Mr Milorad Bojanić
Fakultet organizacije i informatike
V a r a ž d i n

UDK 65.012.1
Stručni rad

R A Z M J E Š T A J G E O M E T R I J S K I H O B J E K A T A U P R O S T O R U
(uvodna razmatranja)

O problemu razmještaja geometrijskih objekata napisane su mnoge monografije i članci. U domaćoj literaturi malo je radova koji obradjuju ovu problematiku bilo s teorijskog bilo s praktičnog stanovišta. Zbog toga se u ovom članku pošlo od pretpostavke da treba dati odredjene definicije koje objašnjavaju ovu materiju i čine je dostupnom čitaocu.
Pristup geometrijskim objektima kao skupovima omogućava primjenu skupovskih operacija nad njima što, pak, u radu s objektima dovodi do mnogih olakšavajućih okolnosti. Geometrijski objekti posjeduju odredjena svojstva po kojima se ili razlikuju ili nalikuju, te je, s gledišta praktične primjene problematike razmještaja objekata, veoma značajno poznavanje tih svojstava. Klasifikacija objekata na klasu odjeljivih i klasu neodjeljivih potrebna je zbog odredjenih zahtjeva koji nastaju prilikom razmještaja objekata u odredjenom prostoru.
Razmještaj geometrijskih objekata u prostoru izvodi se pod odredjenim pretpostavkama koje u matematičkom smislu uključuju uvjete uzajamnog nepresjecanja objekata, uvjete razmještaja objekata u zadanom objektu ili zadanoj oblasti te predstavljanje funkcije cilja matematičkim simbolima i zavisnostima.

1. KRATAK POVIJESNI OSVRT

Medju prva istraživanja na području razmještaja geometrijskih objekata ubraja se rad ruskog matematičara P.L.Čebiševa. U radu "O krojke odeždy" objavljenom 1878. godine Čebišev razmatra mogućnost najboljeg pokrivanja površine tkanine s različitim iskrojcima.
Istraživanja E.S.Feodorova u oblasti geometrije (objavljena 1885. godine), kristalografije i zapunjenja prostora, kao i radovi njemačkog matematičara G.Heescha, imala su izuzetno velik utjecaj na teoretičare i praktičare. Razmještaj geometrijskih objekata posebno je zaokupljao pažnju praktičara te se susreću razni racionalizatorski poduhvati, heuristički načini rješavanja, normativi materijala prilikom njegovog krojenja i tsl. (1;4)

Teorijski radovi na ovom području od 1878. do 1939. godine epizodnog su karaktera. Rad L.V.Kantoroviča "Matematičeskie metody v organizacii i planirovanii proizvodstva" objavljen 1939. godine smatra se početkom sistematskog istraživanja ovih problema. U ovom radu razmatra se problem razmještaja geometrijskih objekata "bez obzira" na njihov geometrijski oblik. (9;6)

Rad L.V.Kantorovića i V.A.Zalgallera "Rasčet racional'nogo raskroja promyšlennyh materialov" prvi je rad koji je posvećen optimal - nom razmještaju ravnih geometrijskih objekata (objavljen je 1951. godine). (1;4)

S razvojem kombinatorne geometrije, matematičkih metoda programiranja i računarske tehnike dolazi i razvoj, kako u teorijskom tako i u praktičnom smislu, metoda i postupaka razmještaja geometrijskih objekata. Radovi G.B.Dantziga na simpleks algoritmu i radovi R.Bellmana na dinamičkom programiranju nalaze svoju sintezu u radovima P.C.Gilmorea i B.E.Gomorya (objavljenim 1961.godine). Oni su predložili da se problemu razmještaja geometrijskih objekata pristupi kao više etapnom procesu. Korištenje dinamičkog i linearnog programiranja u problemima razmještaja osigurava najpovoljniji (optimalan) razmještaj geometrijskih objekata s obzirom na postavljeni cilj.

Velik problem u pristupu geometrijskim objektima predstavljao je, u prvom redu, matematički aparat koji nije omogućavao da se analitički izraze geometrijski objekti složenih oblika i,u drugom redu, višeznačan karakter razmještaja takvih objekata. Prvi iz problema otklonjen je radom V.L.Rvačeva na teoriji R-funkcije koja omogućuje da se analitički opišu geometrijski objekti složenih struktura. Uz pomoć R-funkcije V.L.Rvačevu i J.G. Stojanu uspjelo je u potpunosti riješiti pitanje analitičkog opisivanja geometrijskih objekata i uvjeta njihovog medjusobnog nepresjecanja. Radovi J.G.Stojana, A.G.Gluška i V.M.Čerepahina (iz 1963. godine)na funkciji cilja u problemima optimalnog razmještaja geometrijskih objekata uklonili su sve poteškoće oko racionalnog razmještaja geometrijskih objekata. (1;6).

Metode primijenjene matematike i suvremeni elektronički računski strojevi omogućavaju danas rješavanje problema optimalnog razmještaja geometrijskih objekata u veoma širokom krugu djelatnosti. Tako npr. o razmještaju geometrijskih objekata govori se kod problema optimalnog krojenja materijala, u radio industriji, u eko - nomskim problemima i tsl.

