Matematički model za problem nezaposlenosti

NIKOLINA ARAČIĆ* IGOR PAŽANIN†

Sažetak. *U ovome radu prezentiramo matematički model koji opisuje problem nezaposlenosti pomoću sustava običnih diferencijalnih jednadžbi.*

Ključne riječi: *nezaposlenost, matematički model, ravnotežno stanje*

A mathematical model for unemployment

Sažetak. *In this paper we present a mathematical model for unemployment described by a system of ordinary differential equations.*

Key words: *unemployment, mathematical model, equilibrium.*

1. Uvod

Kako je derivacija mjera promjene, diferencijalnim jednadžbama se najjednostavnije izražavaju i modeliraju mnogi prirodni zakoni te razni procesi u različitim područjima znanosti i tehnike (vidi primjerice [1, 3, 6]). U ovom radu bavit ćemo se izvodom i analizom modela kojem je cilj opisati problem nezaposlenosti uzimajući u obzir tri varijable: broj nezaposlenih, broj zaposlenih na određeno vrijeme te broj zaposlenih na neodređeno vrijeme. Model je zasnovan na sustavu *nelinearnih* običnih diferencijalnih jednadžbi i kao takav prvi put predložen u članku [5] objavljenom ove godine. Obzirom da je ova tematika itekako aktualna, namjera nam je prikazati glavne rezultate i zaključke iz spomenutog članka.

Nezaposlenost je jedan od najvažnijih gospodarskih i društvenih problema današnjice, i to ne samo u našoj zemlji. Pojam nezaposlenosti može imati različita značenja ovisno o kontekstu u kojemu se koristi. Može opisivati pravno–administrativno stanje odnosno evidentiranost na listi Zavoda za zapošljavanje ili pravo na novčanu naknadu za nezaposlene. Ujedno, može označavati stav odnosno spremnost na prihvaćanje posla pod određenim uvjetima. Također, može se odnositi i na socijalne poteškoće unutar određenog gospodarskog sustava, kao i na neravnotežu ponude i potražnje rada na pojedinim dijelovima ili cjelokupnom tržištu rada.

*studentica PMF–Matematičkog odsjeka, Sveučilište u Zagrebu, Bijenička 30, HR-10000 Zagrebaracicn@student.math.hr

†PMF–Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu, Bijenička 30, HR- 10000 Zagreb ipazanin@math.hr

Prema uputama Međunarodne organizacije rada[1] standardna definicija nezaposlenosti obuhvaća sve osobe starije od dobne granice određene za mjerenje ekonomski aktivnog stanovništva koje su:

- tijekom referentnog razdoblja bile bez posla,
- tijekom tog razdoblja bile u svakom trenutku na raspolaganju za posao,
- tražile posao, tj. poduzimale određene korake u cilju pronalaženja posla.

Prema tome, kriteriji na kojima se zasniva standardna definicija nezaposlenosti odnose se samo na aktivnost pojedinca tijekom referentnog razdoblja pri čemu sva tri kriterija moraju biti istovremeno zadovoljena. Jedina iznimka odnosi se na osobe koje imaju sporazum započinjanja posla nakon referentnog razdoblja te više ne traže posao, ali zadovoljavaju ostala dva kriterija. Te će osobe svejedno biti klasificirane kao nezaposlene, budući su već sad raspoložive za rad a ne rade, tj. dio su neupotrebljenog radnog resursa gospodarstva.

Nezaposlenost neprekidno raste u mnogim zemljama ponajviše zbog iznimnog rasta populacije. Također, jako velik utjecaj na nezaposlenost imaju i nove tehnologije koje, premda potiču razvoj tvrtki i njihovu produktivnost, imaju za posljedicu potrebu za stručno obrazovanom radnom snagom. U konačnici to najčešće rezultira povećanjem broja nezaposlenih uzimajući u obzir činjenicu da tehnološke inovacije (novi strojevi i sl.), zamjenjuju veći broj radnika.

Ovaj rad podijeljen je na dva dijela. U prvom dijelu, polazeći od temeljnih pretpostavki modela, izvest ćemo obične diferencijalne jednadžbe koje povezuju tri nepoznate funkcije: broj nezaposlenih, broj zaposlenih na određeno vrijeme te broj zaposlenih na neodređeno vrijeme. Kao rezultat dobivamo jedan nelinearan sustav kojeg potom, u drugom dijelu, analiziramo i diskutiramo njegove značajke.

