IZ INFORMATIKE

Mjerenje u realnom vremenu – Novi element u nastavi matematike

Tine Golež[1]

Uvod

Nastava matematike (ali ne i matematika općenito) nije se mnogo promijenila u posljednjih 250 godina – ako je usporedimo s drugim promjenama u društvu, tehnici ili znanosti. Brzi razvoj računala omogućio je lakši i precizniji rad na području geometrije. U posljednjih 20 godina na području geometrije pojavilo se mnogo računalnih programa koji su u stalnom razvoju, a najnoviji trend uključuje računalo i kao alat za prikupljanje podataka u realnom vremenu, odnosno kao polazište k matematičkim pojmovima na temelju mjerenja u *relanom vremenu*. To znači da uz samo mjerenje (temperature, položaja tijela koje se kreće, pritiska ili neke druge veličine), računalo crta njihov grafički prikaz u zavisnosti od vremena. Dakako, postoji neko malo zakašnjenje u crtanju grafičkog prikaza, ali to je obično manje od 0.1 sekunde, tako da promatrač shvaća eksperiment i nastajuću sliku kako istodobne događaje.

Nekadašnja (ali i danas vrlo temeljna paradigma) polazi od učenja matematičkih pojmova, struktura i koncepata prema njihovoj upotrebi i primjeni u fizici. Bez suvremene opreme za mjerenje ovaj je pristup bio djelomično opravdan, iako su se davali mnogi larpurlartistički zadaci kao što je primjerice ovaj: *Tijelo se kreće pravcem 0x po zakonu* $x = t^3 - 2t^2 + 3t$. *Odredite brzinu i ubrzanje kretanja. U kojim momentima tijelo mijenja smjer kretanja?* [1] Sasvim je opravdano pitanje inteligentnog učenika: „Što je taj zakon gibanja? Odakle je proizišao? Objasnite mi, molim, koje se stvarno tijelo tako kreće?" Siguran sam da će mu nastavnik matematike dati adekvatan i logičan odgovor.

Suvremena oprema za realistična mjerenja omogućava da izbjegnemo takve situacije. Materijal za rad u matematici dobijemo eksperimentima koje izvodimo u razredu tijekom nastave. Tako i fizika može prethoditi nastavi nekih matematičkih pojmova.

[1] Tine Golež, *Zavod sv. Stanislava, Škofijska klasična gimnazija, Ljubljana, Slovenija*

Oprema

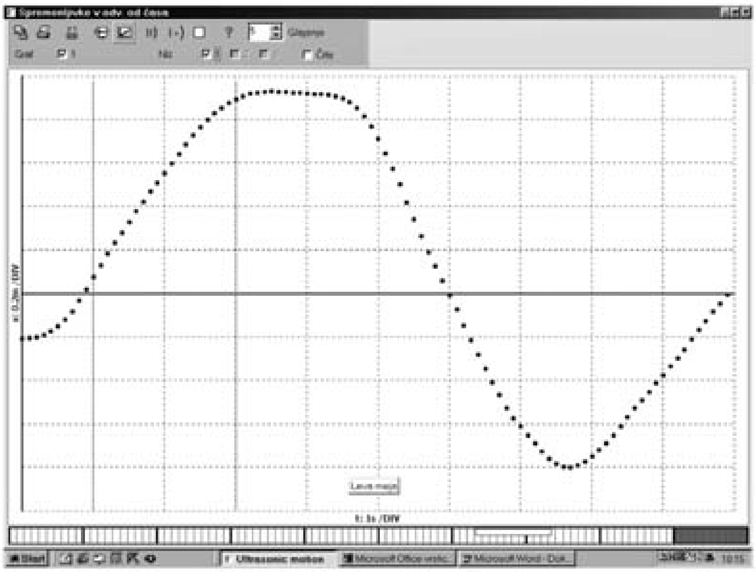
Pored PC računala, dobro bi nam došao i projektor, ali može se raditi i s običnim, možda malo većim monitorom. Na ulaz printera priključujemo mali hardver, a u njega senzor za kretanje koji je serijski proizvod američke tvrtke *Vernier* (slika 1.). Iako tvrtka nudi i software, u slučaju Slovenije software [2] je napisao prof. dr. Slavko Kocijančič s Pedagoškog fakulteta u Ljubljani. Do sada postoje verzije na slovenskom i engleskom jeziku, a postoji mogućnost prijevoda i na hrvatski.

Slika 1. Senzor kretanja

U senzoru se nalazi emiter ultrazvučnih impulsa, a također i prijamnik odbijenih impulsa. Na taj način sustav može mjeriti položaj (koordinatu) tijela do čak 100 puta u sekundi. Za *šetanje* po pravcu ispred senzora dovoljno je 10 mjerenja u sekundi, a učestalije mjerenje koristimo za brzo kretanje, kao što je slobodni pad i slično.

