Kako odgovoriti na *Zašto* pitanja svojih učenika?

RANDY PHILIPP[1] I BRAD FULTON[2]

- Zašto ne možemo dijeliti s nulom?
- Zašto je umnožak dvaju negativnih brojeva pozitivan?
- Zašto je $n^0 = 1$?

Zašto ne možemo dijeliti s nulom?

Pristup iz stvarnog svijeta

Zamolite šest učenika da stanu u vrstu, jedan do drugoga, ispred razreda. Zatim opišite neku od karakteristika koje posjeduju pomoću razlomka. Primjerice:

$$\frac{1}{6} \text{ ima plavu kosu} \quad \text{ili} \quad \frac{1}{3} \text{ nosi kratke hlače.}$$

Nakon toga zadajte učenicima da sami daju slične opise koristeći razlomke. Primjeri mogu uključivati:

$$\frac{1}{2} \text{ su djevojčice, } \frac{2}{3} \text{ ima smeđe oči, } \frac{5}{6} \text{ nosi trenirku, } \frac{6}{6} \text{ misli da je učitelj dobar.}$$

Zatim promatrajte različitost razlomaka koje ste kreirali. Postoje različiti brojnici i nazivnici. Možete li iskazati tvrdnju koja će biti prikazana razlomkom s brojnikom nula?

$$\text{Npr. } \frac{0}{6} \text{ učenika ima perje.}$$

Ali, možete li iskazati tvrdnju koja će biti prikazana razlomkom s nazivnikom nula? Ne postoji razuman način da se izrazi takav razlomak. On nema značenja. Koristeći različite brojeve učenika, možemo generirati druge nazivnike, ali ne možemo dobiti nazivnik nula.

[1]dr. Randy Philipp, San Diego State University
[2]Brad Fulton, ***Teacher to Teacher Press***

Problem s ovim modelom je da ne može modelirati mješovite brojeve ili neprave razlomke. Ne možemo napisati razlomak kojemu je brojnik veći od nazivnika, iako ti razlomci nisu nedefinirani.

Pristup uočavanjem zakonitosti (smješten u kontekstu iz stvarnog života)

Neka 12 : 6 znači da svakoga dana možemo ukloniti šest hrpica pijeska. Tada se količnik 2 odnosi na broj dana koji bi nam trebao da uklonimo svih 12 hrpica pijeska. Ili, ako to iskažemo na drugi način, možemo pisati 12 – 6 – 6 = 0.

Nadalje, 12 : 3 = 4 (ili 12 – 3 – 3 – 3 – 3 = 0) znači da ako svakoga dana uklonimo 3 hrpice pijeska, svih 12 hrpica bilo bi uklonjeno u 4 dana.

Slično, $12:\frac{1}{2}=24$ (ili $12-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-...-\frac{1}{2}=0$) znači da ako svakoga dana uklonimo $\frac{1}{2}$ hrpice pijeska, trebat će nam 24 dana da uklonimo svih 12 hrpica.

$12:\frac{1}{4}=48$ (ili $12-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-...-\frac{1}{4}=0$, nakon što oduzmemo 48 četvrtina.)

$12:\frac{1}{1000}=12000$ (ili $12-\frac{1}{1000}-\frac{1}{1000}-\frac{1}{1000}-...-\frac{1}{1000}=0$ nakon što oduzmemo 12 000 tisućina.)

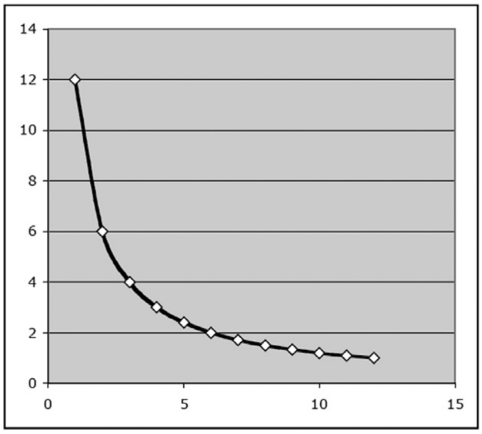
Jasno, svaka bi kompanija izgubila posao kada bi dnevno uklonila samo jednu tisućinu hrpice pijeska. No, za matematiku, razmatranje scenarija je dovoljno i možemo vidjeti da bi za to trebalo 12 000 dana. Čak i da svakoga dana uklonimo samo jedno zrno pijeska, kada bismo imali dovoljno vremena, u nekom bismo trenutku uklonili sav pijesak.

