Prolegomena 12 (1) 2013: 103–119

SANDRO SKANSI
Bolnička 34 f, 10090 Zagreb
skansi.sandro@gmail.com

PREGLEDNI RAD / PRIMLJENO: 23–01–13 PRIHVAĆENO: 27–04–13

SAŽETAK: U ovom članku predstavljamo Da Costine sustave C_ω i C_1 (1974: 497–510). Da bismo ilustrirali specifična svojstva ovih sustava, koristimo mnogobrojne primjere te iznosimo poznatu konstrukciju kvazimatrica. Uz konstrukciju, dajemo svoj dokaz adekvatnosti (pouzdanosti) kvazimatrica u C_1, pri čemu je ovaj dokaz moguće proširiti na cijelu C_n hijerarhiju.

KLJUČNE RIJEČI: Adekvatnost, kvazimatrice, logike formalne nekonzistetnosti, pouzdanost.

1. Uvod

Od svih neklasičnih logika, parakonzistetne su logike možda najdulje bile smatrane tabu temom u logičkim, filozofskim i matematičkim krugovima. Razlog tome možemo naći u kanonizaciji klasične logike kao relevantne metodologije matematike još u osmoj propoziciji Euklidovih elemenata (Euklid 2000: 261–262) koja koristi indirektan dokaz s ciljem deriviranja protuslovlja, odnosno dokaz propozicije *P* temeljem dokaza kontradikcije iz propozicije ne-*P*. Za indirektan dokaz ove vrste možemo reći da je glavna vidljiva odrednica klasične logike (odnosno, preciznije, *klasične negacije* u logici), jer često, posebno u ranijim tekstovima, logika nije eksplicirana aksiomatski.[2]

Drugu klasu logika, koja zajedno s parakonzistentnim logikama daje klasičnu logiku, tvore intuicionističke ili parakompletne logike.[3] Zahtjevi

[1] Velika zahvala ide dvoje anonimnih recenzenata na korisnim savjetima i kritikama koji su uvelike doprinijeli kvaliteti ovog rada. Za sve greške i nedorečenosti koje su ostale autor se smatra isključivim krivcem.

[2] Pri čemu želimo naglasiti da se logika ne mora nužno eksplicirati aksiomatski, ali u suvremenoj je logici ovaj način eksplikacije postao standardan.

[3] Ovo je očito ako se uzmu zajedno parakonzistentni i intuicionistički aksiomi i iz takve proširene teorije dokažu kao teoremi aksiomi klasične logike.

intuicionizma za većom rigoroznosti često stavljaju njihovu "suprotnost", parakonzistentne logike, na glas kao manje rigorozne od klasične, što nije istina, jer u parakonzistentnim logikama isto ne postoji indirektan dokaz unutar kojeg se derivira protuslovlje odnosno kontradikcija. Razlog tome je jednostavan: u parakonzistentnim sustavima, baš zato što su parakonzistentni, iz kontradikcije ništa osobito ne slijedi.

Da Costa u (1974: 497–510) detaljno razlaže motivaciju za proučavanje ovih neklasičnih sustava. Definirajmo prvo dva opća svojstva nekog formalnog sustava[4] *S*:

- *Konzistentnost i nekonzistentnost*: Sustav *S* je nekozistentan akko postoji formula φ takva da $\vdash_S \varphi$ i $\vdash_S \neg \varphi$. Sustav je konzistentan akko nije nekonzistentan.
- *Trivijalnost i netrivijalnost*:[5] Sustav S je trivijalan akko svaka formula iz *S* je i dokaziva u *S* (N.B. pritom ne govorimo o aksiomima *S*, nego doslovno o svakoj formuli iz *S*), odnosno za svaku formulu φ sustava *S*, $\vdash_S \varphi$. Sustav je netrivijalan akko nije trivijalan.

Ako gledamo sustave temeljene na klasičnoj logici, njihova nekozistentnost implicira trivijalnost, a trivijalnost na vrlo očit način implicira nekonzistentnost. Ako imamo nekonzistentan sustav, nas ne smeta njegova nekonzistentnost kao takva, nego nas smeta trivijalnost koju nekonzistentnost implicira. Ako to želimo izbjeći, kako bismo nastavili s proučavanjem (moguće) nekonzistentnih sustava, imamo dvije osnovne mogućnosti: ili uzmimo trovrijednosnu logiku, takvu da prihvatimo srednju vrijednost u značenju "i istinito i neistinito", ili odbacimo klasični princip *ex falso quodlibet*. Ovaj princip imamo u intuicionističkoj i klasičnoj logici:[6] $(P \wedge \neg P) \rightarrow Q$. C_n sustavi čine ovo potonje. Glavni razlog zašto bismo odabrali taj pristup leži u želji da zadržimo neka povoljna metateorijska svojstva, koja inače moramo odmah napustiti, poput eliminacije reza. Lakoća u odbacivanju principa *ex falso quodlibet* je prividna. Povlači mnoge poslijedice, ali s druge strane, logike formalne nekonzistentnosti nisu prve dovele taj princip u pitanje, i mnogi sumnjaju u njegovu vrijednost kao intuitivnog pravila.

Ako želimo proučavati nekonzistentne sustave općenito, trebat će nam pozadinska logika koja će nam to omogućiti. Treba nam logika koja će dozvoliti da iz nekog sustava izvlačimo paradokse, ali da pozadinski

---

[4] U ovom radu pod pojmom *formalan sustav* razumijemo skup aksioma ili pravila izvoda. Sustav ne definiramo kroz jezik jer nam taj pristup nije potreban.

[5] Pojam *trivijalnost* koristimo u skladu s (Da Costa 1974: 497–510), premda odabir termina zbog konotacija možda nije najsretniji.

[6] Pritom u klasičnoj logici imamo dodatno mogućnost odbacivanja neke premise.

sustav ne postane trivijalan. U pogledu korisnosti i smislenosti ovoga zanimljiva je Da Costina paralela s neeuklidskim geometrijama: proučavanje nekonzistentnih sustava moglo bi dovesti do nekih korelacija i općih rezultata, pri čemu bi konzistentni sustavi bili tek elementarni slučajevi jedne šire slike. Na ovo možemo gledati kao na svojevrsni manifest pristupa C_n sustavima kao sustavima neklasične logike.

