O shvaćanju pojma beskonačnosti i graničnih procesa

Ivana Toplek[1], Neven Grbac[2], Tihana Galinac Grbac[3]

Sažetak. Cilj ovog rada je, koristeći APOS teoriju, provesti istraživanje o shvaćanju pojma beskonačnosti te graničnih i beskonačnih iterativnih procesa kod učenika osnovnih i srednjih škola te studenata različitih smjerova. Istraživanje je provedeno u obliku ankete na primjeru takozvanog *problema teniskih loptica*. Zaključci su doneseni na osnovi statističke analize rezultata ankete.

1. Uvod

Pojam beskonačnosti zasigurno je jedan od najsloženijih apstraktnih matematičkih konstrukata s kojim se susreće šira populacija. Pritom mislimo i na granične procese poput limesa, ali i beskonačne iterativne procese. Uprkos složenosti, sljedeći citati, preuzeti iz [5], pokazuju da na intuitivnoj razini ljudi različitih predznanja mogu imati sličnu predodžbu o beskonačnosti. Drugo je, naravno, pitanje kako će oni tu predodžbu iskoristiti u stvarnim problemima.

- *Što su to prirodni brojevi? Prirodni brojevi su* 1, 2, 3, ..., ∞, *ali ne postoji broj* ∞*; ne postoji nijedna konkretna vrijednost.*
- *Ne postoji stvarna beskonačnost; i kada govorimo o beskonačnom skupu, smatramo da u taj skup možemo neprestano dodavati nove elemente.*

Prvi navedeni citat odgovor je studenta u opisivanju vlastitog koncepta prirodnih brojeva, dok se drugi citat odnosi na izjavu francuskog matematičara H. Poincaréa danu gotovo stoljeće prije.

Učenici i studenti imaju posebne teškoće u prihvaćanju i formalnom opisivanju rješenja problema u kojima se javlja beskonačnost. U članku navodimo nekoliko primjera takvih problema, ali samo istraživanje provedeno je za problem teniskih loptica. Motivacija je slično istraživanje na istom problemu, provedeno u SAD-u i opisano u [3].

[1]Ivana Toplek, Srednja škola Prelog, Prelog
[2]Neven Grbac, Odjel za matematiku Sveučilišta u Rijeci
[3]Tihana Galinac Grbac, Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci

U članku je ukratko opisana APOS teorija o načinu shvaćanja matematičkih pojmova i koncepata (za više detalja vidi [2]). Pokazuje se kako ova teorija može pomoći u shvaćanju razmišljanja i početnika i stručnjaka koji se „bore" s pojmom beskonačnosti. Iako je APOS teorija korištena i u radu [3] pri analizi rezultata, mi idemo korak dalje iskoristivši APOS teoriju u sastavljanju same ankete. Naime, za razliku od [3], u našoj anketi ponuđeni su odgovori koji odgovaraju razinama shvaćanja pojma „beskonačno" prema APOS teoriji. Na taj način dobivamo ordinalnu skalu za rangiranje odgovora, što omogućuje uspoređivanje pri statističkoj analizi.

Ovaj članak nastao je iz diplomskog rada [4] na poticaj Tomislava Šikića kojemu na tome zahvaljujemo. Također, naše veliko hvala i svima onima koji su provodili anketu; Arsen Babić, Sanda Bujačić i Vedran Miletić organizirali su i proveli anketu na Odjelu za informatiku Sveučilišta u Rijeci; Goran Mauša na Tehničkom fakultetu u Rijeci; Marcela Hanzer i Ivica Nakić na Matematičkom odjelu Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu; Andrea Aglić Aljinović, Ilko Brnetić i Tomislav Šikić na Zavodu za primijenjenu matematiku Fakulteta elektrotehnike i računarstva Sveučilišta u Zagrebu; Sanja Rošić u Osnovnoj školi Vladimir Gortan u Rijeci; Ilko Brnetić na pripremama hrvatskih ekipa za Međunarodnu i Srednjeeuropsku matematičku olimpijadu, te Miljen Mikić na matematičkoj grupi u Gimnaziji Andrije Mohorovičića. Konačno, zahvaljujemo svim sudionicima koji su ispunjavali ankete i time uvelike pridonijeli ovome radu.