2. OBJEKTI KAO SKUPOVI

Pojam "geometrijski objekt" može se shvatiti u veoma širokom smislu te riječi. Uzevši posve općenito izraz geometrijski objekt može se koristiti za objašnjenje takvih pojmova kao što su:krojni šnit, proizvod, radiodetalj, sklop, pribor, gradjevinski objekt, tiskarski slog i tsl. Spomenuti objekti mogu se prikazivati u dvodimenzionalnom i trodimenzionalnom prostoru pomoću figura(likova) i tijela. Medjutim, izraz geometrijski objekt može se koristiti i za one pojmove koji se ne prikazuju likovima ili tijelima u prostoru odgovarajuće veličine. Tu se nalaze pojmovi kao što su utrošak energije u vremenu, utrošeni ljudski rad kod izrade odredjenih proizvoda, sklopova ili naprava, raspored preventivnih poslova za različite vrste mehanizama i strojeva i tsl.

Općenito uzevši pod "geometrijskim objektom" podrazumijeva se skup točaka koje tvore lik ili tijelo u Euklidovom prostoru (R^2, R^3, R^4). (9;9).

Objekti mogu posjedovati neka svojstva i uvijek se nalaziti u odredjenim medjusobnim odnosima. Ukoliko su A i B dva objekta, to jednakost $A = B$ pokazuje da se objekti A i B podudaraju. Notacija $A \neq B$ pokazuje da se ovi objekti razlikuju bar u jednoj točki. Ukoliko se sve točke koje čine objekt B nalaze u objektu A, tada se objekt B može u potpunosti razmjestiti u objekt A, tj. $B \subset A$ (pri čemu nije isključeno $A = B$). Objekt, koji ne posjeduje ni jednu točku, naziva se prazan objekt i označava se sa $\emptyset$. Dogovorno se uzima da je prazan objekt sadržan u svakom objektu.

Diferencijom objekata A i B naziva se sveukupnost onih točaka iz objekta A koje se ne nalaze u objektu B, što se pak notira kao $A \setminus B$. Objekt sastavljen iz skupa točaka, koje istovremeno pripadaju objektima A i B, naziva se presjekom objekata A i B, što se u običajenim notacijama izražava kao $A \cap B$.

Objekt, sastavljen od skupa točaka koje pripadaju bar jednom od objekata A ili B, naziva se unijom objekata A i B ili simbolički $A \cup B$.

Navedene definicije upućuju na zaključak da se u poimanju objekata kao skupova mogu primijeniti zakoni algebre skupova. Tako za operacije unije i presjeka vrijedi zakon idempotentnosti, komutacije, asocijacije, distribucije i apsorpcije. Isto tako mogu se primijeniti identiteti u kojima će doći operacija komplementacije sama ili zajedno s operacijama presjeka i unije. Neke od tih identiteta poznate su u teoriji skupova kao De Morganovi zakoni. (5;5).

Objekt može biti otvoren i zatvoren. Točka $x' \in R^n$ ($x' = (x_1', x_2', \ldots, x_n')$) naziva se unutarnjom točkom objekta A, ako x' pripada objektu A zajedno s nekom svojom dovoljno malom okolinom. Objekt koji se u cijelosti sastoji od unutrašnjih točaka naziva se otvoreni objekt. Točka $x^o \in R^n$ ($x^o = (x_1^o, x_2^o, \ldots, x_n^o)$) je dodirna točka objekta $A \subset R^n$ ako svaka njezina okolina sadrži bar jednu točku iz objekta A. Dodirne točke otvorenog objekta, koje mu ne pripadaju, nazivaju se graničnim točkama tog objekta. Sveukupnost graničnih točaka objekta formira granicu objekta. Otvoreni objekti zajedno sa svojim granicama čine zatvorene objekte. U tom smislu može se reći: ukoliko je B zatvoreni objekt a "b" njegova granica, da $B^+ = B \setminus b$ predstavlja otvoreni objekt. (9;10).

Iznijete definicije u pogledu otvorenih i zatvorenih objekata dovode do slijedećih pravila. Da bi objekt A bio otvoren, nužno je i dovoljno da njegov komplement $R^n \setminus A$ u prostoru R^n bude zatvoren. Presjek bilo kojeg broja objekata i unija bilo kojeg konačnog broja zatvorenih objekata je zatvoreni objekt. Unija bilo kojeg (konačnog ili beskonačnog) broja objekata i presjek bilo kojeg konačnog broja otvorenih objekata je otvoreni objekt. (9;10).

Geometrijski objekti u analitičkom obliku opisuju se nejednadžbama ili jednadžbama. Pri tome često puta to nije dovoljno da se objekt jednoznačno odredi. Zato se koriste pojedine slovne oznake i komentari što s formalnog gledišta u procesu rada s objektima predstavlja izvjesnu poteškoću. Složeniji geometrijski objekti dobivaju se iz jednostavnijih pomoću skupovskih operacija unije i presjeka te će u analitičkom obliku ovi objekti biti zadani sustavom jednadžbi ili nejednadžbi (koje najčešće nisu linearne).

