Prolegomena 11 (1) 2012: 55–63

CHRISTOPH CONRAD HENKE
European Court of Human Rights, Council of Europe,
67075 Strasbourg Cedex, France.
henke_christoph@yahoo.de

ORIGINAL SCIENTIFIC ARTICLE / RECEIVED: 26-10-11 ACCEPTED: 10-05-12

ZUSAMMENFASSUNG: Der Beitrag geht der Frage nach, ob zwei plus zwei immer vier ergibt oder ob auch ein anderes Ergebnis möglich ist. Anlass ist die theologische Debatte über das Problem, ob ein allmächtiger Gott logisch unmögliche Dinge tun kann.

SCHLÜSSELWÖRTER: Allmacht Gottes, Axiom, Formalismus, Mathematik, Platonismus, Realismus, “2 + 2 = 5”.

Fragestellung

Der Beitrag geht der Frage nach, ob zwei plus zwei immer vier ergibt oder ob auch ein anderes Ergebnis möglich ist. Anlass ist u.a. die theologische Debatte über das Problem, ob ein allmächtiger Gott logisch unmögliche Dinge tun kann, ob er beispielsweise ein Dreieck (mit geraden Linien im euklidischen Raum), dessen Winkelsumme nicht 180° beträgt (Goldstein 2007: 103; Rée 1857: 218), ob er einen Stein, der so schwer ist, dass er ihn nicht heben kann (Frankfurt 1964: 262), oder ob er einen Berg ohne Tal schaffen kann (Goldstein 2007: 103). In ähnliche Richtung gehen Fragen wie: Kann Gott bewirken, dass zwei plus zwei fünf (Bauke-Ruegg 1998: 244; van den Brink 1993: 99) oder dass eins plus zwei nicht drei ergibt (Goldstein 2007: 103)?

Unterstellt man die Unmöglichkeit, dass zwei plus zwei fünf ist,[1] könnte dies Anlass zu der Frage bieten, ob Gott etwas Unmögliches vollbringen kann, und wenn nicht, wie sich dies zu der ihm zugeschriebenen Allmacht verhält. Theologen und Philosophen haben hierauf unterschiedliche Antworten gegeben. Descartes vertritt die Ansicht, ein allmächtiger Gott könne auch logisch unmögliche Dinge tun bzw. die Gesetze der Lo-

[1] Stillschweigend angenommen z.B. von Birnbacher (2007: 372).

gik ändern: “Fürchten Sie bitte nicht, überall zu versichern und zu veröffentlichen, dass Gott diese Gesetze eingerichtet hat, so wie ein König Gesetze in seinem Königreich stiftet.”[2] Thomas von Aquin geht davon aus, Allmacht bedeute nicht, widersprüchliche oder logisch unmögliche Dinge tun zu können.[3] Ein ähnlicher Ansatz geht dahin, die Meinung, Gott könne alles, sei ein “metaphysisches Ungeheuer”; im Übrigen handele es sich bei Fragen dieser Art um “intellektuelles Geplänkel”, das “für den christlichen Glauben unerheblich” sei.[4] Auf die unterschiedlichen Ansichten kann nicht im Einzelnen eingegangen werden. Insoweit wird auf die einschlägige Literatur verwiesen.[5] Stattdessen soll die Debatte zum Anlass genommen werden, die These zu hinterfragen, zwei plus zwei könne unmöglich eine andere Summe als vier ergeben.

Ausgangspunkt

Ausgangspunkt ist die Überlegung, warum zwei plus zwei nach hergebrachtem Verständnis vier ergibt und unter welchen Voraussetzungen sich dies ändern könnte.

Das herkömmliche Rechnen mit Zahlen beruht auf verschiedenen Axiomen: Nach dem Kommutativgesetz der Addition können die Elemente der Addition (Summanden) vertauscht werden, ohne dass die Änderung der Reihenfolge Folgen für das Ergebnis hat: $a + b = b + a$.[6] Nach dem Assoziativgesetz der Addition führt eine Addition mehrerer Zahlen zum selben Ergebnis, unabhängig davon, welche Zahl zuerst addiert wird: $a + (b + c) = (a + b) + c$.[7] Nach dem Distributivgesetz kann man eine Summe mit einer Zahl multiplizieren, indem man jedes Glied der Summe mit der Zahl multipliziert und dann die Produkte addiert: $a(b+c) = ab + ac$.[8] Solange diese und andere herkömmliche Axiome[9] beibehalten werden, ist zwei plus zwei vier.