2. Problemi beskonačnosti

Procesi koji se ponavljaju beskonačno puta središte su mnogih tema na preddiplomskom studiju na kojemu studenti razmatraju teme kao što su limesi, asimptotsko ponašanje racionalnih funkcija, beskonačni nizovi i redovi te nepravi integrali. Ipak, to je samo dio situacija u kojima se pojavljuje beskonačnost. Na primjer, mnoge matematičke strukture u linearnoj algebri, realnoj analizi te topologiji - beskonačni su skupovi. Usprkos tome, mnogi autori smatraju da se studenti i dalje muče s konceptom beskonačnosti, kao što smo već spomenuli u uvodu.

Primjer problema koji uključuju beskonačnost te granične i beskonačne iterativne procese, čije rješenje zahtijeva strogo formalno razumijevanje tih pojmova, navodimo u nastavku. Spisak je preuzet iz [5], gdje se mogu naći i stroga matematička rješenja. Ipak bismo preporučili čitatelju da najprije pokuša samostalno razmisliti o svakome problemu.

- Ahilej i kornjača se utrkuju. Ako u početku spora kornjača ima malu prednost pred strelovitim Ahilejem, kako će ovaj polubog ikada dostići kornjaču? Treba znati da Ahilej prvo mora doći na mjesto s kojega je kornjača krenula, dok se u međuvremenu neumoran radnik pomaknuo naprijed, tako da Ahilej mora stići i na to mjesto, i tako dalje, u nedogled.

- Kako možemo tretirati veličinu dx kao pozitivnu veličinu s kojom možemo računati i kao nešto što možemo ignorirati kao da je 0?
- Je li $0.999\ldots = 1$?
- Pretpostavimo da stavimo dvije teniske loptice, numerirane s 1 i 2, u kantu A, a zatim premjestimo lopticu s brojem 1 u kantu B. U nastavku premjestimo loptice 3 i 4 u kantu A, pa lopticu 2 premjestimo iz kante A u kantu B. Dalje, u kantu A stavljamo loptice 5 i 6 i premještamo lopticu 3 u kantu B, i tako u nedogled. Koliko je loptica u kanti A nakon što završimo?
- Je li beskonačna unija $\bigcup_{k=1}^{\infty} P\{1,2,\ldots,k\}$ jednaka partitivnom skupu prirodnih brojeva?
- Postoji li mogućnost da neprebrojivi skup bude rezultat prebrojivog algoritma?

U ovom radu istražujemo razmišljanja učenika i studenata dajući im problem teniskih loptica. Više o samoj anketi i provedenom istraživanju nešto ćemo kasnije. U nastavku ćemo nešto više reći o APOS teoriji na kojoj se zasniva mentalna spoznaja svakog ispitanog pojedinca.

3. APOS teorija

APOS teorija i njena primjena u istraživanju matematičke edukacije opisana je u [2]. Umjesto da se bavi proučavanjem teorije učenja kao niza točnih tvrdnji koja može, a i ne mora, biti približno stanje onoga što se događa kod pojedinca prilikom savladavanja matematičkih koncepata, APOS teorija više se fokusira na činjenice kako nam teorija učenja pomaže u shvaćanju procesa učenja. Ona nam pruža objašnjenja fenomena koji primjećujemo kod studenata koji pokušavaju izgraditi vlastito shvaćanje matematičkih koncepata i sugerirajući nam smjernice u pedagogiji koja nam pomaže u tom procesu učenja.

Teorija započinje s hipotezom da matematičko znanje postoji u individualnom pokušaju pojedinca da se nosi s danim matematičkim problemom, i to konstruirajući mentalne procese akciju (**A**ction), proces (**P**rocess), svrhu (**O**bject) te organizirajući ih u sheme (**S**chema) kako bi shvatili problem te ga riješili. Prva slova tih mentalnih procesa daju ime - APOS teorija. Ideja je nastala iz proširenja Piagetovog rada na reflektivnoj apstrakciji dječjeg učenja na razinu matematičkog učenja [1]. Njegova istraživanja u razvojnoj psihologiji i genetskoj epistemologiji imala su jedan osnovni zadatak: spoznati kako čovjekovim odrastanjem raste znanje. Njegov je odgovor da je rast znanja progresivna konstrukcija logički postavljenih struktura koje zamjenjuju jedna drugu procesom zamjene nižih, manje snažnih logičkih sredstava, onima višima i jačima sve do odrasle dobi. Stoga su dječja logika i načini razmišljanja potpuno drugačiji nego kod odraslih. U nastavku slijedi kratko objašnjenje bitnih karakteristika APOS teorije, pri čemu mentalne procese ilustriramo kroz teoriju grupa na primjeru pojma lijevih razreda za neku podgrupu. Primjer je preuzet iz [2].

