

Primljen / Received: 15.5.2013.

Ispravljen / Corrected: 5.7.2013.

Prihvaćen / Accepted: 16.7.2013.

Dostupno online / Available online: 25.7.2013.

Pregled metoda za modeliranje povijesnih zidanih konstrukcija

Autori:



Hrvoje Smoljanović, dipl.ing.građ.

Sveučilište u Splitu

Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije

hrvoje.smoljanovic@gradst.hr



Dr.sc. **Nikolina Živaljić**, dipl.ing.građ.

Sveučilište u Splitu

Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije

nikolina.zivaljic@gradst.hr



Prof.dr.sc. **Željana Nikolić**, dipl.ing.građ.

Sveučilište u Splitu

Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije

zeljana.nikolic@gradst.hr

Pregledni rad

[Hrvoje Smoljanović, Nikolina Živaljić, Željana Nikolić](#)

Pregled metoda za modeliranje povijesnih zidanih konstrukcija

Prikazan je pregled metoda namijenjenih za modeliranje povijesnih zidanih konstrukcija, počevši od jednostavnih klasičnih pa sve do suvremenih prikladnih za primjenu u računalnim programima. Predočena su glavna obilježja zidanih konstrukcija te glavne značajke metoda za njihovu analizu kao što su dinamičke analitičke metode, metode graničnih stanja, konačnih elemenata te diskretnih elemenata. Dan je osvrt na primjenu pojedine metode obzirom na zahtijevanu razinu točnosti, količinu ulaznih podataka te vrijeme trajanja proračuna.

Ključne riječi:

povijesne zidane konstrukcije, dinamičke analitičke metode, metoda graničnih stanja, metoda konačnih elemenata, metoda diskretnih elemenata

Subject review

[Hrvoje Smoljanović, Nikolina Živaljić, Željana Nikolić](#)

Overview of the methods for the modelling of historical masonry structures

An overview of methods for the modelling of historic masonry structures, starting from simple traditional to modern methods suitable for use in computer programs, is presented. Main characteristics of masonry structures, as well as principal features of methods for their analysis, such as dynamic analytical methods, limit state methods, finite element methods, and discrete element methods, are presented. A review of application of individual methods with regard to the required level of accuracy, quantity of input data, and calculation time, is presented.

Key words:

historic masonry structures, dynamic analytical methods, limit state method, finite element method, discrete element method

Übersichtsarbeit

[Hrvoje Smoljanović, Nikolina Živaljić, Željana Nikolić](#)

Übersicht der Modellierverfahren für historische Mauerwerksbauten

Eine Übersicht der Methoden für die Modellierung von historischem Mauerwerk ist gegeben, von einfachen klassischen bis hin zu modernen, für den Einsatz in Computer-Programmen geeigneten Verfahren reichend. Die wesentlichen Eigenschaften von Mauerwerkskonstruktionen und die wichtigsten Merkmale der Methoden zu ihrer Analyse, wie zum Beispiel des dynamischen analytischen Verfahrens, des Grenzzustandsverfahrens, der Finite-Elemente- und der Diskrete-Elemente-Methode, werden erläutert. Eine Bewertung der einzelnen Verfahren hinsichtlich der angestrebten Genauigkeit, der verfügbaren Eingabedaten, sowie der Berechnungsdauer ist dargestellt.

Schlüsselwörter:

historische Mauerwerksbauten, dynamische analytische Methoden, Grenzzustandsanalyse, Finite-Elemente-Methode, Diskrete-Elemente-Methode

1. Uvod

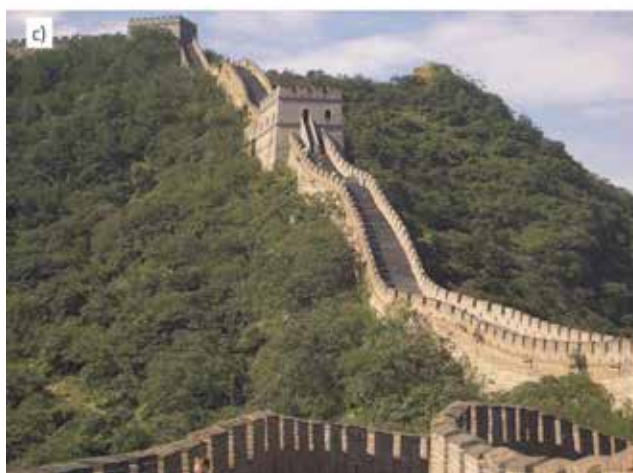
Zidanje, odnosno slaganje kamenih ili glinenih blokova jedan na drugi uz njihovo eventualno međusobno povezivanje mortom najstarija je građevinska tehnika koja se sačuvala sve do današnjih dana. Među najstarije pronađene građevinske konstrukcije ubrajaju se zidane kamene kolibe kružnog oblika pronađene u blizini jezera Hullen u Izraelu koje potječu iz razdoblja između 9000. i 8000. prije Krista [1]. Iako su prve zidane konstrukcije bile najvjerojatnije gomile prirodnog kamena [2], razvojem ljudskih vještina i alata kameni blokovi zadobivali su sve pravilnije oblike, a paralelno s kamenom za pravljenje blokova počinje se koristiti ukalupljeno blato ili glina u početku sušeni na zraku, a kasnije i pečeni u posebnim pećima radi postizanja veće čvrstoće. Osim usavršavanja tehnike izrade blokova, kroz razne kulture u ljudskoj povijesti razvijaju se i različiti konstrukcijski oblici poput stupova za postizanje visine te greda, lukova, svodova i kupola za premoščivanje raspona.

Svoju dugu tradiciju, ali i raširenost po cijelom svijetu, zidanje pripisuje svojoj jednostavnosti, ali i dugovječnosti zidanih

konstrukcija koja se očituje u mnogim takvim građevinama starim više stotina pa i nekoliko tisuća godina. Samo neki od primjera takvih građevina (slika 1.), koje su ujedno postale simboli pojedinih kultura, jesu piramide u Egiptu koje potječu iz razdoblja između 2800.-2000. prije Krista, Partenon u Grčkoj iz petog stoljeća prije Krista, Kineski zid čija je gradnja započela u petom stoljeću prije Krista te Koloseum u Rimu iz prvog stoljeća.

Unatoč jednostavnosti koja se očituje pri gradnji zidanih konstrukcija, razumijevanje i opisivanje mehaničkog ponašanja takvih konstrukcija osobito u uvjetima seizmičkog opterećenja i danas predstavlja pravi izazov zahvaljujući samoj prirodi zidane konstrukcije koja zbog prisutnosti sljubnica između blokova, koje mogu, a i ne moraju biti popunjene mortom, pokazuje kompleksno i izrazito nelinearno ponašanje.

Mnoge zidane konstrukcije nalaze se u seizmički aktivnim područjima u kojima je potres otkrio svu njihovu ranjivost. U tim potresima često stradavaju zidane građevine i spomenici koji se svrstavaju u kategoriju kulturne baštine kao i suvremene zidane konstrukcije. Da bi se smanjio broj ljudskih žrtava te smanjila oštećenja takvih konstrukcija, potrebno je



Slika 1. Stare kamene konstrukcije: a) Egiptске piramide; b) Partenon u Atini; c) Kineski zid; d) Koloseum u Rimu

dati bolji uvid u ponašanje zidanih konstrukcija pod seizmičkim djelovanjem. Upravo iz ovog razmatranja proizlazi i glavna motivacija za izradu ovog rada kojem je cilj prikazati do sada razvijene metode i numeričke modele vezane za seizmičku analizu zidanih konstrukcija kako bi se znanstvenici koji se bave sličnom problematikom mogli upoznati s trenutnim dostignućima u ovom području te sukladno tome raditi na razvoju novih numeričkih modela.

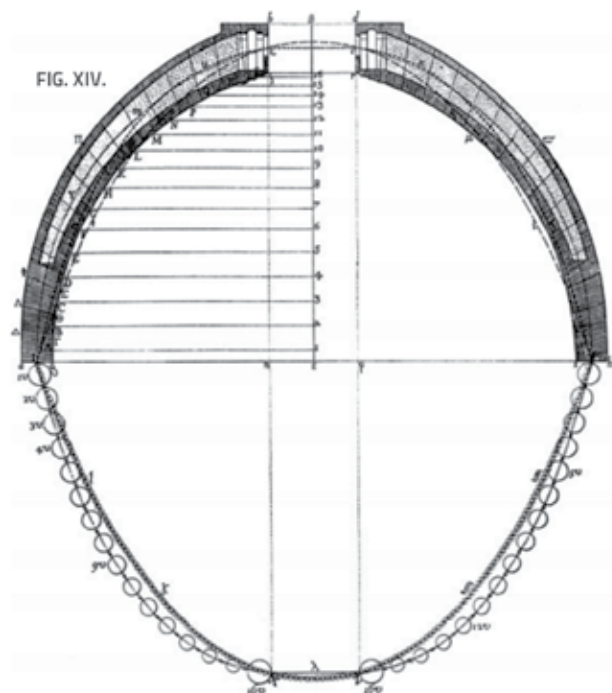
2. Klasični i suvremeni pristupi u analizi povijesnih konstrukcija

Kroz dugi niz godina o proračunu zidanih konstrukcija vrlo se malo govorilo. Vještina izrade zidanih konstrukcija stjecala se na temelju iskustva i prenosila s naraštaja na naraštaj. Rimski arhitekt Vitruvius u svom djelu Deset knjiga o arhitekturi [3] uspoređuje kvalitetu kamena i drva s raznih lokacija te govori o proporcijama raznih konstrukcijskih elemenata i građevina, međutim o proračunu se ne govori ništa.

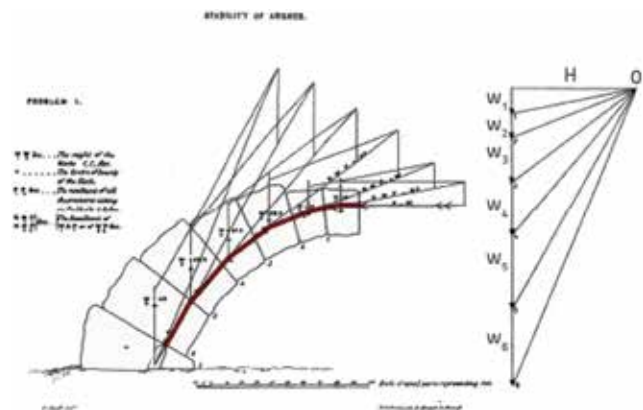
Smatralo se da konstrukcija koja ima prave proporcije je konstrukcijski ispravna i takvo se razmišljanje zadržalo kroz cijeli srednji vijek. Obilježje tog vremena je strogo čuvanje znanja o provjerenim proporcijama koje se prenosilo s jednog naraštaja na drugi. Brojne imponantne građevine nastale u tom razdoblju, koje i danas postoje, pokazuju da iskustveno znanje o stabilnosti i raspodjeli sila unutar zidane konstrukcije u tom vremenu nije bilo zanemarivo.

Pojavom renesanse u 15. stoljeću, paralelno s gradnjom sve vitkijih konstrukcija, javila se i potreba za teoretskom podlogom pri njihovoj gradnji. U drugoj polovini 17. stoljeća Robert Hooke je uočio da dijelovi kamenog luka imaju oblik obrnute obješene lančanice. Matematički oblik obješene lančanice izveo je David Gregory koji je 1698. neovisno došao do Hookove tvrdnje i proširio je na način da se može primijeniti kod lukova konačne debljine. Prema Gregoryju lukovi su stabilni kada se unutar njihove debljine može položiti obješena lančanica. Analogija s lančanicom koristila se kroz 18. i 19. stoljeće za oblikovanje i analizu kamenih mostova i kupola. Jedan od najznačajnijih takvih primjera je analiza kupole Svetog Petra u Vatikanu koju je napravio Poleni [4] (slika 2.).

S druge pak strane u Francuskoj se kroz 18. stoljeće javljao drugačiji pogled na isti problem. La Hire, Couplet i Coulomb doživljavali su luk kao niz krutih blokova koji mogu imati relativne pomake. Prema Coupletu slom se dogodi kada se u luku pojavi dovoljan broj zglobova da se stvori mehanizam [5]. Prvu opću teoriju o stabilnosti lukova objavio je Coulomb 1773. godine [6]. U njoj je Coulomb razvio matematičku bazu za opisivanje različitih oblika kolapsa lukova uzimajući u obzir relativne rotacije i klizanje između blokova. Coulomb je smatrao da se klizanje među blokovima rijetko događa pa je sugerirao da se u razmatranju za praktične svrhe uzimaju samo oblici sloma uzrokovani relativnim rotacijama blokova.