Razmotrimo sada 12 : 0. U našem kontekstu to bi značilo da svakoga dana uklonimo 0 hrpica pijeska. Ili, gledajući oduzimanje, imali bismo 12 – 0 – 0 – 0 – 0 – 0 – 0 – 0 ..... Dakle, koliko 0 moramo oduzeti od broja 12 da bismo dobili broj 0? Ne postoji takav broj nula pa je zato 12 : 0 nedefinirano.

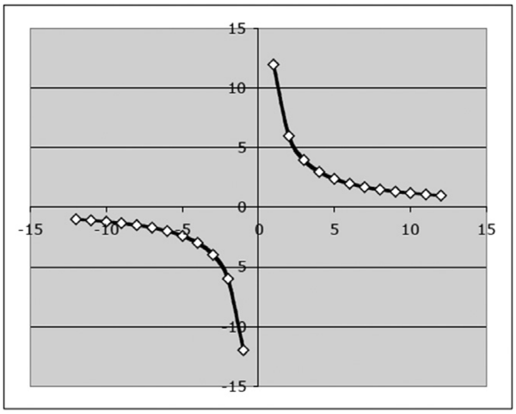
Grafički pristup

Promotrimo razlomak $\frac{12}{12}$. Taj je razlomak jednak broju 1. Umanjimo li djelitelj, količnik će se povećati: $\frac{12}{6}=2$, $\frac{12}{4}=3$, $\frac{12}{3}=4$. Kada je djelitelj x manji od jedan, ali veći od nule, možemo dobiti vrlo velike vrijednosti za $\frac{12}{x}$. Primjerice, $\frac{12}{0.01}=1200$.

Kada se djelitelj približava nuli, tada se razlomak $\frac{12}{x}$ približava beskonačnosti. Možemo pretpostaviti da je vrijednost količnika $\frac{n}{0}$ beskonačna. To je prikazano i grafom:



No, nuli se možemo približavati i s negativne strane brojevnog pravca. $\frac{12}{-12} = -1$, $\frac{12}{-4} = -3$ i $\frac{12}{-1} = -12$. Stoga, kada se približavamo nuli s negativne strane brojevnog pravca, količnik se približava negativnoj beskonačnosti. Kao što je prikazano drugim grafom, to vodi do kontradikcije jer dobivamo dvije različite vrijednosti za $\frac{n}{0}$.



Dokaz kontradikcijom

Primijenimo dokaz kontradikcijom kako bismo demonstrirali zbog čega ne možemo dijeliti nulom. Pretpostavimo da možemo dijeliti nulom; tada bi se dogodilo sljedeće.

Iz jednakosti $1 \cdot 0 = 0$ i $2 \cdot 0 = 0$, s obzirom na svojstvo tranzitivnosti, slijedi da je $1 \cdot 0 = 2 \cdot 0$.

Dijeljenje nulom dovodi do sljedeće kontradikcije: $1 = 2$.

Budući da znamo da je to lažna tvrdnja, naša početna pretpostavka da možemo dijeliti nulom mora biti kriva.

Zašto je umnožak dvaju negativnih brojeva pozitivan?

Pristup iz stvarnog svijeta

Modeliranje umnoška dvaju negativnih brojeva zahtijeva situaciju koja uključuje dvije veličine, od kojih obje moraju imat smjer. Razmotrit ćemo dostavljanje pošte u kojemu poštar često griješi.