[2] Descartes, Brief an Mersenne, 15.4.1630, zitiert nach Max Bense (Hrsg.)/Fritz Baumgart (Übers.), *René Descartes, Briefe 1629 – 1650*, S. 49. Vgl. auch Descartes, Brief an Mersenne, 27.5.1630: “ich sage, daß er ebenso frei gewesen wäre, zu bewirken, daß nicht wahr wäre, daß alle vom Mittelpunkt zum Kreisumfang gezogenen Linien gleich lang sind”, a.a.O. S. 53. Vgl. Frankfurt (1964: 262), der Überlegungen auf der Annahme eines Allmächtigen Gottes, der logisch unmögliche Dinge vollbringen kann, anstellt.

[3] v. Thomas Aquin, *Summa Theologica*, 1. Buch, Band 2, Frage 25.

[4] Zitiert nach Bauke-Ruegg (1998: 244 ff.).

[5] Z. B. Bachmann (2002); Bauke-Ruegg (1998); van den Brink (1993); Kaplan/Hoevels (2006); Schoen (2003); Schröcker (2003).

[6] Courant (2000: 2); Forster (2006: 10); Senger (2007: 8); Wendland/Steinbach (2005: 22).

[7] Courant/Robbins (2000: 2); Forster (2006: 10); Senger (2007: 8); Wendland/Steinbach (2005: 22).

[8] Courant/Robbins (2000: 2); vgl. Forster (2006: 12); Senger (2007: 8).

[9] So gibt es das Axiom der Existenz der 0: $x + 0 = x$; Forster (2006: 10).

Die Beibehaltung der Axiome ist jedoch nicht zwingend. Vielmehr werden in der Mathematik auch Rechnungsweisen mit anderen Axiomen untersucht (Courant/Robbins 2000: 2). So wurde eine nichtkommutative Algebra entwickelt, mit der Eigenschaften der Atome berechnet werden können (Greiner 2008: 12; Schmutzer 2005: 1668). Das führt zu der Erkenntnis, dass zwei plus zwei bei einer Änderung der Axiome nicht zwangsläufig vier ist. Dies soll an einem Beispiel aufgezeigt werden, das auf Überlegungen zur Verschmelzung und Teilung von Vielecken (Polygonen) basiert, wie sie teilweise in der Dreiecksgeometrie Verwendung finden, bei der Vielecke aus Dreiecken zusammengesetzt werden. Auch bei der Verschmelzung von Vielecken kann von einer Addition gesprochen werden ("Die nebengeordnete, räumliche Synthesis von zwei Dreien ist aber die Addition zweier gleicher Dreiecke, so dass ein Rechteck entsteht", Natterer 2011: 108). Eine satirische Darstellung der Thematik, in der ebenfalls die herkömmlichen Axiome der Addition verändert werden, findet sich in einem Aufsatz von Houston Euler "The History of 2 + 2 = 5".[10]

Ausgangspunkt ist der Ursprung der natürlichen Zahlen. Diese bezogen sich zunächst auf Gegenstände oder Zeiteinheiten. Es war nützlich, zählen zu können. Beispiele: Drei Steine und drei Steine sind sechs Steine. Zwei Tage und zwei Tage sind vier Tage. Dieser Ursprung kommt noch im Begriff "Zahl" zum Ausdruck. Er stammt von "zala" und bedeutet "eingekerbtes Merkzeichen" (Schichl/Steinbauer 2009: 275). Eine Kerbe stand für eins, zwei Kerben standen für zwei usw.

Dazu die Skizze:

Es lässt sich vorstellen, dass sich die Zahlen nicht auf Gegenstände, sondern auf die Anzahl der Ecken von Vielecken (Polygonen) beziehen. Ein Dreieck hat drei Ecken und steht für die drei. Ein Viereck hat vier Ecken und steht für die vier. Ein Fünfeck hat fünf Ecken und steht für die fünf usw.

