Usporedba kvantitativnih efekata osnovnih kamatnih računa

Bojan Kovačić* Bojan Radišić†

Sažetak. *Članak sadrži usporedbu (ceteris paribus) i rangiranje konačne vrijednosti uloženih glavnica koje generira svaka pojedina vrsta kamatnoga računa uz dekurzivni, odnosno anticipativni obračun kamata.*

Ključne riječi: *jednostavni kamatni račun, složen kamatni račun, dekurzivni obračun kamata, anticipativni obračun kamata*

Quantitative comparison of the effects of elemantary interest account

Abstract. *The article contains a comparison (ceteris paribus) and the final ranking of the value of invested capital generated by each type of interest account with decursive and anticipative interest rates.*

Key words: *simple interest calculation, compound interest calculation, decursive interest rate, ancitipative interest rate*

1. Uvod

Metodologija obračunavanja kamata jedna je od osnovnih tema financijskih disciplina, pa tako i financijske matematike. Poznato je da se pri obračunu kamata koriste dva osnovna kamatna računa: jednostavan i složen, te da obračun kamata može biti dekurzivan i anticipativan. Dekurzivan način obračuna kamata znači da se kamate obračunavaju na kraju razdoblja ukamaćivanja od glavnice s početka toga razdoblja. Za razliku od dekurzivnoga, anticipativan način obračuna kamata znači da se kamate obračunavaju na početku razdoblja ukamaćivanja od glavnice s kraja toga razdoblja. [1]

U ovom ćemo radu izvršiti usporedbu kvantitativnih efekata navedenih kamatnih računa uz svaki pojedini način obračuna kamata. To zapravo znači da ćemo uspoređivati nominalne iznose konačnih vrijednosti uloženih glavnica. Pritom će početni uvjeti (početna vrijednost glavnice, duljina vremena trajanja kapitalizacije, nominalna vrijednost kamatnjaka) u svim slučajevima biti jednaki (tj. primjenjuje se načelo *ceteris paribus*[2]). Budući da se anticipativan način obračuna kamata ne može primijeniti ako kamatnjak koji se odnosi na elementarno razdoblje

*bojan.kovacic1@zg.t-com.hr, Tehničko veleučilište, Konavoska 2, HR-10000 Zagreb
†bradisic@vup.hr, Veleučilište u Požegi, Vukovarska 17, HR-34000 Požega

[1] Cf.[4],str.78. i 108.

[2] Lat.:uz ostale nepromjenjive uvjete

ukamaćivanja nije strogo manji od 100, radi potpunosti usporedbe razlikovat će se ukupno pet različitih slučajeva formuliranih u obliku zasebnih primjera.

Najprije će se iskazati i dokazati pomoćne tvrdnje na kojima će se zasnivati rješenja spomenutih primjera.

2. Leme

Lema 1. *Za svaki $p > 0$ vrijedi nejednakost*

$$0 < \frac{\ln p - \ln 100 - \ln\left[\ln\left(1+\frac{p}{100}\right)\right]}{\ln\left(1+\frac{p}{100}\right)} < 1.$$

Dokaz. Iz pretpostavke $p > 0$ slijedi da je $1 + \frac{p}{100} > 1$, odnosno $\ln\left(1 + \frac{p}{100}\right) > 0$. Stoga nejednakost iz iskaza leme možemo pomnožiti s $\ln\left(1+\frac{p}{100}\right)$, pa sređivanjem i antilogaritmiranjem dobivamo ekvivalentnu nejednakost:

$$1 < \frac{p}{100 \cdot \ln\left(1+\frac{p}{100}\right)} < 1 + \frac{p}{100},$$

odnosno

$$\ln\left(1+\frac{p}{100}\right) < \frac{p}{100} < \left(1+\frac{p}{100}\right) \cdot \ln\left(1+\frac{p}{100}\right)$$