Slika 2. Polenijsva analiza ravnoteže kupole Svetog Petra u Rimu [4]

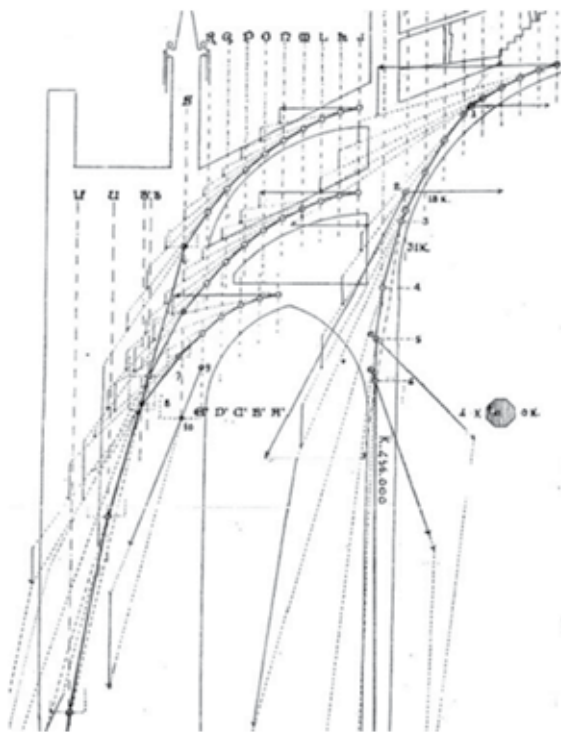


Slika 3. Grafička analiza kamenog luka [7]

Daljnji napredak u analizi lukova dogodio se u 19. stoljeću pojavom grafičke statike i teorijom tlačne linije. Grafička statika se koristila za analizu mnogih vrsta kamenih mostova i građevina sve do početka 20. stoljeća. Snell [7] je na primjer primjenjivao grafičku metodu da bi izračunao stabilnost kamenog luka. Na slici 3 prikazan je verižni poligon koji je Snell koristio kako bi skicirao tlačnu liniju kamenog luka. Na sličan je način Rubio teorijom tlačnih linija analizirao katedralu u Mallorci [8] (slika 4.).

Moderna analiza konstrukcija koja uzima u obzir elastična svojstva materijala započela je s Hookovim zakonom ($\sigma = E \epsilon$) formuliranim 1676. godine na kojem se temelji teorija elastičnosti nastala u 19. stoljeću.

Da bi se moglo govoriti o proračunu i modeliranju zidanih konstrukcija, potrebno je uočiti njihova glavna obilježja. Glavno



Slika 4. Detalj Rubijevlje primjene grafičke statike u analizi katedrale u Mallorci [8]

obilježje svih zidanih konstrukcija je njihova kompozitna priroda koju čine blokovi odvojeni sljubnicama koje mogu, a i ne moraju biti ispunjene mortom. Prisutnost sljubnica koje u zidanoj konstrukciji predstavljaju najslabiju kariku uzrok je izrazitog nelinearnog i kompleksnog ponašanja što stvara velike poteškoće u numeričkom modeliranju. Upravo iz ovog razloga postoji široka paleta metoda i numeričkih modela za proračun zidanih konstrukcija koje se razlikuju po stupnju složenosti, obujmu ulaznih podataka i točnosti rješenja. Budući da svaka metoda ima svoje područje primjene, ne može se govoriti o najboljoj metodi već o izboru najbolje metode ovisno o konstrukciji koju želimo analizirati, ulaznim podacima kojima raspoložemo, rezultatima koje želimo dobiti te naposljetku iskustvu i kvalifikaciji samog istraživača [9]. Najbolja metoda je ona koja daje tražene informacije s prihvatljivim pogreškama na najbrži način. U ovom radu neće se pobliže opisivati svaka od tih metoda već će se prikazati samo glavne značajke te područje primjene pojedinih metoda.

U numeričkom modeliranju zidanih konstrukcija postoje dva osnovna pristupa, a to su idealizacija pomoću kontinuuma i diskontinuum.

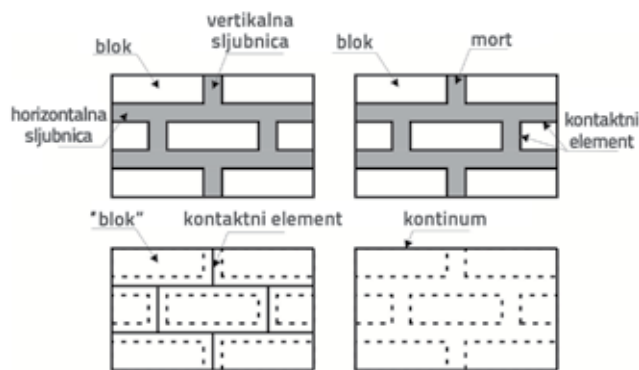
Usvajanje hipoteze o kontinuumu pretpostavlja da su naprezanja i deformacije nad promatranim volumenom opisane kontinuiranim funkcijama. Veze između naprezanja i deformacija dane su konstitutivnom zakonitošću ponašanja materijala. Kombinirajući konstitutivnu zakonitost ponašanja materijala s jednadžbama ravnoteže moguće je dobiti diferencijalne jednadžbe čije rješavanje uz zadovoljavanje

rubnih uvjeta daje rješenje danog problema u smislu pomaka i naprezanja. Budući da se uglavnom radi o diferencijalnim jednadžbama čije je rješenje nepoznato u analitičkom obliku, najčešće se takve jednadžbe zajedno s rubnim uvjetima, primjenjujući dinamičke zakone očuvanja energije, prevode u varijacijski problem, odnosno slabu formulaciju koja se može rješavati približnim numeričkim postupcima od kojih je najraširenija metoda konačnih elemenata.

Nasuprot tome, idealizacija pomoću diskontinuum konstrukciju promatra kao skup diskretnih elemenata koji se tijekom analize mogu razdvajati, slobodno gibati te ponovno naći u međusobnoj dinamičkoj interakciji. Kod ovakvog pristupa diskretni elementi se uglavnom promatraju kao apsolutno kruti, a numerička integracija jednadžbi gibanja blokova u vremenu najčešće se provodi eksplicitnim putem. Numerički modeli koji usvajaju ovakav pristup ubrajaju se u metode diskretnih elemenata.

U posljednje vrijeme svejeviše numeričkih modela koji kombiniraju prednosti idealizacije konstrukcije pomoću kontinuuma i diskontinuum. Neke od takvih metoda razvile su se iz metoda konačnih elemenata, dok su se druge razvile iz metoda diskretnih elemenata. One koje su se razvile iz metoda konačnih elemenata prednosti idealizacije pomoću diskontinuum ostvaruju preko kontaktnih elemenata koji mogu biti ugrađeni između mreže konačnih elemenata. Pomoću kontaktnih elemenata opisuje se diskontinuitet u polju pomaka u slučaju nastanka pukotine. S druge pak strane numerički modeli koji su se razvili iz metoda diskretnih elemenata prednosti idealizacije preko kontinuuma najčešće ostvaruju na način da se svaki diskretni element diskretizira s vlastitom mrežom konačnih elemenata čime je moguće uzeti u obzir deformabilnost elemenata.

Neovisno o tome o kojem se pristupu govori, s obzirom na stupanj jednostavnosti i točnosti može se govoriti o mikromodeliranju, pojednostavljenom mikromodeliranju te makromodeliranju [1] (slika 5.).



Slika 5. Razine modeliranja zidanih konstrukcija: a) predložak zidane konstrukcije; b) detaljno mikro modeliranje; c) pojednostavljeno mikro modeliranje; d) makromodeliranje [1]

Kod makromodeliranja sve točke konstrukcije imaju jednaka svojstva, tj. istu konstitutivnu zakonitost ponašanja koja

se dobila na temelju svojstava reprezentativnog volumena dovoljno velike veličine prema teoriji osrednjavanja odnosno homogeniziranja. U ovom su slučaju svojstva morta i svojstva blokova jednoliko razmazana po konstrukciji koju tretiramo kao homogeni anizotropni kontinuum. Ovakav pristup prikladan je za analizu većih konstrukcija jer je proračunski najmanje zahtjevan. Ako je reprezentativni volumen reda veličine jednog bloka i manje, tada se govori o detaljnom mikromodeliranju kod kojeg su blok i mort diskretizirani i modelirani s konačnim elementima dok je veza bloka i morta prezentirana s kontaktnim elementima. U tom pristupu konstitutivne zakonitosti ponašanja morta i bloka promatraju se odvojeno. Zbog svojih velikih proračunskih zahtjeva, taj je pristup prikladan za modeliranje manjih konstrukcijskih detalja, ali ne i realnih konstrukcija. Kod pojednostavljenog mikromodeliranja prošireni blok modeliran je s konačnim elementima dok je veza morta i bloka opisana kontaktnim elementima koji ujedno predstavljaju mjesta potencijalnih pukotina. Ovim pristupom se gubi točnost s obzirom na to da se Poissonov koeficijent u mortu, koji znatno utječe na tlačnu čvrstoću zidane konstrukcije, ne uzima u obzir.

Što se tiče samog načina tretiranja potresnog opterećenja, metode namijenjene za seizmičku analizu zidanih konstrukcija mogu se svrstati u linearne, u koje se ubraja pojednostavljena ekvivalentna statička analiza i modalna analiza, te nelinearne, u koje se ubraja statička metoda postupnog guranja i metoda odgovora u vremenu.

Kod pojednostavljene ekvivalentne statičke analize potresno opterećenje se aproksimira s ekvivalentnim statičkim opterećenjem i to na dva načina. Prvi način je da se konstrukcija izloži konstantnom horizontalnom ubrzanju. Ovim pristupom zanemarena je činjenica da tijekom potresa konstantno ubrzanje podloge traje samo kratko vrijeme. Također su zanemareni i rezonantni efekti koji se u konstrukciji javljaju tijekom potresa zbog elastičnih svojstava materijala. Taj pristup prikladan je za analizu stabilnosti nekih vrsta starih kamenih konstrukcija kao što su lukovi kod kojih elastična svojstva materijala nemaju veliku ulogu. Drugi način je da se po visini konstrukcije zada raspodijeljeno opterećenje koje raste od dna prema vrhu čime se uzima u obzir raspodjela horizontalnih sila uzrokovana dinamičkim odgovorom konstrukcije. Seizmički proračun konstrukcije pomoću modalne analize uglavnom se radi preko metode konačnih elemenata pomoću koje je moguće izračunati vlastite oblike i frekvencije. S obzirom na udio pojedinog vlastitog oblika u seizmičkom odgovoru, po visini konstrukcije se zadaju opterećenja koja se zatim kombiniraju raznim postupcima.

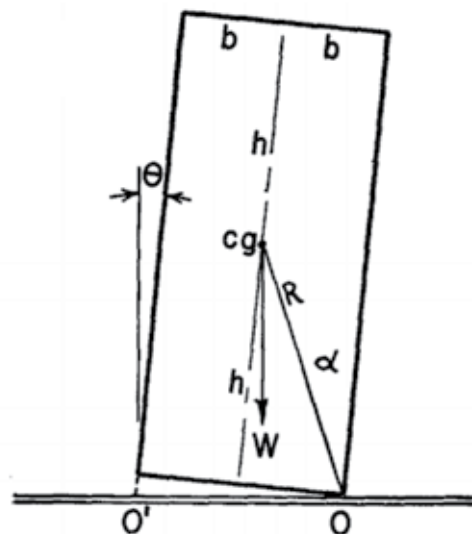
Metoda postupnog guranja bazira se na postupnom povećavanju amplitude horizontalnih sila uz paralelno praćenje odgovora konstrukcije [10]. Metoda odgovora u vremenu sastoji se u tome da se za određeni zapis ubrzanja podloge izračuna odgovor konstrukcije u vremenu u obliku naprezanja, deformacija i pomaka.

U nastavku će se pobliže opisati glavne značajke te mogućnost primjene danas najčešćih numeričkih metoda u seizmičkoj analizi zidanih konstrukcija.