Sustavom jednadžbi i nejednadžbi ne može se uvijek na prikladan način opisati svaki geometrijski objekt. Pokazuje se da je za prevladavanje tih teškoća pogodan aparat matematičke logike kod kojega umjesto unije i presjeka dolazi disjunkcija i konjunkcija tzv.predikata. Moguće je, zato, definirati višeznačne predikate te je za razmještaj objekata potreban aparat R_2, $R_3 \ldots$, R_k funkcija. Tako npr. za razmještaj objekata u ravnini dovoljan je aparat tzv. R_2 funkcije koji omogućava da se sredstvima matematičke logike obradjuje teorija razmještaja složenih objekata u ravnini.

3. NEKA SVOJSTVA GEOMETRIJSKIH OBJEKATA

Geometrijski objekti posjeduju odredjena svojstva ili karakteristike po kojima se medjusobno razlikuju. Govori se o konveksnim, konkavnim, degeneriranim, neograničenim, povezanim i nepovezanim, kao i ostalim svojstvima geometrijskih objekata.

Geometrijski objekt je konveksan ako sve točke na dužini izmedju bilo kojih dviju njegovih točaka pripadaju tom objektu. U protivnom slučaju govori se o konkavnom geometrijskom objektu.

Pod jezgrom geometrijskog objekta $A \subset R^n$ podrazumijeva se skup takvih točaka x kod kojih se za svaki $y \in R^n$ može pronaći takav broj

$k > 0$ da je $x + ay \in A$ i pri čemu je $|a| < k$. Geometrijski objekt koji ima prazno jezgro naziva se degeneriranim. Tako npr. u Euklidovom prostoru R^2 pod degeneriranim geometrijskim objektom podrazumijeva se dužina, pravac, kružnica i tsl. U prostoru R^3 degenerirani objekt je ravnina, pravac, krug i ts, dok su kugla i piramira nedegenerirani objekti. Moglo bi se reći i to da svaki degenerirani objekt ima površinu ili volumen (zavisno u kojem prostoru se nalazi) jednaku nuli, dok nedegenerirani objekti imaju površinu (u R^2) ili volumen (u R^n) različit od nule. (9;29)

Geometrijski objekt je neograničen ako ga nije moguće razmjestiti u krugu konačnog polumjera. Objekt se naziva povezanim (koneksnim) ukoliko se bilo koje dvije točke toga objekta mogu spojiti izlomljenom linijom a da pri tome ta linija u potpunosti pripada tom objektu. Ukoliko, pak, postoje takve dvije točke koje se ne mogu spojiti izlomljenom linijom, dolazi se do nepovezanog geometrijskog objekta. Nadalje, geometrijski objekt može biti monokoneksan ili polikoneksan. Monokoneksan je onaj geometrijski objekt kod kojega se u njemu zatvorena površina može "stegnuti" u točku koja tako - djer pripada tom objektu. U protivnom, ako ne postoji takva točka u koju se može bilo koja zatvorena površina objekta "sažeti", objekt je polikoneksan. Broj veza odredjen je brojem dopunskih "rezova" koje je potrebno napraviti da bi se dani objekt preveo u monokoneksan. (9; 19)

Presjek svih konveksnih objekata koji sadrži objekt A naziva se konveksnim omotačem objekta A. Nadalje, može se reći da je presjek svih zatvorenih konveksnih objekata koji sadrži objekt A zatvoreni kon - veksni objekt. (9;19)

Zatvoreni poluprostor (poluprostor odredjen njegovom hiperravninom) naziva se potpornim ako on sadrži objekt A i, pored toga, ako u hiperravnini H, koja odredjuje poluprostor, postoji bar jedna granična točka objekta A. Hiperravnina H, koja odredjuje potporni (oslonački) poluprostor, naziva se potpornom hiperravninom. Rasjecajućom hiperravninom naziva se ona hiperravnina koja tako siječe objekt A da se njegove točke nalaze s obije strane hiperravnine. Regularnom točkom konveksnog objekta A naziva se ona granična točka kroz koju je moguće provesti samo jednu potpornu hiperravninu objekta A. Nadalje, regularnom granicom objekta A naziva se granica u kojoj su sve točke regularne. (9;33)

Točka $M \in A$ naziva se vršnom točkom objekta A ako se ona ne javlja kao unutarnja točka bilo kojeg odreska čiji krajevi pripadaju objektu A. Može se reći da svaki ograničeni zatvoreni konveksni objekt ima, u najmanju ruku, bar jednu vršnu točku.

Ukoliko je točka $M \in R^n$ fiksirana točka u prostoru R^n i objekt $A \in R^n$ a $M \notin A$, pod udaljenosti a(M, A) točke M od objekta A podrazumijeva se najmanja donja ograda udaljenosti od točke M do različitih točaka $P \in A$. Kada je objekt A zatvoren, tada a(M, A) predstavlja ono rastojanje koje je minimalno izmedju definiranih rastojanja točke M od točaka $P \in A$. (9;33).