Logike formalne nekonzistentnosti, pa time i C_n sustavi, dio su jedne šire klase logika koje se nazivaju parakonzistentnim logikama. Parakonzistentne su logike one logike u kojima ne vrijedi princip *ex falso quodlibet*, koji se još naziva jakom eksplozivnošću (Robles, Mendez 2010: 442–66).

Pravilo o isključenom srednjem je aksiom C_n sustava izraženih u Hilbertovom sustavu, a da bismo jasno pokazali da *ex falso quodlibet* nije pravilo, trebali bismo napraviti Gentzenov sustav za C_n ili sustav prirodne dedukcije. Ako se zadržimo na Hilbertovom sustavu, morali bismo pokazati da se ne skriva iza bilo koje kombinacije aksioma.

Napomenimo da su C_n sustavi dvovrijednosni, ali nisu istinitosno funkcijski. Dodatno, u ovom radu nećemo razmatrati pune C_n sustave, nego ćemo prikazati sustav C_1 i prijelaz na sustav C_2 što smatramo ilustracijom za opće funkcioniranje sustava unutar C_n hijerarhije.

2. Sustavi C_ω i C_1

Osnovni su simboli C_1 sustava:

- a, b, c, a_1,… su atomarne formule (metavarijable za atomarne formule su A, B, C, A_1,…, a metavarijable za formule općenito su F, P, Q, R, S, F_1,…)
- poveznici $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$ (metavarijable za dvomjesne poveznike su $\star$, $\star_1$,…)
- pomoćni simboli (,).

Atomarne formule su formule. Ako su P i Q formule, onda su $\neg P$, $(P \wedge Q)$, $(P \vee Q)$ i $(P \rightarrow Q)$ formule. Vanjski par zagrada izostavljamo. Definiramo sljedeći poveznik prateći (Da Costa 1974): $P^*{:} = \neg(P \wedge \neg P)$.

Sheme su aksioma C_1 predstavljene u (Da Costa 1974: 497–510), te ih ovdje ponavljamo. Jezgru C_1 sustava čini Int^+.

(1) $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$

(2) $(P \rightarrow Q) \rightarrow ((P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R))$

(3) $P \rightarrow (Q \rightarrow (P \wedge Q))$

(4) $(P \wedge Q) \rightarrow P$

(5) $(P \land Q) \to Q$

(6) $\mathrm{P} \to (\mathrm{P} \lor \mathrm{Q})$

(7) $\mathrm{Q} \to (\mathrm{P} \lor \mathrm{Q})$

(8) $(\mathrm{P} \to \mathrm{R}) \to ((\mathrm{Q} \to \mathrm{R}) \to ((\mathrm{P} \lor \mathrm{Q}) \to \mathrm{R}))$

Pravilo izvođenja *modus ponens*:

$$\frac{\mathrm{P} \quad \mathrm{P} \to \mathrm{Q}}{\mathrm{Q}}$$

Tada, prema (Da Costa 1974: 497–510) C_ω: = $Int^+ \cup (9) \cup (10)$

(9) $P \lor \neg P$

(10) $\neg\neg P \to P$

Konačno C_1: = $C_\omega \cup (11) \cup (12) \cup (13) \cup (14)$

(11) $Q^* \to ((P \to Q) \to ((P \to \neg Q) \to \neg P))$

(12) $(P^* \land Q^*) \to (P \land Q)^*$

(13) $(P^* \lor Q^*) \to (P \lor Q)^*$

(14) $(P^* \to Q^*) \to (P \to Q)^*$

Razlog zašto raspisujemo cijeli Int^+ a ne stavljamo samo aksiome (1), (2) i pravilo *modus ponens* jest taj što u C_ω (i ostalim C_n sustavima općenito) negacija nije dovoljno jaka da zajedno s još jednim od $\land$, $\lor$, $\to$ može definirati ostale operatore.

Int^+ ne zahtijeva dodatne komentare osim napomene da se radi o aksiomima minimalne logike,[7] bez ijednog aksioma koji bi govorio o negaciji. Zanimljivo postaje kada dodajemo (9) i (10) da bismo dobili C_ω. Aksiom (9) je zapis zakona isključenja trećeg, dok je aksiom (10) aksiom stabilnosti. Oboje su atipični za intuicionističke sustave i kada im se dodaju pretvaraju sustav u klasičnu logiku, dok temeljnog teorema intuicionističke i klasične logike $\neg(P \land \neg P)$ nema. U tom smislu, na C_ω možemo gledati kao na sustav koji je komplementaran uobičajenim intuicionističkim sustavima i s njima spojen daje klasičnu logiku.

Kada gledamo aksiome C_1 sustava, intuitivno možemo čitati F^* kao "*F* se ponaša klasično". Ovime možemo lakše komentirati što aksiomi (11)–(14) tvrde. (11) aksiom je svakako najzanimljiviji, jer tvrdi da, ako se neka formula Q ponaša klasično i možemo ju derivirati uz pretpostavku

[7] Pod ovim pojmom razumijemo minimalnu intuicionističku ili Johanssonovu logiku.

P, i ako iz iste pretpostavke možemo derivirati i njenu negaciju, onda je $\neg P$ derivabilan iz takve "kontradikcije".

Ostala tri aksioma tvrde samo da ako se komponente (npr.) neke konjunkcije ponašaju klasično, tada se cijela konjunkcija ponaša klasično. Analogno za disjunkciju i implikaciju.

Napomenimo da FORM označava skup svih formula, a Γ, Δ će označavati (proizvoljne) skupove formula odnosno podskupove od FORM. Pojam dokaza, teorema, izvoda, te dokaz teorema dedukcije, preuzimamo iz (Vuković 2009), uz minimalne modifikacije. Ovdje ćemo te pojmove definirati za C_ω, ali se ovo prirodno proširuje na bilo koji C_n sustav.