3. Dinamičke analitičke metode

Cilj ovih metoda jest analitičkim putem predvidjeti odgovor konstrukcije uslijed dinamičke pobude ili predvidjeti najmanju vrijednost horizontalnog ubrzanja podloge koje će prouzročiti slom konstrukcije. Budući da se u tim metodama elementi konstrukcije pretpostavljaju kao apsolutno kruti, pretpostavljeno je da do sloma konstrukcije neće doći zbog prekoračenja čvrstoće materijala već isključivo zbog gubitka stabilnosti. Zbog vrlo složenih analitičkih jednadžbi, te su metode ograničene na analizu jednostavnijih konstrukcija kao što su blokovi na horizontalnoj podlozi, portalni okviri te lukovi.

Prvi koji je primjenjujući zakone dinamike analizirao prevrtanje apsolutno krutog bloka na horizontalnoj podlozi izloženom konstantnom horizontalnom, sinusnom te potresnom ubrzanju podloge bio je Housner [11]. Uvodeći pretpostavke da između bloka i podloge nema klizanja, da nema odskakanja bloka od podloge, da je blok dovoljno vitak, tj. da je kut α (Slika 6.) manji od 20° te da je kut rotacije Θ prilikom osciliranja mali, Housner je analizirao potrebno vrijeme trajanja pravokutnog odnosno sinusnog impulsa koji bi prouzročio prevrtanje bloka. Gubitak energije prilikom sudara bloka s podlogom Housner je uzeo u obzir uvodeći pretpostavku da je prilikom naizmjenične rotacije bloka oko jednog i drugog ruba očuvan moment količine gibanja. Housner je također pokazao kako je stabilnost visokog tankog bloka prilikom potresnog opterećenja mnogo veća od one koju ima pri konstantnom ubrzanju podloge. Housnerov rad je podloga za brojne druge radove koji su se bavili problemom njihanja bloka na podlozi.

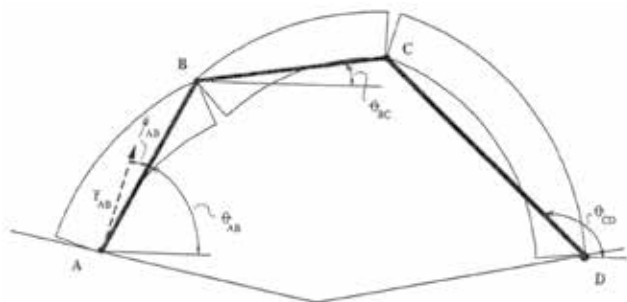


Slika 6. Blok koji se njiše [11]

Nastavljajući se na Hausnerov rad, Yim [12] je između ostalih problemu njihanja bloka na horizontalnoj podlozi prišao ne uvodeći pretpostavku malih kutova rotacije. Rješavajući jednadžbu gibanja numeričkim putem, Yim [12] je problem prevrtanja bloka uslijed seizmičke pobude promatrao s probabilističkog stajališta jer se pokazalo da dinamički odgovori bloka na različita ubrzanja podloge s istom amplitudom znatno variraju od malih oscilacija pa sve do potpunog prevrtanja.

Dok se Yim [12] usredotočili na dinamički odgovor bloka uslijed slučajnih ubrzanja podloge, Spanos i Koh [7] su se fokusirali na dinamički odgovor bloka uslijed harmonijskog ubrzanja podloge. Slijedeći Spanosa i Koha, velik broj znanstvenika je istraživao dinamički odgovor bloka uslijed harmonijskog ubrzanja podloge [13-17]. Svi ovi radovi temelje se na pretpostavci da se dinamičko gibanje može opisati preko spektara odgovora.

Da bi se ispitalo mnogo kompleksnije ponašanje bloka uslijed ubrzanja podloge, istraživači su u svojim radovima razmatrali i mogućnost klizanja te odskakanja bloka od podloge [18-23]. Nekoliko istraživača je proučavalo odgovor sustava koji se sastoji od više blokova. Tako su Sinopoli i Sepe [24] proučavali odgovor okvirne konstrukcije napravljene od tri bloka izložene horizontalnom ubrzanju podloge. Na sličan način je Spanos sa svojim suradnicima [25] analizirao dinamiku konstrukcije sastavljene od dva bloka, međutim jednadžbe za analizu dinamike tih dvaju blokova bile su toliko složene da su znanstvenici zaključili kako je za dinamičku analizu sustava više blokova pogodnija metoda diskretnih elemenata, o kojoj će u nastavku biti riječ.



Slika 7. Mehanizam formiran kod kamenog luka uslijed horizontalnog ubrzanja podloge [26]

Osim analize blokova, dvojica su znanstvenika analitičke metode primjenjivali za analizu stabilnosti lukova izloženih konstantnom horizontalnom ubrzanju podloge [26, 27]. Oba su se autora koristila ekvivalentnom statičkom analizom da bi utvrdili mjesta nastanka zglobova u luku pretpostavljajući da ta mjesta ostaju nepromijenjena tijekom dinamičkog odgovora konstrukcije. Pojednostavljenje ovakvog sustava koji se sastoji od više blokova na sustav s jednim stupnjem slobode (slika 7.) omogućuje analitičko rješenje.

Složenost analitičkih metoda pri proračunu dinamičkog odgovora složenijih zidanih konstrukcija na seizmičku pobudu

potakla je znanstvenike na razvoj numeričkih metoda. Najprikladnija numerička metoda za proračun stabilnosti zidanih konstrukcija koja može analizirati dinamiku krutih tijela jest metoda diskretnih elemenata.

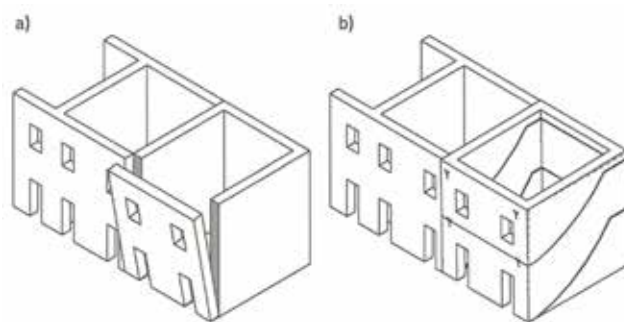
4. Metoda graničnih stanja

Metode graničnih stanja temelje se na pretpostavkama koje je Couplet postavio još 1730. godine, a to su:

1. zidana konstrukcija nema vlačnu čvrstoću
2. zidana konstrukcija ima beskonačnu čvrstoću u tlaku
3. klizanje među sljubicama se ne može pojaviti.

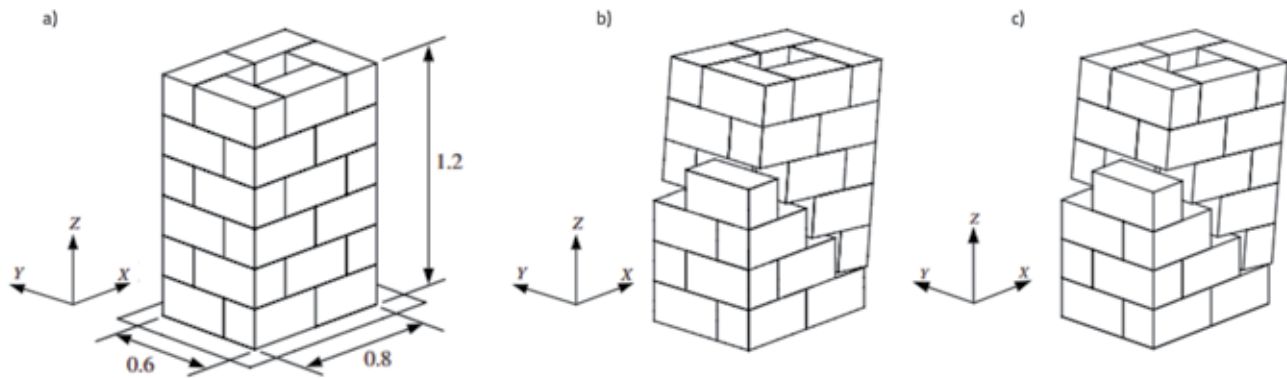
Te pretpostavke među prvima je koristio Heyman [28] u analizi stabilnosti kamenih lukova. Naime, usvajanje tih pretpostavki omogućuje primjenu kinematičkog i statičkog teorema plastičnosti pomoću kojih se za zadani vektor vanjskog opterećenja F može odrediti faktor opterećenja α kojim je potrebno uvećati vanjsko opterećenje da dođe do sloma konstrukcije.

Statički teorem ili teorem donje granice dokazuje da je konstrukcija stabilna, tj. da neće doći do sloma ako se za zadano vanjsko opterećenje može pronaći statički prihvatljivo polje unutrašnjih sila. Najveća vrijednost faktora opterećenja za koji je konstrukcija još u ravnoteži predstavlja donju granicu faktora sigurnosti. Kinematički teorem dokazuje da je konstrukcija nestabilna ako se može pronaći takav mehanizam za koji je rad vanjskih sila veći ili jednak nuli. Najniža vrijednost faktora opterećenja za koji je rad vanjskih sila na pretpostavljenom mehanizmu jednak nuli predstavlja gornju granicu faktora sigurnosti konstrukcije. Na temelju ovih teorema može se zaključiti da koeficijent sigurnosti konstrukcije dobiven statičkim ili kinematičkim pristupom mora biti isti.



Slika 8. Mehanizam sloma vanjskih zidova starih zgrada: a) bez poprečnih veza; b) s poprečnim vezama [29]

Klasične metode graničnih stanja uzimale su u obzir statički pristup koji se temeljio na korištenju verižnog poligona pri grafičkoj interpretaciji tlačnih linija kod kamenih lukova [30, 31]. Ako bi se tlačna linija nalazila unutar kontura luka, to bi značilo da je luk statički stabilan. Razvojem računala, Harvey i Maunder [32] su koristili tablični proračun za dobivanje



Slika 9. Zidani stup: a) model; b) mehanizam sloma metodom konačnih elemenata; c) mehanizam sloma metodom graničnih stanja [46]

trodimenzionalnog oblika tlačne linije, dok je Block sa suradnicima [33, 34] razvio interaktivnu kompjutorsku analizu baziranu na kombinaciji statičkog i kinematičkog teorema za dobivanje tlačne linije kod trodimenzionalnih problema.

Osim analize lukova, metoda graničnih stanja služila je i za druge vrste konstrukcija. Na temelju razmatranja načina kolapsa starih zidanih građevina Giuffré [35, 36] i Carocci [29] su nakon dekompozicije konstrukcije na krute blokove primjenjivali kinematički pristup da bi procijenili njihovu seizmičku otpornost (slika 8.). Metoda je prikladna za analizu onih vrsta konstrukcija kod kojih međukratne konstrukcije nisu kruto povezane sa zidovima. Giuffré je također pobudio veliko zanimanje svojim prijedlogom kombinacije blokovske prezentacije konstrukcije s metodama kapaciteta nosivosti [37, 38] za procjenu seizmičke otpornosti zidanih konstrukcija. Roca [39] je između ostalih predložio metodu za analizu armiranih zidanih konstrukcija koja se bazira na statičkom teoremu. Ochsendorf [40] je primijenio metodu graničnih stanja analizirajući lukove kod kojih je došlo do deformacije temelja, a De Luca [41] se koristio metodom konačnih elemenata u kombinaciji s metodom graničnih stanja pri analizi seizmičke otpornosti kamenih lukova. Nakon što je pomoću metode konačnih elemenata bazirane na linearno elastičnoj analizi pronašao mjesta nastanka zglobova, De Luca je metodu graničnih stanja primijenio pri određivanju ultimativnog opterećenja koje bi izazvalo slom konstrukcije. U novije vrijeme razvijene su brojne metode graničnih stanja [42-45] bazirane uglavnom na kinematičkom pristupu koje su implementirane u računalne programe. Većina tih metoda zasniva se na sljedećim pretpostavkama:

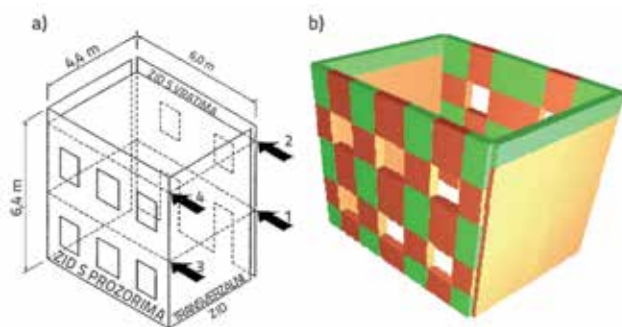
1. zidana konstrukcija nema vlačnu čvrstoću
2. zidana konstrukcija ima beskonačnu čvrstoću u tlaku
3. posmično ponašanje u kontaktu između blokova je savršeno plastično
4. granično opterećenje se javlja pri malim pomacima.