[10] Euler (1990): "Many cultures, in their early mathematical development, discovered the equation 2 + 2 = 5. For example, consider the Bolb tribe, descended from the Incas of South America. The Bolbs counted by tying knots in ropes. They quickly realized that when a 2-knot rope is put together with another 2-knot rope, a 5-knot rope results"; zitiert nach www.gshotts.com (18.3.2011).

Eine Linie hat zwei Enden und steht für die zwei, während ein Punkt für die eins steht. Punkt und Linie sind zwar nicht Vielecke, können aber als "Grenzfälle" von Vielecken angesehen werden (Grinberg 2003: 1).

Dazu die Skizze:

.	1
—	2
	3
	4
	5

Hiervon ausgehend lassen sich Addition und Multiplikation als Zusammenfügen, Subtraktion und Division als Teilen von geometrischen Figuren verstehen.[11] Auf diese Weise lässt sich wie folgt rechnen:

Drei plus vier ergibt fünf; denn wenn man ein Dreieck und ein Viereck zusammenfügt, erhält man ein Fünfeck. Umgekehrt ergibt fünf minus drei vier; denn wenn man von einem Fünfeck ein Dreieck abtrennt, verbleibt ein Viereck. Zur Veranschaulichung:

	plus		gleich	

Vier geteilt durch vier ergibt 16; denn wenn man ein Viereck in vier Teile teilt, erhält man vier Vierecke mit insgesamt 16 Ecken. Dazu die Skizze:

	geteilt durch	vier	gleich	

[11] Ergänzend sind weitere Prämissen namentlich hinsichtlich der Art und Weise des Zusammenfügens und des Teilens der Figuren zugrunde legen, worauf aus Platzgründen nicht näher eingegangen wird. So werden die Additionsergebnisse ggf. zum Zwecke der weiteren Rechnungen in regelmäßige Polygone umgeformt. Die Polygongrößen werden ggf. zum Zwecke der Addition so angepasst, dass Linien gleich lang sind. Sind nach aufgrund einer Addition mehrere Polygone möglich, ist das mit den wenigsten Ecken für das Ergebnis maßgeblich.

Zwei mal zwei bleibt zwei; denn wenn man zwei Linien zusammenfügt, bleiben zwei Ecken übrig. Gleiches gilt für zwei plus zwei. Zur Veranschaulichung:

—	plus	—	gleich	———

Auf diese Weise ist eine Mathematik entstanden, in der zwei plus zwei nicht vier, sondern zwei ergibt. Was ist geschehen? Es erfolgte ein Eingriff in mathematische Axiome, was zu anderen Ergebnissen führt. Die Addition wurde nicht in herkömmlicher, sondern in modifizierter Weise vorgenommen.

Philosophische Debatte

Kehrt man vor diesem Hintergrund zu der Frage zurück, ob ein allmächtiger Gott bewirken kann, dass zwei plus zwei nicht vier ist, lassen sich weitere Sachverhalte entwickeln, bei denen sich ähnliche Fragen stellen.

So hätte die biologische Evolution des Menschen anders verlaufen können. Das menschliche Gehirn hätte eine Denkblockade aufweisen können, durch die dem Menschen bestimmte mathematische Definitionen (etwa das Distributivgesetz) verborgen geblieben sein könnten; sie lägen jenseits seines Erkenntnishorizonts. Eine solche Welt ist ohne weiteres vorstellbar, weil auch Tieren mathematische Definitionen verborgen geblieben sind.

Ebenso ist vorstellbar, dass Menschen eine Denkblockade haben, die es verhindert, dass eine neue Mathematik erkannt wird, nach der zwei plus zwei fünf ist. Abwegig ist dies nicht, was ein Blick auf die von Cantor im 19. Jahrhundert begründete Mengenlehre deutlich macht. Diese "hat die Mathematik vollkommen verändert" (Aigner 2010: 121). Solche Veränderungen sind auch künftig möglich und wohl auch zu erwarten.

Die Überlegungen lassen sich auf die Frage zuspitzen, ob zwei plus zwei schon vor der Entstehung der Menschheit vier war oder nicht.