Definicija 1. *Kažemo da je niz formula* $P_1, \ldots, P_n$ *dokaz za formulu* P *u sustavu* C_ω *ako vrijedi:*

1. *formula* P_n *je upravo* P, *odnosno* $P_n = P$;
2. *za svaki* $k \in 1, \ldots, \mathrm{n}$ *formula* P_k *je ili aksiom, ili je nastala primjenom pravila modus ponens na neke formule* P_i *i* P_j, *gdje su* $i, j < k$.

Kažemo da je formula P *teorem sustava* C_ω *(označavamo* $\vdash_{C\omega} P$ *ili kraće* $\vdash P$*), ako u* C_ω *postoji dokaz za* P.

Definiramo izvod. Za razliku od dokaza govorimo o izvodu kada imamo neki skup formula Γ iz kojeg izvodimo (deriviramo) neku formulu P. Dokaz možemo shvatiti kao poseban slučaj izvoda pri čemu $\Gamma = \emptyset$.

Definicija 2. *Neka je* Γ *proizvoljan skup formula sustava* C_ω, *a* P *neka formula. Kažemo da je niz formula* $P_1, \ldots, P_n$ *izvod iz skupa* Γ *formule* P *u sustavu* C_ω *(označavamo* $\Gamma \vdash C_\omega P$ *ili kraće* $\Gamma \vdash P$*) ako vrijedi:*

1. *formula* P_n *je upravo formula* P, *odnosno* $P_n \equiv P$;
2. *za svaki* $k \in \{1, \ldots, \mathrm{n}\}$ *vrijedi barem jedno od sljedećeg:*
   (a) P_k *je aksiom sustava* C_ω,
   (b) $P_k \in \Gamma$ *(tada formulu* P_k *nazivamo pretpostavkom)*,
   (c) *formula* P_k *je nastala iz nekih* P_i, P_j $(i,j < k)$ *pomoću pravila modus ponens*.

3. Semantika C_ω

Semantika C_ω je specifična, zbog specifičnosti negacije. Napominjemo da u prvom dijelu definicije formule $P_1, \ldots, P_n$ od kojih se kreće dobivaju 0 ili 1 kao istinitosnu vrijednost, a zatim se proširuje na njihove nadformule prema *val*(1) – *val*(5). Intuitivno $P_1, \ldots, P_n$ možemo tumačiti kao atomarne formule, no ne želimo nametnuti ovo tumačenje, budući da ovo mogu biti bilo koje formule.

Definicija 3. (ω-valuacija). *Neka je* $v_\omega : \{P_1,\dots, P_n\} \rightarrow \{0,1\}$ *proizvoljna funkcija. Tada svako njeno proširenje takvo da*

val(1) *Ako* $v_\omega(P) = 0$ *onda* $v_\omega(\neg P) = 1$

val(2) *Ako* $v_\omega(P) = 0$ *onda* $v_\omega(\neg\neg P) = 0$

val(3) $v_\omega(P \rightarrow Q) = 1$ *ako i samo ako* $v_\omega(P) = 0$ *ili* $v_\omega(Q) = 1$

val(4) $v_\omega(P \wedge Q) = 1$ *ako i samo ako* $v_\omega(P) = 1$ *i* $v_\omega(Q) = 1$

val(5) $v_\omega(P \vee Q) = 1$ *ako i samo ako* $v_\omega(P) = 1$ *ili* $v_\omega(Q) = 1$

nazivamo ω-valuacijom za C_ω. *Ovo proširenje postoji, no nije jedinstveno (npr. slučaj gdje tražimo proširenje s A (atomaran) na ¬A, pri čemu* $v_\omega(A) = 1$ *nije jedinstveno definiran pa postoje dva proširenja* $v_\omega(\neg A) = 1$ *i* $v_\omega(\neg A) = 0$).

Dajemo dokaz adekvatnosti (pouzdanosti) za semantiku C_ω s obzirom na aksiome.

Lema 1. *Za svaku formulu P vrijedi: Ako* $\vdash C_\omega P$*, onda za svaku ω-valuaciju* v_ω *vrijedi* $v_\omega(P) = 1$.

Dokaz. Trebamo prvo provjeriti da su aksiomi valjani, a zatim da *modus ponens*, kao jedino pravilo dokazivanja u C_ω, čuva valjanost. Kako su $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ naslijeđeni iz Int^+, a adekvatnost Int^+ s obzirom na ω-valuacije *val*(3) –*val*(5) nije problematična, fokusiramo se na aksiome specifične za C_ω: (9) i (10).

Dokazujemo da za svaku ω-valuaciju v_ω vrijedi $v_\omega(P \vee \neg P) = 1$. Neka $v_\omega(P) = 1$ tada prema *val*(5) slijedi $v_\omega(P \vee \neg P) = 1$. Neka $v_\omega(P) = 0$, tada prema *val*(1) slijedi $v_\omega(\neg P) = 1$, pa prema *val*(5) slijedi $v_\omega(P \vee \neg P) = 1$.

Sada dokazujemo da za svaku ω-valuaciju v_ω vrijedi $v_\omega(\neg\neg P \rightarrow P) = 1$. Neka $v_\omega(P) = 1$, tada prema *val*(3) slijedi $v_\omega(\neg\neg P \rightarrow P) = 1$. Neka $v_\omega(P) = 0$, tada prema *val*(2) slijedi $v_\omega(\neg\neg P) = 0$, pa prema *val*(3) slijedi $v_\omega(\neg\neg P \rightarrow P) = 1$.

Preostaje nam još dokazati da *modus ponens* čuva valjanost, odnosno za sve *P*, *Q* ako $v_\omega(P) = 1$ i $v_\omega(P \rightarrow Q) = 1$ onda $v_\omega(Q) = 1$. Kako je ovaj dio dokaza identičan za Int^+ (i klasičnu logiku), ne raspisujemo.