Pod udaljenošću a_{12} (A_1, A_2) objekta $A_1 \subset R^n$ od objekta $A_2 \subset R^n$ podrazumijeva se najmanja donja ograda udaljenosti različitih točaka $P_1 \in A_1$ do različitih točaka $P_2 \in A_2$. Kada su objekti A_1 i A_2 zatvoreni, tada a_{12} (A_1, A_2) predstavlja minimalnu udaljenost od točaka $P_1 \in A_1$ do točaka $P_2 \in A_2$. Može se, nadalje, napisati da je a_{12} (A_1, A_2) jednak a_{12} (A_2, A_1). Kada objekti A_1 i A_2 imaju zajedničke unutarnje točke, tj. $A_1 \setminus a_1 \cap A_2 \setminus a_2 \neq \emptyset$ (a_i je granica od A_i), tada je a_{12} $(A_1, A_2) < 0$, a ako je $A_1 \cap A_2 = a_1 \cap a_2 \neq \emptyset$, tada je a_{12} $(A_1, A_2) = 0$. Ukoliko je $A_1 \cap A_2$ jednak praznom skupu,tada je udaljenost a_{12} $(A_1, A_2) > 0$.

Pod koeficijentom zapunjenosti (razmještenosti) objekta T objektima A_i (i = 1, 2, ... , n) smatra se realan pozitivan broj do kojeg se dolazi pomoću slijedeće formule:

$$z = \frac{V(\bigcup_{i=1}^{n} A_k)}{V(T)}$$

Ukoliko se razmještaj objekata A_i izvodi u objektu $T \subset R^2$, tada se pod koeficijentom zapunjenosti objekta T objektima A_i podrazumijeva slijedeća jednakost:

$$z = \frac{P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)}{P(T)}$$

u kojoj je simbolom P označena površina objekta T i objekata A_i.

Kao daljnja svojstva geometrijskih objekata mogu se izdvojiti dijametar i širina objekata. Pod dijametrom d(A) zatvorenog objekta podrazumijeva se najveća udaljenost izmedju dviju točaka a(x,y) koje pripadaju objektu A. Širina š(A) zatvorenog objekta je najmanje rastojanje izmedju dviju točaka a(x,y) gdje te točke pripadaju konveksnom omotaču objekta A. (9;35)

Do sada iznijeta svojstva geometrijskih objekata omogućavaju razmišljanje o položaju i razmještaju objekata u prostoru. Položaj objekta $A_1 \subset R^n$ definira se sustavom pomičnih koordinata $O'x'$ u nepomičnom sustavu Ox. Ishodište pomičnog koordinatnog sustava O' naziva se polom objekta. Pol se izabire tako da uvijek pripada objektu A. Ako je moguće, pol objekta se izabire tako da se poklapa s centrom simetrije ili s točkom presjeka osi simetrije ili da leži na osi simetrije.

Iz iznijetog slijedi da se položaj objekta A_1 u prostoru R^n odredjuje zadanim koordinatama $x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1$ pola O' i kutevima $\theta_1^1, \theta_2^1, \ldots \theta_{n(n-1)/2}^1$ koji odredjuju smjer osiju pomičnog sustava koordinata u odgovarajućem nepomičnom sustavu. Parametri x^1 odredjuju paralelni pomak pomičnog koordinatnog sustava, tj. translaciju, dok parametri θ^1 odredjuju pomak koordinatnog sustava oko centra O', tj. rotaciju. Ovi parametri nazivaju se parametri razmještaja. (8;15).

Pored parametara razmještaja svaki geometrijski objekt odlikuje se i svojim oblikom. Oblik objekta A_1 u svojem početnom položaju definira se oblikom oblasti A_1^o koju on zauzima. Kongruentnim premještajem objekta A_1 iz početnog položaja u bilo koji drugi položaj u prostoru R^n ne mijenja se ni njegov oblik ni odnosi unutar njega.
Oblast A_1^o definira se nejednadžbom $f_1(x) \geqslant 0$ koja se uvijek može analitički zadati. Jednadžba $f_1(x) = 0$ naziva se kanonskom jednadžbom objekta A_1 koja uz odredjene parametre razmještaja x^1 i θ^1 definira konkretni objekt u prostoru R^n.

Pored navedenih svojstava geometrijski objekti mogu imati i neka druga svojstva koja su interesantna s teorijskog stanovišta a rezultiraju iz odredjenih logičkih operacija nad njima.

4. KLASIFIKACIJA GEOMETRIJSKIH OBJEKATA

Prilikom razmještaja geometrijskih objekata u prostoru R^n mora se tražiti da su objekti disjunktni, tj. da se ne sijeku ili u najgorem slučaju da imaju dodirne točke. Zbog toga će često puta biti potrebno objekte translatirati do takvog položaja u prostoru da se pri tome ne "kidaju" zadani objekti. Takva translacija neće biti uvijek moguća uz zadani (fiksirani) smjer. Upravo zbog toga mora se izvršiti klasifikacija objekata na klasu onih kod kojih je takva translacija moguća i klasu onih kod kojih to nije moguće. Precizno, ta se klasifikacija objekata izvodi slijedećim definicijama.