Einerseits lässt sich sagen, zwei plus zwei könne nur dann vier sein, wenn die genannten Axiome anerkannt seien. Ohne Menschen keine mathematischen Axiome – also war zwei plus zwei vor Entstehung der Menschen nicht vier. Andererseits lässt sich – z.B. unter Verweis darauf, dass Berkeleys Postulat "*esse est percipi*" ("Sein heißt Wahrgenommenwerden", Berkeley 2005: 37) nach verbreiteter Auffassung unrichtig sei – argumentieren, dass auch in einer Welt ohne Menschen bei fiktiver Zugrundelegung der "richtigen" Definition zwei plus zwei vier sei und Nichterkennung der “richtigen” Definitionen durch die Menschen daran nichts ändere.

Allerdings ist dies keine mathematische Fragestellung mehr, sondern eine philosophische. Bei ihr treffen zwei Ansichten aufeinander. Vom Platonismus/Realismus ausgehend lässt sich vorbringen, mathematische Erkenntnisse könnten unabhängig vom Menschen existieren und würden von ihm nicht geschaffen, sondern entdeckt.[12] Mathematische Begriffe seien real und würden ggf. in Axiomen beschrieben (Bedürftig /Murawski 2010: 31 ff). Zwei plus zwei könne dann vier sein, selbst wenn es keinen Menschen gebe, der dies entdeckt habe. Umgekehrt lässt sich – etwa vom mathematischen Formalismus ausgehend, durch Hilbert maßgeblich geprägt – die Ansicht vertreten, mathematische Erkenntnisse in Verbindung mit den entsprechenden Axiomen würden vom Menschen geschaffen, existierten also nicht unabhängig von ihm.[13] Zwei plus zwei wäre in diesem Fall erst dann vier, wenn die Axiome geschaffen wären, aus denen sich das Ergebnis herleitet.

Präferenz

Den Vorzug verdient die Auffassung, dass der Mensch die mathematischen Axiome geschaffen, nicht entdeckt hat, dass sie nicht aus sich selbst heraus existieren und dass zwei plus zwei deshalb nicht losgelöst vom Beobachter vier ergibt. Für Gegenstände mag gelten, dass sie auch ohne Wahrnehmung durch Menschen existieren. Mathematische Axiome hingegen sind von Menschen geschaffen. Wird ein Axiom nicht geschaffen, existiert es ebenso wenig wie ein nicht errichtetes Haus. Fehlt es an diesem Axiom, existieren auch die auf ihm aufbauenden Berechnungen nicht.

Welche Ansicht man zu dieser Problematik vertritt, hängt letztlich vom Verständnis der Begriffe “entdecken”, “erschaffen” und “existieren” ab. Im Kern handelt es sich um einen Streit um die richtige Definition dieser Begriffe. Definitionen können nicht wahr oder falsch, sondern lediglich mehr oder weniger zweckmäßig sein.[14] Eine Definition, nach der mathematische Axiome und sich darauf stützende Erkenntnisse unabhängig vom Betrachter existieren, erscheint wenig zweckmäßig. Dazu folgende Erwägungen:

---

[12] Vgl. zum Platonismus in der Mathematik z.B. Bedürftig (2010: 31 ff); Dorn (2000: 43 ff); Heintz (2000: 38 ff); Hoffmann (2011: 66); Martin (1973: 263 ff); Sauer (1977: 49 ff).

[13] Vgl. zum Formalismus Heintz (2000: 47 ff); Hilbert /Rowe (1992); Hoffmann (2011: 33 ff). Einen ähnlichen Ansatz, nach dem Ideen menschengeschaffen sind vertritt z.B. Popper (2006: 271).

[14] So z.B. Wesche (2005: 73); a.A. z.B. Mayer-Maly (2001: 3).