Slično kao metode graničnih stanja baziranih na grafičkom pristupu, ove metode uz pretpostavku krutog-savršeno plastičnog ponašanja materijala imaju svrhu procijeniti kapacitet nosivosti te dati uvid u mehanizam sloma konstrukcije.

Da bi se model krutog-savršeno plastičnog ponašanja materijala mogao matematički primjenjivati, usvojena je funkcija tečenja ϕ definirana u jedinici naprezanja za koju vrijedi: ako je $\phi < 0$, materijal ostaje krut; ako je $\phi = 0$, materijal postaje plastičan; ako je $\phi > 0$, nastupilo je nedopustivo stanje naprezanja. Skup stanja za koje vrijedi $\phi = 0$ čine plohu tečenja. Sva stanja koja se nalaze unutar ili na plohi tečenja zadovoljavaju kriterij tečenja, dok se ona stanja koja padaju izvan plohe tečenja smatraju nedopustivima. Za stanja naprezanja koja se nalaze na plohi tečenja materijal postaje plastičan što znači da je potrebno definirati smjer tečenja koji je određen funkcijom tečenja. Ako je smjer tečenja okomit na plohu tečenja, tada se govori o asocijativnom zakonu tečenja koji je usvojen kod klasičnih metoda graničnih stanja u koje se ubrajaju prethodno spomenuti modeli. Asocijativni zakon tečenja podrazumijeva da je kut dilatacije jednak kutu trenja što za većinu kamenih konstrukcija u kojima je kut dilatacije približno jednak nuli nije točno. Ovaj se problem može riješiti usvajajući neasocijativni zakon tečenja koji vodi nestandardnoj metodi graničnih stanja u kojoj teoremi graničnih stanja (kinematički i statički) nisu striktno primjenjivi. Model koji su razvili Orduña i Lourenço [46-48], a uzima u obzir ograničenu tlačnu čvrstoću, te Gilbertov model [49] samo su neki od modela zasnovanih na nestandardnoj metodi graničnih stanja. Na slici 9 prikazan je zidani stup čiji su mehanizam sloma Orduña i Lourenço [46] analizirali metodom graničnih stanja i metodom konačnih elemenata iz čega se može uočiti da obje metode daju isti rezultat.

5. Metoda konačnih elemenata

Metoda konačnih elemenata je zahvaljujući svojoj dugoj tradiciji najčešće primjenjivana metoda ne samo za proračun zidanih konstrukcija nego i za proračun konstrukcija uopće. Do danas je razvijeno mnoštvo numeričkih modela zasnovanih na metodi konačnih elemenata koji se razlikuju prema vrsti konačnih elemenata kojima je konstrukcija diskretizirana te prema konstitutivnoj zakonitosti ponašanja materijala koji može biti linearan i nelinearan.



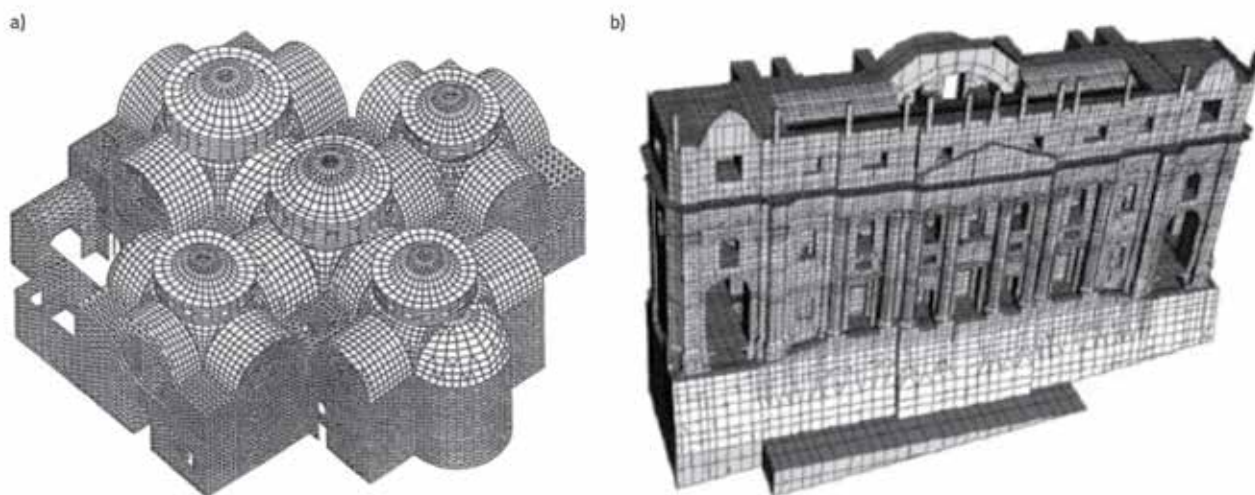
Slika 10. Modeliranje zidane konstrukcije pomoću makroelemenata: a) shema testa; b) model pomoću makroelemenata [55]

Proračunski najjednostavniji način modeliranja zidanih konstrukcija metodom konačnih elemenata je diskretizacija konstrukcije skeletnim sustavom korištenjem linijskih konačnih elemenata. Molins i Roca [50] razvili su numerički model za analizu prostornih konstrukcija koji se sastoji od prostornih linijskih elemenata s promjenjivim poprečnim presjekom. U model je uključena materijalna i geometrijska nelinearnost kao i Mohr-Coulombov kriterij loma u posmiku. Za analizu zidanih zidova razvijeno je također nekoliko pojednostavljenih modela koji konstrukciju aproksimiraju s ekvivalentnim okvirnim sustavom [51-54].

U zadnje vrijeme mnogo radova posvećeno je modeliranju zidanih konstrukcija pomoću makroelemenata [55-59] čime je broj stupnjeva slobode te vrijeme proračuna znatno smanjeno, slika 10. Svaki makroelement može predstavljati cijeli zid ili se zid, ako postoje otvori, može aproksimirati pomoću više makroelemenata koji se postavljaju na način da veza između dva makroelementa bude na mjestu gdje se može očekivati nastanak pukotine. Ovim pristupom koji je u nekim slučajevima prikladan za određivanje mehanizma sloma te kapaciteta nosivosti konstrukcije nije moguće pobliže opisati ponašanje pojedinih konstrukcijskih elemenata.

Zbog poteškoća u diskretizaciji starih kamenih konstrukcija pomoću strukturalnih elemenata, ali i s obzirom na potrebu za detaljnijom analizom, poseglo se za dvodimenzionalnim i trodimenzionalnim konačnim elementima pomoću kojih se zidana konstrukcija modelira na makrorazini. Makromodeliranje je najčešći pristup koji se koristi za analizu zidanih konstrukcija u praksi jer je u tom slučaju postignut najbolji omjer između cijene proračuna te razine točnosti. Najjednostavniji numerički modeli ovog tipa, bazirani na linearno elastičnom ponašanju materijala, često su se u nedostatku pogodnijih modela, ali i proračunskih zahtjeva, primjenjivali za analizu velikih zidanih konstrukcija. Na taj su način Mola i Vitaliani analizirali crkvu Svetog Marka u Veneciji [60] (slika 11.), Macchi je sa suradnicima na sličan način modelirao toranj u Pisi [61] te ulaz u baziliku Svetog Petra u Rimu [62], dok je Croci [63] analizirao Koloseum u Rimu.

Budući da zidane konstrukcije zbog vrlo malih vlačnih čvrstoća pokazuju izrazito nelinearno ponašanje već i pri vrlo malim razinama opterećenja, primjena linearne analize u modeliranju zidanih konstrukcija smatra se neprihvatljivom jer može dovesti do krivih rezultata i krivih zaključaka. Njena primjena može biti opravdana u nekim slučajevima u kojima se želi promatrati ponašanje konstrukcije do pojave prvih pukotina ili se žele procijeniti mjesta nastanka prvih pukotina na koja će se zatim primijeniti detaljnija analiza. Jedino je nelinearnom analizom moguće obuhvatiti sve učinke koji se javljaju u zidanoj konstrukciji, počevši od pojave i razvoja pukotina pa sve do konačnog sloma. Prikladni nelinearni makromodeli namijenjeni za analizu zidanih konstrukcija uzimaju u obzir različite vlačne i tlačne čvrstoće kao i različita elastična i neelastična svojstva duž materijalnih osi čime se konstrukcija tretira kao homogeni ortotropni kontinuum. Elastični i neelastični parametri takvog kontinuum najčešće se određuju na temelju eksperimentalnih ispitivanja uzoraka dovoljno velike veličine izloženih homogenom stanju naprezanja. Kao alternative složenim eksperimentalnim ispitivanjima



Slika 11. Modeli konačnih elemenata: a) bazilika Svetog Marka u Veneciji [60]; b) ulaz u baziliku Svetog Petra u Rimu [62]

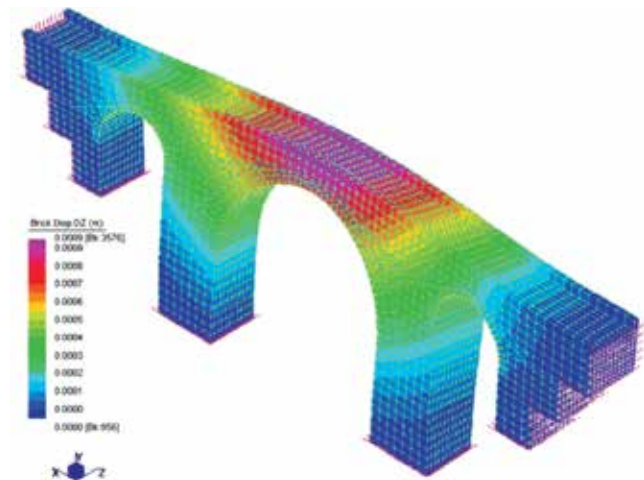
moгу se odrediti svojstva pojedinačnih komponenti zidane konstrukcije (morta i blokova) koji služe kao ulazni podaci za tehničke numeričke homogenizacije. Opsežan pregled tehnika numeričke homogenizacije može se naći u [64].

Najpoznatije teorije za formuliranje nelinearnog konstitutivnog zakona ponašanja materijala jesu teorija plastičnosti i mehanika oštećenja.

Teorija plastičnosti nastoji opisati plastično ponašanje materijala pojavom trajne deformacije. Iako je isprva bila namijenjena za modeliranje duktilnih materijala, danas se intenzivno primjenjuje i za druge materijale kao što je tlo, beton te zidana konstrukcija [1, 65-68]. Budući da je teorija plastičnosti prikladna samo za monotono opterećenje, većina prethodno spomenutih modela nije sposobna uzeti u obzir cikličko opterećenje. Da bi uklonili taj nedostatak, neki su znanstvenici u klasičnu teoriju plastičnosti implementirali najznačajnija svojstva materijala koja karakteriziraju cikličko ponašanje kao što su histerezni gubitak energije te opadanje krutosti [2, 69].