2. Izvod modela

Označimo sa

$$N = N(t)\ , \qquad P = P(t)\ , \qquad S = S(t)$$

broj nezaposlenih osoba, broj zaposlenih osoba na određeno vrijeme (*privremeno* zaposlenih) i broj zaposlenih osoba na neodređeno vrijeme (zaposlenih *za stalno*) respektivno u trenutku t. Za početak, navedimo temeljne pretpostavke na kojima se predloženi model zasniva:

(i) Neke od nezaposlenih osoba mogu odmah dobiti stalno zaposlenje odnosno mogu postati privremeno zaposlene.

(ii) Zaposlene osobe na određeno vrijeme pokušat će dobiti posao na neodređeno vrijeme.

[1] Međunarodna organizacija rada (eng. *International Labour Organization*) je specijalizirana agencija Ujedinjenih naroda koja promovira socijalnu pravdu i međunarodno priznata ljudska i radnička prava. Osnovana je 1919. godine Poveljom iz Versaillesa te je postala prva specijalizirana agencija UN-a 1946. godine.

(iii) Neke od osoba zaposlenih na (ne)određeno vrijeme izgubit će posao te prijeći u kategoriju nezaposlenih osoba.

(iv) Nezaposlene osobe su potpuno kvalificirane za bilo koji posao, pri čemu se uzima u obzir da njihove sposobnosti gube na važnosti (*atrofiraju*) s vremenom.

(v) Broj nezaposlenih osoba raste s konstantnom stopom A te se osobe tog statusa sele iz mjesta prebivališta u druga mjesta u svrhu pronalaska zaposlenja. Pri tom se stopa migracije nezaposlenih osoba uzima da je proporcionalna sa brojem nezaposlenih osoba.

(vi) Brojevi slobodnih radnih mjesta namijenjenih za privremeno odnosno stalno zaposlenje su ograničeni i unaprijed zadani.

Uzimajući u obzir (i)-(vi), izvedimo sada jednadžbe koje opisuju naš model. Prije svega, označimo sa S_a odn. P_a broj slobodnih stalnih odnosno privremenih radnih mjesta u trenutku $t = 0$. Brzina promjene broja nezaposlenih osoba koje će dobiti stalno zaposlenje proporcionalna je umnošku $N(S_a - S)$ broja nezaposlenih osoba sa brojem slobodnih stalnih radnih mjesta u trenutku $t > 0$. Budući da nezaposlene osobe mogu postati i privremeno zaposlene, brzina promjene broja nezaposlenih osoba koje postignu privremeno zaposlenje biti će proporcionalna umnošku $N(P_a - P)$ broja nezaposlenih osoba sa brojem slobodnih privremenih radnih mjesta u trenutku t. Prema tome, brzina promjene broja nezaposlenih osoba N može se opisati običnom diferencijalnom jednadžbom oblika:

$$\frac{dN}{dt} = A - k_1 N(S_a - S) - k_2 N(P_a - P) - \alpha_1 N + \gamma_1 P + \gamma_2 S \,. \tag{1}$$

Sa $k_1, k_2 > 0$ označavamo odgovarajuće konstante proporcionalnosti, dok je $\alpha_1 > 0$ konstanta koja predstavlja stopu migracije ili smrtnosti nezaposlenih osoba. Konstante $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ označavaju stope otkaza privremeno i stalno zaposlenih osoba respektivno.

Na sličan način modeliramo jednadžbe za brzinu promjene broja osoba zaposlenih na (ne)određeno vrijeme. Slično kao i prije, brzina promjene broja privremeno zaposlenih osoba biti će proporcionalna s $N(P_a - P)$. Štoviše, kako smo pretpostavili da će privremeno zaposlene osobe pokušati dobiti stalno zaposlenje (v. (ii)), brzina promjene broja privremeno zaposlenih osoba proporcionalna je i umnošku $P(S_a - S)$ broja privremeno zaposlenih osoba sa brojem slobodnih stalnih mjesta. Stoga imamo

$$\frac{dP}{dt} = k_2 N(P_a - P) - k_3 P(S_a - S) - \alpha_2 P - \gamma_1 P \,, \tag{2}$$