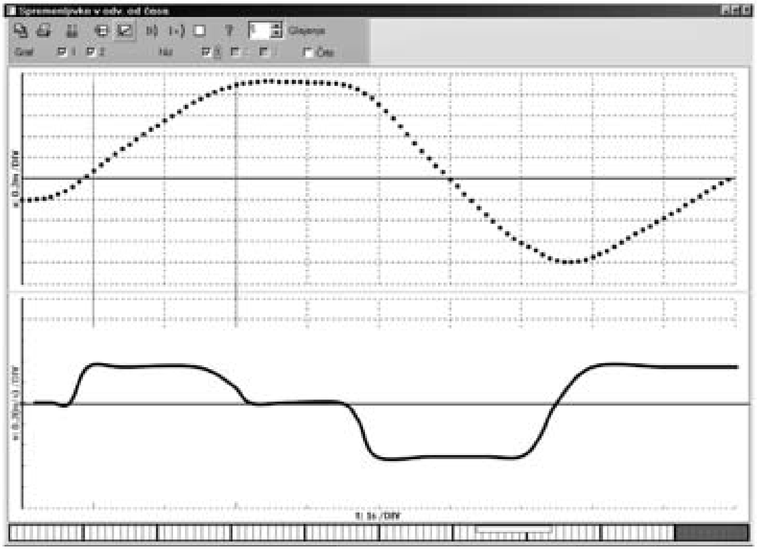
Od mjerenja prema derivaciji i integralu

Šetajući po pravcu ispred senzora u realnom vremenu nastaje i graf $x(t)$. Na neki način to je i osnova za općenito shvaćanje funkcije. Funkcija koordinate crta se uz *šetnju* pa tako učenik može povezati događaje u realnosti s matematičkim (grafičkim) zapisom aktivnosti (slika 2.).

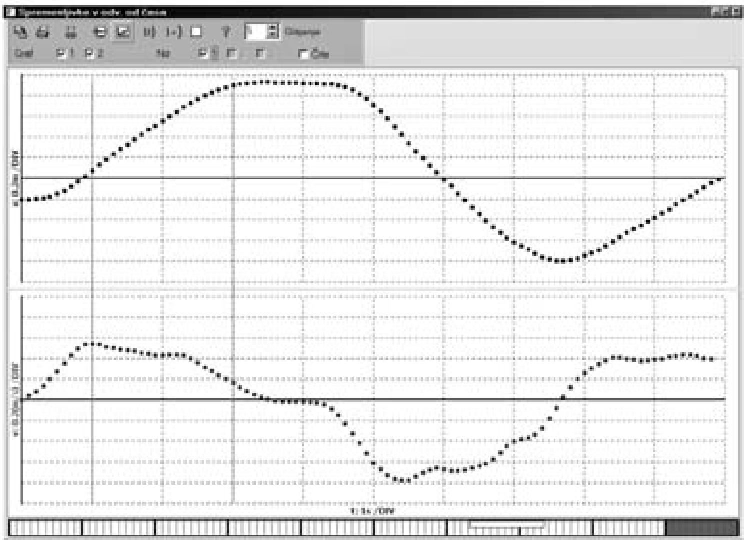


Slika 2. Graf je nastajao u realnom vremenu šetnje ispred senzora

Program je sposoban crtati u realnom vremenu i graf $v(t)$, pa čak i $a(t)$. Zbog metodičkog pristupa najbolje je na početku crtati samo graf $x(t)$. U drugom razredu gimnazije u nastavi fizike analiziramo kretanje pitajući se kako je moguće iz grafa $x(t)$ reći nešto i o brzini kretanja. Zato se diskusija nastavlja crtanjem grafa $v(t)$, zapravo neke aproksimacije (crteža) $v(t)$. Pitamo se gdje se tijelo kretalo napred, gdje se uopće nije kretalo, kolika je bila brzina... Nije teško pogoditi da je nagib tangente na graf $x(t)$ nešto što bi bila trenutačna brzina. Tako nastaje crtež brzine (sl. 3).