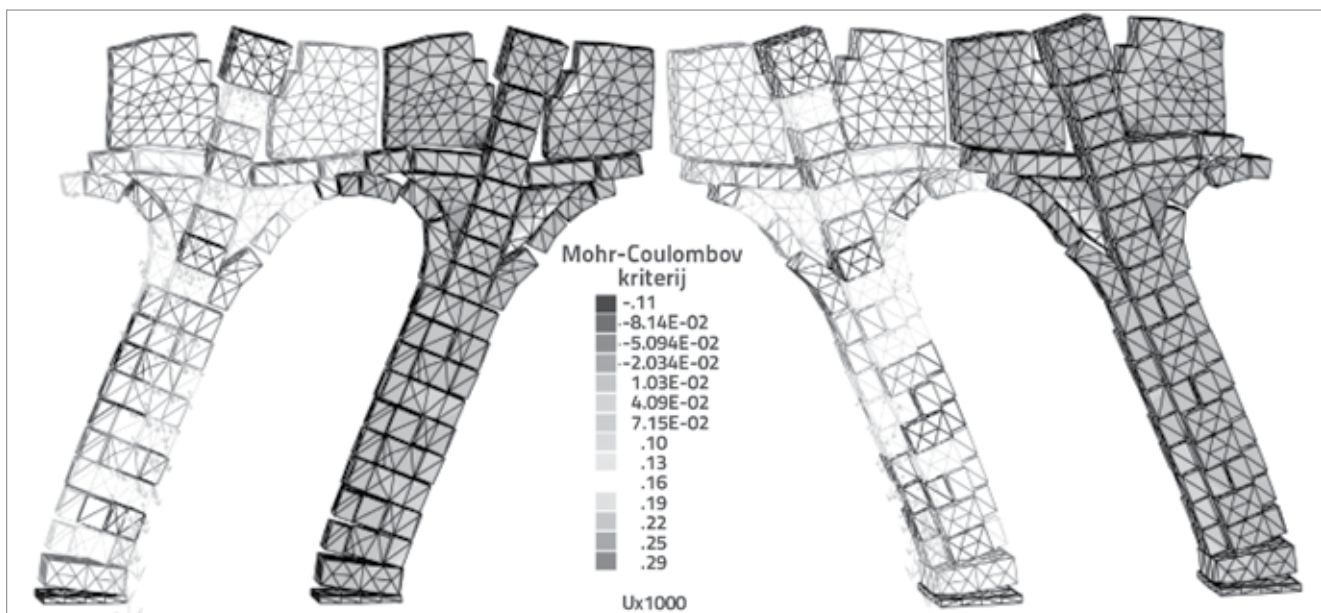
Glavna je značajka mehanike oštećenja sam koncept oštećenja koji se može definirati kao opadanje elastičnih svojstava materijala uslijed pojave i razvoja mikropukotina što za posljedicu ima smanjivanje površine koja prenosi unutrašnje sile. Kao posljedica procesa oštećenja, dolazi do opadanja elastičnih svojstava materijala. Zbog svoje matematičke složenosti, ovim pristupom uglavnom se usvaja pretpostavka o izotropnom materijalu, međutim postoji također i mnoštvo numeričkih modela koji uzimaju u obzir ortotropno ponašanje materijala [71-73].

Makromodeliranje se intenzivno koristilo za analizu seizmičkog odgovora kompleksnih konstrukcija kao što su lučni mostovi [70, 74] (slika 12.), povijesne građevine [75] te katedrale [72].



Slika 12. Detalj iz 3D analize lučnog kamenog mosta Svetog Marcela u Italiji [70]

Nedostatak većine makromodela je u tome što nisu u mogućnosti simulirati diskontinuitete koji se javljaju između blokova ili dijelova zidane konstrukcije. Takvi diskontinuiteti koji su unaprijed određeni kao što je to kod starih kamenih konstrukcija ili se mogu kasnije javiti u obliku pukotina, mogu dovesti do raznih učinaka kao što je klizanje ili rotacija određenih dijelova konstrukcije, odvajanje blokova i sl. Sve te učinke nije moguće obuhvatiti klasičnom metodom konačnih elemenata zasnovanoj na prezentaciji konstrukcije kontinuumom. Jedan od načina rješavanja ovog problema jest umetanje kontaktnih elemenata između mreže konačnih elemenata [76-79] koji predstavljaju mjesta potencijalnih pukotina. U ovom pristupu nužno je da mreža konačnih elemenata bude barem takva da je svaki blok diskretiziran sa svojom mrežom što vodi modeliranju na pravoj mikrorazini ili na pojednostavljenom mikrorazini.



Slika 13. 3D prikaz sloma stupova samostana Svetog Vice u Lisabonu [76]

U kontaktnim elementima koncentrirana je materijalna nelinearnost dok je ponašanje u konačnim elementima najčešće linearno elastično. Nelinearno ponašanje kontaktnih elemenata bazirano je na teoriji plastičnosti [80, 81] ili mehanici oštećenja [82-84]. Ako se radi o modeliranju na pojednostavljenoj mikrorazini, tada kontaktni elementi opisuju nelinearno ponašanje morta te veze bloka i morta dok se u bloku pretpostavlja linearno elastično ponašanje opisano konačnim elementima. U slučaju modeliranja na pravoj mikrorazini, blok i mort se modeliraju s različitim konačnim elementima između kojih su implementirani kontaktni elementi kojima je opisana materijalna nelinearnost. U tom se slučaju s jednim kontaktnim elementima opisuje nelinearno ponašanje morta, drugim bloka, a trećim se opisuje veza bloka i morta. Ovakav se proračunski pristup zbog svojih velikih proračunskih zahtjeva primjenjuje uglavnom za analizu manjih konstrukcijskih detalja izloženih heterogenom stanju naprezanja ili za potrebe tehnika homogenizacije gdje se na temelju mehaničkih karakteristika morta i blokova nastoji dobiti konstitutivna zakonitost ponašanja zidane konstrukcije. Almeida [85] te Pegon i Pinto [76] (slika 13.) samo su neki od istraživača koji su se koristili metodom konačnih elemenata u kombinaciji s kontaktnim elementima pri analizi zidanih konstrukcija.

6. Metoda diskretnih elemenata

Metoda diskretnih elemenata je grupa metoda koje su Cundall i Hart [86] definirali kao računalni pristup koji:

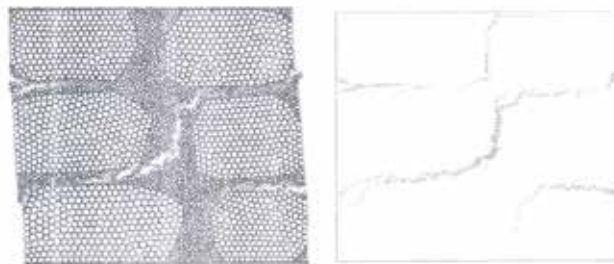
1. omogućava konačne pomake i rotacije diskretnih tijela uključujući njihovo potpuno odvajanje
2. automatski prepoznaje nove kontakte između tijela kako proračun napreduje.

Začetnik tih metoda bio je Cundall [87] koji je utemeljio metodu poznatu pod nazivom Distinct Element Method (DEM) čija je prvotna namjena bila simuliranje klizanja i razdvajanja povezanih stijenskih masa duž unaprijed određenih pukotina odnosno diskontinuiteta. Metoda se temeljila na eksplicitnoj numeričkoj integraciji jednadžbi gibanja krutih blokova u vremenu. Blokovi su mogli imati proizvoljne pomake, a metoda je također uključivala i međusobnu interakciju blokova. Osim dinamičkih proračuna, metoda je imala mogućnost dobivanja statičkog rješenja koristeći viskozno prigušenje kao u metodama dinamičke relaksacije.

Tijekom vremena razvijalo se sve više numeričkih modela koji su imali obilježja metode diskretnih elemenata, a koji su svoju primjenu našli u analizi zidanih konstrukcija [88-90]. Glavno obilježje metode diskretnih elemenata koje je omogućilo njenu primjenu u analizi zidanih konstrukcija jest prikaz konstrukcije kao skupa zasebnih blokova međusobno povezanih kontaktnim elementima. Ovaj pristup omogućio je simuliranje kolapsa konstrukcije uslijed rotacije, klizanja

među sljubicama te udarnog opterećenja. Do danas se razvila široka paleta numeričkih modela baziranih na metodi diskretnih elemenata. Svi ti modeli međusobno se razlikuju s obzirom na oblik diskretnih elemenata, način proračuna kontaktnih sila među diskretnim elementima, način prepoznavanja kontakta, način proračuna jednadžbi gibanja u vremenu, itd.

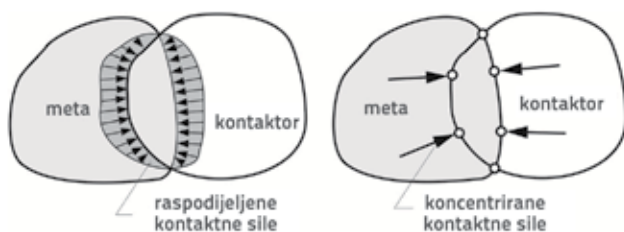
S obzirom na oblik diskretnih elemenata moguće je razlikovati blokovske modele kod kojih su blokovi predočeni poligonalnim elementima [87, 91] te zrnate modele diskretnih elemenata kod kojih su blokovi predočeni kao skup kružnih diskova u 2D ili sfera u 3D [92]. Ovi posljednji prikladni su za mikromodeliranje tla te ostalih granularnih materijala. Zrnati modeli su proračunski vrlo učinkoviti jer je za prepoznavanje i interakciju kontakta dovoljno izračunati samo udaljenost centara dvaju diskova odnosno sfera, dok je kod blokovskih modela taj dio proračuna mnogo složeniji. Među prvima koji je zrnate modele koristio pri analizi nepravilnih kamenih konstrukcija bio je Lemos [93] koji je kamene blokove modelirao s većim, a mort s manjim česticama (slika 14.). Različite čvrstoće pridružene su vezama između ta dva tipa čestica sukladno različitim čvrstoćama materijala. Petrinic [94] je razvio model koji dopušta interakciju zrnatih čestica i poligonalnih blokova pomoću kojeg je analizirao kameni most u kojem je kamene blokove modelirao s četveročvornim blokovskim elementima dok je ispunu između kamenih blokova modelirao sa zrnatim elementima.



Slika 14. Čestični model dijela kamenog zida: pukotine pod vertikalnim i posmičnim opterećenjem [93]

Što se tiče proračuna kontaktnih sila između diskretnih elemenata, Cundall i Hart [86] su kontakte klasificirali na krute i meke. Meki kontakti [86, 92] koji su uglavnom zastupljeni u metodama diskretnih elemenata dopuštaju preklapanje između dva diskretna elementa u kontaktu. Na temelju veličine preklopa koji se regulira *penalty* koeficijentom računa se vrijednost kontaktne sile. Ovakva formulacija kontakta u literaturi se još naziva *Smooth contact* ili *Force-Displacement* formulacija. Nasuprot tome, kod krutih kontakata [91, 95] isključena je mogućnost preklapanja diskretnih elemenata. Ovakva formulacija kontakta u literaturi je poznata još pod nazivom *Non-smooth contact* formulacija, a ostvaruje se najčešće numeričkom iteracijom u svakom vremenskom koraku [91].

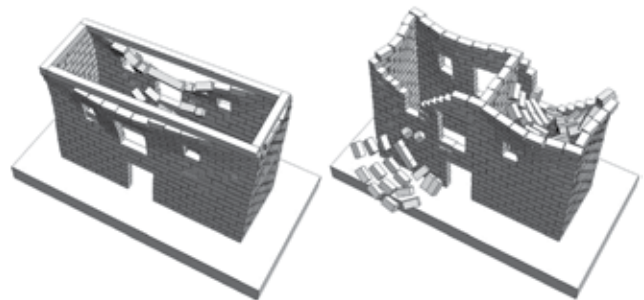
Kod mekih kontakata, s obzirom na samu prezentaciju kontakta među diskretnim elementima, moguće je govoriti o koncentriranim te raspodijeljenim kontaktnim silama (slika 15.). Koncentrirane kontaktne sile koje su prisutne u velikom broju modela, metode diskretnih elemenata ostvarene su nizom kontaktnih točaka. Sila u svakoj kontaktnoj točki može se dobiti na temelju konstitutivne zakonitosti ponašanja u kontaktu koji je najčešće zapisan u obliku naprezanje-relativni pomak. Da bi naprezanje duž kontakta bilo dobro opisano, potreban je dovoljan broj kontaktnih točaka. Kod linijskih odnosno površinskih kontakata [94, 96, 97], naprezanje duž kontakta opisano je kontinuiranom funkcijom čime su izbjegnuti numerički problemi koji mogu dovesti do koncentracije napreznja što je vrlo važno u slučajevima u kojima se simulira pojava i razvoj pukotina.