Funkcije f_1 i f_2 definirane formulama

$$f_1(p) = \frac{p}{100} - \ln\left(1+\frac{p}{100}\right),$$

$$f_2(p) = \left(1+\frac{p}{100}\right) \cdot \ln\left(1+\frac{p}{100}\right) - \frac{p}{100},$$

su rastuće na intervalu $\langle 0, +\infty\rangle$, te da je $f_1(0) = f_2(0) = 0$. Dakle, za svaki $p > 0$ vrijede nejednakosti

$$f_1(p) > 0 = f_1(0),$$

$$f_2(p) > 0 = f_2(0),$$

a odatle izravno slijedi

$$\ln\left(1+\frac{p}{100}\right) < \frac{p}{100} < \left(1+\frac{p}{100}\right) \cdot \ln\left(1+\frac{p}{100}\right).$$

Zbog ekvivalencije nejednakosti slijedi istinitost nejednakosti iz iskaza leme. □

Lema 2. *Neka je $p > 0$ proizvoljan, ali fiksiran realan broj, te $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana formulom*

$$f(x) = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^x - \frac{100 + p \cdot x}{100}. \tag{1}$$

Tada vrijedi:
a) $f(0) = f(1) = 0$.
b) $f(x) < 0, \forall x \in \langle 0, 1\rangle$.
c) $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \backslash [0, 1]$.

Dokaz. Izračunavanjem vrijednosti funkcije f za $x = 0$ i $x = 1$ slijedi da je $f(0) = f(1) = 0$, čime je dokazana tvrdnja **a)**. Za dokaz tvrdnji **b)** i **c)** potrebno je odrediti intervale monotonosti funkcije f. Prva derivacija funkcije f je funkcija

$$f'(x) = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^x \cdot \ln\left(1 + \frac{p}{100}\right) - \frac{p}{100}.$$

Intervale rasta funkcije f određujemo rješavanjem nejednadžbe $f'(x) > 0$,

$$\left(1 + \frac{p}{100}\right)^x \cdot \ln\left(1 + \frac{p}{100}\right) - \frac{p}{100} > 0$$

Budući da je funkcija $l(x) = \ln x$ strogo rastuća bijekcija, slijedi da je

$$x > \frac{\ln p - \ln 100 - \ln\left[\ln\left(1 + \frac{p}{100}\right)\right]}{\ln\left(1 + \frac{p}{100}\right)} =: x_1.$$

tj. da je $\langle x_1, +\infty\rangle$ interval rasta funkcije f. Analogno, rješavanjem nejednadžbe $f'(x) < 0$ slijedi da je $\langle -\infty, x_1\rangle$ interval pada funkcije f, dok rješavanjem jednadžbe $f'(x) = 0$ slijedi da je $x = x_1$ stacionarna točka funkcije f. Iz Leme 2.1 slijedi $x_1 \in \langle 0, 1\rangle$. Dakle, $x_1 \in \langle 0, 1\rangle$ je točka globalnog minimuma funkcije f, te vrijedi $f(x_1) < 0 = f(0) = f(1)$.

Budući da je f neprekidna na $[0, 1]$ i derivabilna na $\langle 0, 1\rangle$, iz Rolleova poučka i tvrdnje **a)** slijedi da postoji $c \in \langle 0, 1\rangle$ takav da je $f'(c) = 0$. Kako je $x_1 \in \langle 0, 1\rangle$ točka globalnoga minimuma funkcije f, nužno mora biti $c = x_1$. Budući da je f strogo padajuća na intervalu $\langle -\infty, x_1\rangle$ i $x_1 \in \langle 0, 1\rangle$, slijedi da je f strogo padajuća na intervalima $\langle -\infty, 0\rangle$ i $\langle 0, x_1\rangle$, tj. da vrijede nejednakosti:

$$f(x) > f(0), \text{za svaki } x < 0,$$

$$f(x) < f(0), \text{za svaki } x \in \langle 0, x_1\rangle.$$

Analogno, budući da je f strogo rastuća na intervalu $\langle x_1, +\infty\rangle$ i $x_1 \in \langle 0, 1\rangle$, slijedi da je f strogo rastuća na intervalima $\langle x_1, 1\rangle$ i $\langle 1, +\infty\rangle$, tj. da vrijede nejednakosti:

$$f(x) < f(1), \text{za svaki } x \in \langle x_1, 1\rangle,$$

$$f(1) < f(x), \text{za svaki } x > 1.$$

Iz navedenih nejednakosti, tvrdnje **a)** i nejednakosti $f(x_1) < 0$ slijedi

$$f(x) < 0 \text{ za svaki } x \in \langle 0, x_1\rangle \cup \{x_1\} \cup \langle x_1, 1\rangle, \text{tj. } x \in \langle 0, 1\rangle,$$

$$f(x) > 0 \text{ za svaki } x < 0 \text{ i } x > 1.$$

Prva od tih nejednakosti je tvrdnja **b)**, a druga tvrdnja **c)**. □

Lema 3. *Neka su $p \in \langle 0, 100\rangle$ proizvoljan, ali fiksiran realan broj, te $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana formulom*

$$g(x) = \left(1 - \frac{p}{100}\right)^x - \frac{100 - p \cdot x}{100}. \tag{2}$$

Tada vrijedi:
a) $g(0) = g(1) = 0$.
b) $g(x) < 0, \forall x \in \langle 0, 1\rangle$.
c) $g(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}\backslash[0, 1]$.

Dokaz. Analogno dokazu Leme 2.2. □

Lema 4. ***a)*** *Za svaki $p \in \langle 0, 100\rangle$ vrijedi nejednakost:*

$$1 < 1 + \frac{p}{100} < \frac{100}{100 - p}. \tag{3}$$

b) *Za proizvoljan, ali fiksiran $p \in \langle 0, 100\rangle$ i za svaki $x \in \langle 0, 100\rangle$ vrijedi nejednakost:*

$$1 < \left(1 + \frac{p}{100}\right)^x < \left(\frac{100}{100 - p}\right)^x. \tag{4}$$

Dokaz. **a)** Nejednakost $1 < 1 + \frac{p}{100}$ vrijedi zbog pretpostavke $0 < p < 100$. Nejednakost

$$1 + \frac{p}{100} < \frac{100}{100 - p}$$

je ekvivalentna nejednakosti

$$(100 + p) \cdot (100 - p) < 100^2,$$

odnosno nejednakosti

$$p^2 > 0.$$

Posljednja je nejednakost istinita za svaki $p \in \mathbb{R}$, pa posebno i za svaki $p \in \langle 0, 100\rangle$. Zbog ekvivalencije nejednakosti, istinita je i nejednakost (2.3).
b) Budući za $x \in \langle 0, 100\rangle$ i $1 < a < b$ vrijedi da je $1 < a^x < b^x$, tvrdnja **b)** slijedi izravno iz tvrdnje **a)**. □

Lema 5. *Za proizvoljan, ali fiksiran $p > 0$ i za svaki $k \in \left\langle 0, \frac{100}{p} \right\rangle$ vrijedi nejednakost:*

$$\frac{100 + p \cdot k}{100} < \frac{100}{100 - p \cdot k}. \tag{5}$$

Dokaz. Budući da je $k \in \langle 0, \frac{100}{p} \rangle$, slijedi da je $0 < k{\cdot}p < 100$, pa je $100 - p{\cdot}k > 0$. Stoga je nejednakost (2.5) ekvivalentna nejednakosti

$$(100 + p \cdot k) \cdot (100 - p \cdot k) < 100^2,$$

odnosno nejednakosti

$$p^2 \cdot k^2 > 0.$$

Ova nejednakost je istinita za bilo koje $p, k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, pa posebno i za brojeve p i k iz pretpostavke leme. Zbog ekvivalencije nejednakosti slijedi istinitost nejednakosti (2.5). □