Akcija je transformacija objekata koje pojedinac uoči i koji su u osnovi vanjski te ih prema potrebi transformira izvršavajući korak po korak, bilo eksplicitno ili iz memorije, instrukcije kako izvesti operaciju na tim objektima. Na primjer, pojedinac s usvojenim procesom akcije u shvaćanju lijevog razreda bit će ograničen na rad s konkretnom grupom, kao npr. grupom $\mathbf{Z}_{20}$ ostataka pri dijeljenju s 20. U tom slučaju oni će biti u mogućnosti konstruirati podgrupu, kao na primjer H={0,4,8,12,16} formiranjem višekratnika od 4. Tada bi pojedinac bio sposoban za formiranje lijevog razreda od 5 kao skupa 5+H={1,5,9,13,17} koji se sastoji od elemenata skupa $\mathbf{Z}_{20}$ koji daju ostatak 1 pri dijeljenju s 4.

Kada se akcija ponavlja i pojedinac razmišlja o tome, on ili ona može konstruirati unutarnji mentalni proces nazvan *proces*, koji možemo smatrati kao ponavljanje akcije, ali ne više s potrebom vanjskih podražaja. Pojedinac može razmišljati o obavljanju procesa bez da ga u stvari radi, i stoga može razmišljati da ga pokrene i ukomponira s ostalim procesima. Pojedinac ne može koristeći samo akciju uspješno raditi s konceptom lijevog razreda za grupe kao što su S_4, grupa permutacija s četiri elementa, i njenu proizvoljnu podgrupu H. U takvim slučajevima, pojedinac mora misliti na lijevi razred od permutacije *p* kao skup svih produkata *ph*, gdje je *h* element podgrupe H. Razmišljanje o oblikovanju toga skupa je koncept procesa za lijevi razred.

Objekt je građen od procesa kada pojedinac postaje svjestan procesa kao cjeline i shvaća da transformacija može djelovati na njega. Na primjer, pojedinac razumije razrede kao objekte, kada on ili ona može razmišljati o broju razreda određene podgrupe, zatim može zamisliti usporedbu jednakosti dvaju razreda ili njihove kardinalnosti ili može primijeniti binarnu operaciju na skupu svih razreda neke normalne podgrupe.

Na kraju, *shema* za određeni matematički pojam je individualni skup akcija, procesa, objekata i drugih shema koje su povezane nekim općim načelima, u svrhu formiranja okvira u umu individue kako bi se riješile problemske situacije koje uključuju taj koncept. Ovaj okvir mora biti koherentan u smislu da daje, bilo eksplicitno ili implicitno, način određivanja pojava koje jesu a koje nisu u okviru sheme.

Četiri mentalna procesa ili komponente APOS teorije - akcija, proces, objekt i sheme - ovdje su prikazane hijerarhijski, redoslijedom. To je pogodan način obrađivanja tih konstrukcija, te u izvjesnom smislu svaka koncepcija na popisu mora biti izgrađena prije nego je sljedeći korak moguć. U stvarnosti, međutim, kada pojedinac razvija njegovo ili njezino razumijevanje koncepta, konstrukcije nisu zapravo izrađene na takav linearan način. Kod funkcija, u konceptu akcije, pojedinac može biti ograničen na razmišljanje o formulama koje uključuju slova koja se mogu manipulirati ili zamijeniti brojevima s kojima možemo računati. Smatramo da taj pojam kao prethodni konceptu procesa, u kojem se funkcija shvaća kao ulazno-izlazni stroj. Ono što se zapravo dogodi, međutim, je to da će pojedinac početi biti ograničen na određene specifične vrste formula, odražavati se na izračune i početi razmišljati o procesu, vratiti se na *akcijsko* tumačenje, možda s više sofisticiranim formulama, dalje razvijati koncepciju procesa i tako dalje. Drugim riječima, izgradnja ovih različitih koncepata određene matematičke ideje više je dijalektički nego linearni slijed.