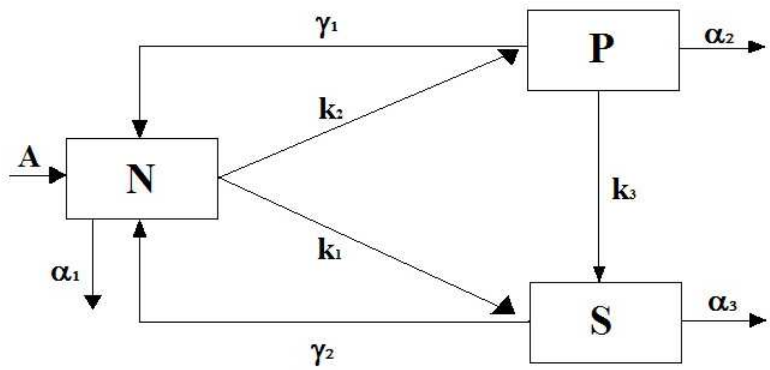
gdje je $k_3 >$ konstanta proporcionalnosti, a $\alpha_2 > 0$ konstanta koja predstavlja stopu umirovljenja ili smrtnosti privremeno zaposlenih osoba.

Konačno, brzina promjene broja stalno zaposlenih osoba proporcionalna je sa $N(S_a - S)$, koji dolaze direktno iz kategorije nezaposlenih osoba, te sa $P(S_a - S)$ koji dolaze iz kategorije privremeno zaposlenih osoba:

$$\frac{dS}{dt} = (k_1 N + k_3 P)(S_a - S) - \alpha_3 S - \gamma_2 S \,. \tag{3}$$

Ovdje je α_3 pozitivna konstanta koja predstavlja stopu umirovljenja ili smrti stalno zaposlenih osoba.

Jednadžbe (1)–(3) čine predloženi model za problem nezaposlenosti. Radi preglednosti, na Slici 1 prikazan je njegov shematski prikaz:



Slika 1: Shematski prikaz modela

3. Analiza modela

3.1. Ravnotežno stanje

U ovom odjeljku analiziramo dobiveni sustav jednadžbi (1)–(3). Najprije uočimo da je sustav (1)–(3) *nelinearan* te ga nije moguće riješiti analitički. Međutim, moguće je proučavati svojstva njegovih rješenja, specijalno onog kojeg zovemo *ravnotežno stanje* (eng. *equlibrium*). Općenito, ravnotežno stanje je ono rješenje polaznog sustava koje ne ovisi o vremenu. Preciznije, $\mathbf{x}^*$ će biti ravnotežno stanje sustava $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ako i samo ako je $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) \equiv 0$. Važno je napomenuti da *linearni* sustavi imaju samo jedno ravnotežno stanje, ukoliko ono postoji. Za razliku od njih, nelinearni sustavi diferencijalnih jednadžbi (a naš je upravo takav) ih mogu imati više. Stoga je kod takvih problema važno uvjeriti se da polazni sustav posjeduje samo jedno nenegativno[2] ravnotežno stanje.

Sukladno definiciji ravnotežnog stanja zahtijevamo

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dP}{dt} = \frac{dS}{dt} = 0$$

odakle slijedi

$$A - k_1 N(S_a - S) - k_2 N(P_a - P) - \alpha_1 N + \gamma_1 P + \gamma_2 S = 0 \,, \tag{4}$$

[2]Uočimo da su nam od interesa jedino takva rješenja obzirom je iz prirode problema evidentno $N(t), P(t), S(t) \geq 0$, za svaki t.