4. Semantika C_1

U ovom odjeljku dajemo osnovnu skicu definicije semantike C_1 sustava, koja je prikazana i obrađena prvenstveno u radovima (Da Costa 1974: 497–510), (Da Costa, Alves 1977: 621–30), (Loparić, Alves 1980: 161–172) i (Carnielli, Marcos 1999: 375–90). Kako su ovi radovi u potpunosti ili skoro u potpunosti posvećeni semantici sustava logike formalne nekonzistetnosti, ne prenosimo točne stranice.

Definicija 4. 1-*valuacija* C_1 *je funkcija* $v_1 : FORM_{C1} \rightarrow \{0,1\}$ takva da:

val(1) *Ako* $v_1(P) = 0$ *onda* $v_1(\neg P) = 1$

val(2) *Ako* $v_1(\neg\neg P) = 1$ *onda* $v_1(P) = 1$

val(3) *Ako* $v_1(Q^*) = v_1(P \rightarrow Q) = v_1(P \rightarrow \neg Q) = 1$ *onda* $v_1(P) = 0$

val(4) $v_1(P \rightarrow Q) = 1$ *ako i samo ako* $v_1(P) = 0$ *ili* $v_1(Q) = 1$

val(5) $v_1(P \wedge Q) = 1$ *ako i samo ako* $v_1(P)$=1 *i* $v_1(Q) = 1$

val(6) $v_1(P \vee Q) = 1$ *ako i samo ako* $v_1(P) = 1$ *ili* $v_1(Q) = 1$

val(7) *Ako* $v_1(P^*) = v_1(Q^*) = 1$ *onda* $v_1((P \vee Q)^*) = v_1((P \wedge Q)^*) = v_1((P \rightarrow Q)^*) = 1$

val(8) $v_1(P) = v_1(\neg \mathrm{P})$ *ako i samo ako* $v_1(\neg P^*) = 1$

Uvjet *val*(8) nije iskazan u ranijim radovima o C_n sustavima (Da Costa 1974: 497–510), (Da Costa, Alves 1977: 621–30), ali se uzima u kasnijim radovima, u kojima se C_1 prikazuje kao integralni dio C_n hijerarhije poput (Carnielli, Marcos 1999: 375–90), a ne kao odvojeni sustav. *val*(8) nije nadodana popisu iz (Carnielli, Marcos 1999: 375–90), već se tamo umjesto *val*(8) naziva *val*[*vii*]. S pragmatične strane, priklanjamo se popisu u (Carnielli, Marcos 1999: 375–90) i ovu valuaciju uključujemo jer nam je potrebna za dokaz adekvatnosti kvazimatrica.

Definicija 5. (*Bifurkacija*): *Za sve F, ako* $v_1(F) = 1$, *onda proširenje na* $\neg F$ *daje najviše dvije moguće valuacije*: $v_1(\neg F) = 0$ *i* $v'_1(\neg F) = 1$.

Kada govorimo o semantici, koristit ćemo standardnu notaciju: umjesto $v_1(F) = 1$ pisat ćemo $v \vDash_1 F$. U ovakvim ćemo slučajevima reći da je F zadovoljena funkcijom v. F je nezadovoljena ako i samo ako F nije zadovoljena. Ako bilo koji v zadovoljava F, reći ćemo da je F valjana formula, odnosno tautologija. Nadalje, ako je Γ skup formula, pišemo $v \vDash_1 \Gamma$ akko $v \vDash_1 F$ za sve $F \in \Gamma$ i kažemo da je v propozicijski model za Γ. F je logička posljedica Γ pišemo $\Gamma \vDash_1 F$ akko $v \vDash_1 F$ za svaki model v za Γ. Drugim riječima, $\Gamma \vDash_1$ F akko svaka v koja čini sve članove Γ istinitim, čini i F istinitom.

Propozicija 1. $\{P\} \vDash Q$ *ako i samo ako* $\vDash P \rightarrow Q$.

Dokaz. Ako $\{P\} \vDash Q$, onda po definiciji $\vDash$ ako je P istinito, onda je i Q istinito. Prema semantici implikacije, uz te uvjete je $P \rightarrow Q$ istinito, dakle $\vDash P \rightarrow Q$. Ako $\vDash P \rightarrow Q$, tada nema slučaja gdje je P istinito a Q neistinito pa prema definiciji $\vDash$ vrijedi $\{P\} \vDash Q$.

5. Kvazimatrice

Kostrukcija kvazimatrica opisana je u (Da Costa 1974: 497–510) i (Da Costa, Alves 1977: 621–30), ali najjasnije u (Loparić, Alves 1980: 161–172). Premda izraz "kvazimatrica" djeluje donekle neobično, radi se o uobičajenom terminu u literaturi za ove specifične istinitosne tablice za C_n sustava, pa ga zato zadržavamo. U konstrukciji kvazimatrica ćemo za razliku od uobičajene prakse u literaturi o C_n sustavima da se prvo pišu vrijednosti 0 a zatim 1, pisati vrijednosti kao kod klasične logike, drugim riječima prvo ćemo upisivati 1 a onda 0.

Definicija 6. *Neka je P formula i neka su $P_1,\ldots, P_n$ njene podformule. Tada skup Γ_P koji sadrži sve P_i i $\neg P_i$, $1 \le i \le n$ nazivamo skupom potomaka (*eng. descendant*) od P. Za neki $A \in \Gamma_P$ kažemo da je potomak od P.*

Definicija 7. (Regularni niz formula). *$P_1,\ldots, P_k$ naziva se regularnim nizom formula ako:*[8]

1. *za $1 < i \le k$, za svaki Q koji je potomak od P_i, postoji j, takav da $j < i$ i $P_j = Q$*
2. *ako $P_i = P_j$, tada $i = j$*

Ideja iza ove definicije jest da za svaki P_k definiramo niz potomaka, ali tako da budu uređeni prema formacijskom redoslijedu. Zato se prvo koncentriramo na bilo koji P_i, $i \le k$ i onda zahvaćamo njegove potomke, pa zatim prelazimo na P_{i+1} zahvaćamo njegove i tako dok ne dođemo do P_k. Uzmimo na primjer da je $P_k = (A \wedge B) \vee \neg C$. Tada će regularan niz $P_1,\ldots, P_k$ biti $\langle A, B, C, \neg A, \neg B, \neg C, A \wedge B, \neg(A \wedge B), \neg\neg C, (A \wedge B) \vee \neg C \rangle$.