APOS teorija može se koristiti izravno u analizi podataka od strane istraživača. U iznimno obrađenim analizama, istraživač može usporediti uspjeh ili neuspjeh studenata na matematičkom zadatku sa specifičnim mentalnim konstrukcijama koje mogu ili ne moraju konstruirati. Ako se pojave dva studenta koji se slažu u njihovom radu do jedne vrlo specifične matematičke točke, a zatim će jedan student biti u mogućnosti napraviti korak dalje, dok drugi neće, istraživač pokušava objasniti razliku ukazujući na mentalne izvedbe akcije, procesa, objekta i/ili sheme koje je jedan student, čini se, izgradio, dok drugi nije. Teorija potom čini realna predviđanja da će, ako se određeni skup akcija, procesa, objekata i shema izgradi na određeni način, ovaj pojedinac vjerojatno biti uspješan u korištenju određenih matematičkih pojmova i problema u određenim situacijama. Detaljni opisi shema, znani kao genetska raščlamba, u smislu mentalnih konstrukcija su načini organiziranja hipoteza o tome kako se učenje matematičkih pojmova može odvijati. Ovi opisi pružaju adekvatan jezik pri raspravi o takvim pretpostavkama.

4. Rezultati istraživanja

4.1. Problem teniskih loptica

U ovom poglavlju detaljnije razmatramo problem teniskih loptica jer je na njemu provedeno istraživanje. Problem je već naveden u poglavlju 2, ali prisjetimo ga se još jednom.

Problem. *Pretpostavimo da stavimo dvije teniske loptice, numerirane s 1 i 2, u kantu A, a tad premjestimo lopticu s brojem 1 u kantu B. U nastavku, premjestimo loptice 3 i 4 u kantu A i pomaknemo lopticu 2 iz kante A u kantu B. Dalje, u kantu A stavljamo loptice 5 i 6 i premještamo lopticu 3 u kantu B, i tako u nedogled. Koliko je loptica u kanti A nakon što završimo?*

Problem teniskih loptica je sam po sebi beskonačan iterativni proces koji je naizgled paradoksalan. Paradoks nastaje iz dva kontradiktorna razmišljanja koja su samo naizgled oba točna.

Prvo razmišljanje kreće od toga da se u svakom koraku broj loptica u obje kante, kanti A i kanti B, povećava za jednu u odnosu na prethodni korak (vidi tablicu 1). Dakle, u svakom (konačnom) koraku obje kante sadrže jednak broj loptica. To vodi do zaključka da će i nakon svih beskonačno koraka kanta A i kanta B sadržavati svaka po beskonačno loptica.

Drugo razmišljanje promatra koje su točno loptice u kojoj kanti (vidi tablicu 1), odnosno što se točno događa sa svakom pojedinom lopticom. Naime, svaka loptica u nekom koraku prijeđe iz kante A u kantu B. Iz tablice 1 vidimo da će prva loptica biti u kanti B nakon prvog koraka, druga nakon drugog koraka, a *n*-ta loptica nakon *n*-tog koraka. Dakle, svaka će loptica u nekom (konačnom) koraku biti premještena iz kante A u kantu B. To vodi do zaključka da će nakon svih beskonačno koraka kanta A biti prazna, a kanta B sadržavati svih beskonačno loptica.

Tablica 1. Premještanje loptica u koracima

Korak	Broj loptica u kanti A	Broj loptica u kanti B	Popis loptica u kanti A	Popis loptica u kanti B
1	1	1	2	1
2	2	2	3, 4	1, 2
3	3	3	4, 5, 6	1, 2, 3
4	4	4	5, 6, 7, 8	1, 2, 3, 4
...	...	...	...	...
n	n	n	$n + 1, n + 2, \ldots, 2n$	$1, 2, \ldots, n$
...	...	...	...	...
∞	?	?	0	∞

Koje je od ovih razmišljanja točno? Drugo! Kanta A je na kraju prazna. Samo drugo razmišljanje u potpunosti uzima u obzir način provođenja iterativnog procesa premještanja loptica. Iako se nakon bilo kojeg konačnog broja koraka rezultati dobiveni prvim i drugim razmišljanjem podudaraju (u obje je kante jednak broj loptica koji raste), samo drugo razmišljanje daje pravi odgovor na pitanje što će se dogoditi kada se izvrši svih beskonačno koraka. To je zato jer prvo razmišljanje, brojeći samo broj loptica, ali ne i koje su loptice u kojoj kanti, gubi ključnu informaciju o tome da se svaka loptica kad-tad premjesti u kantu B.