Lema 6. *Neka je $p \in \langle 0, 100 \rangle$ proizvoljan, ali fiksiran.*
a) *Za svaki $k \in \langle 0, 1 \rangle \cup \langle \frac{100}{p}, +\infty \rangle$ vrijedi nejednakost:*

$$\left(\frac{100}{100 - p} \right)^k > \frac{100}{100 - p \cdot k}. \tag{6}$$

b) *Za svaki $k \in \langle 1, \frac{100}{p} \rangle$ vrijedi nejednakost:*

$$\left(\frac{100}{100 - p} \right)^k < \frac{100}{100 - p \cdot k}. \tag{7}$$

Dokaz. **a)** Ako je $k \in \langle \frac{100}{p}, +\infty \rangle$, onda je lijeva strana nejednakosti (2.6) strogo pozitivan, a desna strana nejednakosti (2.6) strogo negativan realan broj, pa nejednakost (2.6) vrijedi. Ako je $k \in \langle 0, 1 \rangle$, onda su ispunjene sve pretpostavke Leme 2.3.*b*), pa primjenom te leme slijedi:

$$\left(1 - \frac{p}{100} \right)^k < \frac{100 - p \cdot k}{100}. \tag{8}$$

Obje strane te nejednakosti su strogo pozitivni realni brojevi, pa primjenom očite ekvivalencije

$$(0 < a < b) \Leftrightarrow \left(0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a} \right) \tag{9}$$

na nejednakost (2.8) dobivamo nejednakost (2.6).
b) Uočimo da su ispunjene sve pretpostavke Leme 2.3.*c*), pa primjenom te leme slijedi:

$$\left(1 - \frac{p}{100} \right)^k > \frac{100 - p \cdot k}{100}.$$

Obje strane ove nejednakosti su strogo pozitivni realni brojevi, pa primjenom ekvivalencije (2.9) dobivamo nejednakost (2.7). □

Kako je ranije navedeno, usporedba kvantitativnih efekata osnovnih kamatnih računa bit će izvršena razmatranjem sljedećih pet primjera.

3. Primjeri

Primjer 1. *Dvije osobe A i B u početnom trenutku raspolažu s istim novčanim iznosom od C_0 novčanih jedinica.*
Osoba A uloži svoj novac u banku X na n godina uz stalan godišnji dekurzivni kamatnjak p, te dogovoren jednostavan i dekurzivan obračun kamata.
Osoba B uloži svoj novac u banku Y na n godina uz stalan godišnji dekurzivni kamatnjak p, te dogovoren složen i dekurzivan obračun kamata.
Koja osoba će na kraju vremena trajanja kapitalizacije raspolagati s većom konačnom vrijednošću uložene glavnice?
Napomene: *1.) Pretpostavlja se da vrijednost varijable n može biti bilo koji strogo pozitivan realan broj, tj. da je $n \in \langle 0, +\infty \rangle$. Ako je $n \in \langle 0, 1 \rangle$, uobičajeno se govori o ispodgodišnjoj kapitalizaciji glavnice, dok se u slučaju $n > 1$ uobičajeno govori o iznadgodišnjoj kapitalizaciji glavnice. Iako su u praksi vrijednosti varijable n, u pravilu, prirodni ili strogo pozitivni racionalni brojevi, navedena pretpostavka omogućuje korektnu primjenu metoda i tehnika diferencijalnoga računa u rješavanju navedenoga problema.*
2.) Iako se složene kamate mogu obračunavati i primjenom relativnih kamatnjaka (odnosno, proporcionalne metode), ovdje se pretpostavlja da se primjenjuje konformni kamatnjak jer taj tip kamatnjaka pripada u klasu ekvivalentnih kamatnjaka, odnosno generira jednaku konačnu vrijednost glavnice kao i nominalni godišnji kamatnjak.