$$k_2N(P_a - P) - k_3P(S_a - S) - \alpha_2 P - \gamma_1 P = 0 \, , \tag{5}$$

$$(k_1N + k_3P)(S_a - S) - \alpha_3 S - \gamma_2 S = 0 \, . \tag{6}$$

Iz (6) odmah nalazimo

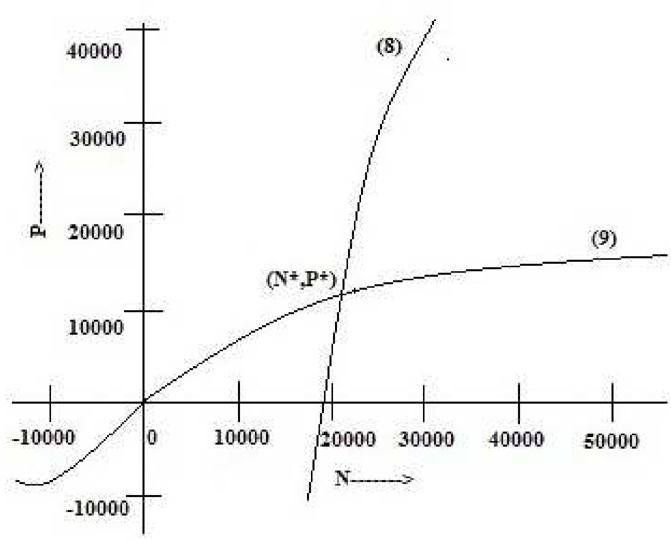
$$S = \frac{(k_1N + k_3P)S_a}{\alpha_3 + \gamma_2 + k_1N + k_3P} \, . \tag{7}$$

Uvrštavajući dobiveni izraz za S u (4)-(5) dolazimo do sljedećeg sustava za N i P:

$$A - \frac{k_1(\alpha_3 + \gamma_2)S_a N}{\alpha_3 + \gamma_2 + k_1N + k_3P} - k_2N(P_a - P) - \alpha_1 N + \gamma_1 P + \frac{\gamma_2(k_1N + k_3P)S_a}{\alpha_3 + \gamma_2 + k_1N + k_3P} = 0 \, , \tag{8}$$

$$k_2N(P_a - P) - \frac{k_3(\alpha_3 + \gamma_2)S_a P}{\alpha_3 + \gamma_2 + k_1N + k_3P} - \alpha_2 P - \gamma_1 P = 0 \, . \tag{9}$$

Time smo dobili jedan sustav od dvije nelinearne jednadžbe sa dvije nepoznanice N i P kojeg, kao takvog, nije moguće eksplicitno riješiti. Pažljivom analizom jednadžbi (8)-(9) te primjenom metode skiciranja *izoklina*, u članku [5] pokazano je da postoji samo jedno nenegativno rješenje, u oznaci (N^*, P^*) (vidi Sliku 2.)



Slika 2: Egzistencija ravnotežnog stanja (N^*, P^*).

Primjedba 1. *Metoda skiciranja izoklina često se koristi kao grafička metoda rješavanja običnih diferencijalnih jednadžbi. U grubo je opišimo (više o tome može* *se pronaći npr. u [6]). Ako je funkcija $x = f(t)$ rješenje jednadžbe prvog reda $x' = F(t, x)$ koje prolazi nekom točkom (t_0, x_0), tada je smjer tangente na krivulju $x = f(t)$ u točki (t_0, x_0) dan upravo sa $F(t_0, x_0)$. Kako se svaka funkcija u okolini zadane točke ponaša kao tangenta, to se i rješenje $x = f(t)$ u okolini točke (t_0, x_0) ponaša približno slično kao pravac koji prolazi kroz točku (t_0, x_0) sa koeficijentom smjera $F(t_0, x_0)$. Odaberemo li skup pravilno raspoređenih točaka (t, x) u onom dijelu ravnine u kojem tražimo rješenje te kroz svaku od odabranih točaka nacrtamo mali dio pravca (segment) s koeficijentom smjera $F(t, x)$ dobit ćemo polje smjerova (polje izoklina) diferencijalne jednadžbe $x' = F(t, x)$. Polje smjerova nam najčešće daje dobru ideju o izgledu rješenja te na taj način možemo skicirati krivulju koja aproksimira $x = f(t)$, pri tom koristeći svojstvo da nam u svakoj točki nacrtani segment daje smjer kretanja krivulje.*

Stavljajući $N^*, P^* > 0$ u (7) dobivamo $S^* > 0$ te smo se time uvjerili da sustav (1)-(3) kojim je naš model opisan posjeduje jedinstveno nenegativno ravnotežno stanje $R(N^*, P^*, S^*)$. U nastavku ćemo proučavati neka svojstva ravnotežnog stanja. Diskutirat ćemo karakteristike ravnotežne vrijednosti broja nezaposlenih osoba u ovisnosti o parametru k_3, kao i ovisnost ravnotežnih vrijednosti broja nezaposlenih, privremeno zaposlenih osoba i osoba zaposlenih na neodređeno vrijeme u ovisnosti o parametru P_a.