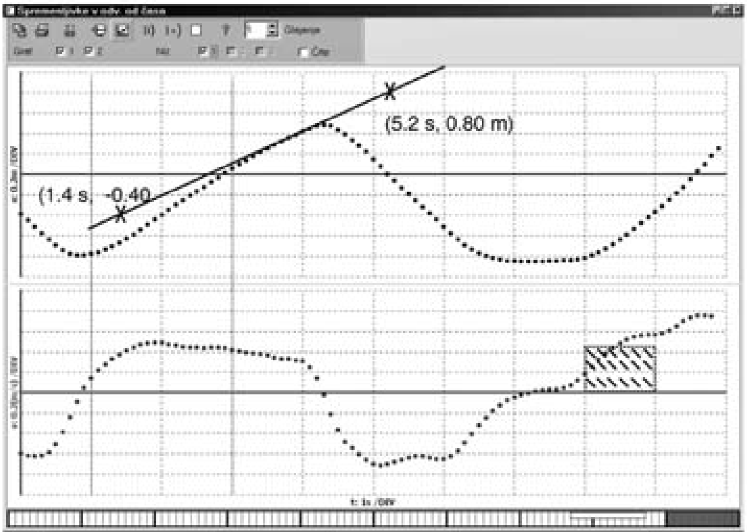
Slika 3. Približan prikaz brzine prema grafu x(t)



Slika 4. Računalo izračunava brzinu v(t) iz podataka x(t)

Ovaj zadatak možemo nazvati kvalitativnim. Gledajući sliku 3., jasno je da smo prilično dobro (na kvalitativnoj razini) „pogodili" graf $v(t)$ (slika 4.).

Sljedeći je korak više kvantitativan. Opet *prošetamo* ispred senzora i dobijemo novi grafički prikaz položaja i brzine. Pitamo se kakva je brzina u trenutku $t = 4.0$ s, a dopušteno je promatrati samo graf $x(t)$. Nacrtamo tangentu i odaberemo dvije točke na tangenti. Zatim izračunamo koeficijent smjera tangente. Rezultat možemo provjeriti na grafu $v(t)$ koji nudi program (slika 5.).

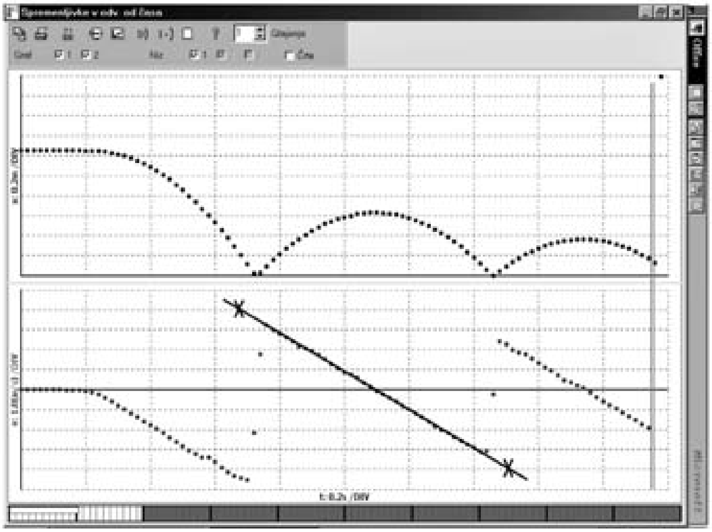


Slika 5. Nagib grafa $x(t)$ definiran je kao nagib tangente u danoj točki. U našem primjeru, za $t = 4.0$ s izračunamo trenutnu brzinu s količnikom $x/t = 0.32$ m/s. Graf $v(t)$ potvrđuje rezultat.

Obrnut proces je na grafu $v(t)$. Pomicanje u danom vremenskom intervalu jednako je površini omeđenom grafom $v(t)$ i osi t. ($x = 1.0 \text{ s} \cdot 0.45 \text{ m/s} = 0.45$ m). Točnost rezultata možemo provjeriti na grafu $x(t)$.

Kao što sam napomenuo, ovo radim u nastavi fizike u drugom razredu gimnazije. Upozoravam učenike da će ovaj proces biti nazvan *derivacija* i *integral* i matematički obrađen u posljednjem razredu gimnazije. Ali, naše aktivnosti su odličan prethodnik jer prvo trebamo nešto razumjeti i imati neke predodžbe, a tek onda se baviti formalizmom i obrascima. Baš sam zato s kolegicom, profesoricom matematike, zajednički realizirao nastavu matematike u četvrtom razredu gimnazije. Ponovili smo ove eksperimente (kretanje, računalo crta grafički prikaz $x(t)$, učenici trebaju nacrtati graf $v(t)$, ponovimo da je nagib grafa $x(t)$ zapravo $v(t)$, nagib grafa $v(t)$ zapravo $a(t)$ – padajuća lopta) i tako motivirali učenike za infinitezimalni račun. Razumijevanje i predodžbe trebaju prethoditi matematičkom formalizamu i računanju po pravilima ili procedurama infinitezimalnog računa.

Suvremena oprema omogućava i mjerenja s najobičnijim predmetima. Tako akceleraciju gravitacije mjerimo puštanjem lopte ispred senzora. Lopta se odbija od poda (koordinata 0 je vršna točka lopte kad je na podu, os x ide prema gore) [3]. Dobivamo grafove $x(t)$ i $v(t)$ (slika 6.).