Kaže se da su objekti A_1 i A_2 gusto rasporedjeni u smjeru b_{12} ako je udaljenost medju njima a_{12} $(A_1, A_2) = 0$. Ako je medju objektima zadana neka udaljenost w_{12}, tada se kaže da su objekti A_1 i A_2 gusto rasporedjeni kada je ispunjen uvjet a_{12} $(A_1, A_2) = w_{12}$. (8;21)
Nadalje, kaže se da su objekti A_1 i A_2 odjeljivi ako je moguće polove 0_1 i 0_2 odabrati tako da je, pri gustom rasporedu objekata A_1 i A_2 u oba smjera w_{12} odnosno w_{21}, ispunjen uvjet $a_{12}(A_1,A_2)>0$, odnosno a_{21} $(A_2, A_1)>0$. To znači da se objekti ne sijeku i ne dodiruju pri translaciji objekta A_2 u smjeru w_{12}, odnosno objekta A_1 u suprotnom smjeru w_{21}. U svim ostalim slučajevima kaže se da su objekti A_1 i A_2 neodjeljivi. (9; 35)
Prilikom razmještaja geometrijskih objekata u prostoru R^n treba voditi računa o klasi objekata koji su medjusobno odjeljivi (separabilni) i o klasi objekata koji su neodjeljivi. U mnogim praktičnim situacijama radi se o konveksnim objektima pa je i razumljivo pitanje da li su ti objekti odjeljivi u smislu prethodno iznijetih stavova. Odgovor je potvrdan te vrijedi tvrdnja da su konveksni ogradjeni objekti odjeljivi. Dokaz ovoj tvrdnji proizlazi iz teorema Minkovskog o odjeljivosti konveksnih skupova. Prema ovom teoremu moguće je uvijek izmedju gostu razmješte..h konveksnih objekata A_1 i A_2 postaviti hiperravninu m_1, neparal...u s pravcem w_{12}, tako da se objekti A_1 i A_2 nalaze u različiti.. potpornim poluravninama M_1 i M_2. Sada je očigledno da će pri pomaku objekta A_2 po smjeru w_{12} objekt A_1 ostati u potpornoj poluravnini M_1. Kako tim veoma malim pomakom po smjeru w_{12} poluravnina M_2 nema više zajedničkih točaka s poluravninom M_1, to neće ni objekti A_1 i A_2 pri takvom pomaku imati zajedničkih točaka te će uvijek biti da je a_{12} $(A_1, A_2)>0$. (8; 22).
Drugu važnu klasu odjeljivih objekata čine zvjezdoliki objekti. Definiraju se na slijedeći način: jednostruko povezani zatvoreni objekti A_i nazivaju se zvjezdolikim ako je moguće polove $0_i \in A_i$ tih objekata odabrati tako da svi intervali koji spadaju pol 0_i sa svim graničnim točkama objekta pripadaju unutrašnjosti tog objekta. Kod svakog zvjezdolikog objekta moguće je na više načina odabrati pol te se skup W svih takvih polova naziva oblast zvjezdolikosti zadanog objekta.

Interesantno je napomenuto da je oblast W uvijek konveksan skup bez obzira na to što zadani objekt može biti i konkavan. Ako je zadani objekt višekut u ravnini odnosno poliedar u prostoru, tada je oblast zvjezdolikosti i konveksna i otvorena. Prema tome poliedri ne mogu imati jednotočkastu oblast zvjezdolikosti niti, pak, oblast zvjezdolikosti može biti neki segment. Kod likova koji nisu poliedri moguće je pronaći primjere objekata koji imaju jednotočkovnu oblast zvjezdolikosti. Na kraju treba reći da su ogradjeni zvjezdoliki objekti odjeljivi. (9;37)

Drugu veliku skupinu geometrijskih objekata čine oni objekti koji nisu odjeljivi, tj. neodjeljivi objekti. Objekti A_1 i A_2 jesu neodjeljivi ako je bar jedan od njih neogradjen objekt. Tako npr. ukoliko je objekt A_1 neogradjen, tada je uvijek prisutan takav smjer vektora w_{12} iz pola O_1 pri kojemu je kraj vektora, pri bilo kojoj njegovoj dužini, u objektu A_1. Iz iznijetog može se zaključiti da je uvijek po promatranom smjeru vektora w_{12} udaljenost izmedju dvaju objekata $a_{12}(A_1, A_2) < 0$ što takodjer upućuje na neodjeljivost objekata A_1 i A_2.

Objekti A_1 i A_2 bit će neodjeljivi i u onom slučaju kada je objekt A_1 ogradjen i polikoneksan te je predstavljen u obliku
$A_1 = \cap_{j=1}^{n} A_{1j} \cap A_1^1$ (A_1^1 je monokoneksan ogradjeni objekt), a objekt A_2 je pri tome takav da bar za jedan j ispunjava relaciju
$A_2 \subset R^n \setminus A_{1j}$. (9;39)

5. OPĆA MATEMATIČKA POSTAVKA PROBLEMA RAZMJEŠTAJA

Prilikom razmještaja geometrijskih objekata u neku oblast razmještaja treba voditi računa o tome da li se radi o neregularnom (nepravilnom) ili regularnom (pravilnom) razmještaju.

Pod neregularnim razmještajem objekata podrazumijeva se takav razmještaj objekata kod kojega ne postoji nikakav red ili zakonitost izmedju promatranih parametara razmještaja. Kod ovog oblika razmještaja objekata treba voditi računa o dva tipa oblasti razmještaja: o oblasti sa zadanim geometrijskim oblikom i zadanim dimenzijama te o oblasti s pokretnim granicama, tj. oblasti kod koje unaprijed nisu zadani dimenzija i oblik.