3.2. Ovisnost N^* o k_3

Vratimo se ponovno na jednadžbe (8)-(9) te označimo

$$\begin{aligned} f(k_3, N^*, P^*) &= A - \frac{k_1(\alpha_3+\gamma_2)S_a N^*}{\alpha_3+\gamma_2+k_1N^*+k_3P^*} - k_2N^*(P_a - P^*) - \alpha_1 N^* + \gamma_1 P^* + \\ &\quad + \frac{\gamma_2(k_1N^*+k_3P^*)S_a}{\alpha_3+\gamma_2+k_1N^*+k_3P^*} = (8) = 0\,, \end{aligned} \tag{10}$$

$$g(k_3, N^*, P^*) = k_2N^*(P_a - P^*) - \frac{k_3(\alpha_3+\gamma_2)S_a P^*}{\alpha_3+\gamma_2+k_1N^*+k_3P^*} - \alpha_2 P^* - \gamma_1 P^* = (9) = 0\,.$$

Vrijedi:

$$\frac{dN^*}{dk_3} = \frac{\frac{\partial f}{\partial P^*}\frac{\partial g}{\partial k_3} - \frac{\partial f}{\partial k_3}\frac{\partial g}{\partial P^*}}{\frac{\partial f}{\partial N^*}\frac{\partial g}{\partial P^*} - \frac{\partial f}{\partial P^*}\frac{\partial g}{\partial N^*}}. \tag{11}$$

Napomenimo da se gornja formula izvodi primjenom *Teorema o implicitnoj funkciji* o čemu zainteresirani čitatelj više može pročitati npr. u [4]. Izračunajmo parcijalne derivacije koje se pojavljuju u (11):

$$\frac{\partial f}{\partial N^*} = -\frac{k_1(\alpha_3+\gamma_2)S_a(\alpha_3+k_3P^*)}{(\alpha_3+\gamma_2+k_1N^*+k_3P^*)^2} - k_2(P_a-P^*) - \alpha_1 \ ,$$

$$\frac{\partial f}{\partial P^*} = \frac{k_3(\alpha_3+\gamma_2)S_a(\gamma_2+k_1N^*)}{(\alpha_3+\gamma_2+k_1N^*+k_3P^*)^2} + k_2N^* + \gamma_1 \ ,$$

$$\frac{\partial f}{\partial k_3} = \frac{(\alpha_3+\gamma_2)S_a(\gamma_2+k_1N^*)P^*}{(\alpha_3+\gamma_2+k_1N^*+k_3P^*)^2} \ ,$$

$$\frac{\partial g}{\partial N^*} = \frac{k_1k_3(\alpha_3+\gamma_2)S_aP^*}{(\alpha_3+\gamma_2+k_1N^*+k_3P^*)^2} + k_2(P_a-P^*) \ ,$$

$$\frac{\partial g}{\partial P^*} = -\frac{k_3(\alpha_3+\gamma_2)S_a(\alpha_3+\gamma_2+k_1N^*)}{(\alpha_3+\gamma_2+k_1N^*+k_3P^*)^2} - k_2N^* - (\alpha_2+\gamma_1) \ ,$$

$$\frac{\partial g}{\partial k_3} = -\frac{(\alpha_3+\gamma_2)S_a(\alpha_3+\gamma_2+k_1N^*)P^*}{(\alpha_3+\gamma_2+k_1N^*+k_3P^*)^2} \ .$$