Problem je ovako postavljen upravo s ciljem da ova dva razmišljanja, koja daju isti odgovor za svaki konačni korak iterativnog procesa, daju različite rezultate cjelokupnog beskonačnog iterativnog procesa. Stoga nije bilo za očekivati puno točnih odgovora.

4.2. Anketa

Anketa se provodila u dva dijela prikazana na slici 1. Na početku se učenicima i studentima podijelio prvi dio u kojemu je opisan problem teniskih loptica, te se od njih zahtijevalo da pročitaju navedeni problem i odgovore na postavljeno pitanje. Odgovor su morali ukratko objasniti. Nakon prvog dijela podijeljeni su im listići s drugim dijelom ankete koji je sadržavao moguće odgovore za opisani problem. Njihov zadatak je bio da pročitaju te odgovore i da zaokruže slovo ispred odgovora koji smatraju najsličnijim njihovom odgovoru iz prvog dijela.

Uočimo da su odgovori *a*, *b* i *c* poredani prema sve točnijem shvaćanju pojma beskonačnosti u iterativnom procesu iz problema teniskih loptica u smislu APOS teorije. Odgovor *c* je točan. Odgovor *b* pokazuje da je ispitanik napravio prelazak u beskonačno, ali s krivim od dva razmišljanja iz prethodnog potpoglavlja. Odgovor *a* daju ispitanici koji nisu niti napravili prelazak u beskonačnost, nego samo promatraju neki od konačnih koraka.

U anketi je sudjelovalo 47 učenika Osnovne škole Vladimir Gortan u Rijeci, 30 učenika Gimnazije Andrije Mohorovičića u Rijeci, 61 student Sveučilišnih Odjela za matematiku, fiziku i informatiku u Rijeci, 91 student Tehničkog fakulteta u Rijeci, 40 studenata Matematičkog odjela Prirodoslovno-matematičkog fakulteta (PMF) u Zagrebu te 235 studenata Fakulteta elektrotehnike i računarstva (FER) u Zagrebu. Ukupno je bilo 504 ispitanika. Uz to, anketu smo proveli i na Filozofskom fakultetu u Rijeci, matematičkoj grupi Gimnazije Andrije Mohorovičića te pripremama hrvatskih ekipa za Međunarodnu i Srednjeeuropsku matematičku olimpijadu. Međutim, tu je uzorak bio malen pa rezultate ovdje ne navodimo.

Prvi dio

Škola/fakultet: ______________________________

Razred/smjer: ______________________________

Spol: M Ž Dob: ______________

Pročitajte sljedeći tekst te odgovorite na postavljeno pitanje. Odgovor objasnite!

Pretpostavimo da stavimo dvije teniske loptice, numerirane s 1 i 2, u kantu A i tad premjestimo lopticu s brojem 1 u kantu B. U nastavku, premjestimo loptice 3 i 4 u kantu A i pomaknemo lopticu 2 iz kante A u kantu B. Dalje, u kantu A stavljamo loptice 5 i 6 i premještamo lopticu 3 u kantu B, i tako u nedogled. Koliko je loptica u kanti A nakon što završimo?

Drugi dio

Ispod vašeg odgovora napišite slovo ispred odgovora koji je najsličniji vašem.

a) Svaka od kanti sadržavat će pola od ukupnog broja loptica. „Gornja polovica" ukupnog broja loptica bit će sadržana u kanti A, a „donja polovica" ukupnog broja loptica u kanti B.

b) Kanta B sadržavat će od 1 do beskonačno loptica, a kanta A od 1 + beskonačno do 2 · beskonačno loptica.

