. Lähivälja mikroskoop registreerib lähivälja. Antud juhul on vaja uuritav laineväli muuta evanestsentsseks ja seejärel on võimalik seda lähivälja mikroskoobiga registreerida.

3.3.1.5 Eeleksperiment

Eksperimendi simulatsioonis saame määrata mõõteseadme piksli suurust ning välja arvutada tulemuse, millise saaksime lainevälja registreerimisel elemendiga, mis ei suuda lainemustrit lahutada. Sel viisil saadav lainemuster on Moire' muster ning heledaima-tumedaima piksli kontrastsus on väiksem kui interferentspildi korral. Ometi saame Moire' mustri abil kindlaks teha interferentsmusteri ulatuse ning kõrvutada seda simulatsioonis saadud tulemustega. Toodud efekti arvestades osutus võimalikuks läbi viia eeleksperiment SLLW genereerimiseks.

SLLW välja tekitamiseks kasutame rodamiin 6G värvilaserit, mis on seatud



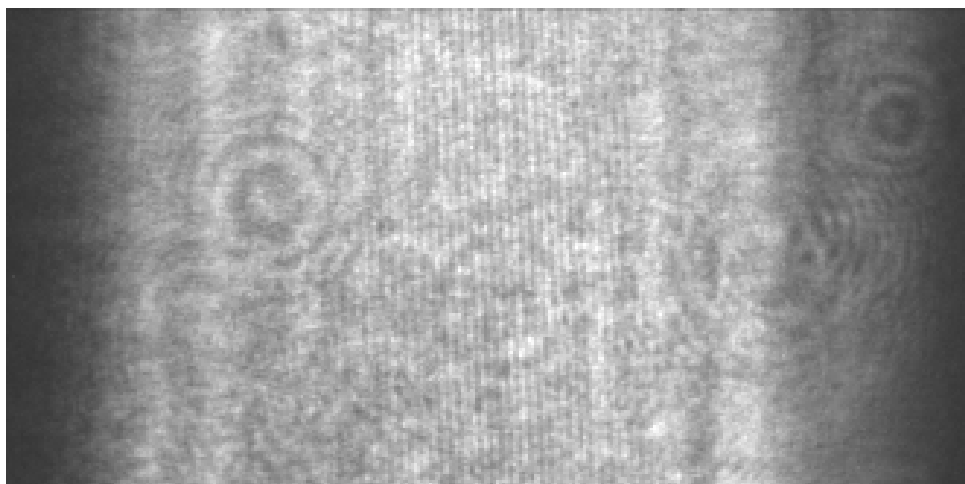
Joonis. 23 SLLW generaator 2D eeleksperimendis.

töötama pidevas režiimis ning kiirgab spektri vahemikus $606 - 610\text{nm}$, korrelatsiooni aeg $\tau = 332\text{fs}$. SLLW moodustame kahe tasapinnalise peegelvõre abiga, võrekonstant $K = 37.5 \text{ joont/mm}$ võre pikkus $L_V = 60\text{mm}$. Välja mõõtmiseks kasutame Kodak Megaplug 1.6i CCD-kaamerat, mille tundliku elemendi mõõtmed on $13.8\text{mm} \times 9.2\text{mm}$, piksli suurus $9\mu\text{m} \times 9\mu\text{m}$.

Optiline skeem, mille abil valgustatakse difraktsioonivõresid on kujutatud joonisel 20. Värvilaseri kimp läbib kiire laiakasjaja ning suunatakse kiirejagajale. Kiirejagaja koosneb kahest muudetava kaldenurgaga peeglist, mille abil suunatakse difraktsioonivõredele nurga θ_i all langevad valguskimbud.

Kiirejagaja peeglite kaldenurkade väärtused määravad spektri punaseima lainearvu ja kandjajoone algust märkiva lainearvu suhte ehk nihke. Eksperimendis on kasutatud parameetrite väärtusi $nihe = 0.95$, sellest lähtuvalt $\theta_i = 77.4^\circ$, punaseim tasalainekomponent levib pärast difrakteerumist võre normaali suhtes nurga $\theta_{11} = 87.2^\circ$ all; võrede kaugus optilisest teljest $d = 7\text{mm}$; SLLW muutumatu leviku ulatus $\Delta X = 51.3\text{mm}$. SLLW kui eksperimendiskeemi väljundiks oleva lainevälja lainemustri lainepikkus on $6\mu\text{m}$.

Joonisel 24 on esitatud lainevälja mõõtmisel saadav tulemus. Heledas piirkonnas



Joonis. 24 CCD-kaameraga registreeritud SLLW lainemuster. Pildi mõõtmed 3mm × 1.5mm (laius×kõrgus).

kattuvad võredelt difrakteerunud valguskimbud. Piirkonna keskel olevad pikitriibud on tõlgendatavad interferentsijooontena. Interferentsmusteri esinemine ainult lainevälja keskel on kooskõlas valguskimpude lühikese korrelatsiooniajaga ning simulatsioonis ennustatud tulemustega. Saadud tulemust loeme kaudseks kinnituseks, et eksperimendis moodustus ülevalgusekiirusega leviv lokaliseeritud laineväli.

3.4 Plaanid edaspidiseks

Hüperboolse spektri kandjaga superluminaalse lokaliseeritud lainevälja moodustamise eksperimendi järgmised etapid ning eesmärgid lähtuvad käesoleva töö raames saadud tulemustest. Eesmärgid on järgmised:

- registreerimisseadme, mis võimaldab lainevälja mõõta mikronilise lahutusega, väljatöötamine;
- silindrilise difraktsioonivõre loomist võimaldava tööpingi ehituse jätkamine;
- uue eksperimendiskeemi, mis võimaldaks silindrilist difraktsioonivõret valgustada femtosekundlaseri impulsi, väljatöötamine ja koostamine;
- silindrilise difraktsioonivõre abil, femtosekundlaseri impulsi moodustuva superluminaalselt leviva lokaliseeritud lainevälja registreerimine eksperimendis.

4 KOKKUVÕTE

Käesolevas töös on uuritud ülevalgusekiirusega levivaid lokaliseeritud laineid ning seda tüüpi laineväljade moodustamist elektromagnetlainete optilises piirkonnas.

Enne tulemuste formuleerimist meenutame uuritavate laineväljade põhilisi iseloomustajaid. Ilmutatud kuju omava lainefunktsiooniga fokuseeritud X-laine (FXW) on eksponentsiaalselt kustuva spektriga, ülevalgusekiirusel leviv lokaliseeritud laineväli. Seni väheuuritud FXW pakub huvi muuhulgas ka erakordselt tugeva külgsuunalise lokalisatsiooni tõttu. Modifitseeritud FXW-tüüpi laineväljad omavad erinevalt algsest FXW-st lõpliku koguenergiat, kuid kaotavad seetõttu levi-invariantsuse.

Hüperboolse spektri kandjaga ülevalgusekiirusega levivat lainevälja (SLLW) ei ole varem eksperimendis realiseeritud. Lainevälja genereerimiseks on vaja osata moodustada lainevälja spektri kandjat, kasutada piisavalt laia spektriga valgusallikat ning laineväli registreerida.

Käesolevas magistritöös oleme näidanud, et optilises piirkonnas on võimalik moodustada hüperboolse spektri kandjaga superluminaalselt levivaid lokaliseeritud lainevälju ning oleme välja töötanud seda tüüpi laineväljade eksperimendis moodustamise põhimõtted. Tulemused on järgmised:

- on tuletatud ilmutatud kujul lainefunktsiooniga kirjelduv FXW lõpliku koguenergiaga modifikatsioon, on läbi tehtud fokuseeritud X-laine ja varem leitud modifikatsiooni tuleuskäigud ning uuritud seda tüüpi laineväljade lokaliseeritust ning levimist ruumis;
- on näidatud, et ülevalgusekiirusega levivate lokaliseeritud lainete spektri kandjat on võimalik moodustada difraktsioonivõrede abil; erinevalt difraktsioonivõrede harjumuspärasest asetusest tuleb SLLW moodustamiseks difraktsioonivõrede difrakteeriv pind seada paralleelseks optilise teljega;
- on leitud difraktsioonivõre kostefunktsioon ning sellest tulenevalt saadud põhimõtte ülevalgusekiirusega levivate LL-te moodustamiseks ülilühikestest valgusimpulssidest;
- on koostatud interaktiivne simulatsioon, mis võimaldab leida optimaalsed parameetrite väärtused SLLW eksperimendiseadeks ning arvutada skeemi väljundiks olev laineväli.
- on konstrueeritud spetsiifiline optiline element SLLW moodustamiseks;
- on koostatud eksperimendiskeem peegelsümmeetrilise SLLW moodustamiseks ning on saadud kaudne eksperimentaalne kinnitus SLLW eksisteerimise kohta.

Käesoleva töö autor tänab juhendajaid Peeter Saarit ja Kaido Reivelti, kes leidsid aega ja motivatsiooni jagamiseks oma põhjalikke teadmisi ja laialdasi kogemusi. Tänuavaldused ka TÜ FI madalate temperatuuride labori vanemateaduritele Ants ja Rünno Lõhmusele kaasa mõtlemast ja praktilisi näpunäiteid jagamast inseneritehniliste lahenduste otsimisel.

5 SUMMARY

Experimental realizability of superluminally propagating localized waves

In this thesis superluminally propagating localized waves and principles of generating this kind of wavefields in optical domain of electromagnetic waves are studied.

We have shown the possibility and have formulated the principles of generating superluminally propagating wavefields with hyperbolic support of spectrum in optical domain.

Particularly, the following main results have been obtained.

- The derivation of wavefunctions of the focused X waves and of one of its finite-energy modification (M1) has been carried out in a way slightly different from that given in the literature and a spectral function for M1 and a closed-form expression for the wavefunction of a new modified FXW-type wavefield (M2) have been deduced. Localization and propagation characteristics of FXW-type waves have been studied;
- The principles for generating superluminally the propagating localized waves with hyperbolic support of the spectrum, using diffraction gratings, has been introduced;
- The response of the diffraction grating has been analyzed and the principle of composing SLLW-s from ultrashort light pulses has been deduced;
- An interactive simulation for modeling a realistic experiment and for calculating the resulting localized wavefield has been created;
- A specific optical element for generating SLLW has been constructed;
- An experimental setup for generating SLLW with specular symmetry has been designed and the preliminary experimental results are considered.

6 AVALDATUD PUBLIKATSIOONID

Artiklid rahvusvahelistes ajakirjades

- I P. Saari, M. Menert and H. Valtna, *Photon localization barrier can be overcome*, Opt. Commun. 246 (2004) 445-450.
- II H. Valtna, K. Reivelt and P. Saari, *Modifications of the focused X wave as suitable models of strongly localized waves for realization in the optical domain*, J. Opt. A: Pure Appl. Opt. 8 (2006) 118–121.

Konverentsiteesid

- III H. Valtna, P. Saari, "*Novel approach for generation of superluminal localized wavefields*", to be presented at the Northern Optics 2006, Bergen, Norway, 14-16 June 2006. (accepted)
- IV K. Reivelt, H. Valtna, and P. Saari "*Optical generation of superluminal localized wave solutions of homogeneous wave equation*", to be presented at the Northern Optics 2006, Bergen, Norway, 14-16 June 2006. (accepted)

Publikatsioonide väljatrükid on lisas B.

KIRJANDUS

1. J. N. Brittingham, J. Appl. Phys. **54** 1179, (1983).
2. R. W. Ziolkowski, J. Math. Phys. **26**, 861 (1985).
3. M. R. Palmer, and R. Donnelly, J. Math. Phys. **34**, 4007, (1993).
4. P. Saari, in *Time's Arrows, Quantum Measurement and Superluminal Behavior, Scientific Monographs: Phys. Sci. Series*, eds. D. Mugnai et al (CNR, Rome, Italy 2001), p. 37 or arXiv: physics/0103054.
5. P. Saari, in *Ultrafast Photonics, Institute of physics, Scottish Graduate Textbook Series*, eds. A. Miller et al (St Andrews, September 2002).
6. E. Recami, M. Zamboni-Rached, C. A. Dartora, Phys. Rev. E **69**, 027602 (2004).
7. I. Besieris, M. Abdel-Rahman, A. Shaarawi, and A. Chatzipetros, Prog. Electromagn. Res. **19**, 1 (1998).
8. K. Reivelt, PhD Dissertation: *Optical implementation of propagation-invariant pulsed free-space wave fields* (Tartu University Press, Tartu, Estonia, 2003).
9. P. Saari, K. Reivelt, Phys. Rev. E **69**, 036612 (2004).
10. J. Lu and J. F. Greenleaf, IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control **39**, 19 (1992).
11. P. Saari, M. Rätsep, H. Sõnajalg Opt. Lett. **22**, 310 (1997).
12. P. Saari and K. Reivelt, Phys. Rev. Lett., **79**, 4135 (1997).
13. D. Mugnai, A. Ranfagni, and R. Ruggeri, Phys. Rev. Lett. **84**, 4830 (2000).
14. I. Alexeev, K. Y. Kim, and H. M. Milchberg, Phys. Rev. Lett. **88**, 073901 (2002).
15. K. Reivelt and P. Saari, Phys. Rev. E **66**, 056611 (2002).
16. R. Grunwald, V. Kebbel, U. Griebner, U. Neumann, A. Kummrow, M. Rini, E. T. J. Nibbering, M. Piche, G. Rousseau, and M. Fortin, Phys. Rev. A **67**, 063820 (2003).
17. P. Di Trapani, G. Valiulis, A. Piskarskas, O. Jedrkiewicz, J. Trull, C. Conti, and S. Trillo, Phys. Rev. Lett. **91**, 093904 (2003).
18. V. V. Borisov and A. P. Kiselev, Appl. Math. Lett. **13**, 83 (2000).
19. Miguel A. Porras, Paolo Di Trapani, Phys. Rev. E **69**, 066606 (2004).
20. O. Jedrkiewicz, J. Trull, G. Valiulis, A. Piskarskas, C. Conti, S. Trillo, and P. Di Trapani, Phys.