Uvrštavanjem nalazimo

$$\frac{\partial f}{\partial N^*}\frac{\partial g}{\partial P^*} - \frac{\partial f}{\partial P^*}\frac{\partial g}{\partial N^*} > 0$$

pa predznak od $\frac{dN^*}{dk_3}$ ovisi samo o brojniku $\frac{\partial f}{\partial P^*}\frac{\partial g}{\partial k_3} - \frac{\partial f}{\partial k_3}\frac{\partial g}{\partial P^*}$ (v. (11)). Vrijedi

$$\frac{\partial f}{\partial P^*}\frac{\partial g}{\partial k_3} - \frac{\partial f}{\partial k_3}\frac{\partial g}{\partial P^*} = \frac{(\alpha_3+\gamma_2)S_aP^*[(\alpha_2\gamma_2-\alpha_3\gamma_1)+(k_1\alpha_2-k_2\alpha_3)N^*]}{(\alpha_3+\gamma_2+k_1N^*+k_3P^*)^2}. \quad (12)$$

Prema tome, $\frac{dN^*}{dk_3}$ mijenja predznak u ovisnosti o izrazu $(\alpha_2\gamma_2-\alpha_3\gamma_1)+(k_1\alpha_2-k_2\alpha_3)N^*$. Proučimo situaciju kad je $\gamma_1=\gamma_2=0$, tj. uz pretpostavku da nema prijelaza iz kategorije stalno zaposlenih osoba u kategoriju nezaposlenih osoba te prijelaza iz kategorije privremeno zaposlenih osoba u kategoriju nezaposlenih osoba. Uzimajući u obzir (12) zaključujemo:

- ako je $k_1\alpha_2-k_2\alpha_3>0$, onda $\frac{dN^*}{dk_3}>0$ tj. N^* raste sa porastom parametra k_3
- ako je $k_1\alpha_2-k_2\alpha_3<0$, onda $\frac{dN^*}{dk_3}<0$ tj. N^* pada sa porastom parametra k_3.

Drugim riječima, ukoliko je $k_1\alpha_2-k_2\alpha_3>0$, broj nezaposlenih osoba se povećava kako se povećava priljev iz privremeno zaposlenih osoba u stalno zaposlene osobe. Pri tom je pretpostavljeno da je stopa priljeva iz kategorije stalno i privremeno zaposlenih osoba u kategoriju nezaposlenih osoba iznosi nula. Također, ukoliko je $k_1\alpha_2-k_2\alpha_3<0$, broj nezaposlenih osoba se smanjuje kako se povećava priljev iz privremeno zaposlenih osoba u stalno zaposlene osobe.

3.3. Ovisnost (N^*, P^*, S^*) o P_a

Uvedimo sada funkcije

$$\begin{aligned} f_1(P_a, N^*, P^*) &= A - \frac{k_1(\alpha_3+\gamma_2)S_aN^*}{\alpha_3+\gamma_2+k_1N^*+k_3P^*} - k_2N^*(P_a-P^*) - \alpha_1N^* + \gamma_1P^* + \\ &\quad + \frac{\gamma_2(k_1N^*+k_3P^*)S_a}{\alpha_3+\gamma_2+k_1N^*+k_3P^*} = (8) = 0, \end{aligned}$$

$$g_1(P_a, N^*, P^*) = k_2N^*(P_a-P^*) - \frac{k_3(\alpha_3+\gamma_2)S_aP^*}{\alpha_3+\gamma_2+k_1N^*+k_3P^*} - \alpha_2P^* - \gamma_1P^* = (9) = 0.$$

Koristimo formule

$$\frac{dN^*}{dP_a} = \frac{\frac{\partial f_1}{\partial P^*}\frac{\partial g_1}{\partial P_a} - \frac{\partial f_1}{\partial P_a}\frac{\partial g_1}{\partial P^*}}{\frac{\partial f_1}{\partial N^*}\frac{\partial g_1}{\partial P^*} - \frac{\partial f_1}{\partial P^*}\frac{\partial g_1}{\partial N^*}}, \qquad \frac{dP^*}{dP_a} = \frac{\frac{\partial f_1}{\partial P_a}\frac{\partial g_1}{\partial N^*} - \frac{\partial f_1}{\partial N^*}\frac{\partial g_1}{\partial P_a}}{\frac{\partial f_1}{\partial N^*}\frac{\partial g_1}{\partial P^*} - \frac{\partial f_1}{\partial P^*}\frac{\partial g_1}{\partial N^*}}. \tag{13}$$