Definicija 8. (Konstrukcija kvazimatrica). (Loparić, Alves 1980: 161–172)

Kvazimatrica stupnja n za regularni niz $P_1,\ldots, P_k$ sastavljenog od C_n formula, $1 \le n < \omega$, jest tablica s p redaka $L_1,\ldots, L_p$, takva da:

(†) *Ako $k = 1$, tablica se konstruira s dva retka, L_1 i L_2. Jedna ima vrijednost 1 a druga 0 (točnije $L_1(P_1) = 1$, a $L_2(P_1) = 0$).*

(‡) *Ako $k > 1$, tablica je proširenje tablice stupnja n, s obzirom na C_n u kojem radimo, za $P_1,\ldots, P_{k-1}$, postiže se ovako:*

1. *Ako je P_k atomarna, račvamo (*eng. bifurcate*) redak L u dva retka L' i L'', to jest napravimo da bude $L'(P_p) = L''(P_p)$, za svaki $p < k$ i $L'(P_k) = 1$, a $L''(P_k) = 0$.*

[8] Ako se u prvoj klauzuli stavi $j \le i$ i $P_j = Q$, druga klauzula postaje redundantna.

2. *Ako je Pk oblika ¬Pj, onda:*
   (a) *Za svaki L takav da* $L(P_j) = 0$*, napravimo* $L(P_k) = 1$.
   (b) *Za svaki L takav da* $L(P_j) = 1$*, nastavljamo ovako:*
      i. *Ako je* P_j *atomarna, račvamo redak.*
      ii. *Ako je* P_j *oblika* $\neg P_i$ *(odnosno ako je* $P_k = \neg\neg Pi$*), tada ako* $L(P_i) = 0$ *onda* $L(P_k) = 0$*. Ako* $L(P_i) = 1$*, onda* $L(P_k) = 1$.
      iii. *Ako je* P_j *oblika* $P_p \star P_q$*, imamo dva slučaja*[9]*:*
         A. *Ako je* P_j *oblika* $P_t^{n-1} \wedge \neg P_t^{n-1}$*, onda* $L(P_k) = 0$.
         B. *Ako* P_j *nije oblika* $P_t^{n-1} \wedge \neg P_t^{n-1}$*, onda: Ako* $L(P_p) = L(\neg P_p)$ *ili* $L(P_q) = L(\neg P_q)$*, onda račvamo redak. Inače,* $L(\mathrm{P_k}) = 0$.
3. *Ako je* P_k *oblika* $P_i \star P_j$*, tada za svaki redak L tablice za* $P_1, \ldots, P_{k-1}$ *računamo* $L(P_k)$ *kao u tablicama za klasičan propozicijski račun.*

Primjer 1. *Dajemo primjer kvazimatrice*

A	$\neg A$	$\neg\neg A$	*[redak]*
1	1	1	L_1
		0	L_2
	0	1	L_3
0	1	0*	L_4
		0	L_5

Uočimo (*) *u* L_4 *ispod* $\neg\neg A$*. Na prvi pogled djeluje da bismo ovdje morali staviti* 1, no prema (‡) *2.b.ii ovdje se stavlja 0. Uočimo da jedini razlog zašto smo račvali* L_4 *i* L_5*, jest da bismo ilustrirali ovu činjenicu, budući da račvanje nije potrebno (račvalo bi se na* 0 *i* 0).

Lema 2. Za bilo koje formule P, Q *ne vrijedi* $P^* \equiv Q \wedge \neg Q$.

Dokaz. Očito po definiciji $P^*: = \neg(P \wedge \neg P)$.

Sada možemo prezentirati naš rezultat, odnosno dokaz adekvatnosti (pouzdanosti) kvazimatrica za semantiku C_1 sustava. Ovaj se dokaz lako proširuje na punu hijerarhiju C_n sustava.

---

[9] Ovdje uvrštavamo gornji indeks $n - 1$ jer se ista konstrukcija koristi za sve C_n sustave, a nama je potrebna još i za C_2. Kako bismo bez tog indeksa morali ponoviti definiciju kasnije, ostavljamo ga uz napomenu da se za C_1 ovo ignorira.

Teorem 1. (Adekvatnost kvazimatrica). *Za svaku formulu* $F \in \mathrm{FORM}_{C1}$ *vrijedi:* $\vDash_{v1} F$ *ako i samo ako za svaki redak* n, *u kvazimatrici* $\mathfrak{Q}_F$ *vrijedi* $\mathrm{L}_{\mathrm{n}}{}^{\mathfrak{Q}}(F) = 1$.

Dokaz: Indukcijom po duljini formule F.

Baza. Kako nijedna atomarna formula po definiciji 1-valuacija nije tautologija, krećemo od duljine 1. Lako je raspisati po slučajevima i vidjeti da je od formula duljine 1 samo $A \to A$ (pri čemu je A atomarna) tautologija, pa samo za nju trebamo dokazati. S lijeva na desno: neka $\vDash_{v1} A \to A$, A atomarna. Tada prema klauzuli (I) iz definicije 8 gradimo kvazimatricu za A, koju prema definiciji 8 (II.3) proširujemo na kvazimatricu za $A \to A$, s dva retka, oba s 1. S desna na lijevo: neka za svaki n, $L_n(A \to A) = 1$. Kako je A atomaran, razlikujemo dva slučaja: $v_1(A) = 0$ i $v_1(A) = 1$. U oba slučaja prema *val*(4) $v_1(A \to A) = 1$.

Induktivni korak. Imamo dva slučaja:

(*a*) $F' = \neg F$.