Rev. E **68**, 026610 (2003).

21. C.A. Dartora, K.Z. Nobrega, A. Dartora, H.E. Hernandez-Figueroa, *Opt. Comm*, **249**, 407–413 (2005).
22. P. Saari, and H. Sonajalg, *Laser Physics* **7**, 32, (1997).
23. J. Lu ja S. He, Optical X wave communications, *Opt. Comm.*, **161** 187-192 (1999)
24. J. Durnin, *J. Opt. Soc. Am. A* **4**, 651 (1987).
25. J. Durnin, J.J. Miceli, Jr., and J.H. Eberly, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 1499 (1987).
26. H. Sõnajalg, P. Saari, *EFS aastaraamat 1996*, **49**, (Tartu 1997).
27. B. E. A. Saleh, M. C. Teich, *Fundamentals of Photonics*, (John Wiley & Sons Inc., New York 1991).
28. P. Saari, *Atti della Fondazione Giorgio Ronchi*, **LVIII n6**, 729, (Firenze 2003).
29. H. Sõnajalg, P. Saari, *Opt. Lett.* **21**, 1162 (1996).
30. R. Grunwald, U. Griebner, F. Tschirschwitz, E. T. J. Nibbering, T. Elsaesser, V. Kebbel, H.-J. Hartmann, and W. Jüptner, *Opt. Lett.* **25**, 981 (2000).
31. R. Grunwald, U. Griebner, E. T. J. Nibbering, A. Kummrow, M. Rini, T. Elsaesser, V. Kebbel, H.-J. Hartmann, and W. Jüptner, *J. Opt. Soc. Am. A* **18**, 2923 (2001).
32. H. Ringermacher and L. Mead, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 059402 (2001).
33. N. P. Bigelow and C. R. Hagen, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 059401 (2001).
34. K. Reivelt, P. Saari, *J. Opt. Soc. Am. A* **17**, 1785-1790 (2000).
35. K. Reivelt, P. Saari, *Phys. Rev. E* **65**, 046622 (2002).
36. H. Bateman, and A. Erdelyi, *Tables of Integral Transforms* (McGraw-Hill Book Company, Inc., New York 1954).
37. I. Bialynicki-Birula, in *Progress in Optics*, edited by E. Wolf (Elsevier, Amsterdam, 1996), Vol. XXXVI.
38. L. Mandel and E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).
39. S. Wise, V. Quetschke, A. J. Deshpande, G. Mueller, D.H. Reitze, D. B. Tanner, B. F. Whiting, Y. Chen, A. Tünnermann, E. Kley, and T. Clausnitzer, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 013901 (2005).
40. M. Langel, EMÜ, bakalaureuse töö: *Pilootprojekt torukujulise difraktsioonivõre valmistamiseks: madaladimensioonilise täpsusega seadmete konstrueerimine ja töötlemise meetodikakompleksi väljatöötamine* (2006).

Lisa C

Elektroniline lisa C sisaldab:

MATHCAD'I TÖÖLEHED:

FXWnäidistööleht .mcd

Mathcad'i failina esitatud näidis fokuseeritud X-laine (FXW) lainefunktsiooni kolmemõõtmeliseks kujutamiseks. (Fail salvestatud Mathcad 2001i versioonis)

SLLWsimulatsioon.mcd

Simulatsioon SLLW eksperimendi geometria ja eksperimendi väljundiks oleva lainevälja modelleerimiseks. (Fail salvestatud Mathcad 2001i versioonis)

ANIMATSIOONID:

FXW_moodul.avi

FXW mooduli animatsioon parameetrite $v=1.005c$, $\Delta=2\mu\text{m}$, $k_{z0}=-30\pi/\mu\text{m}$; ühikuks nii z- kui ρ -teljel on $1.5\mu\text{m}$. (levimisteljeks on z-telg, mis on suunatud vasakult paremale)

FXW_reaalosa.avi

FXW reaalosa animatsioon parameetrite $v=1.005c$, $\Delta=2\mu\text{m}$, $k_{z0}=-30\pi/\mu\text{m}$; ühikuks nii z- kui ρ -teljel on $1.5\mu\text{m}$.

FXW_imaginaarosa.avi

FXW imaginaarosa animatsioon parameetrite $v=1.005c$, $\Delta=2\mu\text{m}$, $k_{z0}=-30\pi/\mu\text{m}$; ühikuks nii z- kui ρ -teljel on $1.5\mu\text{m}$.

MFXW.avi

MFXW, FXW ja MFXW-komponendi moodulite animatsioon ilmestamiseks MFXW levimist. Parameetrid: $v=1.25c$, $\Delta=0.25\mu\text{m}$, $a_2=\mu\text{m}$, $k_{z0}=6\pi/\mu\text{m}$, $q=4$; ühikuks nii z- kui ρ -teljel on $1.5\mu\text{m}$.

realMFXW.avi

Mõttelises eksperimendis saadava lainevälja mooduli animatsioon kõrvutatuna "tavapärase" parameetri a_2 valikuga MFXW-ga. Parameetrid: $v=1.25c$, $\Delta=0.25\mu\text{m}$, $a_2=\text{mm}$ (realiseeritaval MFXW-l (ülemine)) $a_2=\mu\text{m}$ (võrdlev MFXW alumine), $k_{z0}=6\pi/\mu\text{m}$, $q=4$; ühikuks nii z- kui ρ -teljel on $1.5\mu\text{m}$.

fookuslaine.avi

Piiril $v \rightarrow c$ läheb FXW üle fookuslaineiks. Fookuslaine reaalosa animeerimisel kasutatud parameetrid: $\Delta=1/3\mu\text{m}$, $B=2\pi/\mu\text{m}$; ühikuks nii z- kui ρ -teljel on $1\mu\text{m}$.

silinderlaine.avi

Piiril $v \rightarrow \infty$ läheb FXW üle fookuslaineiks. Silinderlaine reaalosa animeerimisel kasutatud parameetrid: $\Delta=1/3\mu\text{m}$, $k_{z0}=2\pi/\mu\text{m}$; ühikuks nii z-teljel $4\mu\text{m}$ ja ρ -teljel $4.5\mu\text{m}$.

Lisa A

Lisas A on toodud SLLW simulatsiooni väljatrükk.

Lisa B

Lisas B on toodud publikatsioonide väljatrükid:

- P. Saari, M. Menert and H. Valtna, Photon localization barrier can be overcome, *Opt. Commun.* 246 (2004) 445-450.
- H. Valtna, K. Reivelt and P. Saari, Modifications of the focused X wave as suitable models of strongly localized waves for realization in the optical domain, *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* 8 (2006) 118--121.
- H. Valtna, P. Saari, "Novel approach for generation of superluminal localized wavefields", to be presented at the Northern Optics 2006, Bergen, Norway, 14-16 June 2006. (accepted)
- K. Reivelt, H. Valtna, and P. Saari "Optical generation of superluminal localized wave solutions of homogeneous wave equation", to be presented at the Northern Optics 2006, Bergen, Norway, 14-16 June 2006. (accepted)

Ekspirimendi simulatsioon

modelleerimaks hüperboolse spektri kandjaga superluminaalse lokaliseeritud lainevälja (SLLW)

Defineerime lainevälja sõltumatud parameetrid:

Lainevälja iseloomustavad parameetrid:

Spektri vahemik pikima ja lühima lainepikkuse järgi:

punaseim lainepikkus $\lambda_1 := 0.600 \cdot 10^{-3}$ mm

siniseim lainepikkus $\lambda_2 := 0.550 \cdot 10^{-3}$ mm

parameeter, mis määrab kandja asukoha kandjajoonel. Esitame selle spektri vähima lainearvu ja kandjajoone ning k_z -telje lõikepunkti suhtena.

$$\text{nihe} := 0.89$$

NB Suurused, mis on rohelise tausta abil esile tõstetud, on eksperimendi sisendparameetrid. Neid võib muuta, läbi mängimaks mõnda teist stsenaariumit!

NB Töölehel on kasutatud pikkusühikuna millimeetrit.

Difraktsioonivõret iseloomustavad parameetrid:

võrekonstant $K := 50$ $\frac{1}{\text{mm}}$

võre pikkus (võre mõõde risti võre joontega) $L_V := 60$ mm

Kiirejagajale langeva kiire ja kiirejagaja peeglite mõõtmed:

Koostatud 2D skeemi puhul võtame arvesse ka reaalsed valguskimpu iseloomustavad suurused ja kontrollime kas kiirejagajalt lähtuv valguskimp valgustab difraktsioonivõred kogu ulatuses ja leiame kiirejagaja ja võre vahelise kauguse.

pealelangeva kimbu apertuur $A := 35$ mm

kiirepoolitaja ja optilise telje vahele jääv vahemaa $\Delta A := 0.5$ mm

peegli laius $\text{peegel} := 35$ mm

Ekspirimendi geometria põhiparameetrite arvutused:

Defineerime suurused:

$$k_1 := \frac{2\pi}{\lambda_1} \quad k_2 := 2 \frac{\pi}{\lambda_2} \quad \text{laine arvud} \quad k_1 = 1.047 \times 10^4 \frac{1}{\text{mm}} \quad k_2 = 1.142 \times 10^4 \frac{1}{\text{mm}}$$

$$\theta_i := \text{asin} \left(1 - \frac{K \cdot 2\pi}{\text{nihe} \cdot k_1} \right) \quad \text{langemisnurk} \quad \theta_i = 75.081 \text{ deg}$$

$$\alpha := \left(\frac{\pi}{2} - \theta_i \right) \cdot \frac{1}{2} \quad \text{abisuurus}$$

$$\beta := \sin(\theta_i) \quad \beta_{sl} := \beta^{-1} \quad \text{relativistlik faktor } \beta \quad \beta_{sl} = 1.035$$

Valguskimpu iseloomustavad suurused:

$$D := \left(\frac{A}{2} - \Delta A \right) \quad \text{kiirejagaja peeglile langeva kimbu laius}$$

$$A_B := \left(\frac{A}{2} - \Delta A \right) \cdot \frac{1}{\cos(\alpha)} \quad \text{Kiire apertuur peeglil}$$

ee := L_V eeldame, et võre valgustatakse kogu ulatuses

kontroll := if $\left[\left(L_V > \frac{D}{\cos(\theta_i)} \right), \text{"ei valgustata"}, \text{"ok"} \right]$ kontrollime, kas võred valgustatakse kogu ulatuses: kontroll = "ok"

Ekspirimendi geomeetria

(ühikuks on millimeeter)

$d := \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{ee}{\tan(\theta_i)} \right)$ antud kimbu laiuse juures vähim võimalik võre kaugus teljest $d = 7.993$

$L_{BV} := \tan(\theta_i) \cdot (d + \Delta A)$ kiirejagaja ja võre vaheline kaugus. (Võre "vasaku" serva loeme koordinaatide alguspunktiks.) $L_{BV} = 31.877$

$x_0 := d \cdot \tan(\text{asin}(\sin(\theta_i) + 0 \cdot \lambda_1 \cdot K))$ peamaksimumi asukoht $x_0 = 30$

$\theta_0 := \theta_i$ kimpude langemisnurk $\theta_0 = 75.081 \text{ deg}$

$x_{11} := d \cdot \tan(\text{asin}(\sin(\theta_i) + 1 \cdot \lambda_1 \cdot K))$ esimese järgu asukoht punasema, λ_1 jaoks $x_{11} = 92.558$

$\theta_{11} := \text{asin}(\sin(\theta_i) + 1 \cdot \lambda_1 \cdot K)$ esimese järgu kimpude langemisnurk $\theta_{11} = 85.064 \text{ deg}$

$x_{12} := d \cdot \tan(\text{asin}(\sin(\theta_i) + 1 \cdot \lambda_2 \cdot K))$ esimese järgu asukoht sinisema, λ_2 jaoks $x_{12} = 71.398$

$\theta_{12} := \text{asin}(\sin(\theta_i) + 1 \cdot \lambda_2 \cdot K)$ kimpude langemisnurk $\theta_{12} = 83.612 \text{ deg}$

$x_{21} := d \cdot \tan(\text{asin}(\sin(\theta_i) + 2 \cdot \lambda_1 \cdot K))$ teise järgu asukoht punasema, λ_1 jaoks (kui imaginaarne, siis teist järku ei tekigi) $x_{21} = -35.539i$

$x_{22} := d \cdot \tan(\text{asin}(\sin(\theta_i) + 2 \cdot \lambda_2 \cdot K))$ teise järgu asukoht sinisema, λ_2 jaoks (kui imaginaarne, siis ei tekigi) $x_{22} = -39.349i$