Analogno kao u 3.2, izračunamo parcijalne derivacije[3] koje dolaze u (13) te uvrštavanjem zaključujemo:

$$\frac{\partial f_1}{\partial N^*}\frac{\partial g_1}{\partial P^*} - \frac{\partial f_1}{\partial P^*}\frac{\partial g_1}{\partial N^*} > 0, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial P^*}\frac{\partial g_1}{\partial P_a} - \frac{\partial f_1}{\partial P_a}\frac{\partial g_1}{\partial P^*} < 0,$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial P_a}\frac{\partial g_1}{\partial N^*} - \frac{\partial f_1}{\partial N^*}\frac{\partial g_1}{\partial P_a} > 0.$$

Zbog toga iz (13) slijedi

$$\frac{dN^*}{dP_a} < 0, \qquad \frac{dP^*}{dP_a} > 0. \tag{14}$$

Nadalje, kako je prema (7)

$$S^* = \frac{(k_1N^*+k_3P^*)S_a}{\alpha_3+\gamma_2+k_1N^*+k_3P^*}$$

imamo

$$S_a - S^* = \frac{(\alpha_3+\gamma_2)S_a}{\alpha_3+\gamma_2+k_1N^*+k_3P^*}.$$

Derivirajući dobivenu jednadžbu po P_a nalazimo

$$\frac{dS^*}{dP_a} = \frac{(\alpha_3+\gamma_2)S_a}{(\alpha_3+\gamma_2+k_1N^*+k_3P^*)^2}\left(k_1\frac{dN^*}{dP_a} + k_3\frac{dP^*}{dP_a}\right). \tag{15}$$

Radi preglednijeg zapisa uvedimo oznaku

$$D := \frac{\partial f_1}{\partial N^*}\frac{\partial g_1}{\partial P^*} - \frac{\partial f_1}{\partial P^*}\frac{\partial g_1}{\partial N^*} > 0.$$

[3] Prepuštamo čitatelju za vježbu.

Time (13) prelazi u

$$\frac{dN^*}{dP_a} = \frac{1}{D}\left(\frac{\partial f_1}{\partial P^*}\frac{\partial g_1}{\partial P_a} - \frac{\partial f_1}{\partial P_a}\frac{\partial g_1}{\partial P^*}\right), \quad \frac{dP^*}{dP_a} = \frac{1}{D}\left(\frac{\partial f_1}{\partial P_a}\frac{\partial g_1}{\partial N^*} - \frac{\partial f_1}{\partial N^*}\frac{\partial g_1}{\partial P_a}\right). \tag{16}$$

Uvrštavanjem u (15) dobivamo

$$\frac{dS^*}{dP_a} = \frac{1}{D}\frac{(\alpha_3+\gamma_2)S_a(k_3\alpha_1 - k_1\alpha_2)}{(\alpha_3+\gamma_2+k_1N^*+k_3P^*)^2}$$

iz čega odmah zaključujemo

$$\frac{dS^*}{dP_a} > 0, \quad \text{ako je} \quad k_3\alpha_1 - k_1\alpha_2 > 0\,. \tag{17}$$

Interpretirajmo dobivene rezultate u ovom odjeljku:

- ravnotežna razina broja nezaposlenih osoba se smanjuje sa porastom broja slobodnih privremenih radnih mjesta (v. $(14)_1$)
- ravnotežna razina broja privremeno zaposlenih osoba se povećava sa porastom broja slobodnih privremenih radnih mjesta (v. $(14)_2$)
- ravnotežna razina broja stalno zaposlenih osoba se povećava s porastom broja slobodnih privremenih radnih mjesta, ali uz uvjet $k_3\alpha_1 - k_1\alpha_2 > 0$ (v. (18))

Napomenimo da se potpuno analogno može diskutirati i ovisnost ravnotežnog stanja o parametru S_a.