Neregularan razmještaj objekata obuhvaća nekoliko veoma značajnih teorijskih i praktičnih problema. Tako npr. jedan od problema sastoji se u tome da se iz skupa objekata $\{A_i\}$ n (ako je oblast raz-

mještaja ograničena, a n dovoljno velik) izabere objekt A_i i razmjesti u oblast Y ($A_i \subset Y$) tako da se dobije najveći koeficijent z zapunjenja oblasti Y tim objektom. U praktičnom smislu ovaj problem javlja se kod krojenja materijala kada se otpadak materijala želi daljnjim krojenjem iskoristiti na najbolji mogući način. (8;26)
Jedan od slijedećih problema neregularnog razmještaja objekata sastoji se u tome da se pronadje mogućnost razmještaja najvećeg broja objekata $\{A_i\}_n \in \{\{A_i\}_n\}_m$, ukoliko je oblast Y nepovezana i ograničena a $\{\{A_i\}_n\}_m$ skup objekata. Ovakav problem u pogledu razmještaja često se javlja kod raznih grana lake i teške industrije, u brodogradnji, avionskoj industriji itd.

Medju probleme neregularnog razmještaja kod kojih je oblast Y s pokretnim granicama ubrajaju se problemi kod kojih je oblast zadanog geometrijskog oblika i problemi kod kojih računskim putem nastaje oblast odredjenog geometrijskog oblika. U ove probleme ubraja se problem razmještaja objekata $\{A_i\}_n$ u oblast Y zadanog geometrijskog oblika pri čemu dimenzije oblasti Y trebaju zadovljiti postavljene uvjete (najmanja površina oblasti,najveći koeficijent zapunjenosti i ts.). Ili, potrebno je konstruirati oblast Y pomoću linija definiranih jednadžbama $f_i(x, y) = 0$ tako da objekti $\{A_i\}_n$ razmješteni u oblast Y na najbolji mogući način zadovoljavaju postavljene uvjete.

Ukoliko se prilikom razmještaja objekata u zadanu oblast razmještaja poštuju odredjene zakonitosti ili poredak u pogledu parametara razmještaja, govori se o periodičnom razmještaju. Kaže se da je skup objekata $\{A_i\}_n$ periodski razmješten ako barem jedan parametar svakog objekta A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) ima svojstvo da se od jednog položaja objekta do drugog položaja tog istog objekta mijenja za istu veličinu. Veličina za koju se parametar mijenja naziva se periodom tog parametra. (9;41)

Ukoliko su svi objekti nekog periodskog razmještaja medjusobno sukladni, te se njihovi polovi nalaze na istoj krivulji, kaže se da je razmještaj jednostruko periodičan. Kaže se da je razmještaj višestruko periodičan ako je skup objekata sastavljen iz više familija objekata i ako je svaka familija tako periodički razmještena da se polovi različitih položaja nalaze na istoj krivulji, a sve takve krivulje za različite familije promatranog skupa objekata medjusobno su sukladne i paralelne.

Najopćenitije se problem periodičkog razmještaja geometrijskih objekata svodi na to da se objekti neke familije objekata $\{A_i\}_n \in \{\{A_i\}_n\}$ razmjeste višestruko periodski u nekoj zadanoj oblasti tako da se koeficijent zapunjenja z oblasti Y pokaže najvećim. Pri tome se pretpostavlja da je udaljenost izmedju objekata, odnosno udaljenost izmedju objekata i granice oblasti, jednaka ili veća od nule. (9;42)

Drugi veoma značajan slučaj regularnog razmještaja je tzv. rešetkasti razmještaj. Za njegovu formulaciju potrebno je definirati rešetku (mrežu), što se, pak, izvodi na slijedeći način. Neka su $b_1, b_2, \ldots, b_n$ linearno nezavisni vektori n-dimenzionalnog prostora R^n. Skup svih mogućih vektora oblika $b = u_1b_1 + u_2b_2 + \ldots + u_nb_n$ naziva se rešetka ako su $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ cijeli brojevi. Vektori $b_1, b_2, \ldots, b_n$ nazivaju se bazom rešetke, dok se sama rešetka označava $R(b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots, b_n)$.

Ukoliko je baza sastavljena od medjusobno okomitih vektora (ortogonalna baza), tada se i rešetka naziva ortogonalna ili pravokutna rešetka.

Ako se duljine vektora $b_1, b_2, \ldots, b_n$ označe s $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$, tada se rešetka sastoji iz svih onih točaka čije su koordinate izražene slijedećim relacijama: $x_1 = t_1u_1$; $x_2 = t_2u_2$; $\ldots$, $x_n = t_nu_n$. Točke zadane ovim relacijama nazivaju se vrhovi ili čvorovi mreže, a sam prostor R^n na ovaj način podijeljen je na dijelove koji se nazivaju ćelijama mreže. Kada se govori o prostoru R^2, tada su ćelije paralelogrami ili pravokutnici, zavisno od toga da li je baza ortogonalna ili nije, a kada se radi o prostoru R^3, ćelije su paralelopipedi u općem slučaju ili, pak, kvadri ako je baza ortogonalna. Ćelija čija su rebra sami vektori $b_1, b_2, \ldots, b_n$ naziva se osnovna ili bazična ćelija.