$\Delta X := x_{12} + L_V - x_{11}$ SLLW muutumatu leviku ulatus (piirkond z-teljel, kus samaaegselt kohtuvad kõigi spektri sagedustega tasalainekomponendid) $\Delta X = 38.84$

$L_{VD} := x_{11} - L_V$ võre otsa ja SLLW mustri vaheline kaugus. Kui see on negatiivne, algab SLLW võrede vahel. Optimaalne on L_{VD} väärtus on:
 $L_{VD} = x_{11} - L_V = x_0$ ehk SLLW algab seal, kus lõpeb difraktsiooni 0. järk. $L_{VD} = 32.558$

$\Delta t := \left[\frac{-c}{\lambda_1^2} \cdot (\lambda_2 - \lambda_1) \right]^{-1}$ etteantud spektriga kiirguse korrelatsiooniaeg $\Delta t = 24 \cdot 10^{-15} \text{ fs}$

Definitsioonid eksperimendigeomeetria graafiliseks kujutamiseks

telg $\mathbf{a} := -100 \dots 300$ $\mathbf{A}(\mathbf{a}) := 0$

peeglid $\mathbf{b} := 0 \dots \text{round}(\text{peegel} \cdot \sin(\alpha))$ $\mathbf{B}(\mathbf{b}) := \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot (\mathbf{b})$

võred $\mathbf{c} := 0 \dots L_V$ $\mathbf{C}(\mathbf{c}) := d$

$\Delta \Delta := \tan(\theta_i)^{-1} \cdot ee$

langevad valguskimbud ja peamaksimum $\delta := -L_{BV} + \Delta A \cdot \tan(\alpha)$

$$\delta\delta := -L_{BV} + \frac{A \sin(\alpha)}{2}$$

$$\mathbf{d} := \delta \dots 300$$

$$\mathbf{dd} := \delta\delta \dots 300$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{d}) := \text{if} \left[\mathbf{d} < 0, \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta_i\right) \cdot \mathbf{d}, -\left(\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta_i\right) \cdot \mathbf{d}\right) \right]$$

$$\mathbf{DD}(\mathbf{d}) := \text{if} \left[\mathbf{d} < ee, \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta_i\right) \cdot \mathbf{d} - \Delta\Delta + \mathbf{d}, -\left(\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta_i\right) \cdot \mathbf{d}\right) + \Delta\Delta + \mathbf{d} \right]$$

peegelduvad kiired
punasem lainepikkus $\mathbf{e} := 0 \dots 600$

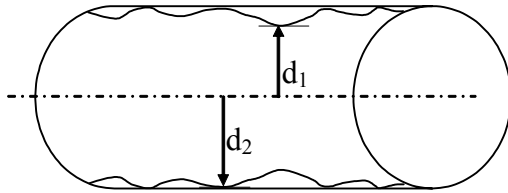
$$\mathbf{E}(\mathbf{e}) := \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta_{11}\right) \cdot \mathbf{e}$$

peegelduvad kiired
punasem lainepikkus $\mathbf{f} := 0 \dots 600$

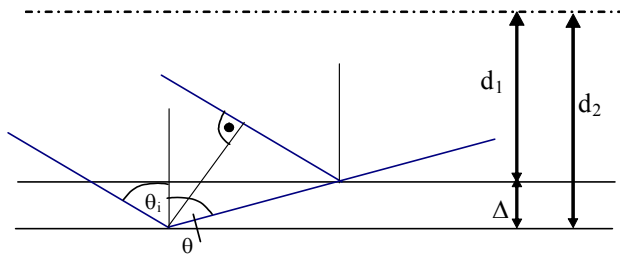
$$\mathbf{F}(\mathbf{f}) := \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta_{12}\right) \cdot \mathbf{f}$$

Silindervõre pinna kvaliteedi hindamine

Silindervõre on mittestandardne optiline element. Valmistamiseks seda tüüpi uudset detaili, peame oskama hinnata, milline peab olema silindri pinnakvaliteet, et saaksime võre väljundis lokaliseeritud lainevälja.



d_1 ja d_2 on kõige sügavama lohu ja kõige kõrgema muhu kaugused silindri tsentrist.



Sinised jooned tähistavad langevaid valguskimpe. Pinnad, millelt need peegelduvad on suurimad konarused. Δ tähistab suurimat pinna sileduse kõikumist.

Käesolevas mudelis jälgime kõige suurema konaruse ja lohu pinnalt tekkivat interferentsi. St kõige kõrgemast ja kõige madalamast punktist lähtuvate kiirte käiguvahe ei tohi ületada poolt (spektri sinisemat) lainepikkust.

Difrageerumisel tekkiva faasinihke avaldis

$$\phi(k) = x \cdot (\sin(\theta_i) \cdot k + 2\pi K) + d \cdot \sqrt{k^2 - (k \cdot \sin(\theta_i) + K \cdot 2\pi)^2}$$

Suurimalt ja väikseimalt konaruselt difrageeruvate kiirte faasidevahe ei tohi olla suurem $\pi/2$ -st. Siit saame hinnangu absoluutsele konarusele $\Delta = d_2 - d_1$:

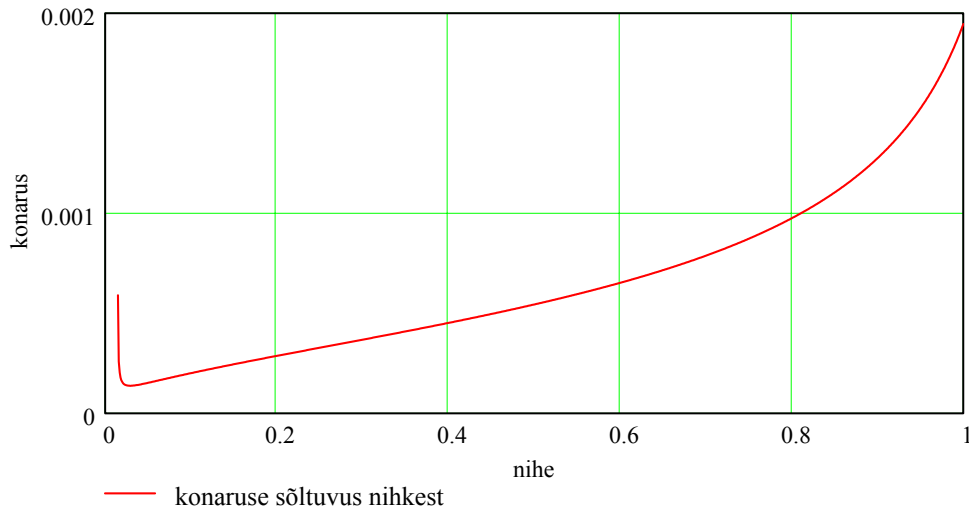
$$\Delta(\text{nihe}, K, k) := \frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{k^2 - \left[k \cdot \left(1 - \frac{K \cdot 2\pi}{\text{nihe} \cdot k_1} \right) + K \cdot 2 \cdot \pi \right]^2}}$$

Antud juhul on suurima lubatud konaruse suurus:

$$\Delta(\text{nihe}, K, k_2) = 1.236 \cdot 10^{-3} \quad \text{millimeetrit}$$

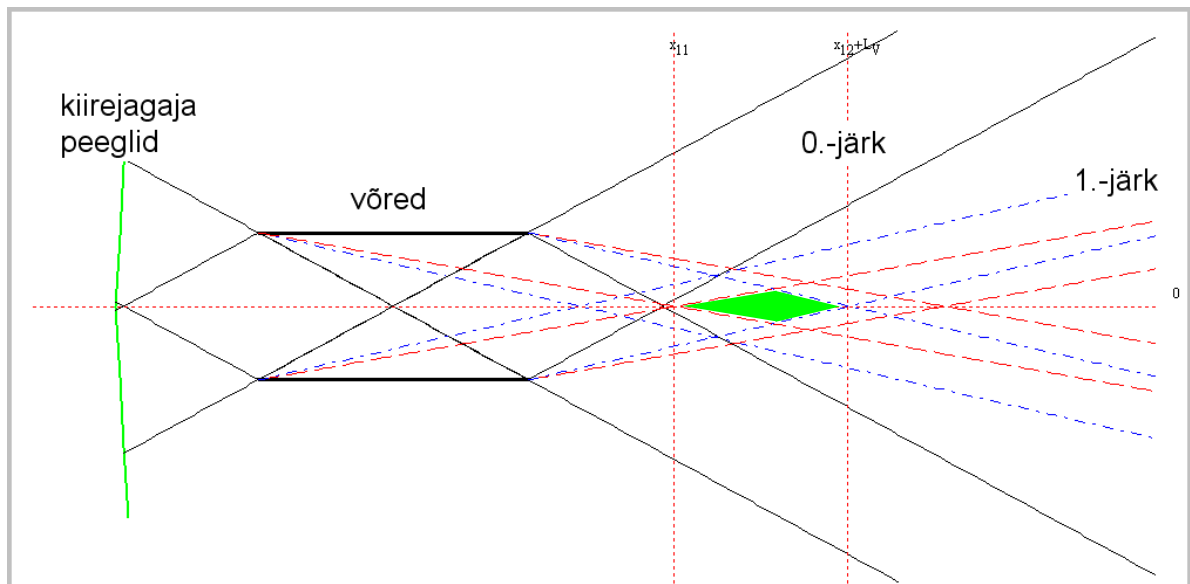
Lubatud konaruse suurus sõltuvalt nihke väärtusest:

$$n := 0, 0.001 \dots 1$$



Mida suurem on nihe, seda kehvema kvaliteediga võib olla kasutatav silindri pind. Teisalt, mida suurem on nihe, seda väiksemaks jääb moodustuva SLLW apertuur ning laineväli ei eristu tasalainete interferentspildist.

Ekspirimendigeomeetria graafiliselt:



SLLW moodustub graafikul rohelisega märgitud nelinurgas skeemi optilisel teljel.

Kontrollime, et eri maksimumid ei jääks lainevälja mõõtmist segama:

$$\text{kontroll} := \text{if}(L_{VD} > x_0 + ee - L_V \vee x_{11} < \text{Re}(x_{22}) < x_{12} + ee, \text{"OK"}, \text{"eri maksimumid kattuvad"})$$

kontroll = "OK"

Võrdlus monokromaatse Gaussi kiirega

Gaussi kiire talju laius

$$W_0 := \frac{20}{\sqrt{2}} 10^{-3} \text{ mm}$$

Võrdlemaks Gaussi kimbu koospüsimise ulatust SLLW muutumatu levimise ulatusega, võiks W_0 olla samas suurusjärgus SLLW taljeosa läbimõõduga (mille suurus jääb reeglina alla $10\mu\text{m}$).

leviku ulatus, mil monokromaatne Gaussi kiir laieneb $\sqrt{2}$ korda:

$$z_0 := \frac{\pi W_0^2}{\lambda_2}$$

$$z_0 = 1.142 \text{ mm}$$

$$\text{antud juhul } \Delta X = 38.84 \text{ mm}$$

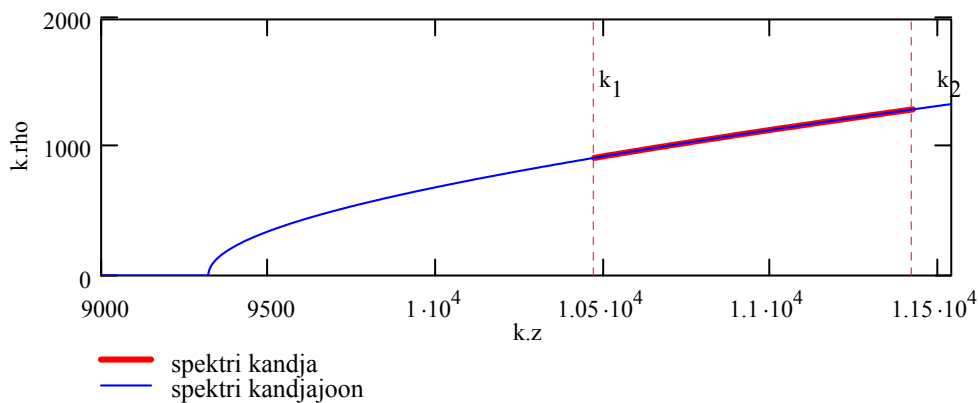
Lainevälja spektri kandja paiknemine kandjajoonel

spektri kandjajoon

$$k_\rho(k_z) := \text{Re} \left[\sqrt{\frac{[k_z - (2 \cdot \pi) \cdot K]^2}{\left[1 - \frac{K \cdot (2 \cdot \pi)}{k_1 \cdot \text{nihe}}\right]^2} - k_z^2} \right]$$

$$j := 0 .. 100$$

$$k_{z_j} := \left(k_1 + j \cdot \frac{k_2 - k_1}{100} \right)$$



Graafikul on kujutatud lainevälja spektri kandjajoon (sinine) ja spektri kandja paiknemine sellel. NB graafiku telje on erinevas skaalas ja k_z -telje alguspunkt on nihutatud vasakule.