Die Behauptung, zwei plus zwei sei unabhängig vom Menschen vier und schon vor Entstehung der Menschheit vier gewesen, lässt sich wie folgt umformulieren: Hätte jemand vor Entstehung der Menschheit erst später aufgestellte Axiome entdeckt und hätte er auf ihrer Basis Berechnungen angestellt, wäre er zu dem Ergebnis gelangt, dass zwei plus zwei vier ist. Die Aneinanderreihung mehrerer Möglichkeiten führt vor Augen, dass von etwas Irrealem die Rede ist. Es erscheint wenig sinnvoll, dem eine Existenz zuzuschreiben.

Aufschlussreich ist auch die Überlegung, weshalb an den Schulen eine Mathematik unterrichtet wird, bei der zwei plus zwei vier ist, und nicht eine Mathematik, die auf anderen Axiomen beruht. Die Antwort lautet, dass Eltern, Lehrer, Wirtschaft und Politik einen Mathematikunterricht auf der Basis herkömmlicher Axiome bevorzugen, weil die Schüler damit im Leben etwas anfangen können, während sie mit einer Mathematik, die auf anderen Axiomen beruht, so gut wie nichts anfangen können. Ausschlaggebend ist mithin nicht die Richtigkeit der herkömmlichen Axiome, sondern deren Zweckmäßigkeit. Anders formuliert: Nicht die Mathematik, sondern die Ökonomie diktiert, dass zwei plus zwei vier ist.

Die Annahme, dass mathematische Axiome unabhängig vom Menschen existieren und von diesem entdeckt werden, ist ebenso wenig überzeugend wie das Argument, Goethes Faust habe bereits vor Goethe existiert, nur seien die speziellen Wortkombinationen vor ihm nicht entdeckt worden. Ebenso fernliegend ist die Argumentation, die Demokratie habe vor der Entstehung des Menschen existiert, nur sei sie nicht entdeckt worden.

Geht man davon aus, dass mathematische Erkenntnisse mit den betreffenden Axiomen vom Menschen nicht entdeckt, sondern geschaffen werden, ist die Frage, ob es eine Welt geben könnte, in der zwei plus zwei nicht vier ist, ohne weiteres zu bejahen. Damit erledigen sich zugleich oben angedeutete Fragestellungen wie die, ob ein allmächtiger Gott bewirken kann, dass zwei plus zwei fünf oder dass eins plus zwei drei ergibt. Es handelt sich um Scheinfragen, mit denen sich eine Allmacht Gottes nicht in Zweifel ziehen lässt.[15]

Resümee

Nach Ryle besteht die Rationalität des Menschen “nicht darin, dass er gewisse Grundsätze bedingungslos akzeptiert, sondern darin, dass er nichts

[15] Der Beitrag befasst sich nicht mit der Frage, ob ein allmächtiger Gott bei unveränderten mathematischen Axiomen bewirken könnte, dass zwei plus zwei nicht vier ist.

bedingungslos akzeptiert; nicht darin, dass er an vermeintlichen Axiomen festhält, sondern darin, dass er nichts als ausgemacht hinnimmt" (Ryle 1947: 167; zitiert nach der deutschen Übersetzung von Griese in Popper 2006: 179). Dies gilt auch für die eingangs aufgeworfene Frage, ob zwei plus zwei immer vier ist. Sie ist im Ergebnis zu verneinen. Ebenso richtig kann eine Mathematik sein, die auf anderen als den herkömmlichen Axiomen beruht und in der zwei plus zwei nicht vier ist. Nicht die Mathematik diktiert, dass zwei plus zwei vier ist, sondern die Zweckmäßigkeit. Damit steht auch fest, dass die Ausgangsfrage nicht geeignet ist, eine Allmacht Gottes obsolet erscheinen zu lassen.

Bibliographie

Aigner, Martin/Ziegler, Günter M. 2010. *Das Buch der Beweise*, 3. Aufl. (Berlin, Heidelberg: Springer).

Bachmann, Michael, 2002. *Göttliche Allmacht und theologische Vorsicht* (Stuttgart: Verlag Katholisches Bibelwerk).

Bauke-Ruegg, Jan, 1998. *Die Allmacht Gottes* (Berlin, New York: De Gruyter).

Bedürftig, Thomas/Murawski, Roman, 2010. *Philosophie der Mathematik* (Berlin u.a.: De Gruyter).

Birnbacher, Dieter, 2007. *Analytische Einführung in die Ethik*, 2. Aufl. (Berlin: De Gruyter).