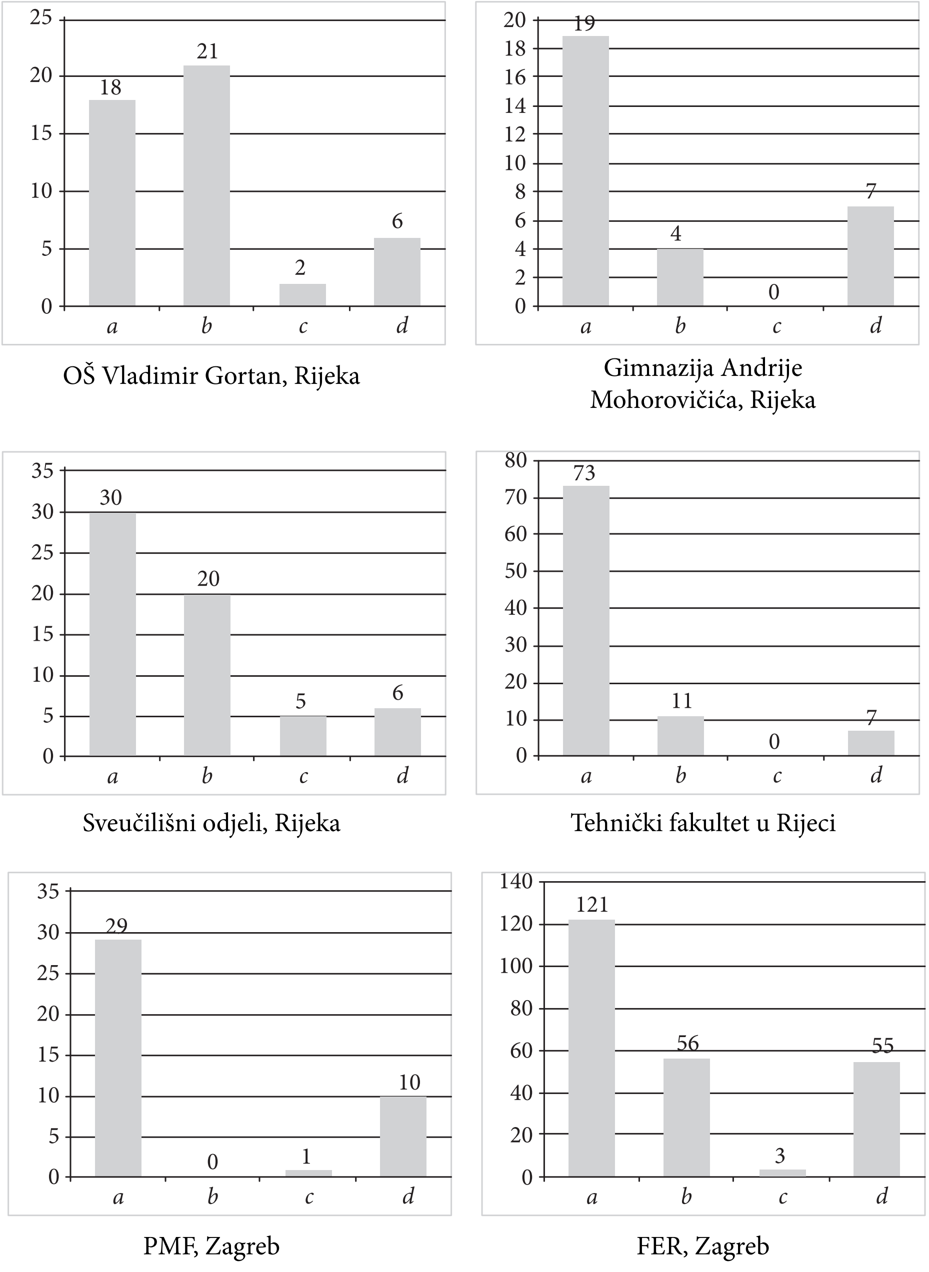
c) Kanta B sadržavat će sve loptice, dok će kanta A biti prazna.

d) Ništa od navedenog.

Slika 1. Izgled ankete

4.3. Rezultati

Rezultati provedene ankete prezentirani su na slici 2. Za svaku instituciju napravljen je histogram apsolutnih frekvencija odgovora. U nastavku komentiramo neke od zanimljivijih rezultata i samih pojedinačnih odgovora.



OŠ Vladimir Gortan, Rijeka

Gimnazija Andrije Mohorovičića, Rijeka

Sveučilišni odjeli, Rijeka

Tehnički fakultet u Rijeci

PMF, Zagreb

FER, Zagreb

Slika 2. Rezultati anketa

Rezultati učenika OŠ Vladimir Gortan jesu raznoliki, ali moramo primijetiti da, za razliku od gimnazijalaca, učenici nisu bili fokusirani na veličinu kante ili pak na mogući broj proizvedenih loptica. Ono do čega je većina učenika došla je da će u kanti A uvijek biti za jedna više loptica od onih u kanti B. Neki učenici smatraju da će u kantama biti podjednako loptica, i to beskonačno mnogo. Objašnjenje je takvo da se stalno vrši premještanje loptica te stoga izjednačavamo broj loptica u obje kante. Ostali učenici došli su do konkretnog broja od dvije ili tri loptice. Oni nisu uzeli u obzir činjenicu da se automatski prebacuje loptica koja je numerirana s najmanjim brojem iz kante A u kantu B. Ono što je posebno zanimljivo jest da su dva učenika dala odgovor *c*, to jest da će u kanti A biti nula loptica, no uz odgovor nije bilo ponuđeno objašnjenje rješenja. Uočimo na slici 2. da su jedino osnovnoškolci dali više odgovora *b* nego *a*.