4. Zaključak

U ovome radu postavljen je i analiziran nelinearni matematički model za problem nezaposlenosti. U modelu je pretpostavljeno da je stopa priljeva osoba u kategoriju nezaposlenih osoba konstantna. Ukupni broj slobodnih privremenih radnih mjesta, kao i slobodnih stalnih radnih mjesta je ograničen i po pretpostavci konstantan. Model je analiziran pomoću osnovnih alata diferencijalnog računa. Pokazano je da sa povećanjem slobodnih privremenih radnih mjesta, broj privremeno zaposlenih osoba se povećava, a broj nezaposlenih osoba smanjuje. Uz ograničenje $k_3\alpha_1 - k_1\alpha_2 > 0$, broj stalno zaposlenih osoba se povećava s porastom broja slobodnih privremenih radnih mjesta. Ukoliko je $k_1\alpha_2 - k_2\alpha_3 < 0$, broj nezaposlenih osoba se smanjuje kako se povećava k_3, tj. priljev iz kategorije privremeno zaposlenih osoba u kategoriju stalno zaposlenih osoba. Pri tom je pretpostavljeno da stopa priljeva iz kategorije stalno i privremeno zaposlenih osoba u kategoriju nezaposlenih osoba iznosi nula. Drugim riječima, ukoliko se želi smanjiti nezaposlenost, tada se stopa priljeva osoba iz kategorije privremeno zaposlenih osoba u kategoriju stalno zaposlenih osoba treba povećati samo ukoliko je $k_1\alpha_2 - k_2\alpha_3 < 0$.
Teorijska razmatranja mogu se potvrditi numeričkim simulacijama koristeći neki od prikladnih programskih paketa. Naravno, tu se javlja očiti problem vezan za ulazne podatke modela (A, S_a, P_a itd.) do kojih je gotovo nemoguće doći. Također, od

iznimne je važnosti korektno procijeniti parametre modela k_i što je samo za sebe zanimljiv (i nimalo lagan) problem, a čemu se u izvornom članku ne posvećuje pažnja. Ilustracije radi, prezentiramo numeričke rezultate iz [5] dobivene korištenjem MAPLE 7.0 uz sljedeće podatke:

$$A = 65000, \quad S_a = 25000, \quad P_a = 30000, \quad \alpha_1 = 2, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = 0.9, \tag{18}$$

$$\gamma_1 = 0.0009, \quad \gamma_2 = 0.0008, \quad k_1 = 0.00004, \quad k_2 = 0.00003, \quad k_3 = 0.00001.$$

Sustav jednadžbi (4)-(6) kao rezultat daje ravnotežno stanje

$$R(N^*, P^*, S^*) = (21439, 11594, 12985) \ .$$

Nadalje, uzimajući $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, možemo približno računati vrijednosti ravnotežne vrijednosti N^* iz sustava (10) za razne vrijednosti parametra k_3:

k_3	N^*
0.00001	21435
0.00002	21465
0.00003	21490
0.00004	21510

Kako je $k_1\alpha_2 - k_2\alpha_3 = 0.000009 > 0$, vidimo da je dobiveni rezultat u skladu sa zaključkom iz odjeljka 3.2 (N^* raste sa porastom parametra k_3).
Zaključno napomenimo još dvije stvari. Koristeći tehnike teorije stabilnosti, moguće je proučavati i *stabilnost* ravnotežnog stanja kojeg smo odredili u ovom radu te izvesti još neke zanimljive zaključke. Problem stabilnosti sustava običnih diferencijalnih jednadžbi fundamentalno je pitanje kojom se bavi tzv. *kvalitativna teorija diferencijalnih jednadžbi.* Osim u [5], zainteresirani čitatelj može više o tome pronaći u knjigama [2, 3]. Konačno, recimo još da se prezentirani model može generalizirati uzimajući u obzir dodatne varijable koje bi generirale nove načine zapošljavanja, bilo od strane države ili privatnog sektora.

Literatura

[1] J. R. BRANNAN, W. E. BOYCE, *Differential Equations: An Introduction to Modern Methods & Applications*, John Wiley & Sons, San Francisco, 2007.

[2] F. BRAUER, J. A. NOHEL, *The Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations: An Introduction, Dover Publications*, New York, 1989.

[3] M. BRAUN, *Differential Equations and Their Applications*, Springer–Verlag, New York, 1986.

[4] S. KUREPA, *Matematička analiza 3*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1979.

[5] A. K. MISRA, A. K. SINGH, *A mathematical model for unemployment*, Nonlinear Analysis: Real World Applications **12** (2011) 128–136.

[6] P. D. RITGER, N. J. ROSE, *Differential Equations and Applications*, Dover Publications, New York, 2000.