S lijeva na desno. Koristimo kontrapoziciju. Neka nije za svaki redak n, $L_n(F') = 1$, odnosno za neki redak n, $L_n(F') \neq 1$. Imamo dva slučaja u kojima je ovo moguće: (*a*) ako $L_n(P) = 0$ i $F \equiv \neg\mathrm{P}$, pa prema induktivnoj hipotezi $v_1(P) = 0$. Prema *val*(1) $v_1(F) = 1$. Prema definiciji 5, ako $v_1(F) = 1$, onda $v_1(\neg F) = 0$ i $v'_1(\neg F) = 1$, dakle nije tako da $\nvDash_{v1} \neg F$. (*b*) $L_n(F) = 1$. Prema induktivnoj hipotezi $v_1(F) = 1$. Prema definiciji 5, slijedi $v_1(\neg F) = 0$ i $v'_1(\neg F) = 1$. Iz toga slijedi da nije tako da $\nvDash_{v1} \neg F$.

S desna na lijevo. Neka za svaki redak n, $L_n(F') = 1$. Imamo dva podslučaja, jer prema konstrukciji kvazimatrica jedino oni vode do $L_n(F') = 1$. (*i*) $L_n(F) = 0$, tada $v_1(F) = 0$ prema induktivnoj hipotezi. Tada $v_1(\neg F) = 1$ prema *val*(1). (*ii*) $L_n(F) = 1$ i $F \equiv \neg(P \wedge \neg P) \equiv P^*$. Tada $v_1(F) = 1$ prema induktivnoj hipotezi (označimo ovo s $(*)$). Prema pretpostavci da za svaki redak n, $L_n(F') = 1$, $L_n(\neg P^*) = 1$. Ovo znači, prema definciji ‡ *2.b.ii*, da imamo dva podslučaja: (A) $L(P^*) = 0$ ili (B) $L(P^*) = 0$ i $P^* \equiv Q \wedge \neg Q$. Slučaj (B) prema lemi 2 nije moguć pa promatramo samo slučaj (A), odnosno $L(P^*) = 0$. Prema IH, $v_1(P^*) = 0$, prema *val*(1), $v_1(\neg P^*) = 1$; tada imamo (uz $(*)$ i činjenicu $F \equiv P^*$) $v_1(P^*) = 1 = v_1(\neg P^*)$, pa prema *val*(8) slijedi $v_1(\neg F) = 1$.

(*b*) $F' = \mathrm{F} \star \mathrm{A}$, $\star \in \{\wedge, \vee, \to\}$, A atomarna. Kako se ovdje kvazimatrica gradi kao istinitosna tablica za klasičnu logiku, slučaj ne raspisujemo.

Primjer 2. *Kvazimatricom dokazujemo da je $\neg\neg A \rightarrow A$ valjana formula*

<table>
<tr><th>A</th><th>$\neg A$</th><th>$\neg\neg A$</th><th>$\neg\neg A \rightarrow A$</th><th>[redak]</th></tr>
<tr><td rowspan="3">1</td><td rowspan="2">1</td><td>1</td><td>1</td><td>L_1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>L_2</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>L_3</td></tr>
<tr><td rowspan="2">0</td><td rowspan="2">1</td><td>0*</td><td>1</td><td>L_4</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>L_5</td></tr>
</table>

Primjer 3. *Kvazimatricom dokazujemo da $A \rightarrow \neg\neg A$ nije valjana formula*

<table>
<tr><th>A</th><th>$\neg A$</th><th>$\neg\neg A$</th><th>$A \rightarrow \neg\neg A$</th><th>[redak]</th></tr>
<tr><td rowspan="3">1</td><td rowspan="2">1</td><td>1</td><td>1</td><td>L_1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>L_2</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>L_3</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>L_4</td></tr>
</table>

Kao što smo naglasili u prethodnom primjeru, ovdje smo do kraja korektno napravili kvazimatricu, bez račvanja L_4. Analogno smo trebali postupiti i u gornjem primjeru, ali smo radi ilustracije zamršenosti pravila konstrukcije kvazimatrica namjerno račvali na L_4 i L_5. Nadalje uz kvazimatricu više nećemo eksplicitno označavati broj retka s L_n, ali ćemo retke pobrojavati na način ilustriran u ova dva primjera, odozgo prema dolje, počevši od L_1.

Primjer 4. *Kvazimatricom dokazujemo da je $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \vee B)$ valjana formula*

<table>
<tr><th>A</th><th>B</th><th>$\neg A$</th><th>$\neg B$</th><th>$A \rightarrow B$</th><th>$\neg A \vee B$</th><th>$(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \vee B)$</th></tr>
<tr><td rowspan="4">1</td><td rowspan="4">1</td><td rowspan="2">1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">0</td><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
</table>

Uočimo da je $\neg\neg A$ isto potomak od $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \vee B)$ zato što je negacija jedne njene podformule, $\neg A$. Formulu $\neg\neg A$ ne moramo upisati jer ona nije podformula nijedne podformule od $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \vee B)$, a zbog toga neće nikako utjecati na njenu konstrukciju. Prema pravilima za kvazimatrice, jedini slučajevi kada moramo na ovo obratiti pozornost su kada je negacija ispred složenih podformula glavne formule. Analogno, ispustili smo i $\neg(A \rightarrow B)$ i $\neg(\neg A \vee B)$. Ovu praksu ćemo radi jasnoće i tehničkih limitacija (širine papira) usvojiti i u nadolazećim primjerima.

Primjer 5. *Kvazimatricom dokazujemo da $(\neg A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow B)$ nije valjana formula*

<table>
<tr><th>A</th><th>B</th><th>$\neg A$</th><th>$\neg B$</th><th>$\neg A \vee B$</th><th>$A \rightarrow B$</th><th>$(\neg A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow B)$</th></tr>
<tr><td rowspan="4">1</td><td rowspan="4">1</td><td rowspan="2">1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">0</td><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
</table>

Uočimo da je zadnji redak koji smo trebalo popuniti bio L_5, budući da se tu javila 0, odnosno $L_5((\neg A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow B)) = 0$. U nadolazećem tekstu, kada ćemo govoriti o formulama koje nisu valjane, nećemo do kraja popunjavati kvazimatricu, već ćemo se zaustaviti na prvoj nuli.