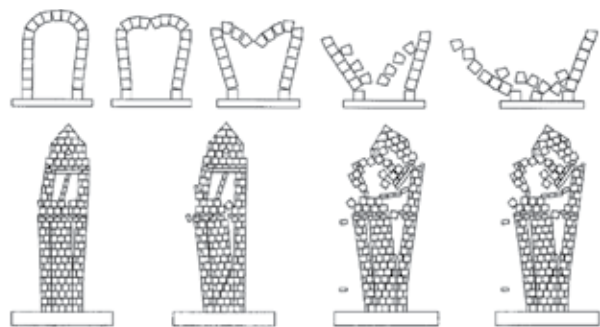
Slika 15. Raspodijeljene i koncentrirane kontaktne sile

Sama priroda metode diskretnih elemenata kojoj je cilj opisati ponašanje blokova koji mogu imati proizvoljne pomake, moguću interakciju između blokova te izraziti nelinearnost u kontaktnim elementima čini tehnike rješavanja preko matrice prezentacije manje atraktivnima i neprikladnima. Upravo iz tog razloga većina numeričkih modela koja se bazira na metodi diskretnih elemenata koristi eksplicitnu numeričku integraciju jednadžbi gibanja u vremenu preuzetu iz modela molekularne dinamike. Kod apsolutno krute prezentacije blokova, gibanje svakog bloka opisano je u 2D s dvije translacije i jednom rotacijom, dok je u 3D opisano s tri translacije i tri rotacije. Kod numeričkih modela koji su usvojili mekanu prezentaciju kontakta koja se zasniva na primjeni *penalty* metode, eksplicitni pristup nameće potrebu za vrlo malim vremenskim korakom kako bi se osigurala numerička stabilnost. Osim eksplicitnog pristupa, neki su numerički modeli koriste implicitnim pristupom te primjenjuju matrice tehnike pri rješavanju sustava jednadžbi [91, 95]. Ovaj pristup omogućuje izbor većeg vremenskog koraka, međutim vrijeme proračuna unutar jednog vremenskog koraka je duže, a usput se često javljaju i problemi vezani za konvergenciju rješenja. Metoda diskretnih elemenata prikladna je za modeliranje zidane konstrukcije na pojednostavljenoj mikrorazini gdje su blokovi predloženi kao diskretni elementi međusobno povezani kontaktnim elementima koji simuliraju prisutnost morta, ili na pravoj mikrorazini gdje su i mort i blokovi diskretizirani s nizom manjih elemenata, samo što su kontaktnim elementima u bloku dana jedna svojstva, kontaktnim elementima u mortu

druga, a kontaktnim elementima između morta i bloka treća svojstva. Njihanje bloka na krutoj podlozi [99-101], statička i dinamička analiza zidanih nosivih zidova (slika 16.) [89, 98, 102], analiza kamenih mostova [103, 104], stabilnost stupova s arhitravom [105-107], analiza kamenih lukova [88, 89, 108], dinamička analiza kamenih zvonika i bazilika (slika 17.) [109, 110] samo su neki primjeri upotrebe metode diskretnih elemenata u analizi zidanih konstrukcija.

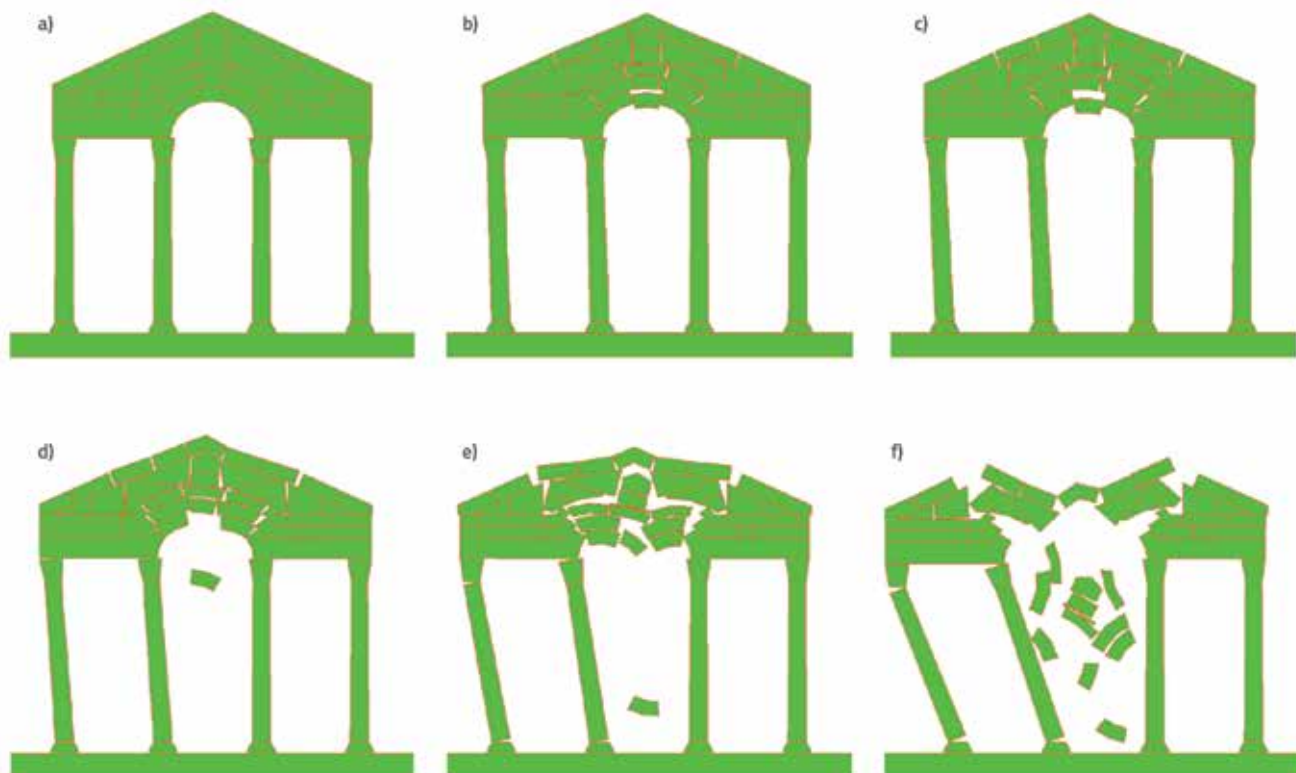


Slika 16. Mehanizam kolapsa kamene kuće s gredom na vrhu zidova (lijevo) i bez grede (desno) dobiven programom 3DEC [98]



Slika 17. Seizmičko ponašanje i način kolapsa za dvije različite zidane konstrukcije izložene potresnom opterećenju [109]

Kod većine prethodno spomenutih numeričkih modela koji se baziraju na metodi diskretnih elemenata blokovi se uglavnom tretiraju kao kruti, što ih čini neprikladnima za analizu onih tipova konstrukcija kod kojih se stanje napreznja i deformacija unutar diskretnog elementa ne može zanemariti. Pretpostavka apsolutno krutih blokova prikladna je za modeliranje onih tipova zidanih konstrukcija do čijeg sloma dolazi uglavnom zbog gubitka stabilnosti koji je posljedica stvaranja mehanizma unutar konstrukcije, što je često slučaj kod starih kamenih konstrukcija koje nemaju veliko predlačno napreznje. Za ovakve probleme, elastična svojstva blokova mogu se koncentrirati u kontaktnim elementima ako se radi o mekim kontaktima ili se mogu zanemariti. Stanje napreznja i deformacija unutar diskretnog elementa može se uzeti na način da se svaki diskretni element diskretizira s vlastitom mrežom konačnih elemenata. U ovom pristupu se metoda konačnih elemenata primjenjuje za izračun polja napreznja i deformacija unutar diskretnog elementa, dok se metoda diskretnih elemenata primjenjuje za proračun kontaktnih sila.



Slika 18. Mehanizam potpunog sloma konstrukcije Protiron pri vršnom ubrzanju $a_g=0.6$ g u vremenu: a) $t=0.0$ s; b) $t=11.91$ s; c) $t=13.27$ s; d) $t=16.33$ s; e) $t=17.86$ s; f) $t=18.54$ s

U posljednje vrijeme pojavio se velik broj numeričkih modela u kojima se nastojalo iskoristiti prednosti metode konačnih i diskretnih elemenata [91, 94, 96, 111-113]. Cundall [111] i Hart [112] su koristili deformabilne blokove s vlastitom mrežom konačnih elemenata: trokuta u 2D i piramida u 3D. Oba numerička koda imaju algoritme za automatsko prepoznavanje te interakciju kontakata. Barbosa [96] je predstavio model diskretno-konačnih elemenata u kojem su deformabilni blokovi predloženi s kvadrilateralnim izoparametarskim konačnim elementima. Petrinic [94] je razvio 2D model koristeći poligonalne blokove diskretizirane mrežom trokutnih konačnih elemenata te krutih diskova. Metoda koju je razvio Mamaghani [113], pod nazivom *Discrete Finite Elements*, također se temeljila na predstavljanju blokova internom mrežom konačnih elemenata. Shi i Goodman [91] razvili su metodu pod nazivom *Discontinuous Deformation Analysis* (DDA) gdje je pretpostavljeno da je stanje naprezanja i deformiranja u deformabilnim blokovima homogeno. Poboljšan model deformabilnosti unutar te metode postignut je pomoću baznih funkcija višeg reda kojima je moguće uzeti u obzir nehomogeno stanje naprezanja i deformiranja unutar bloka ili preko koncepta podblokova u kojem je svaki pojedinačni blok podijeljen na podblokove između kojih je omogućeno raspucavanje [114].

Jedan od pristupa koji koristi prednosti metode konačnih i diskretnih elemenata jest kombinirana metoda konačno-diskretnih elemenata (FEM/DEM) koju je razvio Munjiza

[115, 116]. FEM/DEM metoda namijenjena je prije svega za simuliranje procesa fragmentacije [97, 117, 118] uzimajući u obzir deformabilne blokove koji mogu pucati uslijed čega od jednog bloka tijekom analize može nastati njih više. Blokovi su diskretizirani vlastitom mrežom trokutnih konačnih elemenata između kojih se mogu umetnuti kontaktni elementi u kojima je modelirana materijalna nelinearnost i pomoću kojih je opisana pojava i razvoj pukotina. Kontaktna sila se računaju prema načelu potencijalnih kontaktnih sila uzimajući u obzir Coulombov model suhog trenja. Metoda koristi eksplicitnu numeričku integraciju jednadžbi gibanja u vremenu. FEM/DEM metoda se pokazala učinkovita pri seizmičkoj analizi starih suho zidanih kamenih konstrukcija [119].

7. Zaključak

Opisivanje mehaničkog ponašanja zidanih konstrukcija predstavlja pravi izazov zahvaljujući samoj prirodi zidane konstrukcije koja zbog prisutnosti sljubnica između blokova, koje mogu, a i ne moraju biti popunjene mortom, pokazuje kompleksno i izrazito nelinearno ponašanje. Jedan od bitnih faktora koji utječu na numeričko modeliranje zidanih konstrukcija jest procjena mehaničkih karakteristika materijala. Kod starih kamenih konstrukcijama čije su sljubnice popunjene mortom može se dogoditi da je mort tijekom vremena pod utjecajem atmosferilija i raznih

kemijskih reakcija izgubio svoja svojstva, što znači da je ponašanje takvih konstrukcija vrlo blisko ponašanju suho zidanih kamenih konstrukcija. I u samim kamenim blokovima uslijed promjene temperature, smrzavanja i sl. dolazi do promjene mehaničkih karakteristika koje se očituju u stvaranju početnih pukotina koje je vrlo teško u potpunosti obuhvatiti numeričkim modelom. Drugi važan problem u analizi zidanih konstrukcija je opisivanje geometrije. Naime, brojne srednjovjekovne katedrale i crkve odlikuju se vrlo kompleksnom geometrijom koja se sastoji od kombinacije zakrivljenih 1D elemenata (lukova) s 2D elementima (svodovi) i 3D elementima (kupole). Opisivanje takvih vrlo složenih geometrija zahtijeva 3D numeričke modele s velikim brojem konačnih elemenata što u kombinaciji sa složenim konstitutivnim ponašanjem materijala može znatno produljiti vrijeme proračuna. Problem opisivanja geometrije dodatno je otežan činjenicom da su mnoge povijesne zidane konstrukcije tijekom vremena doživjele deformacije uslijed seizmičkih aktivnosti ili nejednolike deformacije temeljnog tla, što je jedino moguće obuhvatiti vrlo preciznim prostornim geodetskim mjerenjima.