Možemo primiti ili uplatu (ček, +) ili račun (–), a ako primimo uplatu ili račun zbog pogreške, tada moramo vratiti (–) uplatu (+) ili račun (–).

Ako *primimo* (+) *uplatu* (+), tada imamo više (+) novca.

Ako primimo (+) račun (–), tada imamo manje (–) novca.

Ako zbog pogreške dobijemo uplatu, tada moramo *vratiti* (–) *uplatu* (+) te imamo manje (–) novca.

Ako zbog pogreške dobijemo račun, tada moramo *vratiti* (–) *račun* (–) te imamo više (+) novca.

Pristup uočavanjem zakonitosti

Promotrimo sljedeću tablicu koja prikazuje umnožak pozitivnog broja s drugim brojem čija se vrijednost smanjuje:

$$3 \cdot 3 = 9$$
$$3 \cdot 2 = 6$$
$$3 \cdot 1 = 3$$

Primijetimo da se smanjivanjem drugog faktora za jedan, umnožak smanjuje za tri. Nastavljajući niz, dobivamo:

$$3 \cdot 0 = 0$$
$$3 \cdot (-1) = -3$$
$$3 \cdot (-2) = -6$$
$$3 \cdot (-3) = -9$$

S obzirom da mozak vrlo učinkovito uočava zakonitosti, jasno se može uvidjeti da pozitivan broj pomnožen negativnim brojem daje negativan umnožak.

Sada uzmimo zadnju tvrdnju množenja i počnimo umanjivati vodeći faktor za jedan.

$$3 \cdot (-3) = -9$$
$$2 \cdot (-3) = -6$$
$$1 \cdot (-3) = -3$$

Vidimo da se umnožak svaki put povećava za tri. Ako nastavimo na isti način, dobit ćemo:

$$0 \cdot (-3) = 0$$
$$-1 \cdot (-3) = 3$$
$$-2 \cdot (-3) = 6$$
$$-3 \cdot (-3) = 9$$

S obzirom da naš mozak vjeruje zakonitostima, učenici će sa sigurnošću doći do zaključka da negativan broj pomnožen negativnim brojem daje pozitivan umnožak.

Pristup pomoću osjećaja za broj

Promotrimo umnožak $2 \cdot 3$ za koji znamo da je jednak broju 6. Jedan način sagledavanja negativnih brojeva jest da ih gledamo kao brojeve suprotne pozitivnima.

Zapravo, svaki broj različit od nule ima svoj suprotan broj, a zbroj broja i njemu suprotnog broja jest nula. Stoga je $5 + (-5) = 0$. To znači da zadatak možemo čitati kao „Koji je broj suprotan umnošku broja dva i broja tri?" Zapisano matematičkim simbolima, koliko je $-2 \cdot 3$?

S obzirom da je $2 \cdot 3$ šest, tada njemu suprotan broj mora biti -6. Dakle:

$$-2 \cdot 3 = -6$$

Sada smo primjerom demonstrirali da negativan broj pomnožen pozitivnim brojem daje negativan umnožak. Zbog svojstva komutativnosti množenja zadatak možemo zapisati kao:

$$3 \cdot (-2) = -6$$

Sljedeće se trebamo zapitati, „Koji je broj suprotan broju $3 \cdot (-2) = -6$?" Jasno, to bi se moglo zapisati kao pitanje koliko je $-3 \cdot (-2)$?

S obzirom da znamo da je rješenje prethodnog zadataka bilo –6, rješenje „suprotnog" problema treba biti broj suprotan broju –6, odnosno +6. Stoga smo demonstrirali da negativan broj pomnožen negativnim brojem daje pozitivan umnožak.

Zašto je $n^0 = 1$?