Berkeley, Georg, 2005. *Eine Abhandlung über die Prinzipien der menschlichen Erkenntnis* (Stuttgart: Felix Meiner) (erstmals gedruckt 1710).

van den Brink, Gijsbert, 1993. *Almighty God: A Study of Divine Omnipotence* (Kampen: Pharos).

Courant, Richard/Robbins, Herbert, 2000. *Was ist Mathematik* (Berlin u.a.: De Gruyter).

Dorn, Matthias, 2000. *Das Problem der Autonomie der Naturwissenschaften bei Galilei* (Stuttgart: Steiner).

Euler, Houston, 1990. "The history of 2 + 2 = 5", *Mathematics Magazine* 63, 338–339.

Forster, Otto, 2006. *Analysis* 1, 8. Aufl. (Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag).

Frankfurt, Harry G. 1964. "The logic of omnipotence", *The Philosophical Review* 73, 262–263.

Goldstein, Jürgen, 2007. *Kontingenz und Notwendigkeit bei Descartes. Eine Studie zur Genese des Cartesianismus* (Hamburg: Felix Meiner).

Greiner, Walter, 2008. *Klassische Elektrodynamik*, 7. Aufl. (Frankfurt a.M.: Verlag Harri Deutsch).

Grinberg, Darij, 2003. "Über einige Sätze und Aufgaben aus der Dreiecksgeometrie", 2003, zitiert nach www.matheraetsel.de (Stand: 24.8.2011)

Heintz, Bettina, 2000. *Die Innenwelt der Mathematik* (Wien: Springer).

Hilbert, David/Rowe, David, 1992. *Natur und mathematisches Erkennen* (Basel u.a.: Birkhäuser).

Hoffmann, Dirk, 2011. *Grenzen der Mathematik* (Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag).

Kaplan, Leo/Hoevels, Fritz Erich, 2006. *Die göttliche Allmacht* (Freiburg: Ahriman-Verlag).

Martin, Gottfried, 1973. *Platons Ideenlehre* (Berlin u.a.: De Gruyter).

Mayer-Maly, Theo, 2001. *Rechtsphilosophie* (Wien: Springer).

Natterer, Paul, 2011. *Bausteine der Erkenntnistheorie*, 2. Aufl. 2011, Großenheubach a.M.

Popper, Karl, 2006. *Ausgangspunkte*, 2. Aufl. (München: Piper).

Rée, Anton, 1857. *Wanderungen eines Zeitgenossen auf dem Gebiete der Ethik* (Hamburg: Hoffmann).

Ryle, Gilbert, 1947. "Critical Notices – Popper, *The Open Society and its Enemies*", *Mind* 56; zitiert nach der deutschen Übersetzung von F. Griese, in Popper (2006).

Sauer, Friedrich Otto, 1977. *Physikalische Begriffsbildung und mathematisches Denken* (Amsterdam: Rodopi).

Schichl, Hermann/Steinbauer, Roland, 2009. *Einführung in das mathematische Arbeiten* (Berlin, Heidelberg: Springer).

Schmutzer, Ernst, 2005. *Grundlagen der theoretischen Physik*, Bd. 2, 3. Aufl. (Weinheim: Wiley-VCH).

Schoen, Ulrich, 2003. *Gottes Allmacht und die Freiheit des Menschen* (Münster u.a.: LIT Verlag).

Schröcker, Hubert, 2003. *Das Verhältnis der Allmacht Gottes zum Kontradiktionsprinzip nach Wilhelm von Ockham* (Berlin: Akademie Verlag).

Senger, Jürgen, 2007. *Mathematik*, 2. Aufl. (Oldenburg: Wissenschaftsverlag).

Wendland, Wolfgang/Steinbach, Olaf, 2005. *Analysis* (Wiesbaden: Teubner).

Wesche, Steffen, 2005. "Objektive Bedingungen für relative Normen", in: Carsten Bäcker/Stefan Baufeld (Hrsg.), *Objektivität und Flexibilität im Recht*, ARSP Beiheft Nr. 103 (Wiesbaden: Franz Steiner Verlag).