Upravo zbog velike složenosti u modeliranju zidanih konstrukcija, a danas je razvijena široka paleta numeričkih metoda za analizu zidanih konstrukcija koje se razlikuju prema razini točnosti, količini ulaznih podataka, rezultatima koji se žele dobiti, učincima koji se mogu javiti u konstrukciji za određenu pobudu te vremenu trajanja proračuna. Primjena određene metode u velikoj mjeri ovisi i o iskustvu inženjera. U nekim slučajevim vrlo jednostavne metode koje se baziraju na inženjerskom pristupu mogu dati tražene rezultate s vrlo malo uloženeog truda, dok nas s druge strane primjena vrlo

sofisticiranih metoda može uz krive pretpostavljene ulazne parametre navesti na krivi put.

Za potrebe određivanja mehanizma sloma konstrukcija uslijed unaprijed pretpostavljenog opterećenja prikladne su metode graničnih stanja. Njihov nedostatak je nemogućnost analize dinamičkog odgovora konstrukcije u vremenu. Za analizu dinamičkog odgovora jednostavnih konstrukcija kao što su slobodno stojeći stupovi prikladne su dinamičke analitičke metode, međutim uslijed povećanja broja konstrukcijskih elemenata te metode postaju neprikladne zbog velikog broja analitičkih jednažbi. U takvim slučajevima najbolje je primijeniti metode diskretnih elemenata koje su namijenjene za analizu dinamičkog odgovora konstrukcije do čijeg potpunog sloma dolazi uslijed gubitka stabilnosti. Te metode, za razliku od metoda konačnih elemenata, nisu sposobne opisati deformabilnost kao ni stanje naprezanja unutar konstrukcije koje može uzrokovati potpuni slom konstrukcije uslijed prekoračenja čvrstoće materijala. Prednosti metoda konačno-diskretnih elemenata obuhvaćene su metodama konačno-diskretnih elemenata.

U posljednje vrijeme velika se pozornost pridaje razvoju numeričkih modela baziranih na mikrop pristupu koji zahtijevaju detaljno poznavanje mehaničkih karakteristika materijala koje je moguće dobiti skupim eksperimentalnim ispitivanjima. Za sada je primjena takvih numeričkih modela zbog velikih proračunskih zahtjeva ograničena samo na dijelove konstrukcije. Vjerojatno će se u skorij budućnosti razvojem računala takvi modeli koji daju najtočnije rezultate moći primijeniti i za proračun cijelih konstrukcija. Sve dok se to ne dogodi, značajno mjesto u analizi zidanih konstrukcija zauzimat će tehnike homogenizacije koje predstavljaju vezu između modeliranja na mikrorazini i makrorazini.

LITERATURA

- [1] Lourenço, P.B.: Computational strategies for masonry structures, Ph.D. Dissertation, Delft University of Technology, Delft, The Netherlands, 1996.
- [2] Oliveira, D.V.: Experimental and numerical analysis of blocky masonry structures under cyclic loading, Ph.D. Dissertation, University of Minho, Minho, Portugal, 2003.
- [3] Vitruvius: The Ten Books of Architecture, Dover Publications, New York, 1960.
- [4] Poleni, G.: Memorie storiche della gran cupola del tempio Vaticano, Stamperia del Seminario, Padova, 1743.
- [5] Heyman, J.: Couplet's engineering memoirs 1726-33, History and Technology, 1, pp. 21-44, 1976.
- [6] Coulomb, C.A.: Essai sur une application des regles des maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatifs a l'architecture, Mémoires de mathématique et de physique présentés à l'académie royal des sciences per divers savants et lus dans ses assemblées, 1, pp. 343-382, 1773.
- [7] Snell, G.: On the stability of arches, Minutes and Proceedings of the Institution of Civil Engineers, 5, pp. 439-474, 1846.
- [8] Rubió, J.: Lecture on the organic, mechanical and construction concepts of Mallorca Cathedral (in Catalan), Anuario de la Asociación de Arquitectos de Cataluña, Barcelona, 1912.
- [9] Lourenço, P.B.: Computations on historic masonry structures, Prog. Struct. Engng. Mater., 4, pp. 301-319, 2002.
- [10] Fajfar, P.: A non-linear analysis method for performance-based seismic design, Earthquake Spectra, 16(3), pp. 573-592, 2000.
- [11] Housner, G.W.: The behaviour of inverted pendulum structures during earthquakes, Bulletin of the Seismological Society of America, 53 (2), pp. 403-417, 1963.
- [12] Yim, C., Chopra, A.K., Penzien, J.: Rocking response of rigid blocks to earthquakes, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 8, pp. 565-587, 1980.
- [13] Hogan, S.J.: The many steady state responses of rigid block under harmonic forcing, Bulletin Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 19, pp. 1057-1071, 1990.
- [14] Lenci, S., Rega, G.: A dynamical systems approach to the overturning of rocking blocks, Chaos, Solitons and Fractals, 28, pp. 527-542, 2006.

- [15] Shenton, H.W., Jones, N.P.: Base excitation of rigid bodies, II: Periodic slide-rock response, *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, 117, pp. 2307-2328, 1991.
- [16] Tso, W.K., Wong, C.M.: Steady state rocking response of rigid blocks, Part I: Analysis, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 18, pp. 89-106, 1989.
- [17] Yim, S.C.S., Lin, H.: Nonlinear impact and chaotic response of slender rocking objects, *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, 117, pp. 2079-2100, 1991.
- [18] Augusti, G., Sinopoli, A.: Modeling the dynamics of large block structures, *Meccanica*, 17, pp. 195-211, 1992.
- [19] Lipscombe, P.R., Pellegrino, S.: Free Rocking of Prismatic Blocks, *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, 119, pp. 1387-1410, 1993.
- [20] Pompei, A., Scalia, A., Sumbatyan, M.A.: Dynamics of rigid blocks due to horizontal ground motion, *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, 124, pp. 713-717, 1998.
- [21] Scalia, A., Sumbatyan, M.A.: Slide rotation of rigid bodies subjected to a horizontal ground motion, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 25, pp. 1139-1149, 1996.
- [22] Shenton, H.W., Jones, N.P.: Base excitation of rigid bodies, I: Formulation, *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, 117, pp. 2286-2306, 1991.
- [23] Shenton, H.W.: Criteria for initiation of slide, rock, and slide-rock rigid-body modes, *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, 122, pp. 690-693, 1996.
- [24] Sinopoli, A., Sepe, V.: Coupled motion in the dynamic analysis of a three block structure, *Applied Mechanics Reviews*, 46, pp. 185-197, 1993.
- [25] Spanos, P.D., Roussis, P.C., Politis, N.P.A.: Dynamic analysis of stacked rigid blocks, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 21, pp. 559-578, 2001.
- [26] Oppenheim, I.J.: The masonry arch as a four-link mechanism under base motion, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 21, pp. 1005-1017, 1992.
- [27] Clemente, P.: Introduction to the dynamics of stone arches, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 27, pp. 513-522, 1998.
- [28] Heyman, J.: The stone skeleton, *International Journal of Solids and Structures*, 2, 249-279, 1966.
- [29] Carocci, C.F.: Guidelines for the safety and preservation of historical centres in seismic areas, *Historical constructions*, University of Minhi, Guimaraes, pp. 145-165, 2001.
- [30] Heyman, J.: The safety of masonry arches, *International Journal of Mechanical Sciences*, 11, pp. 363-385, 1969.
- [31] Kooharian, A.: Limit analysis of voussoir (segmental) and concrete arches, *Journal of the American Concrete Institute*, 24 (4), pp. 317-328, 1952.
- [32] Harvey, B., Maunder, E.: Thrust line analysis of complex masonry structures using spreadsheets, P. Lourenço and P. Roca (Eds.), *Historical Constructions*, Guimaraes, Portugal, pp. 521-528, 2001.
- [33] Block, P., Ciblac, T., Ochsendorf, J.A.: Real-time limit analysis of vaulted masonry buildings, *Computers and Structures*, 84, pp. 1841-1852, 2006.
- [34] Block, P.: *Equilibrium systems Studies in masonry structure*, MSc Thesis, Massachusetts Institute of Technology, Massachusetts, 2005.
- [35] Giuffrè, A.: Seismic safety and strengthening of historical buildings and urban fabrics, *Proceedings of the 10th World Conference on Earthquake Engineering*, 11, pp. 6583-6596, 1994.
- [36] Giuffrè, A.: Vulnerability of historical cities in seismic areas and conservation criteria, In: Congress 'Terremoti e civiltà abitative', *Annali di Geofisica*, Bologna, 1995.
- [37] Fajfar, P.: Capacity spectrum method based on inelastic demand spectra, *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 28, pp. 979-993, 1999.
- [38] Lagomarsino, S.: On the vulnerability assessment of monumental buildings, *Bulletin of Earthquake Engineering*, 4, pp. 445-463, 2006.
- [39] Roca, P., López-Almansa, F., Miquel, J., Hanganu, A.: Limit analysis of reinforced masonry vaults, *Engineering Structures*, 29, pp. 431-439, 2007.
- [40] Ochsendorf, J.A.: *Collapse of masonry structures*, PhD thesis, Department of Engineering, University of Cambridge, Cambridge, UK, 2002.
- [41] De Luca, A., Giordano, A., Mele, E.: A simplified procedure for assessing the seismic capacity of masonry arches, *Engineering Structures*, 26, pp. 1915-1929, 2004.
- [42] Baggio, C., Trovalusci, P.: Limit analysis for no-tension and frictional three-dimensional discrete systems, *Mechanics of Structures and Machines*, 26 (3), pp. 287-304, 1998.
- [43] Gilbert, M., Melbourne, C.: Rigid-block analysis of masonry structures, *The Structural Engineer*, 72, pp. 356-361, 1994.
- [44] Livesley, R.K.: Limit analysis of structures formed from rigid blocks, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2, pp. 1853-1871, 1978.
- [45] Melbourne, C., Gilbert, M.: The application of limit analysis techniques to masonry arch bridges, *Bridges assessment, management and design*, Barr B.I.G., Evans H.R., Harding J.E. (eds.), Elsevier, Amsterdam, pp. 193-198, 1994.
- [46] Orduña, A., Lourenço, P.B.: Three-dimensional limit analysis of rigid blocks assemblages, Part II: Load-path following solution procedure and validation, *International Journal of Solids and Structures*, 42 (18-19), pp. 5161-5180, 2005.
- [47] Orduña, A., Lourenço, P.: Cap model for limit analysis and strengthening of masonry structures, *Journal of Structural Engineering*, 129 (10), pp. 1367-1375, 2003.
- [48] Orduña, A., Lourenço, P.B.: Three-dimensional limit analysis of rigid block assemblages. Part I: Torsion failure on frictional interfaces and limit analysis formulation, *International Journal of Solids and Structures*, 42(18-19), 5140-5160, 2005.
- [49] Gilbert, M., Casapulla, C., Ahmed, H.M.: Limit analysis of masonry block structures with non-associative frictional joints using linear programming, *Computers and Structures*, 84, pp. 873-887, 2006.
- [50] Molins, C., Roca, P.: Capacity of masonry arches and spatial frames, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 124, pp. 653-663, 1997.
- [51] Belmouden, Y., Lestuzzi, P.: An equivalent frame model for seismic analysis of masonry and reinforced concrete buildings, *Construction and Building Materials*, 23, pp. 40-53, 2009.
- [52] Demirel, I.O.: *A nonlinear equivalent frame model for displacement based analysis of unreinforced brick masonry buildings*, PhD Dissertation, School of natural and applied sciences of middle east technical university, 2010.