Pristup iz stvarnog svijeta

Uzmite komad papira i presavijajte ga napola što je moguće više puta. Vjerojatno ćete ga moći presavinuti šest ili sedam puta. Što mislite, zbog čega? To je, naravno, zbog toga što se svakim presavijanjem broj slojeva udvostručava, stoga broj slojeva brzo raste (eksponencijalno). Zapravo, možemo primijeniti eksponente da bismo proučili taj proces. Neka broj predstavlja n udvostručavanja ili presavijanja papira. Sljedeća tablica prikazuje što se događa s brojem slojeva svaki put kada napola presavijemo papir.

Broj presavijanja (n)	Broj slojeva	Zapis potencijom
1	2	2^1
2	4	2^2
3	8	2^3
4	16	2^4
5	32	2^5
6	64	2^6
7	128	2^7

Broj slojeva se svakim presavijanjem *udvostručava* (baza potencije jednaka je 2). Eksponent potencije pokazuje koliko smo puta presavinuli papir. Srednji stupac tablice daje ukupan broj slojeva nakon presavijanja papira. S ovim u vidu, trebamo se zapisati što znači zapis 2^0?

Taj zapis mora značiti da komad papira nije presavijen (broj slojeva se nije udvostručio.) No, koliko slojeva imamo u tom slučaju? Samo jedan, zar ne!? Dakle, jasno je da je $2^0 = 1$. Kada bi 2^0 bilo jednako nuli, kao što često učenici očekuju, tada bi zadatak bio da uzmemo **nijedan** komad papira i zatim ga presavijamo…

Broj presavijanja (n)	Broj slojeva	Zapis potencijom
0	1	2^0
1	2	2^1
2	4	2^2
3	8	2^3
4	16	2^4
5	32	2^5
6	64	2^6
7	128	2^7

Sličan se argument može iskoristiti za utrostručavanje ili učetverostručavanje broja slojeva. Bez obzira na *tip* presavijanja, uvijek počinjemo s jednim slojem papira. Stoga je $n^0 = 1$ za sve vrijednosti broja n različite od nule.

Pristup uočavanjem zakonitosti

Znamo da vrijedi:

$$2^2 = 4$$
$$2^3 = 8$$
$$2^4 = 16$$
$$2^5 = 32$$

Ako nastavimo ovaj niz u suprotnom smjeru, možemo vidjeti da je svaki rezultat jednak polovici prethodnog.

$$2^5 = 32$$
$$2^4 = 16$$
$$2^3 = 8$$
$$2^2 = 4$$
$$2^1 = 2$$

Dakle, nastavljanjem niza dobili bismo da je

$$2^0 = 1.$$

Mogli bismo čak produljili niz na negativne eksponente kako bismo dobili razlomke:

$$2^{-1} = \frac{1}{2}$$
$$2^{-2} = \frac{1}{4}$$
$$2^{-3} = \frac{1}{8}$$

Dok je našem mozgu vrlo ugodno zaključivati na opisani način, eksponenti su učenicima često vrlo apstraktni te ih ponekad čak ni ova metoda ne može uvjeriti da bilo koji broj različit od nule na nultu potenciju daje jedan.

Simbolički pristup

Zakon eksponenata i svojstva algebre vode nas do sljedećeg dokaza da je $n^0 = 1$ za sve vrijednosti broja n različite od nule:

Bilo koji broj različit od nule podijeljen samim sobom daje 1.

$$n^a : n^a = 1$$

Pravilo dijeljenja potencija jednakih baza.

$$n^a : n^a = n^{a-a}$$

Zbroj bilo kojeg broja i njemu suprotnog broja jednak je nuli.

$$n^{a-a} = n^0$$

Svojstvo tranzitivnosti.

$$n^0 = 1$$

Problem ovog vrlo sažetog dokaza je u tome što čitatelj, da bi razumio da je $n^0 = 1$, mora razumjeti deduktivno zaključivanje, svojstvo tranzitivnosti i pravilo dijeljenja potencija jednakih baza. Ako je učeniku teško razumjeti n^0 , tada su mu vjerojatno još teži ovi napredniji koncepti.

S engleskog prevela Tanja Soucie