SLLW ristsuunaline energiajaotus

Defineerime konstandid:

$$c := 3 \cdot 10^{11}$$

valguse kiirus

$$v := c \cdot \beta_{sl}$$

lainevälja rühmakiirus

$$\gamma := \frac{1}{\sqrt{\beta_{sl}^2 - 1}}$$

relativistlik parameeter

$$k_0 := k_1 \cdot \text{nihe}$$

kandjajoone algus ehk kandjajoone ka k_z -telje lõikepunkt

$$k_{z0} := k_0 \cdot \sqrt{\frac{v-c}{v+c}}$$

lainevälja avaldises kasutatav parameeter

$$k_k := \frac{k_2 + k_1}{2} \quad \lambda_k := \frac{2\pi}{k_k}$$

keskmise lainearv ja lainepikkus

$$\Delta k := \frac{k_2 - k_1}{2}$$

lainearvude vahemik

$$\Lambda := \frac{\lambda_k}{\cos(\text{asin}(\sin(\theta_i) + 1 \cdot \lambda_k \cdot K))}$$

intensiivsus-mustri lainepikkus

$$\Lambda = 5.739 \times 10^{-3} \text{ mm}$$

Aja- ja ruumimuutujad:

punktide arv z- ja ρ -teljel:

$$x := 100$$

$$y := 250$$

$$i := 0..x$$

$$j := 0..y$$

telgede skaala ja "zoom":

$$\mu_1 := 5$$

$$\mu_2 := 5$$

$$\kappa := 4$$

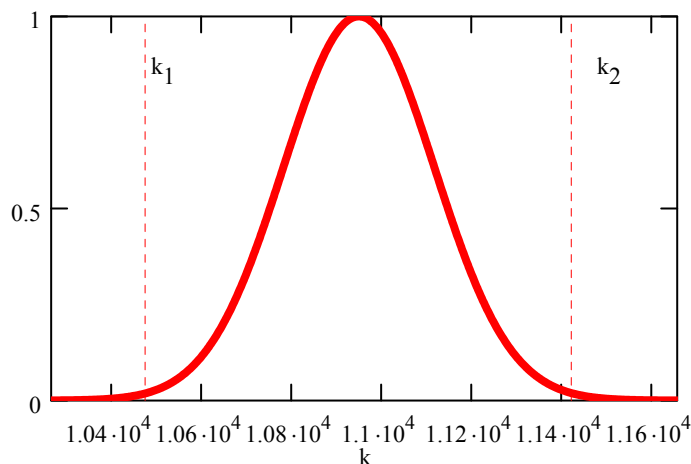
$$z\text{-telje skaala } x \cdot \mu_1 \cdot 10^{-\kappa+3} = 50 \text{ } \mu\text{m}$$

$$\rho\text{-telje skaala } y \cdot \mu_2 \cdot 10^{-\kappa+3} = 125 \text{ } \mu\text{m}$$

ruumikoordinaadid

$$z_i := \left(i - \frac{x}{2}\right) \mu_1 \cdot 10^{-\kappa} \quad \rho_j := \left(j - \frac{y}{2}\right) \mu_2 \cdot 10^{-\kappa} \quad t := 0$$

Lainevälja spekter



2D SLLW lainefunktsioon ehk peegelsümmeetriat omav superluminaalselt leviv lokaliseeritud laine

$$g(z, t, \rho) := \int_{\frac{47}{50} \cdot k_1}^{\frac{50}{48} \cdot k_2} \cos \left[\rho \cdot \sqrt{k^2 - \left(\frac{1}{\beta_{sl}} \cdot k + \frac{k_{z0}}{\beta_{sl} \cdot \gamma} \right)^2} \right] \cdot \exp \left[- \left(2 \frac{k - k_k}{\Delta k} \right)^2 \right] \cdot \exp \left[i \cdot k \cdot \left[z \cdot \left(\frac{1}{\beta_{sl}} + \frac{k_{z0}}{\gamma \cdot \beta_{sl} \cdot k} \right) - c \cdot t \right] \right]$$

3D SLLW lainefunktsioon ehk silindersümmeetriline superluminaalselt leviv lokaliseeritud laine

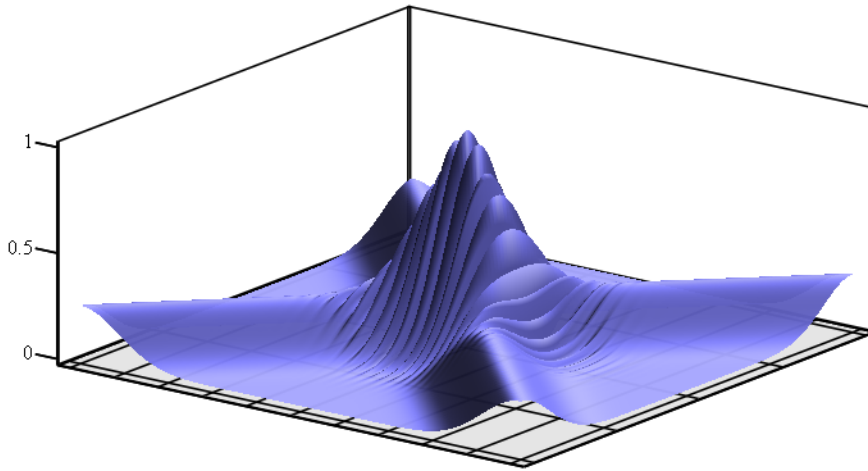
$$f(z, t, \rho) := \int_{\frac{47}{50} \cdot k_1}^{\frac{50}{48} \cdot k_2} J_0 \left[\rho \cdot \sqrt{k^2 - \left(\frac{1}{\beta_{sl}} \cdot k + \frac{k_{z0}}{\beta_{sl} \cdot \gamma} \right)^2} \right] \cdot \exp \left[- \left(2 \frac{k - k_k}{\Delta k} \right)^2 \right] \cdot \exp \left[i \cdot k \cdot \left[z \cdot \left(\frac{1}{\beta_{sl}} + \frac{k_{z0}}{\gamma \cdot \beta_{sl} \cdot k} \right) - c \cdot t \right] \right]$$

Maatriksi, mille abil joonistame lainevälja ristsuunalise energiajaotuse.

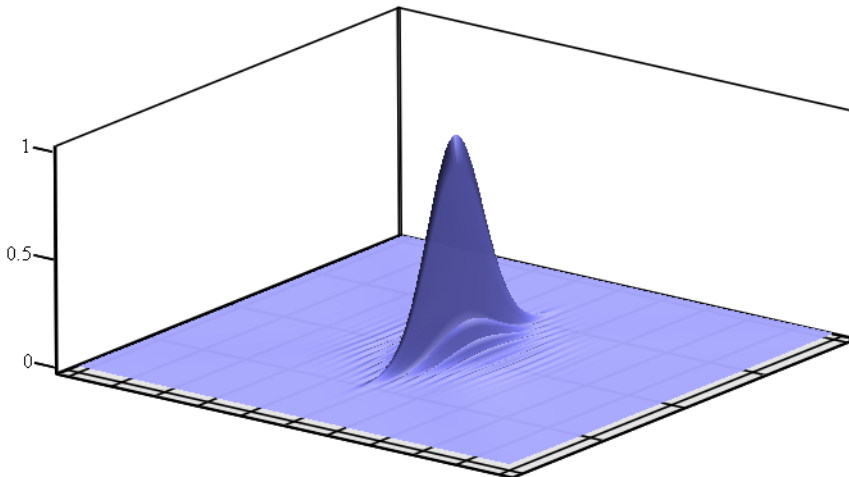
$$T_{i,j} := \left(\left| \frac{g(z_i, 0, \rho_j)}{g(0, 0, 0)} \right| \right)^2 \quad V_{i,j} := \left(\left| \frac{f(z_i, 0, \rho_j)}{f(0, 0, 0)} \right| \right)^2$$

2D SLLW lainefunktsiooni moodul.

z-telg on suunatud piki lainevälja modulatsiooni ja ρ -telg risti moduleerivate võngetega.



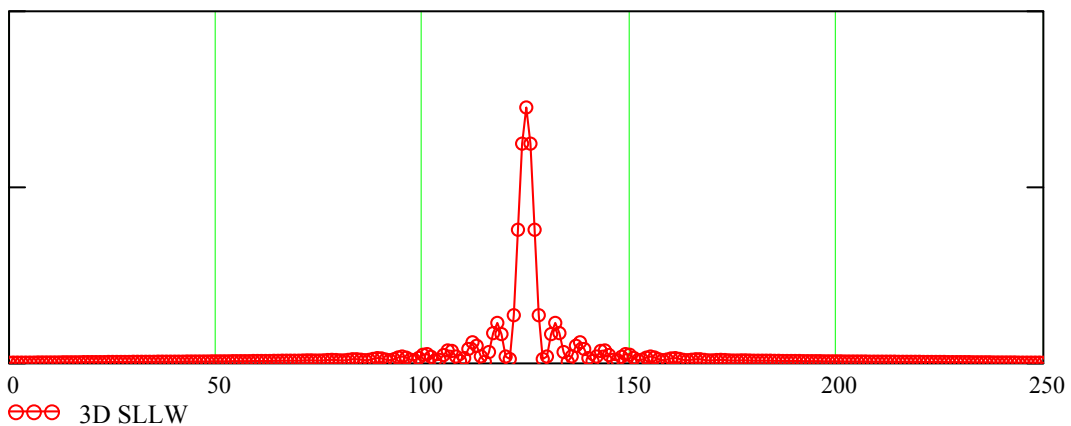
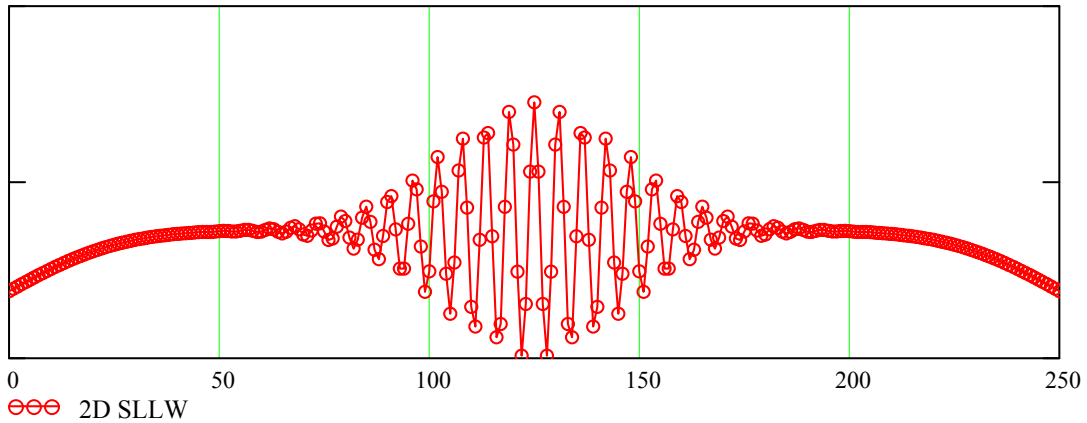
Silindersümmeetrilise SLLW mooduli ruut



Ajas keskmistava loendajaga registreeritav signaal:

Summeerime väljapunktid mööda z-telge:

$$G_j := \sum_{i=0}^x T_{i,j} \quad H_j := \sum_{i=0}^x V_{i,j}$$



Graafikute y-telje skaleering on erinev, kuna oleme mõlemad laineväljad eelnevalt normeerinud. Kuna silindersümmeetrilisel juhul on energia koondunud väga tugevalt lainevälja keskele, on sellel graafikul konstantne nivoo väga madalal.

Külgsuunas keskmistava kaameraga registreeritav tulemus

Arvutame tulemuse, millise saaksime mõõtmisel kaameraga, mille pikseli suurus ei võimalda lainevälja intensiivsusemusterit lahutada.

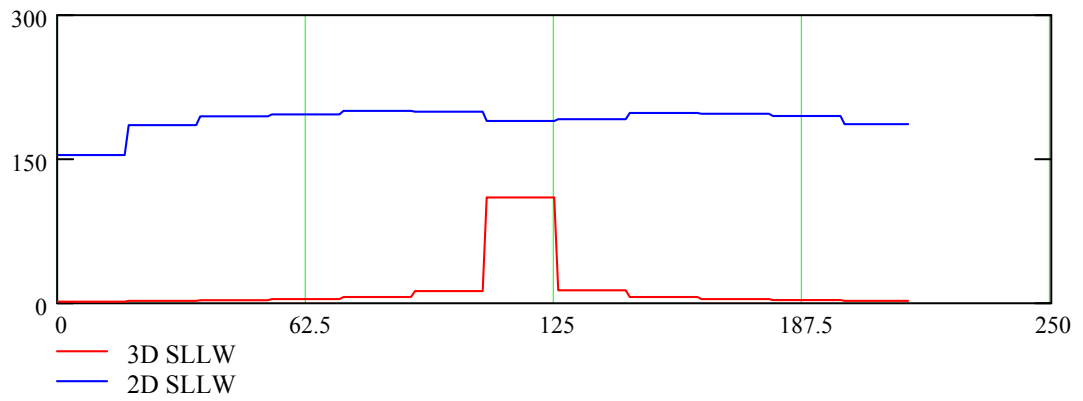
piksel algab n-dast punktist $n := 8$
 graafikul punkte $\text{punkte} := y$
 pikseli suurus $\text{piksel} := 18$ punkti ehk $\text{piksel} \cdot \mu_2 \cdot 10^{-\kappa+3} = 9 \text{ } \mu\text{m}$

Programmilõik, mis summeerib ühe pikseli ulatuses maatrikis väärtused.

$$\Gamma(n, \text{piksel}, \text{punkte}, H) := \left| \begin{array}{l} nn \leftarrow \text{trunc}\left(\frac{\text{punkte} - n}{\text{piksel}}\right) \\ \text{for } i \in 0..(nn - 1) \\ \quad \left| \begin{array}{l} i \cdot \text{piksel} + n + \text{piksel} - 1 \\ a_i \leftarrow \sum_{l = (i \cdot \text{piksel} + n)} H_l \\ \text{for } k \in 0.. \text{piksel} - 1 \\ \quad \Gamma(\text{piksel}) \cdot i + k \leftarrow a_i \end{array} \right. \\ \text{return } \Gamma \end{array} \right.$$

$i := 0 \dots (\text{punkte} - 2 \cdot \text{piksel})$

ruumiliselt keskmistava registreerimisseadmega saadav tulemus:



Modifications of the focused X wave as suitable models of strongly localized waves for realization in the optical domain

Heli Valtna¹, Kaido Reivelt² and Peeter Saari^{1,2,3}

¹ Department of Physics, University of Tartu, Tähe 4, 51010 Tartu, Estonia

² Institute of Physics, University of Tartu, Riia 142, 51014 Tartu, Estonia

E-mail: psaari@fi.tartu.ee

Received 13 June 2005, accepted for publication 22 November 2005

Published 6 January 2006

Online at stacks.iop.org/JOptA/8/118

Abstract

Simple practical model approximations to the so-called focused X wave—a pulsed wave propagating superluminally in vacuum or in a linear medium, which attracts attention due to its spread-free strong spatial localization—are derived. The experimental feasibility of the model waves in the optical domain is discussed and their radial decay is analysed.