- [53] Roca, P., Molins, C., Marí A.R.: Strength capacity of masonry wall structures by the equivalent frame method, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 131(10), pp. 1601–1610, 2005.
- [54] Sima, J.F., Roca, P., Molins, C.: Nonlinear response of masonry wall structure subjected to cyclic and dynamic loading, *Engineering Structures*, 33, pp. 1955–1965, 2011.
- [55] Galasco, A., Lagomarsino, S., Penna, A., Resemini, S.: Non-linear seismic analysis of masonry structures, *Proceedings of the 13th World Conference on Earthquake Engineering*, Vancouver, Canada, 2004.
- [56] Brencich, A., Lagomarsino, S.: A macro-element dynamic model for masonry shear walls, In: Pande GN and Middleton J, ed. *Computer methods in structural masonry - 4*, Proc. of the Int. Symp., E&FN Spon, London, 1998.
- [57] Caliò, I., Marletta, M., Pantò, B.: A new discrete element model for the evaluation of the seismic behaviour of unreinforced masonry buildings, *Engineering Structures*, 40, 327–338, 2012.
- [58] Casolo, S., Peña, F.: Rigid element model for in-plane dynamics of masonry walls considering hysteretic behaviour and damage, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 36, pp. 1029–1048, 2007.
- [59] Chen, S.Y., Moon, F.L., Yi, T.: A macroelement for the nonlinear analysis of in-plane unreinforced masonry piers, *Engineering Structures*, 30, pp. 2242–2252, 2008.
- [60] Mola, F., Vitaliani, R.: Analysis, diagnosis and preservation of ancient monuments: the St. Mark's Basilica in Venice, *Structural Analysis of Historical Constructions*, CIMNE, pp. 166–188, 1997.
- [61] Macchi, G., Ruggeri, M., Eusebio, M., Moncecchi, M.: Structural assessment of the leaning tower of Pisa, *Structural preservation of the architectural heritage*, IABSE, Zürich, Switzerland, pp. 401–408, 1993.
- [62] Macchi, G.: Diagnosis of the façade of St. Peter's Basilica in Rome, P.B. Lourenço and P. Roca (eds): *Historical Constructions*, Universidade do Minho, Guimarães, pp. 309–317, 2001.
- [63] Croci, G.: The Colosseum: safety evaluation and preliminary criteria of intervention, *Structural Analysis of Historical Constructions*, Barcelona 1995.
- [64] Rivieccio, P.G.: Homogenization Strategies and Computational Analyses for Masonry Structures via Micro-mechanical Approach, Ph.D. Dissertation, University of Napoli Federico II Engineering Faculty, 2006.
- [65] Akhaveissy, A.H., Milani, G.: Pushover analysis of large scale unreinforced masonry structures by means of a fully 2D non-linear model, *Construction and Building Materials*, 41, pp. 276–295, 2013.
- [66] Asteris, P.G., Tzamtzis, A.D.: Non-Linear Analysis of Masonry Shear Walls, *Proceedings of the 6th International Masonry Conference*, London, pp. 1–6, 2002.
- [67] Lourenço, P.B., Borst, R., De Rots, J.G.: A plane stress softening plasticity model for orthotropic materials, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 40, pp. 4033–4057, 1997.
- [68] Lourenço, P.B., Rots, J.G., Blaauwendraad J.: Continuum model for masonry: Parameter estimation and validation, *Journal of Structural Engineering*, 124, pp. 642–652, 1998.
- [69] Radnić, J., Harapin, A., Matešan, D., Trogrić, B., Smilović, M., Grgić, N., Baloević, G.: Numerical model for static and dynamic analysis of masonry structure, *GRAĐEVINAR* 63 (2011), pp. 1777–1788.
- [70] Pela, L., Aprile, A., Benedetti, A.: Seismic assessment of masonry arch bridges, *Engineering Structures*, 31, pp. 1777–1788, 2009.
- [71] Berto, L., Saetta, A., Scotta, R., Vitaliani, R.: Orthotropic damage model for masonry structures, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 55(2), pp. 127–157, 2002.
- [72] Clemente, R., Roca, P., Cervera, M.: Damage model with crack localization - application to historical buildings, *Structural analysis of historical constructions*, New Delhi, pp. 1125–1135, 2006.
- [73] Pela, L., Cervera, M., Roca, P.: An orthotropic damage model for the analysis of masonry structures, *Construction and Building Materials*, (in press), 2012.
- [74] Radnić, J., Harapin, A., Smilović, M., Grgić, N., Glibić, M.: Static and dynamic analysis of the old stone bridge in Mostar, *GRAĐEVINAR*, 64 (8), pp. 655–665, 2012.
- [75] Mallardo, V., Malvezzi, R., Milani, E., Milani, G.: Seismic vulnerability of historical masonry buildings: a case study in Ferrara, *Engineering Structures*, 30, pp. 2223–2241, 2008.
- [76] Pegon, P., Pinto, A.V., Gérardin, M.: Numerical modelling of stone-block monumental structures, *Computers & Structures*, 79 (22–25), pp. 2165–2181, 2001.
- [77] Calderini, C., Lagomarsino, S.: Continuum Model for In-Plane Anisotropic Inelastic Behavior of Masonry, *Journal of Structural Engineering*, 134(2), pp. 209–220, 2008.
- [78] Lofti, H.R., Shing, P.B.: Interface model applied to fracture of masonry structures, *Journal of Structural Engineering*, 120 (1), pp. 63–80, 1994.
- [79] Page, A.W.: Finite element model for masonry, *Journal of the Structural Division*, 104(8), pp. 1267–1285, 1978.
- [80] Lourenço, P.B., Rots, J.G.: A multi-surface interface model for the analysis of masonry structures, *Journal of the Engineering Mechanics*, 123, pp. 660–668, 1997.
- [81] Macorini, L., Izzuddin, B.A.: A non-linear interface element for 3D mesoscale analysis of brick-masonry structure, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 85(12), pp. 1475–1608, 2011.
- [82] Gambarotta, L., Lagomarsino, S.: Damage models for the seismic response of brick masonry shear walls, Part I: the mortar joint model and its applications, *Bulletin Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 26(4), pp. 423–439, 1997.
- [83] Gambarotta, L., Lagomarsino, S.: Damage models for the seismic response of brick masonry shear walls, Part II: the continuum model and its application, *Bulletin Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 26(4), pp. 441–462, 1997.
- [84] Gambarotta, L., Lagomarsino, S.: Modelling unreinforced brick masonry walls, *Proceedings of the US-Italy Workshop on guidelines for seismic evaluation and rehabilitation of unreinforced masonry buildings*, Pavia, pp. 4–29, 1994.
- [85] Almeida, C.: Análise do comportamento da igreja do Mosteiro da Serra do Pilar sob a acção dos sismos, MSc Thesis, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal, 2000.
- [86] Cundall, P.A., Hart, R.D.: Numerical modelling of discontinua, In *Proceedings of the First US Conference on Discrete Element Methods*, CSM Press, Colorado, 1989.
- [87] Cundall, P.A.: A computer model for simulating progressive large scale movements in blocky rock systems, In *Proceedings of the Symposium on Rock Fracture (ISRM)*, 1, paper II-8, 1971.
- [88] Lemos, J.V.: Discrete element modelling of the seismic behaviour of stone masonry arches, *Proceedings of the Fourth International Symposium on Computer Methods in Structural Masonry*, pp. 220–227, 1998.

- [89] Pagnoni, T.: Seismic analysis of masonry and block structures with the discrete element method, In: Proc 10th European conference on earthquake engineering, 3, pp. 1674-1694, 1994.
- [90] Sincaian, G.E.: Seismic behaviour of blocky masonry structures. A discrete element method approach, PhD Dissertation, IST, Lisbon, Portugal, 2001.
- [91] Shi, G.H., Goodman, R.E.: Discontinuous deformation analysis- A new method for computing stress, strain and sliding of block systems, In Key Questions in Rock Mechanics, Balkema, pp. 381-393, 1988.
- [92] Cundall, P.A., Strack, O.D.L.: A discrete numerical model for granular assemblies, *Geotechnique*, 29, pp. 47-65, 1979.
- [93] Lemos, J.V.: Modeling of historical masonry with discrete elements, In *Computational Mechanics - Solids, Structures and Coupled Problems*, Springer, pp. 375-392, 2006.
- [94] Petrinic, N.: Aspects of discrete element modelling involving facet-to-facet contact detection and interaction, Ph.D. Dissertation, University of Wales, U.K., 1996.
- [95] Acary, V., Jean, M.: Numerical simulation of monuments by the contact dynamics method, In *Monument 98 – Workshop on Seismic Performance of Monuments*, Lisbon, LNEC, pp. 69-78, 1998.
- [96] Barbosa, B.E.: Discontinuous structural analysis, In *Proceedings of the 11th World Conference on Earthquake Engineering*, Elsevier, pp. 830, 1996.
- [97] Munjiza, A., Owen, D.R.J., Bicanic, N.: A combined finite-discrete element method in transient dynamics of fracturing solids, *Engineering Computations*, 12, pp. 145-174, 1995.
- [98] Alexandris, A., Protopapa, E., Psycharis, I.: Collapse mechanisms of masonry buildings derived by distinct element method, 13th World Conference on Earthquake Engineering, Vancouver, B.C., Canada, Paper No. 548, 2004.
- [99] DeJong, M.J.: Seismic Assessment Strategies for Masonry Structures, PhD Dissertation, Massachusetts Institute of Technology, Massachusetts, USA, 2009.
- [100] Pena, F., Prieto, F., Laurenco, P.B., Campos Costa, A., Lemos, J.V.: On the dynamics of rocking motions of single rigid-block structures, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 36, pp. 2383-2399, 2007.
- [101] Vasconcelos, G., Lourenço, P.B.: Experimental characterization of stone masonry in shear and compression, *Construction and Building Materials*, 23, pp. 3337-3345, 2009.
- [102] Schlegel, R., Rautenstrauch, K.: Failure analysis of masonry shear walls, *Numerical Modelling of Discrete Materials*, pp.15-18, 2004.
- [103] Bičanić, N., Stirling, C., Pearce, C.J.: Discontinuous modelling of masonry bridges, *Computational Mechanics*, 31 (1-2), pp. 60-68, 2003.
- [104] Lemos, J.V.: Assessment of the ultimate load of a masonry arch using discrete elements, *Computer Methods in Structural Masonry*, pp. 294-302, 1995.
- [105] Papantonopoulos, C., Psycharis, I.N., Papastamatiou, D.Y., Lemos, J.V., Mouzakis, H.: Numerical prediction of the earthquake response of classical columns using the distinct element method, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 31, pp. 1699-1717, 2002.
- [106] Psycharis, I.N., Lemos, J.V., Papastamatiou, D.Y., Zambas C., Papantonopoulos C.: Numerical study of the seismic behaviour of a part of the Parthenon Pronaos, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 32, pp. 2063-2084, 2003.
- [107] Psycharis, I.N., Papastamatiou, D.Y., Alexandris A.P.: Parametric investigation of the stability of classical columns under harmonic and earthquake excitations, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 29, pp. 1093-1109, 2000.
- [108] Pagnoni, T., Vanzi, I.: Experimental and numerical study of the seismic response of block structures, In: *Computer methods in structural masonry*, pp. 213-222, 1995.
- [109] Azevedo, J., Sincaian, G., Lemos, J.V.: Seismic behaviour of blocky masonry structures, *Earthquake Spektra*, 16, pp. 337-365, 2000.
- [110] Drei, A., Fontana, A.: Response of multiple-leaf masonry arch-tympani to dynamic and static loads, In C.A. Brebbia (Ed.), *Structural Studies, Repairs, and Maintenance of Heritage Architecture*, 8, pp. 267-276, 2003.
- [111] Cundall, P.A.: Formulation of a three-dimensional distinct element model – Part I: A scheme to detect and represent contacts in a system composed of many polyhedral blocks, *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 25(3), pp. 107-116, 1988.
- [112] Hart, R.D., Cundall, P.A., Lemos, J.V.: Formulation of a three-dimensional distinct element model-Part II: Mechanical calculations, *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 25(3), 117-125, 1988.
- [113] Mamaghani, I.H.P., Aydan, O., Kajikawa, Y.: Analysis of masonry structures under static and dynamic loading by discrete finite element method, *Journal of Structural Mechanics and Earthquake Engineering*, 16, pp. 75-86, 1999.
- [114] Pearce, C.J., Thavalingam, A., Liao, Z., Bičanić, N.: Computational aspects of the discontinuous deformation analysis framework for modelling concrete fracture, *Engineering Fracture Mechanics*, 65, pp. 283-298, 2000.
- [115] Munjiza, A., Knight, E.E., Rouiger, E.: *Computational Mechanics of Discontinua*, John Wiley & Sons, 2012.
- [116] Munjiza, A.: *The combined finite-discrete element method*, John Wiley & Sons, 2004.
- [117] Munjiza, A., John N.W.M.: Mesh size sensitivity of the combined FEM/DEM fracture and fragmentation algorithms, *Engineering Fracture Mechanics*, 69 (2), pp. 281-295, 2001.
- [118] Smoljanović, H.; Živaljić, N.; Nikolić, Ž.: Nelinearna analiza građevinskih konstrukcija kombiniranom metodom konačno-diskretnih elemenata, *GRAĐEVINAR*, 65 (4), str. 331-344, 2013.
- [119] Smoljanović, H.; Živaljić, N.; Nikolić, Ž.: A combined finite-discrete element analysis of dry stone masonry structures, *Engineering Structures*, 52, pp. 89-100, 2013.