Primjer 6. *Za sljedeći primjer pokazujemo kako disjunktivni silogizam nije valjan oblik zaključivanja u C_n. Disjunktivni silogizam glasi $\{A \vee B, \neg A\} \vDash B$. Primjenimo semantičku varijantu teorema dedukcije i dobijemo $\{A \vee B\} \vDash \neg A \rightarrow B$, i još jednom da bismo dobili $\vDash (A \vee B) \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$. Sada izrađujemo kvazimatricu za $\vDash (A \vee B) \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$.*

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \vee B$	$\neg A \rightarrow B$	$(A \vee B) \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$
1	1	1	1	1	1	1
			0	1	1	1
		0	1	1	1	1
			0	1	1	1
1	0	1	1	1	0	0
		0	1	1	1	1

6. Korak prema punim C_n sustavima: aksiomi i semantika C_2

6.1. Jezik i aksiomi

Da bismo prikazali kako se ideja kvazimatrica za C_1 proširuje na cijelu C_n hijerarhiju, uzimamo sljedeći sustav, C_2. C_2 sustav ima jezik isti kao i C_1 sustav uz dodatno definirane operatore: Definiramo uz P^* i:

$P^1 := P^* = \neg(P \wedge \neg P)$

$P^2 := (P^1)^* = \neg(\neg(P \wedge \neg P) \wedge \neg\neg(P \wedge \neg P))$

$P^{(1)} := P^1$

$P^{(2)} := P^{(1)} \wedge P^2 = \neg(P \wedge \neg P) \wedge \neg(\neg(P \wedge \neg P) \wedge \neg\neg(P \wedge \neg P))$

Aksiomi C_2 predstavljaju korak prema punim C_n sustavima, no oni su ograničeni na formule oblika P^1, P^2, $P^{(1)}$ i $P^{(2)}$.

$C_2 = C_\omega \cup (11.2) \cup (12.2)$

(11.2) $B^{(2)} \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A))$

(12.2) $(A^{(2)} \wedge B^{(2)}) \rightarrow ((A \wedge B)^{(2)} \wedge (A \vee B)^{(2)} \wedge (A \rightarrow B)^{(2)})$

Objasnimo što se mijenja s obzirom na C_1. Novodefinirani operatori intuitivno imaju sljedeće tumačenje:

- $P^* =: P^1$ intuitivno ima značenje *P je konzistentan* ili, preciznije, *P se ponaša kao u klasičnoj logici*.[10]
- P^2 bi značilo *P^1 se ponaša kao u klasičnoj logici*. Uočimo da ovo još ne znači da se i *P* ponaša kao u klasičnoj logici.
- Ako želimo reći *P^1 i P se ponašaju klasično*, onda koristimo operator sa zagradama $P^{(2)}$.
- Općenito, P^n će značiti *samo P^{n-1} se ponaša klasično (a ostali P^k, $k < n$ možda ne)*, dok ako želimo reći da se svi do $n - 1$ ponašaju klasično, pišemo $\mathrm{P}^{(n)}$.

Ovo je ideja koja stoji iza cijele C_n hijerarhije, ali ćemo prijelazak ilustrirati na primjeru sustava C_2.

Aksiomi C_2 proširujuju C_1 na očekivani način. Aksiom 11.2 tvrdi da ako se *B* i $\neg(B \wedge \neg B)$ ponašaju klasično, da onda *B* i $\neg B$ možemo koristiti kao kontradikciju za uvođenje negacije pred proizvoljnu formulu *A*, uz pretpostavku *A*.

Aksiom 12.2 tvrdi da ako se *A*, $\neg(A \wedge \neg A)$, *B* i $\neg(B \wedge \neg B)$ ponašaju klasično, onda se i njihove konjunkcije, disjunkcije i implikacije ponašaju klasično.

6.2. Semantika C_2

2-valuacija sustava C_2 je funkcija v_2: $FORM_{C2} \rightarrow \{0,1\}$ takva da:

val[*i*] $v_2(A \wedge B) = 1$ ako i samo ako $v_2(A) = 1$ i $v_2(B) = 1$

val[*ii*] $v_2(A \vee B) = 1$ ako i samo ako $v_2(A) = 1$ ili $v_2(B) = 1$

val[*iii*] $v_2(A \rightarrow B) = 1$ ako i samo ako $v_2(A) = 0$ ili $v_2(B) = 1$

val[*iv*] Ako $v_2(A) = 0$ onda $v_2(\neg A) = 1$

val[*v*] Ako $v_2(\neg\neg A) = 1$ onda $v_2(A) = 1$

val[*vi*] $v_2(A^*) = v_2(\neg A^*)$ ako i samo ako $v_2(A^2) = 0$

val[*vii*] $v_2(A) = v_2(\neg A)$ ako i samo ako $v_2(\neg A^*) = 1$

Prokomentirajmo nakratko *val*[*vi*] i *val*[*vii*]. *val*[*vi*] intuitivno govori da ako A^* i $\neg A^*$ imaju istu istinitosnu vrijednost, onda je neistina da se A^1 (= A^*) ponaša klasično, što bi bilo značenje A^2 (dodatno, vrijedi i suprotni

[10] Da Costin izraz je *well behaved*, ali mi ćemo radi jasnoće radije reći da se *ponaša kao u klasičnoj logic*i ili, skraćeno, da se *ponaša klasično*.

smjer). *val*[*vii*] govori da ako A i $\neg A$ imaju istu istinitosnu vrijednost, onda je istina $\neg A^*$ (vrijedi i suprotni smjer). Ovo djeluje kao poseban slučaj *val*[*vi*] ali nije jer negacija nije klasična u C_n sustavima (pa time u C_1 i C_2).