Keywords: ultrashort electromagnetic pulses, localized waves, X wave, focus wave mode, Bessel beam

1. Introduction

As is well known today, the scalar free-space wave equation has a class of solutions that seemingly defy the laws of diffraction and can preserve very sharp spatial and temporal localization in the course of propagation over distances that many times exceed the Rayleigh range. During the past two decades the physical nature, mathematical apparatus and experimental generation of such localized wave (LW) solutions have been investigated in numerous papers (see [1, 2] for a general overview of the topic). In particular, it has been shown that the general sub-class of LW solutions of the scalar free-space wave equation can be deduced by applying certain physical conditions to the corresponding general solution. In one approach the general expression for the LWs is derived by means of applying the condition of wavelength-independent group velocity along the optical axis over the entire spectrum of wavefield [3–5]. The bidirectional plane wave decomposition, introduced by Besieris *et al* [6], is based on a representation of the solutions of the scalar wave equations into the products of forward and backward travelling plane wave solutions. In another approach the general classification scheme of the LW solutions into luminal, super- and subluminal ones can be derived in terms of the special theory of relativity [1, 7]. Also, during the past few years the experimental generation

of LWs has been put in solid terms, so that the experimental realizability of every LW can be estimated by means of physically transparent conditions [2, 8, 9].

Though the general integral representations can be used to express the wavefunctions, it is advantageous to have explicit closed-form expressions in hand—not only for analytical studies of the spatio-temporal amplitude and phase distributions, but also since such expressions drastically reduce computing time for simulations of temporal evolution and propagation of the LWs, especially if long-range behaviour of the wavefields is under consideration. Moreover, in many practical cases when a detailed simulation of finite-energy approximations of the LWs is required, numerical calculations engender a very serious problem with the power of modern personal computers. However, no such closed-form expression is useful *per se*; it should also model some kind of practical situation, for example, the propagation of an experimentally feasible LW.

This paper deals with practical models of the so-called focused X waves (FXW) [1, 10, 11]—superluminally propagating LWs that due to their strong spatial localization not only are promising for various applications but also appear to be rather intriguing for mathematical and quantum optics [12].

We start by deriving a closed-form expression for the ideal FXW, which like an ideal plane wave has an infinite energy. We next derive and study two finite-energy modifications of the FXW and then discuss their properties.

³ Author to whom any correspondence should be addressed.

2. The model

2.1. Propagation-invariant focused X wave

The comprehension of the physical nature of the FXW is enhanced if its wavefunction is derived from a spectral picture. It is convenient to start with a general expression of an axisymmetric wavefield as a superposition of the zeroth order Bessel beams propagating along the z axis (see, e.g., [7]):

$$\Psi(\rho, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \int_{|k_z|}^{\infty} dk \Phi(k_z, k) \times J_0\left(\rho\sqrt{k^2 - k_z^2}\right) \exp(ik_z z - ikct), \quad (1)$$

where ρ is the radial coordinate, $k = \omega/c$, the spectral distribution has been denoted by $\Phi(k_z, k)$ and k_z is the longitudinal wavenumber. One obtains the FXW by taking a specific singular spectrum [1, 7],

$$\Phi_{\text{FXW}}(k_z, k) = \text{constant} \times \delta[\gamma(k_z - \beta k) - k_{z0}] e^{-\gamma(k - \beta k_z)\Delta}, \quad (2)$$

which depends, apart from the strength constant, on three parameters: $\Delta > 0$ determines the spectrum (Δ^{-1} is the 1/e-width of the spectrum) and, consequently, spatial extension of the peak of the wavefield, k_{z0} expresses a certain cut-off value for longitudinal wavenumbers of the plane waves that constitute the FXW and $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ and $\beta = v/c$, $\beta < 1$ are the well known relativistic factors formed from a velocity-type parameter v . Integration over k and k_z in equation (1) with the help of Laplace transform tables (e.g. [13]) yields the following closed-form wavefunction of the FXW:

$$\Psi_{\text{FXW}}(\rho, z, t) = \text{const} \times \exp[i\gamma k_{z0}(z - \beta ct)] \times \frac{\exp(-|k_{z0}|\sqrt{\rho^2 + [\Delta - i\gamma(\beta z - ct)]^2})}{\sqrt{\rho^2 + [\Delta - i\gamma(\beta z - ct)]^2}}. \quad (3)$$

As the FXW moves with a superluminal velocity v_{sl} (which is also a constant group velocity in the wavepacket [2, 3, 7]), it is convenient to substitute the parameter v with this velocity $v_{\text{sl}} = c^2/v$ and, correspondingly, to use the superluminal counterpart of the relativistic factor $\gamma_{\text{sl}} = (\beta^{-2} - 1)^{-1/2}$ [1, 7]. In these designations it becomes obvious that the intensity profile of the wave moves along the z axis without any change, since the variables z and t enter the amplitude factor only through the combination $z - v_{\text{sl}}t$:

$$\Psi_{\text{FXW}}(\rho, z, t) = \frac{\exp(-|k_{z0}|\sqrt{\rho^2 + [\Delta - i\gamma_{\text{sl}}(z - v_{\text{sl}}t)]^2})}{\sqrt{\rho^2 + [\Delta - i\gamma_{\text{sl}}(z - v_{\text{sl}}t)]^2}} \times \exp\left[ik_{z0}\gamma_{\text{sl}}\left(\frac{v_{\text{sl}}}{c}z - ct\right)\right], \quad (4)$$

where the factor determining the amplitude has been written at the beginning and henceforth the arbitrary amplitude multiplier constant is omitted in the expressions.

A qualitative analysis of the FXW can be performed by studying its wavefunction and spectral distribution. The latter can be written as a product of two components: $\Phi_{\text{FXW}}(k_z, k) = \phi(k_z, k)\varphi(k_z, k)$. The first one $\phi(k_z, k) = \delta(\gamma(k_z - \beta k) - k_{z0})$ contains a singular function in the case of an ideal localized wave and a highly localized function in the case of a modified (finite-energy) wavefield. Here the singularity is brought in as a δ -function; it defines the vanishing

width of the support line and its argument defines the slope of the support line on the (k, k_z) -plane. By the slope one can tell the group velocity of the wavefield and the spatial distribution of the plane waves composing the wavefield. So, in our case, the slope $\beta^{-1} > 1$, thus the modulus of the wavefield moves at a superluminal speed and the projection of the support line into the (k_z, k_ρ) -plane is a hyperbola. The second component $\varphi(k_z, k)$ is the one that specifies the frequency spectrum of the wavefield, which for the FXW and its modifications is exponentially decaying, $\varphi(k_z, k) = e^{-\gamma(k - \beta k_z)\Delta}$.

2.2. Finite-energy modifications

The FXW itself is not physically feasible due to its infinite energy resulting from the singularity of the spectrum. Thus, in order to obtain a realistic model, the spectrum has to be modified so that (i) it is non-singular, yet (ii) it yields a closed-form expression for the wavefunction and (iii) the latter still approximates the spatio-temporal behaviour of the FXW sufficiently well. Of course, the propagation invariance will be inevitably lost and replaced by a finite depth of spread-free flight of the pulse, but its lateral strong localization need not be sacrificed [2].

Such a modified FXW was first derived by Besieris *et al* [1]—we call it ‘modification 1’ (M1). They have chosen an expression for the spectral distribution which in our notation reads

$$\Phi_{\text{M1}}(k_z, k) = (K - k_{z0})^{q-1} \exp[-a_2(K - k_{z0})] \times \Theta(K - k_{z0}) \exp[-\gamma(k - \beta k_z)\Delta] / \Gamma(q), \quad (5)$$

where Θ is the Heaviside unit step, Γ denotes the Gamma function and the Lorentz-transformed axial wavenumber $K = \gamma(k_z - \beta k)$ has been used for brevity and comparison with equation (4.5) of Besieris *et al* [4]. The new parameters a_2 and q ($a_2, q > 0$) adjust the finite width of the distribution across the support boundary line given by equation $K - k_{z0} = 0$. While this line is straight in the plane (k, k_z) , in the plane (k_ρ, k_z) of the lateral and axial components of the wave vector it transforms to a hyperbola [2, 7].

The insertion of (5) into (1) and corresponding integration indeed yields a closed-form expression, which in our notation reads

$$\Psi_{\text{M1}}(\rho, z, t) = \Psi_{\text{FXW}}(\rho, z, t) [F(\rho, z, t)]^{-q}. \quad (6)$$

This modified wavefunction differs from that of the original FXW by a negative power of the factor

$$F(\rho, z, t) = \sqrt{\rho^2 + [\Delta - i\gamma_{\text{sl}}(z - v_{\text{sl}}t)]^2} + a_2 - i\gamma_{\text{sl}}\left(\frac{v_{\text{sl}}}{c}z - ct\right), \quad (7)$$

which we call ‘the modifier’.

The modifier propagates with velocity c on the z -axis. Thus, to maintain the shape of the central peak of the wavefield during propagation, the group velocity v_{sl} has to be chosen almost equal to c and/or the effects caused by the modifier—e.g., decay of the pulse peak at $z = v_{\text{sl}}t$ at large times and distances—have to be suppressed by appropriate choice of the

⁴ There is obviously a typo in equation (4.5) of [1]: a factor κ is absent, which is equal to our K and—having in mind their slightly different general definition of the spectral distribution—should be present there.

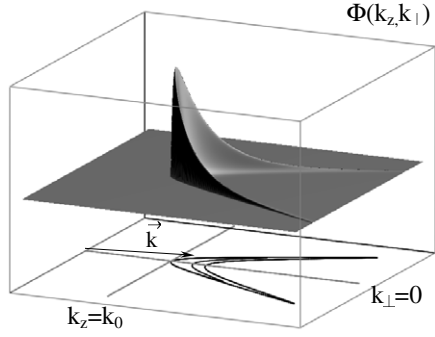


Figure 1. The spectrum Φ of the second modification of the FXW according to equation (8). In this figure the dependence on the wavevector component k_z and a lateral one $k_\perp = \pm k_\rho$ is depicted. Numerical values of the parameters have been chosen suitably for an optical realization: the pulse velocity $v = 1.001c$; the minimal wavenumber $k_0 = 2\pi(0.8 \mu\text{m})^{-1}$, i.e., the reddest plane-wave constituent of the pulse has wavelength $0.8 \mu\text{m}$; the width parameters $\Delta = 5 \mu\text{m}$, $a_2 = 100 \mu\text{m}$ and $q = 2$. The lateral scale is stretched in comparison to the axial scale: the plotting range for k_z is $25 \mu\text{m}^{-1}$ while for k_\perp it is only $2.5 \mu\text{m}^{-1}$. The curves of the contour plot at the bottom correspond to level $1/10$ and to level $1/100$ (the rightmost curve) of the maximum value of Φ . Shown also at the bottom is the wavevector of a plane-wave constituent of the pulse.

values of the parameters q and a_2 . Note, however, that the lateral localization is even improved for the modified FXW as the multiplier $[F(\rho, z, t)]^{-q}$ makes the radial decay stronger by a factor of ρ^{-q} .

Consulting the Laplace transform table [13] we found a possibility to derive another modified FXW which has a closed-form wavefunction. This ‘modification 2’ (M2) is generated by the following spectral function:

$$\Phi_{M2}(k_z, k) = \frac{1}{\gamma(k_z - \beta k)} \Phi_{M1}(k_z, k). \quad (8)$$

This spectrum is depicted in figure 1, which for the parameters chosen also represents well the spectrum $\Phi_{M1}(k_z, k)$.