Rješenje Primjera 1.:
Na kraju vremena kapitalizacije n osoba A raspolagat će s iznosom $(C_n)_A$ danim formulom

$$(C_n)_A = C_0 \cdot \frac{100 + p \cdot n}{100}, \tag{10}$$

dok će osoba B raspolagati s iznosom $(C_n)_B$ danim formulom

$$(C_n)_B = C_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n. \tag{11}$$

Razlika tih dvaju iznosa je

$$\triangle_A^B C_n = (C_n)_B - (C_n)_A = C_0 \cdot \left[\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - \frac{100 + p \cdot n}{100}\right]. \tag{12}$$

Iz Leme 2.2.a) slijedi da je za $n = 1$ vrijednost $\triangle_A^B C_n$ jednaka nuli, što znači: *Ako se obje glavnice kapitaliziraju točno jednu godinu, osobe A i B na kraju vremena trajanja kapitalizacije raspolagat će s jednakim konačnim vrijednostima uloženih glavnica.* Drugim riječima, prigodom jednogodišnje kapitalizacije, a uz dekurzivan obračun kamata, jednostavni kamatni račun i složeni kamatni račun generiraju (*ceteris paribus*) jednake kamate.
Iz Leme 2.2.b) slijedi da je za $n \in \langle 0, 1 \rangle$ vrijednost strogo negativna, što znači: *Ako se obje glavnice kapitaliziraju kraće od jedne godine, osoba A će na kraju vremena kapitalizacije raspolagati s većom konačnom vrijednošću uložene glavnice.* Drugim riječima, prigodom ispodgodišnje kapitalizacije, a uz dekurzivan obračun kamata,

jednostavni kamatni račun generira (*ceteris paribus*) veće kamate od složenoga kamatnoga računa.
Iz Leme 2.2.c) slijedi da je za $n \in \langle 1, +\infty\rangle$, tj. za $n > 1$, vrijednost strogo pozitivna, što znači: *Ako se obje glavnice kapitaliziraju dulje od jedne godine, osoba B će na kraju vremena kapitalizacije raspolagati s većom konačnom vrijednošću uložene glavnice.* Drugim riječima, prigodom iznadgodišnje kapitalizacije, a uz dekurzivan obračun kamata, složeni kamatni račun generira (*ceteris paribus*) veće kamate od jednostavnoga kamatnoga računa. □

Primjer 2. *Neka je $p \geq 100$ proizvoljan, ali fiksiran. Tri osobe A, B i C u početnom trenutku raspolažu s istim novčanim iznosom od C_0 novčanih jedinica.*
Osoba A uloži svoj novac u banku X na $n \in \langle 0, \frac{100}{p}\rangle$ godina uz stalan godišnji dekurzivni kamatnjak p, te dogovoren jednostavan i dekurzivan obračun kamata.
Osoba B uloži svoj novac u banku Y na $n \in \langle 0, \frac{100}{p}\rangle$ godina uz stalan godišnji dekurzivni kamatnjak p, te dogovoren složen i dekurzivan obračun kamata.
Osoba C uloži svoj novac u banku Z na $n \in \langle 0, \frac{100}{p}\rangle$ godina uz stalan godišnji anticipativni kamatnjak p, te dogovoren složen i anticipativan obračun kamata.
Koja osoba će na kraju vremena trajanja kapitalizacije raspolagati s najvećom konačnom vrijednošću uložene glavnice?

Napomene: 1.) Budući da, prema početnim uvjetima, vrijedi nejednakost $p \geq \frac{100}{n}$, tj. nejednakost $p \cdot n \geq 100$, u ovom problemu ne pojavljuje se jednostavan anticipativan obračun kamata. Naime, taj se obračun može primijeniti ako i samo ako vrijedi stroga nejednakost $p \cdot n < 100$.
2.) Iako se anticipativni kamatnjak obično označava slovom q, ovdje je, radi naglašavanja generiranja *ceteris paribus*, upotrijebljena ista oznaka kao i za dekurzivni kamatnjak. To, naravno, ne znači da se radi o istim kamatnjacima, nego isključivo da dekurzivni godišnji kamatnjak i anticipativni godišnji kamatnjak imaju nominalno jednake (numeričke) vrijednosti.