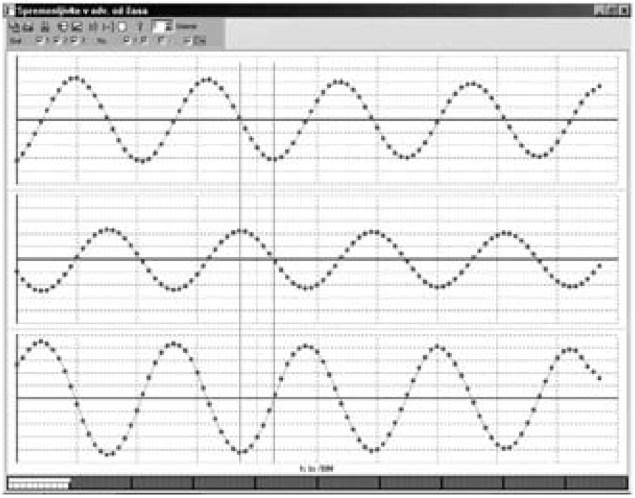
Slika 6. Lopta padne na pod i odbija se

Druga derivacija koordinate je ubrzanje kretanja. Iz nagiba tangente na graf $v(t)$ lako se izračuna ubrzanje kretanja, to jest akceleracija gravitacije.

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-4.0\text{ms}^{-1} - 4.0\text{ms}^{-1}}{1.50\text{s} - 0.68\text{s}} = -9.76\text{ms}^{-2} \approx -9.8\text{ms}^{-2}$$

Pokus s loptom zanimljiv je u matematici drugog razreda, kad učenici zapišu jednadžbu za prvo odbijanje lopte. To je parabola. U četvrtom razredu učenici izračunavaju derivaciju ove parabole i dobiju $v(t)$, a poslije derivacije funkcije $v(t)$ dobiju akceleraciju gravitacije. Saznaju da u trenutku kad pronađemo matematički zapis neke pojave (prvo odbijanje lopte u našem primjeru) možemo upotrebom matematike (prva i druga derivacija funkcije $x(t)$) saznati i druga svojstva pojave [4]. U našem primjeru brzina lopte između prvog odbijanja i akceleracije dokazuje da je tvrdnja istinita i da je matematika jezik fizike.

Vrlo je zanimljivo sakriti osi i promijeniti ih. Na slici 7. ima oscilacija. Zadatak je potražiti koji graf prikazuje $x(t)$, koji $v(t)$, a koji $a(t)$. Pretpostavimo da prvi graf prikazuje $x(t)$. Zatim tražimo prikazuje li drugi graf $v(t)$. Ako to nije istina, pogledamo treći graf. Taj bi mogao biti $v(t)$, ali onda sigurno drugi graf nije $a(t)$. Nova je pretpostavka da drugi graf prikazuje $x(t)$, nakon čega opet proučavamo nagib tangente i vrijednosti idućeg grafa.



Slika. 7. Oscilatorno kretanje

Ovaj put *x(t), v(t)* i *a(t)* nisu u ovom redoslijedu. Potražite redoslijed grafova!

Zaključak

Povijest matematike i fizike oduvijek je bila vrlo povezana, no danas je nastava suviše odvojila ova dva predmeta. Treba tražiti sve mogućnosti koje povezuju apstraktnu matematiku s realnošću – a realnost svijeta proučava fizika. Iz prakse mogu zaključiti da bi baš profesor fizike morao dati poticaj povezivanju gradiva jer je on bolje upoznat s matematikom nego profesor matematike s fizikom.

Iz prakse mogu potvrditi da praćenje nekog gibanja u realnom vremenu povezuje matematiku i fiziku, omogućavajući zanimljiviju nastavu fizike, ali i unapređenje u nastavi matematike. Grafovi, koji nastaju uz kretanje čovjeka ili objekta, služe kao pristup infinitezimalnom računu od prakse prema teoriji, a ne obrnuto. Ali, baš ovakim pristupom prvo se stvaraju neke predodžbe (nagib grafa, površina ispod grafa) koje su suština infinitezimalnog računa. Rezultat je povećanje motivacije i bolje razumijevanje matematičkih tema koje učenici ponekad upotrebljavaju gotovo mehanički, samo kao zbirku nekih *recepata*.

Literatura

[1] Vene, Bogoslav T., *Zbirka rešenih zadataka iz matematike*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd 1985

[2] http://e-prolab.com/si/index.html

[3] youtube: tine98765 (žoga)

[4] M. Rugelj, T. Golež, *Matematizacija odboja žoge za drugošolce in maturante*, Fizika v šoli, 15 (2009) 2, str. 84. – 91.