Substituting (8) into (1) and integrating with the help of equation (4.3.8) [13] yields the following wavefunction:

$$\Psi_{M2}(\rho, z, t) = \frac{(k_{z0})^{q-1} \exp(k_{z0}a_2) \Gamma[1-q, k_{z0}F(\rho, z, t)]}{\sqrt{\rho^2 + [\Delta - i\gamma_{sl}(z - v_{sl}t)]^2}}, \quad (9)$$

where $F(\rho, z, t)$ is defined by equation (7) and $\Gamma(\dots, \dots)$ denotes the incomplete Gamma function. The wavefunction $\Psi_{M2}(\rho, z, t)$ is plotted in figure 2 at the instant $t = 0$. In a good approximation the plots also depict the wavefunctions $\Psi_{M1}(\rho, z, t)$ and $\Psi_{FXW}(\rho, z, t)$ considered earlier, since we have chosen a set of parameter values which is suitable for optical-domain realizations of the waves as discussed in the following section.

Along the axis z the central peak of M1 decays as

$$\Psi_{M1}(0, z, t = z/v_{sl}) = \left| \frac{a_2 + \Delta}{a_2 + \Delta + it\sqrt{v_{sl}^2 - c^2}} \right|^q, \quad (10)$$

while the decay of the modulus of M2 in the range of parameters we are interested in can also be approximated rather

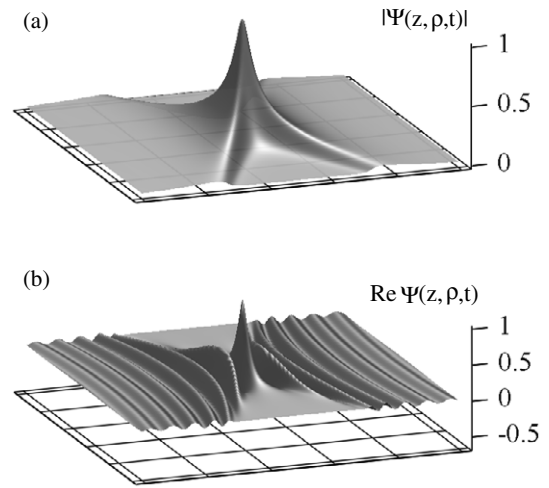


Figure 2. The modulus (a) and the real part (b) of the second modification of the FXW according to equation (9). Dependence on z (increasing from the left to right) and a lateral coordinate $x = \pm \rho$ while $ct = 0$ is depicted. Plots are normalized and numerical values of the parameters have been chosen suitably for an optical realization; see the previous figure caption. The axial scale is stretched in comparison to the lateral scale: the plotting range for the lateral coordinate ρ is $100 \mu\text{m}$ while for the axial coordinate z it is only $10 \mu\text{m}$. The grey shading in both plots is a result of ‘lighting’ used to better reveal the relief of the surface.

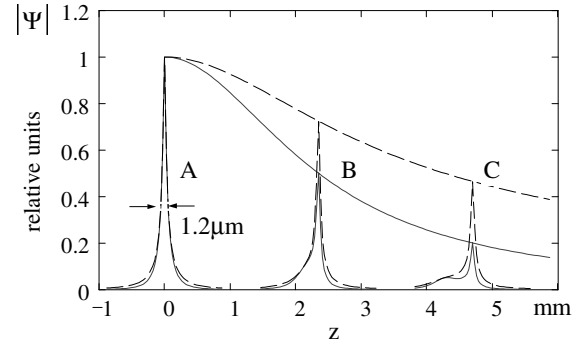


Figure 3. The evolution of the modulus of the central peak of the first modification (solid line) and second modification (dashed line) of the FXW over distance on the z -axis. A, B and C are axial profiles of the modulus of the waves at the instances $t = 0$, $t = \Delta z/v_{sl}$ and $t = 2\Delta z/v_{sl}$, respectively, where Δz is defined by (11), $q = 1$. Decaying curves show the behaviour of the modulus of the central peaks during propagation as a function of z , $t = z/v_{sl}$. Plots are normalized and numerical values of the parameters have been chosen suitably for an optical realization (see figure 1). In order to make axial profiles more distinguishable, they have been stretched 100-fold with respect to the scale on the z -axis.

well by equation (10) taken with $q = 1$. Both curves are plotted in figure 3. One can see from the curves that the waves propagate without any significant decay over distances exceeding their longitudinal dimensions by at least three orders of magnitude. Also, we see that only after a substantial propagation distance does the longitudinal profile change—curve C reveals the breakaway of the peaks attributable to the two factors in equation (6).

By our estimation, the spatial profile of the M1 modulus moves without remarkable change or spread until

$$\Delta z = v_{sl} \frac{a_2 + \Delta}{\sqrt{v_{sl}^2 + c^2}} \sqrt{q\sqrt{2} - 1}. \quad (11)$$

The estimation has been derived from equation (10): the central maximum on the z -axis decreases $\sqrt{2}$ -fold while travelling the distance Δz . For non-spreading distance of the wave M2, again, $q = 1$ in (11) gives an adequate estimation.

Due to the spread-out caused by the modifier, both M1 and M2 lose their symmetry with respect to the co-propagating axis $z = v_{sl}t$ (see figure 3). However, the radial decay and symmetry of the wavefunction are unaffected and remain unchanged until $t \ll \frac{v_{sl}}{c}(a_2 + \sqrt{\rho^2 + \Delta^2})$.

3. Discussion

Apart from the requirement of finiteness of the total energy which in the case of the modified FXWs is satisfied by definition, there are three additional conditions for a model of LW to be useful for implementations in optics [14]. First, although its spectrum has to be a wideband one, it cannot extend down to zero frequency. Second, the LW has to contain neither backward-propagating nor radially propagating plane-wave constituents. Although the latter two conditions are not mandatory ones and need not be fulfilled, say, in the case of cavity-confined fields, they correspond to possibilities of optical elements designed for handling light beams. Note that in the case of the focus wave mode (FWM)—a luminal LW which is most thoroughly investigated in theory of LWs—these conditions are not met⁵. The reason is that for the FWM with its wide spectrum of specific exponential shape the support of the spectrum is a parabola which—as a conic section—surrounds the origin in the plane (k_{\perp}, k_z) [7], while the support of the FXW as a hyperbola has two options of its placement depending on the sign of k_{z0} and in the case of positive k_{z0} does not surround the origin (see figure 1). Choosing the positive value of k_{z0} sufficiently large so that the actual lowest wavenumber

$$k_0 = k_{z0} \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}$$

falls into the red spectral region and adjusting values of the other parameters so that the spectrum essentially remains in the optical region, one can make both modifications M1 and M2 of the FXW realizable, in principle, from femtosecond-duration light pulses by making use of linear-optical devices (in particular, by conical mirrors and diffraction gratings). However, with the exception of certain approximations to the X waves (given by equation (3) or (4) if $k_{z0} = 0$), generation of LWs remains a complicated task, although a general approach [2] to optical synthesis of them is known.

The third, primarily technical, condition in optics is paraxiality, which means that the spectrum must contain only such plane-wave components that travel at reasonably small

⁵ This does not mean that luminal LWs are impossible in optics—a suitably band-limited spectrum gives so-called FWM in a wide sense, which is shown to be feasible in optics [8].

angles relative to the optical axis. The maximum of the angle for the FXW and its modifications is less than $\pi/2$ in the case of a positive value of k_{z0} but depends on the group velocity—the closer v_{sl} is to c , the smaller the angle θ : $\theta(k) = \arccos((ck + k_{z0}(v_{sl} - c))/kv_{sl})$. Asymptotically, $\theta(\infty) = \arccos(\beta)$, which is the maximum of the angle and is equal to half of the angle between the asymptotes of the hyperbola of the support boundary in figure 1 (called the Axicon angle in the literature on diffraction-free and localized waves).

As a matter of fact, an optical superluminal localized wave possessing a comparatively narrow-band spectrum which is much different from the one depicted in figure 1, but still has a hyperbolic support, had been experimentally generated from femtosecond laser pulses in the previous decade [15]. Thus, if we use the term FXW in a wide sense, i.e., regarding any superluminal LW whose spectrum—irrespective of its particular shape—possesses a hyperbolic support and the Axicon angle has a corresponding dispersion, then we could say that a certain approximation to the FXW has already been realized in practice.

Finally, having in mind the strong lateral localization of the FXW, let us consider the radial asymptotic behaviour of its two finite-energy modifications. Comparing the three model wavefunctions at $t = 0, z = 0$, and large values $\rho \rightarrow \infty$

$$|\Psi_{\text{FXW}}(\rho, 0, 0)| \sim \exp(-\rho k_{z0})/\rho$$

$$|\Psi_{\text{M1}}(\rho, 0, 0)| \sim \exp(-\rho k_{z0})/\rho^{q+1}$$

$$|\Psi_{\text{M2}}(\rho, 0, 0)| \sim \Gamma(1 - q, \rho k_{z0})/\rho$$

we see that—as far as a numerical approximation with chosen set of parameters and q at $q = 1, 2, 3$ reveals,

$$\Psi_{\text{M2}}(\rho \rightarrow \infty, 0, 0) \approx \exp(-\rho k_{z0})/\rho^2$$

—both modifications have even stronger lateral decay than that of the FXW. Apparently this difference in the lateral behaviour can be explained as a result of the additional radial decay which is introduced through the factor $F(\rho, z, t)$ given by (7).

4. Conclusion

We have found a new finite-energy modification with a closed-form wavefunction for the focused X wave—a specific superluminally propagating localized wave. This wave can be generated as a pulsed beam in the visible region and—due to its strong lateral localization preserved over an extended depth of propagation—is rather promising in various fields of optics.

Acknowledgment

The research was supported by the Estonian Science Foundation.

References

- [1] Besieris I, Abdel-Rahman M, Shaarawi A and Chatzipetros A 1998 *Prog. Electromagn. Res.* **19** 1

- [2] Reivelt K and Saari P 2003 *Preprint physics/0309079* (<http://arxiv.org/abs/physics/0309079>)
- [3] Donnelly R and Ziolkowski R 1993 *Proc. R. Soc. A* **440** 541
- [4] Reivelt K and Saari P 2000 *J. Opt. Soc. Am. A* **17** 1785
- [5] Salo J and Salomaa M M 2001 *Pure Appl. Opt.* **3** 366
- [6] Besieris I M, Shaarawi A M and Ziolkowski R W 1989 *J. Math. Phys.* **30** 1254
- [7] Saari P and Reivelt K 2004 *Phys. Rev. E* **69** 036612
- [8] Reivelt K and Saari P 2002 *Phys. Rev. E* **66** 056611
- [9] Shaarawi A M 1997 *J. Opt. Soc. Am. A* **14** 1804
- [10] Borisov V V and Kiselev A P 2000 *Appl. Math. Lett.* **13** 83
- [11] Zamboni-Rached M, Recami E and Hernández-Figueroa H E 2002 *Eur. Phys. J. D* **21** 217
- [12] Saari P, Menert M and Valtna H 2004 *Opt. Commun.* **246** 445
- [13] Bateman G and Erdelyi A 1954 *Tables of Integral Transforms* vol 1 (New York: McGraw-Hill)
- [14] Reivelt K and Saari P 2004 *Opt. Lett.* **29** 1176
- [15] Sõnajalg H, Rätsep M and Saari P 1997 *Opt. Lett.* **22** 310



Photon localization barrier can be overcome

P. Saari^{a,b,*}, M. Menert^a, H. Valtna^a

^a Department of Physics, University of Tartu, Estonia

^b Institute of Physics, University of Tartu, Riia 142, Tartu 51014, Estonia

Received 29 August 2004; received in revised form 2 November 2004; accepted 4 November 2004

Abstract

In contradistinction to a widespread belief that the spatial localization of photons is restricted by a power-law falloff of the photon energy density, Bialynicki-Birula [Phys. Rev. Lett. 80 (1998) 5247] has proved that any stronger – up to an almost exponential – falloff is allowed. We are showing that for certain specifically designed cylindrical one-photon states the localization is even better in lateral directions. If the photon state is built from the so-called focus wave mode, the falloff in the waist cross-section plane turns out to be quadratically exponential (Gaussian) and such strong localization persists in the course of propagation.

© 2004 Elsevier B.V. All rights reserved.

PACS: 03.70.+k; 03.50.De; 03.65.Pm; 11.30.Cp

Keywords: Quantum optics; Polychromatic photons; Non-locality; Focus wave mode; Focused X wave; Paley–Wiener theorem

Whilst quantum electrodynamics (QED) underwent an impressive development and reached its maturity in the middle of the last century, one of its basic concepts – the photon wave function in free space – was deprived of such fortune. Although the photon wave function in coordinate representation was introduced already in 1930 by Landau and Peierls [1] the concept was found to suffer from inherent difficulties that were not overcome during the century (see review [2]). The common explanation

presented in textbooks (e.g., [3,4]) may be summed up as follows: (i) no position operator exists for the photon, (ii) while the position wave function may be localized near a space-time point, the measurable quantities like the electromagnetic field vectors, energy, and the photodetection probability remain spread out due to their non-local relation with the position wave function. However, just before the turn of the century both of these widely espoused notions were disproved [5,6] and in the new century a fresh interest in the photon localization problem seems to have been awakened (see, e.g., [7–9]), meeting the needs of developments in near-field optics, cavity QED, and quantum computing.

* Corresponding author. Tel.: +3725109018; fax: +3727383033.

E-mail address: Peeter.Saari@ut.ee (P. Saari).