Odgovori učenika Gimnazije Andrije Mohorovičića bili su još raznolikiji. Ono što na neki način nismo predvidjeli jest da će učenici razmatrati veličinu kanti te činjenicu da se ne može proizvesti beskonačan broj loptica. Dvoje učenika razmišljalo je na taj način te je njihov zaključak bio da postupak nikad neće završiti. Bilo je i slučajeva kada su neki od učenika razmatrali više mogućnosti - od toga da postupak neće završiti do toga, da će uvijek biti jednak broj loptica u obje kante. Najviše učenika smatra da će u obje kante biti jednak broj loptica, ali i tu su se odgovori razlikovali. Iako postupak umetanja i premještanja loptica ide u nedogled, mnogi su uzeli da ih ukupno ima N te da će naposljetku biti u svakoj od kanti $N/2$, dok ostali smatraju da će ih biti u svakoj od kanti po beskonačno mnogo. Nekoliko učenika smatra da će u kanti A uvijek biti za jedna više loptica nego u kanti B. Zanimljiva je činjenica da je bilo odgovora s konkretnim vrijednostima. Tako je dvoje učenika odgovorilo da će u kanti A biti 3, odnosno 2 loptice. Ukupni rezultati dani su na slici 2. Primijetimo da odgovora *a* ima najviše, puno više nego odgovora *b*, dok točan odgovor *c* nije dobiven.

Rezultati dobiveni na Sveučilišnim odjelima u Rijeci (slika 2) ukazuju na čestu pojavu odgovora *a*, a slijedi ga odgovor *b*. Odgovor *c* zaokružilo je ukupno 5 studenata, što je najviše od svih grupa ispitanika. Od toga samo su dvije studentice konkretnije objasnile zašto će kanta A ostati prazna. Studentice su uvidjele da će loptice ubačene u kantu A s vremenom biti prebačene u kantu B i da će kanta A ostati prazna. Ostali studenti nisu uvidjeli što će se dogoditi s lopticama u kanti A nakon beskonačnog broja ubacivanja loptica. Ono što nikako nismo mogli očekivati jest da će studenti biti okupirani činjenicom da takve kante ne postoje. Jedna studentica dotakla se kardinalnosti te došla do zaključka da, ako su loptice numerirane prirodnim brojevima i ako skup prirodnih brojeva podijelimo u dva disjunktna beskonačna skupa (ti skupovi predstavljaju broj loptica u kanti A odnosno B), kardinalnost će i dalje biti $\aleph_0$.

Među studentima Tehničkog fakulteta nitko nije zaokružio odgovor *c*, a najviše je bilo odgovora *a* (slika 2). Većina ih smatra da je broj iteracija povezan s brojem loptica u kanti A, tj. da će u *n*-tom koraku biti *n* loptica u kanti A, odnosno, ako idemo u beskonačno, kanta A sadržavat će beskonačan broj loptica. Na kraju dolaze do zaključka da je jednak broj loptica u kantama. Jedan student dotakao se pojma beskonačnosti kao pojma koji ne daje vrijeme završetka ubacivanja i premještanja loptica stoga točan odgovor ne postoji.

Sa Sveučilišta u Zagrebu sudjelovalo je ukupno 275 studenata - 40 studenata s Prirodoslovno-matematičkog fakulteta (nastavnički i inženjerski smjer) i 235 studenata s Fakulteta elektrotehnike i računarstva. Ukupan broj odgovora po kategorijama a, b, c, d možete pogledati na slici 2. Za studente Matematičkog odjela PMF-a, kao i u ostalim slučajevima, najviše ima odgovora *a* (slika 2). Zanimljivo je da, uz jedan točan odgovor *c*, uopće nema odgovora *b*. Jedna studentica promatrala je analogan pokus u kojem u kantu A stavljamo loptice x, a vadimo loptice $2x$, razmišljajući da tako u kantu A stavljamo samo loptice s neparnim brojem, a u kantu B samo loptice s parnim brojem. Ta razmatranja nisu dovela ni do jednog konkretnog zaključka.