Razmještaj geometrijskih objekata naziva se rešetkastim ako se u svakom čvoru rešetke nalazi pol nekog objekta tako da su svi objekti medjusobno sukladni i da im je udaljenost $a_{ij}(A_i, A_j) \geqslant 0$. (9;42).

Problem rešetkastog razmještaja geometrijskih objekata svodi se na odredjivanje parametara n-dimenzionalne rešetke pri kojima se postiže najveći koeficijent z zapunjenja prostora R^n. Iznijeti stavovi o rešetkastom razmještaju geometrijskih objekata upućuju na zaključak da je rešetkasti razmještaj specijalni slučaj periodičnog razmještaja.(9;42)

Svaki od navedenih problema regularnog i neregularnog razmještaja geometrijskih objekata ima slijedeća osnovna svojstva:

- u svakom problemu radi se o razmještaju geometrijskih objekata proizvoljnih oblika u oblasti proizvoljnih geometrijskih oblika i
- svaki problem formulira se kao problem matematičkog programiranja, tj. predstavlja se u obliku nekih uvjeta (ograničenja)nad parametrima razmještaja pri kojima je neophodno postići ovaj ili onaj cilj.

Može se, nadalje, reći da je struktura formuliranih problema razmještaja takva da njihova matematička postavka uključuje obavezno:

- uvjete uzajamnog nepresjecanja objekata (razmješteni geometrijski objekti ne moraju imati zajedničkih točaka, već se mogu nalaziti na zadanom rastojanju jedan od drugoga),
- uvjete razmještaja objekata u zadanom objektu ili zadanoj oblasti (ovdje se pretpostavlja da izmedju razmještenih objekata i granica oblasti uvijek postoji unaprijed zadano rastojanje) i
- formalno predstavljanje funkcije cilja pomoću matematičkih simbola i zavisnosti. (8;30)

Prva dva izložena uvjeta moguće je matematički izraziti pomoću slijedećih relacija:

$$A_i \setminus a_i \cap A_j \setminus a_j = \emptyset, \quad i,j = 1, 2, \dots, n; \; i \neq j;$$

$$\bigcup_{i=j}^{n} A_i \cap Y = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

ili

$$a_{ij}(A_i, A_j) \geqslant 0, \quad i,j = 1, 2, \dots, n; \; i \neq j;$$

$$a_i'(R^n \setminus Y, A_i) \geqslant 0, \; i = 1, 2, \dots, n,$$

(simbolom a_i' izražena je udaljenost).

Ukoliko je medju objektima A_i i A_j zadano neko rastojanje w_{ij}, te izmedju objekta A_i i granice oblasti Y rastojanje w_i, može se napisati da je:

$$a_{ij}(A_i, A_j) \geqslant w_{ij}, \quad i,j = 1, 2, \dots, n; \ i \neq j,$$

$$a_i^*(R^n \setminus Y, A_i) \geqslant w_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Na osnovi iznijetih nejednadžbi proizlazi da bi trebalo izraziti, u općem slučaju, uvjete uzajamnog nepresjecanja objekata $\{A_i\}_n$ i uvjete njihovog razmještaja u oblast Y, u obliku nejednadžbi:

$$q_{ij}(x^i, \theta^i, x^j\theta^j) \geqslant 0, \ i \neq j, \ i,j = 1, 2, \dots, n,$$

$$q_i(x^i, \theta^i) \geqslant 0, \ i = 1, 2, \dots, n,$$

koje medjusobno "povezuju"parametri razmještaja objekata i njihova su suštinska ograničenja. (8;31)

Iz iznijetog se, nadalje, može zaključiti da postoji jedan sustav od $k = {}^1/_2\, n\,(n - 1) + n$ nejednadžbi koje povezuju, u općem slučaju, ${}^n/_2\,(n + 1)\, n$ parametara razmještaja objekata $\{A_i\}$ $n \in R^n$.

Na osnovi problema regularnog i neregularnog razmještaja proizlazi da funkcija cilja može imati najrazličitiji oblik. Ona može sama po sebi predstavljati najraznovrsnije odnose koji zavise od parametara razmještenih objekata. Funkcija cilja u svom općem obliku može se izraziti slijedećom relacijom:

$$f = f\,(x^1, \theta^1, x^2, \theta^2, \dots, x^n\theta^n).$$

Navedena razmatranja u pogledu matematičke postavke problema razmještaja objekata dovode do ovih važnih zaključaka:

- struktura formalnog opisa problema razmještaja objekata posredstvom matematičkih simbola sastoji se, u općem slučaju, iz sustava nejednadžbi i funkcija,
- rješenje bilo kojeg od problema regularnog ili neregularnog razmještaja svodi se na optimalizaciju funkcije cilja na području definiranom sustavom nejednadžbi q_{ij} i q_i i
- kao rezultat rješenja problema (ako to rješenje postoji) moraju se dobiti takvi parametri razmještaja objekata koji omogućavaju konstrukciju modela geometrijskih objekata i tako rješenje problema. (9;47)

Iznijete opće matematičke postavke problema razmještaja zahtijevat će, u svakom konkretnom problemu razmještaja, pronalaženje postupaka analitičkog opisivanja uvjeta medjusobnog nepresjecacanja objekata te analitičku postavku problema razmještaja i postupke za njeno rješenje što će, pak, zavisiti o stupnju složenosti i načinu rješavanja. Razvoj matematike i računske tehnike (suvremena elektronička računala) omogućio je razrješavanje veoma složenih problema na području razmještaja geometrijskih objekata te se, danas, s problemima razmještaja susreće na raznoraznim područjima.