Bialynicki-Birula [6] writes that the statement “even when the position wave function is strongly concentrated near the origin, the energy wave function is spread out over space asymptotically like $r^{-7/2}$ ” (citation from [4], p. 638) is incorrect and that both wave functions may be strongly concentrated near the origin. He demonstrates, on one hand, that photons can be essentially better localized in space – with an exponential falloff of the photon energy density and the photodetection rates. On the other hand, he establishes – and it is even somewhat startling that nobody has done it earlier – that certain localization restrictions arise out of a mathematical property of the positive frequency solutions which therefore are of a universal character and apply not only to photon states but hold for all particles. More specifically, it has been proven in the Letter [6] for the case of spherically imploding-exploding one-photon wavepacket that the Paley–Wiener theorem allows even at instants of maximal localization only such asymptotic decrease of the modulus of the wave function with the radial distance r that is *slower* than the linear exponential one, i.e., anything slower than $\sim \exp(-Ar)$, where A is a constant. The latter is what the Paley–Wiener theorem says about a function whose Fourier spectrum contains no negative frequencies.

The purpose of the present short communication is to indicate that one-photon wave functions of a specific type can break the localization restriction and exhibit the linear exponential and even faster falloff with the distance. Yet, there is no contradiction either with the result of [6] or with the Paley–Wiener theorem, since the wave functions are cylindrical and exhibit an exceptionally strong localization in two dimensions out of three. The paper is interdisciplinary and involves a “technology transfer” in the sense that in order to tackle the problem belonging to QED, we make use of certain very recent results obtained in the study of the so-called localized acoustical and (classical) electromagnetic waves.

As an introduction, we consider briefly the simplest case of a one-dimensional Landau–Peierls wave function in order to indicate how the Paley–Wiener theorem restricts the spatial localization of a photon. Then we study the radial falloff

for three different cylindrical wave functions, using exactly the same formalism that has been presented in [6]. Finally, the discussion of our results allows us to refine the analysis given in [6].

Let us consider a one-photon (1 ph) state that corresponds to a plane-wave pulse propagating unidirectionally, say, along the axis z , being polarized along a lateral axis (say, the x -axis)

$$|1 \text{ ph}\rangle = \int_0^\infty dk_z f(k_z) a^+(k_z) |\text{vac}\rangle, \quad (1)$$

where $a^+(k_z)$ is the creation operator of a photon and $f(k_z)$ is a properly normalized photon wave function in the momentum representation. Then the inverse Fourier transform (but including positive frequencies only!)

$$\Phi(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dk_z f(k_z) e^{i(k_z z - \omega t)} \quad (2)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dk f(k) e^{ik(z-ct)} \quad (3)$$

represents the corresponding position space wave function of the photon in state $|1 \text{ ph}\rangle$ (see, e.g., [4], p. 636). The modulus squared $|\Phi(z, t)|^2$ gives the photon probability density, i.e., the degree of localization along the axis z (in the given case in the directions x and y any localization is absent). If $f(k)$ differs from zero within a wide frequency band, the probability $|\Phi(z, t)|^2$ may be strongly localized around a point z_0 moving along the axis z with the speed of light c . However, since $\Phi(z, t)$, due to the absence of negative frequencies in the integral of Eq. (2), is nothing but a complex analytic signal, according to the Paley–Wiener theorem (or criterion) the asymptotic decrease of $|\Phi(z, t)|^2$ with the distance $r = |z - z_0|$ has to be weaker than $\sim \exp(-Ar)$, where A is a constant. All the more excluded are any finite-support functions in the role of $\Phi(z, t)$. To conclude the introduction, let us notice that if the counterpropagating (with $k_z < 0$) Fourier components are involved in Eq. (2), the Paley–Wiener theorem does not apply at the instant $t = 0$.

Following [6], we shall study the photon localization by examining the asymptotic behavior of the positive frequency part of the Riemann–Silberstein vector $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ (called the energy wave function) which directly determines the energy density of a

one-photon state and is conveniently expressed through a “superpotential” $\mathbf{Z}(\mathbf{r},\tau)$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r},t) = \nabla \times \left[i \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{Z}(\mathbf{r},\tau) + \nabla \times \mathbf{Z}(\mathbf{r},\tau) \right], \quad (4)$$

where $\tau \equiv ct$. The vector field $\mathbf{Z}(\mathbf{r},\tau)$ is nothing but an analytic signal version of the Hertz potential, i.e., $\mathbf{Z}(\mathbf{r},\tau) = \mathbf{m}\Psi(\mathbf{r},\tau)$, where \mathbf{m} is a constant vector that includes the proper normalization factor and $\Psi(\mathbf{r},\tau)$ is any solution of the scalar wave equation, which is taken in the form of the analytic signal. It should be stressed that $\mathbf{Z}(\mathbf{r},\tau)$ is a complexified Hertz potential and it comprises the positive frequencies only, i. e., the complexification corresponds to the very nature of the number states of quantized EM field and is not involved merely for the sake of convenience as in the classical electrodynamics [2].

As the first example leading to a stronger localization that one might expect from the Paley–Wiener theorem, let us consider the photon field where \mathbf{m} is directed along the axis z (any other orientation gives similar results) and $\Psi(\mathbf{r},\tau)$ is a superposition of cylindrically symmetric Bessel functions J_0 as a wavepacket with the exponential spectrum and a specific dispersion law for the axial wavenumber $k_z(\omega) = \text{constant} = k_0$

$$\Psi(\rho, z, \tau) = \int_{|k_0|}^{\infty} dk J_0(k\rho) e^{-k\Delta} e^{-i(k\tau - k_0z)}, \quad (5)$$

where the radial coordinate ρ has been introduced and $k_\rho = (k^2 - k_0^2)^{1/2}$ is the lateral component of the wave vector of the monochromatic plane-wave constituents represented with the weight function $e^{-k\Delta}$ whose width is Δ^{-1} . The integral can be taken with the help of a Laplace transform table and we obtain

$$\mathbf{Z}(\rho, z, \tau) = \mathbf{m} \frac{\exp\left(-|k_0| \sqrt{\rho^2 + (\Delta + i\tau)^2}\right)}{\sqrt{\rho^2 + (\Delta + i\tau)^2}} e^{ik_0z}. \quad (6)$$

Eq. (6) describes a simple cylindrical pulse modulated harmonically in the axial direction and radially converging (when $\tau < 0$) to the axis and thereafter (when $\tau > 0$) expanding from it, the intensity distribution resembling an infinitely long

tube coaxial with the z -axis and with a time-dependent diameter (see Fig. 6. in [10]). It follows from Eqs. (6) and (4) that

$$|\mathbf{Z}(\rho \rightarrow \infty, z, \tau = 0)| \sim \rho^{-1} \exp(-\rho/l), \quad (7)$$

$$|\mathbf{F}(\rho \rightarrow \infty, z, \tau = 0)|^2 \sim [\rho^{-2} + O(\rho^{-3})] \times \exp(-2\rho/l), \quad (8)$$

where $l \equiv |k_0|^{-1}$ is the characteristic length (or length unit). Thus, while the photon is delocalized in the axial direction, its energy density falloff in the lateral directions is exactly the linear exponential one at all times the conditions $\tau \ll \rho \gg \Delta$ are fulfilled, see Fig. 1. The time derivative as well as the spatial derivatives contain the same exponential factor, ensuring the exponential falloff of the Riemann–Silberstein vector in Eq. (8). Hence, a one-photon field given by Eq. (6) serves as the first and simplest example where the localization in two transversal dimensions is governed by different rules than localization in three dimensions according to [6].

The next example is readily available via the Lorentz transformation of the wave function given by Eq. (5) along the axis z , which gives another possible solution of the scalar wave equation.

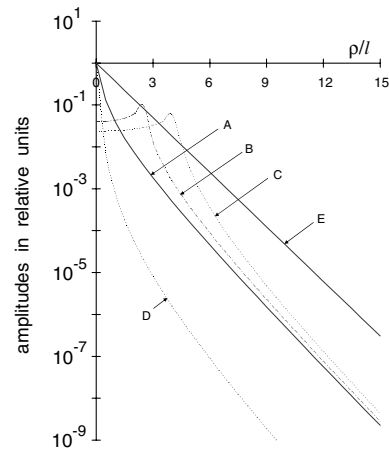


Fig. 1. Curves of the radial dependence in a decimal logarithmic scale. Curve A is for $|\mathbf{Z}(\rho,0,\tau = 0)|$; B, $|\mathbf{Z}(\rho,0,\tau = 2.5l)|$; C is the same as B but with Ψ taken from Eq. (9); D, $|\partial/\partial\tau\mathbf{Z}(\rho,0,\tau = 0)|$; E is a reference curve $\exp(-\rho/l)$. The curves A–C have been normalized so that $|\mathbf{Z}(0,0,0)| = 1$. The values of the remaining free parameters are $\Delta = 0.1l$ and $\beta = 0.8$.

The result is a new independent solution but it can also be considered as the wave given by Eqs. (5) and (6), which is observed in another inertial reference frame [10]

$$\Psi(\rho, z, \tau) = \frac{\exp\left(-|k_0|\sqrt{\rho^2 + (\Delta - i\gamma(\beta z - \tau))^2}\right)}{\sqrt{\rho^2 + (\Delta - i\gamma(\beta z - \tau))^2}} \times \exp(i\gamma k_0(z - \beta\tau)), \quad (9)$$

where the relativistic factors $\gamma \equiv (1 - \beta^2)^{-1/2}$ and $\beta \equiv v/c < 1$ have been introduced, v being a free parameter – the relative speed between the frames.

In the waist region (see Fig. 2) this wave function has the same radial falloff as was given by Eq. (7), see curve “C” in Fig. 1, while the axial localization follows a power law. The strongly localized waist and the whole amplitude distribution move rigidly and without any spread along the axis z with a superluminal speed c/β . Such wave with intriguing properties, named the focused X wave (FXW) [11], belongs to the so-called propagation-invariant localized solutions to the wave equation – a research field emerged in the

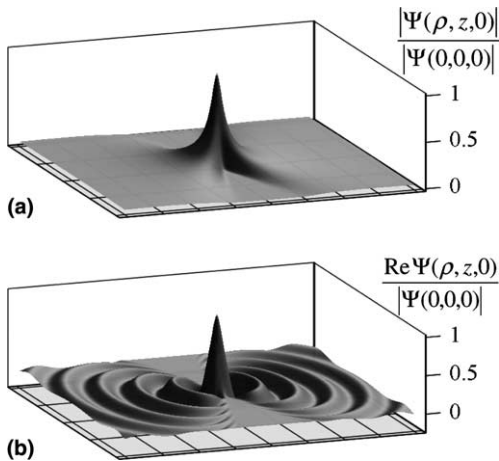


Fig. 2. The superluminal FXW given by Eq. (9). Shown are the dependences (a) of the modulus and (b) of the real part of the wavefunction on the longitudinal (z , increasing to the right) and a transverse (say, x) coordinates. The distance between the grid lines on the basal plane (x, z) is 22λ , where $\lambda = 2\pi|k_0|^{-1}$, k_0 being negative. The values of the remaining free parameters are $\Delta = 30\lambda$ and $\beta = 0.995$ or $\gamma = 10$.

1980s (see reviews [11–15]) and recently reached its first experimental results [16–21]. It should be noted here that there is nothing unphysical in the superluminality of the localized waves – which is, moreover, an experimentally verified fact – since a superluminal group velocity does not mean [13–16] as if energy or information could be transmitted faster than c (for a thorough discussion of this point see [22–24] and review [25]). Hence, in its waist (cross-sectional) plane a one-photon field given by the FXW possesses the same strong localization at any time as the previously considered cylindrical field does in any transversal plane at the instant $t = 0$.

By making use of the historically first representative of localized waves – the so-called focus wave mode (FWM) [26–28] (see also [10] and reviews [11,15] and references therein) one readily obtains an example of the field that exhibits even much stronger than exponential localization. FWM is given by the scalar function

$$\Psi(\rho, z, t) = \frac{\exp\left[-\frac{\rho^2}{2l(a-i(z-\tau))}\right]}{a-i(z-\tau)} \exp\left[-\frac{i(z+\tau)}{2l}\right], \quad (10)$$

where again l is a wavelength-type characteristic length and the constant a controls the axial localization length. Since the FXW in the limit $\beta \rightarrow 1$ becomes a FWM [10], Fig. 2 gives also an idea how a FWM looks like. Multiplying Eq. (10) by \mathbf{m} to build the vector $\mathbf{Z}(\rho, z, \tau)$ and inserting the latter into Eq. (4) we obtain that in this example the photon localization in the waist plane is quadratically exponential (Gaussian falloff):

$$|\mathbf{Z}(\rho \rightarrow \infty, z = \tau)| \sim \exp(-\rho^2/2la), \quad (11)$$

$$|\mathbf{F}(\rho \rightarrow \infty, z = \tau)|^2 \sim \rho^6 \exp(-\rho^2/la). \quad (12)$$

In Eq. (12) only the highest-power term with respect to ρ is shown.