Najviše studenta, više od polovice, Fakulteta elektrotehnike i računarstva smatra da će u kantama biti pola od ukupnog broja loptica (slika 2). Troje studenata smatra da je točan odgovor *c*, ali je samo jedan objasnio zašto smatra da će kanta A ostati prazna. Neki od studenata imali su problema sa shvaćanjem pojma beskonačnosti, jer smatraju da je „beskonačno” pojam koji ide u nedogled i nedefiniran je, a samim time je i broj loptica u A nedefiniran. Studenti su smatrali da će se u A nalaziti dvostruko manje loptica od onih u kanti B, a neki su pak došli do zaključka da će u A biti dvostruko više loptica s obzirom na broj loptica u B, te da će ih na kraju, kako proces ide u beskonačno, u svakoj od kanti biti beskonačno. Zanimljiva je činjenica da su neki od studenata uzimali u obzir veličinu kante i da beskonačan broj loptica ne može stati u kantu. U nekoliko slučajeva imamo danu i konkretnu vrijednost, tj. u kanti A bit će dvije, odnosno tri loptice.

4.4. Zaključci statističke analize

Zbog ograničenosti prostora ovdje navodimo samo zaključke statističkih analiza provedenih u [4]. Iako su zaključci dobiveni testovima hipoteza s razinom signifikantnosti 0.95, valja naglasiti da je to ipak jedna statistička analiza provedena na modelu stvarnog svijeta (tj. shvaćanja pojma beskonačnosti), pa stoga ne možemo isključiti postojanje dodatnih faktora koji utječu na to da smo dobili upravo ovakve zaključke. Na kraju krajeva, svaki model, ma koliko dobar bio, samo je aproksimacija istraživane pojave.

Vrlo je zanimljivo da se rezultati prikupljeni kod učenika osnovne škole statistički razlikuju od rezultata prikupljenih kod ostalih ispitanika: učenika srednje škole i studenata raznih fakulteta. Statistički gledano u našem modelu, u kojem odgovor *b* ukazuje na bolje razumijevanje pojma beskonačnosti, ispada da učenici osnovnih škola bolje shvaćaju pojam od bilo kojih drugih ispitanika. Kako je to moguće? Mi smo skloni razmišljanju da je zapravo stvar u tome da sustavnim proučavanjem beskonačnosti, graničnih i iterativnih procesa kod učenika srednje škole i studenata, oni stvaraju određen respekt prema tim pojmovima i neće nepromišljeno odgovoriti da nečega ima beskonačno. S druge strane, učenici osnovnih škola često su zaokruživali odgovor *b* bez valjanog objašnjenja, što je dovelo do uočenog nesrazmjera.

Što se studenata tiče, statistički smo usporedili shvaćanje pojma beskonačnosti studenata matematike i fizike sa studentima informatike i računarstva. Ispostavilo se da odgovori ove dvije grupe studenata ne pripadaju istoj razdiobi. Dakle, oni različito razmišljaju o beskonačnosti. Međutim, nije statistički potvrđeno da ta razlika u razmišljanju dovodi do boljeg shvaćanja jedne od grupa.

5. Literatura

1. R.M. Beard, *An Outline of Piaget's Developmental Psychology for Students and Teachers*, Routledge & Kegan Paul Ltd, London, 1969.
2. E. Dubinsky, M.A. McDonald, APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research, *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study* (D. Holton et al., eds.), pp. 273-280, Kluwer, Dordrecht, 2001.
3. E. Dubinsky, K. Weller, C. Stringer, D. Vidakovic, Infinite iterative processes: the tennis ball problem, *Eur. J. Pure Appl. Math.* 1 (2008.), no. 1, 99-121.
4. I. Toplek, *O shvaćanju pojma beskonačnosti i graničnih procesa*,[4] diplomski rad, Odjel za matematiku, Sveučilište u Rijeci, 2012.
5. K. Weller, A. Brown, E. Dubinsky, M. McDonald, C. Stenger, Intimations of infinity, *Notices Amer. Math. Soc.* 51 (2004.), no.7, 741-750.

[4]Rad se može nabaviti slanjem e-maila nekom od autora ovog članka.