6.3. Primjena kvazimatrica na C_2 i razlika s obzirom na C_1

C_1 sustav je donekle specifičan (s obzirom na semantiku), ali C_2 sustav je u punom smislu dio C_n hijerarhije; ovdje smo ih izdvojili da bismo naglasili specifičnost prijelaza s n na $n + 1$, a prijelaz s C_1 na C_2 dobro ilustrira općeniti prijelaz sa C_n na C_{n+1}. Ovdje ćemo ilustrirati kako je formula $(A \wedge \neg A)^* = \neg((A \wedge \neg A) \wedge \neg(A \wedge \neg A))$ valjana u C_1 ali ne u C_2. Da bismo zornije ilustrirali o čemu se radi, koristit ćemo dodatne oznake za neke formule. Te će oznake biti u skladu s oznakama u definiciji kvazimatrica.

Primjer 7. *Formula* $(A \wedge \neg A)^* = \neg((A \wedge \neg A) \wedge \neg(A \wedge \neg A))$ je valjana u C_1

<table>
<tr><td>A_t</td><td>$\neg A_t$</td><td>A_j</td><td>$A_k = \neg A_j$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>A</td><td>$\neg A$</td><td>$A \wedge \neg A$</td><td>$\neg(A \wedge \neg A)$</td><td>$(A \wedge \neg A) \wedge \neg(A \wedge \neg A)$</td><td>$(A \wedge \neg A)^*$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td>1</td><td>1^*</td><td>0^{**}</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr>
</table>

Ovdje smo označili proširenje s trećeg na četvrti stupac sa zvjezdicama ($1^* \mapsto 0^{**}$). *Ovaj je prijelaz ostvaren pravilom [‡2.b.iii.A] za konstrukciju kvazimatrica, uz napomenu da u* C_1 *vrijedi* $A^{n-1} = A^0 = A$ *prema definiciji operatora* A^n.

Primjer 8. *Formula* $(A \wedge \neg A)^* = \neg((A \wedge \neg A) \wedge \neg(A \wedge \neg A))$ *nije valjana u* C_2

<table>
<tr><td>A_p</td><td>$\neg A_p$</td><td>A_j</td><td>$A_k = \neg A_j$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>A</td><td>$\neg A$</td><td>$A \wedge \neg A$</td><td>$\neg(A \wedge \neg A)$</td><td>$(A \wedge \neg A) \wedge \neg(A \wedge \neg A)$</td><td>$(A \wedge \neg A)^*$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">1</td><td rowspan="3">1</td><td rowspan="3">1^*</td><td rowspan="2">1^{**}</td><td rowspan="2">$1^{\bullet}$</td><td>$1^{\bullet\bullet}$</td></tr>
<tr><td>$0^{\bullet\bullet}$</td></tr>
<tr><td>0^{**}</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr>
</table>

Ovdje smo označili proširenje s trećeg na četvrti stupac sa zvjezdicama (1*↦ 1**/0**), *a prijelaz s petog na šesti s točkom* (1• ↦ 1••/0••). *Ovi su prijelazi ostvareni pravilom [‡2.b.iii.B (prvi podslučaj)] za konstrukciju kvazimatrica. Pogledajmo prvi slučaj gdje očito nemamo formulu oblika* A_t^{n-1} *jer smo u* C_2 *i takva bi formula morala biti* $A_p^1 = \neg(A_p \wedge \neg A_p)$. *Analogno i za drugi prijelaz s petog na šesti stupac: premda je drugi konjunkt* A^1, *prvi je različit oblikom od* $\neg A^1$, *premda je semantički ekvivalentan. (Uočimo da čak i ako ovdje ne račvamo, ostaje nam vrijednost* 0 *u šestom stupcu (Da Costa i Alves u svom radu 1977: 621–30, ovdje račvaju retke)).*

7. Zaključak

U ovom smo radu naveli nekoliko sustava iz Da Costine hijerarhije sustava C_n. Dali smo pregled semantike sustava C_ω kao temeljnog sustava, na njemu izgrađenog osnovnog sustava C_1 za koji smo ponudili dokaz adekvatnosti kvazimatrica, te prikazali poteškoće koje se susreću pri izgradnji cijele C_n hijerarhije. Ove poteškoće nisu zanemarive, no osnovni sustav i dalje ostaje C_1, te se može reći da je on svojevrsni laboratorij za cijelu hijerarhiju C_n sustava. Što je dopustivo u C_1 generalno će biti ostvarivo i u svim C_n sustavima.

Primjene parakonzistetnih sustava su mnogobrojne, a sam Da Costa navodi mogućnost proširenja logičkih horizonta gledajući na klasičnu logiku kao na euklidsku geometriju, pri čemu se može reći da će parakonzistentne logike zajedno s parakompletnima dati jednu širu sliku, u kojoj će klasična logika biti tek jedan poseban slučaj, a mogućnosti za primjenu logike općenito će se proširiti baš kao što neeuklidske geometrije daju mogućnosti koje se danas koriste i u tehnologiji i u drugim produčjima znanosti, a time su postale jedna od centralnih filozofijskih tema znanosti i matematike.

Literatura

Carnielli, W.A. i J. Marcos. 1999. “Limits for Paraconsistent Calculi”, *Notre Dame Journal of Formal Logic* 40, 375–90.

Da Costa, N.C.A. 1974. “On the Theory of Inconsistent Formal Systems”, *Notre Dame Journal of Formal Logic* 15, 497–510.

Da Costa, N.C.A. i E.H. Alves. 1977. “A Semantical Analysis of the Calculi C_n”, *Notre Dame Journal of Formal Logic* 18, 621–30.

Euklid. 2000. *The Thirteen Books of the Elements* (New York: Dover Publications).

Loparić, A. i E.H. Alves. 1980. “The Semantics of the System C_n of Da Costa”. U A.I. Arruda, N.C.A. Da Costa i A.M. Sette (ur.) *Proceedings of the III Brazilian Conference on Mathematical Logic* (Sao Paulo: Sociedade Brasileira de Logica), 161–172.

Priest, G. 2009. *An Introduction to Non-classical Logic* (Cambridge: Cambridge University Press).

Robles, G. i J. M. Méndez. 2010. “Paraconsistent Logics Included in Lewis’ S4”, *Review of Symbolic Logic* 3, 442–66.

Vuković, M. 2009. *Matematička logika* (Zagreb: Element).