To start discussing our results let us ask first whether the wave functions considered are something extraordinary. The answer is: yes, they are indeed, since the browsing of various integral transform tables reveals rather few examples where both the real and imaginary part of a wave function

and of its time derivative have simultaneously an exponential or stronger localization in conjunction with other requisite properties. Still, the list of proper wave functions with an extraordinary strong localization is not poor – in addition to an optically feasible version [29] of the FWM various new interesting solutions can be derived [30]. Yet, it could be argued that the well-known Gaussian beam pulse has the same quadratically exponential radial profile in the waist region. However, resorting to the family of the Gaussian beams (the Gauss–Laguerre and Gauss–Hermite beams, etc.) is irrelevant here. The reason is that all these beams are solutions of the wave equation only in the paraxial approximation not valid in the case of any significant localization of wide-band (pulsed) superpositions of the beams, whereas in fact, e.g., an exact solution corresponding to a lowest-order (axisymmetric) Gaussian beam has a weak power-law radial falloff in the waist region [31,32].

The next possible objection to the physical significance of the results obtained might arise from the infinite total energy [11] of the waves given by Eqs. (6), (9), and (10). However, at any spatial location the wave function is square integrable with respect to time, thus the condition of the Paley–Wiener theorem has been satisfied. Moreover, physically feasible finite-energy versions of localized waves generally exhibit even better localization properties, although not persistently. A finite-energy version of the FXW, called the modified focused X wave (MFXW [11]), has the same exponential factor as in Eq. (9), which is multiplied by a fraction that allows to force the axial localization to follow an arbitrarily strong power-law. The latter circumstance indicates that the strong lateral localization of the fields considered does not appear somehow at the expense of their axial localization. As a matter of fact, energy-normalization of a wave function depends on how many photons it describes. It is easy to see that our derivation and results hold for any number state with $N \geq 1$ and also for incoherent mixtures of such states (which is important for experimental studies). Here it is not of interest to consider coherent states since generally for states of electromagnetic field that have classical counterparts one can escape – already in the case of uniform spherical localization

– the constraints imposed by the Paley–Wiener theorem [6].

The final crucial question is, are our results not in contradiction with those of [6]? The answer is no, since in the case of the cylindrical waves the radial distance and temporal frequency are not directly Fourier-conjugated variables. In order to clarify this point, let us first take a closer look at the proof of the Paley–Wiener limit for three-dimensional isotropic localization. In [6] Eq. (24) for $\mathbf{Z}(\mathbf{r}, \tau)$ contains a superposition of spherically symmetric standing waves

$$\int_0^\infty dk h(lk) \frac{\sin kr}{r} e^{-ik\tau} \propto ir^{-1} \left[g\left(\frac{\tau+r}{l}\right) - g\left(\frac{\tau-r}{l}\right) \right], \quad (13)$$

where $h(lk)$ is the spectrum and $g(\cdot)$ is its Fourier image. The sine in Eq. (13) results from the imploding and exploding spherical wave constituents of the standing wave, like an odd one-dimensional standing wave arises from counter-propagating waves. While the asymptotic behavior of the function $g(\cdot)$ and hence of the function $\mathbf{Z}(\mathbf{r}, \tau)$ for large values of the radial distance r are generally restricted by the Paley–Wiener theorem, strictly at the instant $\tau = 0$ of maximal localization the integral is nothing but the sine transform for which the theorem does not apply. Indeed, the sine transform tables give examples of the resultant functions with arbitrarily abrupt falloff. However, it does not mean as if the localization restriction was lifted at the instant $\tau = 0$. The explanation is that according to Eq. (4) the energy wave function involves also the time derivative of $\mathbf{Z}(\mathbf{r}, \tau)$, but the sine transforms of two functions $h(lk)$ and $h(lk)k$ cannot simultaneously possess arbitrarily abrupt falloffs. In contrast, the time derivative of the wave function given by Eq. (6) or Eq. (5) has the same strong exponential falloff as the function itself, which persists for some (not too long) time, see Fig. 1. By comparing Eqs. (5) and (13) we notice that while in Eq. (13) – as well as in its one-dimensional equivalent – the argument of the sine function is the product of the distance with the Fourier variable, in Eq. (5) the argument of the Bessel function is the product of the radial distance ρ with the radial wave-

number k_ρ , the latter depending on the Fourier variable through the square-root expression with the constant parameter k_0 – the lower limit of the integration. As it follows also from Eqs. (7) and (8) the condition $k_0 \neq 0$ is crucial for obtaining the exponential falloff. Hence, in the case of the cylindrical waves considered by us, the apparent violation of the rules set by the Paley–Wiener theorem results from the specific complicated relation between the radial distance and the Fourier variable.

In conclusion, we have shown that for certain cylindrical N -photon states ($N = 1, 2, \dots$) the localization in lateral directions breaks the limit established in [6] for the case of uniform spherical wave functions. These results hold not only for photons but for number states of any particles.

Acknowledgements

Saari is thankful to Iwo Bialynicki-Birula for stimulating hints, discussions, and remarks. The research was supported by the Estonian Science Foundation.

References

- [1] L.D. Landau, R. Peierls, *Z. Phys.* 62 (1930) 188.
- [2] I. Bialynicki-Birula, Photon Wave Function, in: E. Wolf (Ed.), *Progress in Optics*, vol. 36, North-Holland, Amsterdam, 1996.
- [3] A.L. Akhiezer, V.B. Berestetskii, *Quantum Electrodynamics*, Interscience, New York, 1965.
- [4] L. Mandel, E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [5] M. Hawton, *Phys. Rev. A* 59 (1999) 3223.
- [6] I. Bialynicki-Birula, *Phys. Rev. Lett.* 80 (1998) 5247.
- [7] O. Keller, *Phys. Rev. A* 62 (2000) 022111.
- [8] O. Keller, *JOSA B* 18 (2001) 206.
- [9] K.W. Chan, C.K. Law, J.H. Eberly, *Phys. Rev. Lett.* 88 (2002) 402.
- [10] P. Saari, K. Reivelt, *Phys. Rev. E* 69 (2004) 036612.
- [11] I. Besieris, M. Abdel-Rahman, A. Shaarawi, A. Chatzipetros, *Prog. Electrom. Res.* 19 (1998) 1.
- [12] J. Salo, J. Fagerholm, A.T. Friberg, M.M. Salomaa, *Phys. Rev. E* 62 (2000) 4261.
- [13] P. Saari, in: *Time's Arrows, Quantum Measurement and Superluminal Behavior*, D. Mugnai et al. (Eds.), CNR, Rome, 2001, also in: arXiv, physics/0103054.
- [14] E. Recami, M. Zamboni-Rached, K.Z. Nóbrega, C.A. Dartora, H.E. Hernández, *IEEE J. Select. Top. Quantum Electron.* 9 (2003) 59.
- [15] K. Reivelt, P. Saari, in: arXiv, physics/0309079.
- [16] P. Saari, K. Reivelt, *Phys. Rev. Lett.* 79 (1997) 4135.
- [17] H. Sönajalg, M. Rätsep, P. Saari, *Opt. Lett.* 22 (1997) 310.
- [18] D. Mugnai, A. Ranfagni, R. Ruggeri, *Phys. Rev. Lett.* 84 (2000) 4830.
- [19] I. Alexeev, K.Y. Kim, H.M. Milchberg, *Phys. Rev. Lett.* 88 (2002) 073901.
- [20] K. Reivelt, P. Saari, *Phys. Rev. E* 66 (2002) 056611.
- [21] R. Grunwald, V. Kebbel, U. Griebner, U. Neumann, A. Kummrow, M. Rini, E.T.J. Nibbering, M. Piché, G. Rousseau, M. Fortin, *Phys. Rev. A* 67 (2003) 063820.
- [22] H. Ringermacher, L.R. Mead, *Phys. Rev. Lett.* 87 (2001) 059402.
- [23] A.M. Shaarawi, I.M. Besieris, *J. Phys. A: Math. Gen.* 33 (2000) 7255.
- [24] W.A. Rodrigues Jr., D.S. Thober, A.L. Xavier Jr., *Phys. Lett. A* 284 (2001) 217.
- [25] P.W. Milonni, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* 35 (2002) R31.
- [26] J.N. Brittingham, *J. Appl. Phys.* 54 (1983) 1179.
- [27] A. Sezginer, *J. Appl. Phys.* 57 (1984) 678.
- [28] R.W. Ziolkowski, *J. Math. Phys.* 26 (1985) 861.
- [29] K. Reivelt, P. Saari, *Opt. Lett.* 29 (2004) 1176.
- [30] A.P. Kiselev, *J. Phys. A: Math. Gen.* 36 (2003) L345.
- [31] C.J.R. Sheppard, S. Saghaei, *JOSA A* 16 (1999) 1381.
- [32] P. Saari, *Opt. Express* 8 (2001) 590.

NOVEL APPROACH FOR GENERATION OF SUPERLUMINAL LOCALIZED WAVEFIELDS

H. Valtna¹ and P.Saari^{1,2}

¹ Institute of Physics, University of Tartu
Riia 142, 51014, Tartu, Estonia

² Department of Physics, University of Tartu
Tähe 4, 51010, Tartu, Estonia
E-mail: heli.valtna@ut.ee

Localized waves (LW-s) are sharply peaked wideband wave packets propagating without spread over large distances in vacuum or linear medium. The wavefields are non-diffractive in this sense only in case the support of its spectrum in the \mathbf{k} -space is a line of intersection of a plane with the cone ($k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$). Depending on the type of the LW, this support line projects into a straight line, hyperbola, parabola or ellipse on the plane (k_x, k_z) [1].

Despite of the fact that LW-s could be useful in many practical implementations, very few experiments have been carried out so far. A localized wave having a straight line support of the spectrum on the plane (k_x, k_z) – the Bessel X pulse – was generated in optical domain of electromagnetic waves [2]. The wavefield can be generated by ultra wideband light source, shaping the support of the spectrum by circular slit, axicon or lensacon. Generation of a LW having parabolic support line – the focus wave mode – has been reported in [3]. The parabolic support of the spectrum was achieved in a limited range of the spectrum by shaping the support using a diffraction grating and axicon with carefully chosen glass type and tilt angle.

Our recent research results show surprisingly elegant approach for generating the hyperbolic support of the spectrum in an unlimited range of the spectrum by means of cylindrical diffraction gratings [4]. The resulting wavefield is a superluminal localized wave (SLLW). We have derived the wavefunction of the SLLW and are studying its properties. Analysis and simulations show that the generation of the SLLW-s is indeed feasible in optical domain. The experiments are in progress.

- [1] P. Saari and K. Reivelt, “Generation and classification of localized waves by Lorentz transformations in Fourier space” *Phys. Rev. E* **69**, 036612 (2004).
- [2] P. Saari and K. Reivelt, “Evidence of X-shaped propagation invariant localized light waves”, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 4135-4138 (1997).
- [3] K. Reivelt and P. Saari, “Experimental demonstration of realizability of optical focus wave modes”, *Phys. Rev. E* **66**, 056611 (2002).
- [4] K. Reivelt, P. Saari and H. Valtna, (to be published).

OPTICAL GENERATION OF SUPERLUMINAL LOCALIZED WAVE SOLUTIONS OF HOMOGENEOUS WAVE EQUATION

K. Reivelt, H. Valtna, and Peeter Saari

Institute of Physics of University of Tartu, Riia 142, 51014 Tartu, Estonia

During the last two decades it has been established, that the homogeneous wave equation has also a number of so called localized wave (LW) solutions instantaneous, Gaussian pulse-like intensity distribution of which propagates without any distortions in free space (see, e.g. Ref. [1] and references therein). Obviously such spatial and temporal localization makes the implementation of LW solutions very attractive for applications, where the lateral and(or) transversal diffractive spreading of optical wave fields is the major limitation of system performance. However, for more than a decade after the pioneering theoretical paper of J. N. Brittingham in 1983 [2] the feasibility of electromagnetic LWs, remained questionable for various reasons from principal doubts up to understandable obstacles one encounters especially in the optical domain due to the large bandwidth and spatio-temporal non-separability inherent to LWs. Indeed, the ideas that had been proposed for generation of complicated LW solutions in the papers of that birth period of the new research field (see references in Ref. [1]) are hardly realizable in optical domain.

The experiments in optical domain started by launching the Bessel-X pulses in optical experiments [3,4] where the conventional Bessel beam generators under the wideband illumination have been used. In Ref. [5] we proposed a physically transparent, one step derivation of fundamental LW solutions - focus wave modes (FWM) and proved that good approximations to FWMs can be generated by means of a combination of an axicon and a circular diffraction grating. The proposed principle has been also verified in experiment [6].

We also introduce a surprisingly elegant, one-step generation method for the LWs. We show, that superluminal LWs with hyperbolic support of angular spectrum of plane waves can be generated by means of cylindrical diffraction gratings. This approach is promising for applications in imaging and femtosecond spectroscopy with possible transmission to LWs in dispersive media and in nonlinear optics [7].

- [1] Reivelt K and Saari P, 2003 arXiv.org e-Print archive, physics/0309079 <http://arxiv.org/abs/physics/0309079>
- [2] J. N. Brittingham, *J. Appl. Phys.* **54**, 1179 (1983).
- [3] H. Sõnajalg, M. Rätsep and P. Saari, *Opt. Lett.* **22** 310 (1997).
- [4] P. Saari and K. Reivelt, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 4135 (1997).
- [5] K. Reivelt and P. Saari, *J. Opt. Soc. Am. A* **17**, 1785 (2000).
- [6] K. Reivelt and P. Saari, *Phys. Rev. E* **66**, 056611 (2002).
- [7] Di Trapani, G. Valiulis, A. Piskarskas, O. Jedrkiewicz, J. Trull, C. Conti, S. Trillo, *Phys. Rev. Lett.* **91** 093904 (2003).