6. ZAKLJUČAK

Problem razmještaja geometrijskih objekata susreće se na raznim područjima čovjekovog djelovanja. Nedovoljne količine pojedinih sirovina i nedostatak kvalitetnog materijala sve više nameću potrebu racionalnijeg gospodarenja s tim resursima. Iskorištenje raspoloživog materijala prilikom različitih obrada sve više postaje predmet istraživačkih akcija inženjera, tehnologa i ekonomista. Suvremeno projektiranje zahtijeva od projektanata kompleksniji pristup rješavanju problema iskorištenosti prostora kao i materijala koji se koriste u tom prostoru.

Da bi se ovi, a i mnogi drugi problemi, mogli uspješno riješiti, potrebno je posegnuti za tekovinama moderne matematike, matematičke tehnike i tehnologije. Suvremena elektronička računala omogućavaju rješavanje veoma složenih problema uz minimalni gubitak vremena, te više nema razloga da se u mnogim praktičnim problemima ne primijeni teorija i tehnika razmještaja geometrijskih objekata. Primjenom poznatih tehnika razmještaja geometrijskih objekata dolazi se do minimalnog otpatka materijala prilikom njegovog krojenja, do minimalnog zaposjedanja prostora u izgradnji odredjenih sustava i tsl.
Na problem razmještaja geometrijskih objekata, s praktičnog stanovišta, ne treba gledati samo kroz prizmu matematičko-tehničkih problema. Razmještaj objekata interesantan je, bez sumnje, i s gledišta ekonomskih efekata koji se ostvaruju u primjeni na praktičnim situacijama. Tako npr. otpad materijala prilikom njegovog krojenja može biti dosta značajna stavka u troškovima poslovanja. Pravilnim razmještajem odredjenih iskrojaka može se, prilikom krojenja, postići znatna ušteda u osnovnom materijalu a time i u troškovima,što se ne bi trebalo zanemariti.

L I T E R A T U R A

1. *Bondarenko N.A.: ALGORTMY RACIONAL'NOGO RAZMEŠČENIJA PLOSKIH GEOMETRIČESKIH OB'EKTOV, avoreferat kandidatskoj dissertacii, Har'kovskij institut radioelektroniki, Har'kov, 1972.*

2. *Čerepahin V.M.: NEKOTORYE ZADAČI OPRIMAL'NOGO RAZMEŠČENIJA GEOMETRIČESKIH OB'EKTOV I ALGORITMY IH REŠENIJA, avtoreferat kandidatskoj dissertacii, IN-TA kibernetiki AN USSR, Kiev, 1970.*

3. *Galata A.JA.-Stojan JU.G.: O PLOTNOJ UPAKOVKE PARALLELEPIPEDOV PROIZVOL'NYH RAZMEROV V PARALLELOPIPEDE NAIMEN'ŠEGO OB'EMA, Kibernetika, 1972, 2, 81-86.*

4. *Gluško A.G.-Rvačev V.: OB ODNOJ ZADAČE OPTIMAL'NOGO RASKROJA, Kibernetika, 1967, 1, 92-95.*

5. *Martić Lj: MATEMATIČKE METODE ZA EKONOMSKE ANALIZE, II svezak, Narodne novine, Zagreb, 1972.*

6. *Rvačev V.L.-Stojan JU.G.: K VOPROSU OB OPTIMAL'NOM RASKROE MATERIALOV, v kn.: Voprosy teoretičeskoj kibernetiki, IN-TA kibernetiki AN USSR, Kiev, 1965.*

7. *Stojan JU.G.-Gil' N.I.: SVOJSTVA I SPOSOBY REALIZACII FUNKCII PLOTNOGO RAZMEŠČENIJA, preprint 72-18, IN-TA kibernetiki AN USSR, Kiev, 1972.*

8. *Stojan JU.G.:-Gil'N.I.: METODI I ALGORITMY RAZMEŠČENIJA PLOSKIH GEOMETRIČESKI OB'EKTOV, Naukova dumka, Kiev, 1976.*

9. *Stojan JU.G.: RAZMEŠČENIE GEOMETRIČESKIH OB'EKTOV, Naukova dumka, Kiev, 1975.*

Primljeno: 1979-10-1

Боянич М. Размещение геометрических объектов в пространстве.

Р Е З Ю М Е

В статье изложены вводные напоминания о проблемах размещения геометрических объектов в пространстве. Вместе с определением геометрических объектов изложены некоторые свойства объектов и их класификация.

При общей математической постановке задач размещения сформулированные предпосылки, которые должны реализироваться при задачах размещения.

В конце поударено, что при применении осознаний о размещении геометрических объектов нужно найти рассмотрения аналитического описания взаимног непересечения объектов. Кроме того надо найти аналитическую постановку задач размещения и способы их решения.