Rješenje Primjera 2.:
Iz pretpostavke $p \geq 100$ i $n \in \left\langle 0, \frac{100}{p}\right\rangle$ slijedi $n \in \langle 0, 1\rangle$, tj. riječ je o iznadgodišnjoj kapitalizaciji.
U rješenju Primjera 1. dokazano je da će, u odnosu na osobu B, osoba A u slučaju ispodgodišnje kapitalizacije raspolagati s većom konačnom vrijednošću uložene glavnice.
Na kraju vremena kapitalizacije osoba C raspolagat će s iznosom $(C_n)_C$ danim formulom

$$(C_n)_C = C_0 \cdot \left(\frac{100}{100 - p}\right)^n. \tag{13}$$

Razlika konačnih vrijednosti uloženih glavnica osoba C i A jednaka je

$$\Delta_A^C C_n = (C_n)_C - (C_n)_A = C_0 \cdot \left[\frac{100}{100 - p \cdot n} - \frac{100 + p \cdot n}{100}\right]. \tag{14}$$

Iz Leme 2.5 slijedi da je vrijednost $\Delta_A^C C_n$ strogo pozitivna, što znači da će, u odnosu na osobu A, osoba C raspolagati s većom konačnom vrijednošću uložene glavnice. Tako zaključujemo da će *osoba C na kraju vremena trajanja kapitalizacije raspolagati s najvećom konačnom vrijednošću uložene glavnice.*

Rangiramo li sve tri osobe prema kriteriju raspoložive konačne vrijednosti uložene glavnice tako da osoba koja raspolaže s najvećom konačnom vrijednošću uložene glavnice ima najveći rang, dobivamo sljedeću rang-listu:
1. C
2. A
3. B □

Primjer 3. *Neka je $p \in \langle 0, 100 \rangle$ proizvoljan, ali fiksiran. Četiri osobe A, B, C i D u početnom trenutku raspolažu s istim novčanim iznosom od C_0 novčanih jedinica.*
Osoba A uloži svoj novac u banku X na $n \in \langle 0, 1 \rangle$ godina uz stalan godišnji dekurzivni kamatnjak p, te dogovoren jednostavan i dekurzivan obračun kamata.
Osoba B uloži svoj novac u banku Y na $n \in \langle 0, 1 \rangle$ godina uz stalan godišnji dekurzivni kamatnjak p, te dogovoren složen i dekurzivan obračun kamata.
Osoba C uloži svoj novac u banku Z na $n \in \langle 0, 1 \rangle$ godina uz stalan godišnji anticipativni kamatnjak p, te dogovoren jednostavan i anticipativan obračun kamata.
Osoba D uloži svoj novac u banku W na $n \in \langle 0, 1 \rangle$ godina uz stalan godišnji anticipativni kamatnjak p, te dogovoren složen i anticipativan obračun kamata.
Koja osoba će na kraju vremena trajanja kapitalizacije raspolagati s najvećom konačnom vrijednošću uložene glavnice?

Rješenje Primjera 3.:
U rješenju Primjera 1. pokazano je da će u slučaju ispodgodišnje kapitalizacije osoba A raspolagati s većom konačnom vrijednošću uložene glavnice u odnosu na osobu B.
Razlika konačnih vrijednosti glavnica osoba C i A dana je izrazom (3.5). Iz pretpostavke $p \in \langle 0, 100 \rangle$ slijedi $\langle 0, 1 \rangle \subset \langle 0, \frac{100}{p} \rangle$, pa vrijedi $n \in \langle 0, \frac{100}{p} \rangle$. Stoga su ispunjene pretpostavke Leme 5. Iz te leme i izraza (3.5) slijedi da je vrijednost $\Delta_A^C C_n$ strogo pozitivna, što znači da će, u odnosu na osobu A, osoba C raspolagati s većom konačnom vrijednošću uložene glavnice.
Osoba D će na kraju vremena kapitalizacije raspolagati konačnim iznosom $(C_n)_D$ danim formulom

$$(C_n)_D = C_0 \cdot \left(\frac{100}{100 - p} \right)^n . \tag{15}$$

Razlika konačnih vrijednosti glavnica osoba D i C dana je izrazom

$$\Delta_C^D C_n = (C_n)_D - (C_n)_C = C_0 \cdot \left[\left(\frac{100}{100 - p} \right)^n - \frac{100}{100 - p \cdot n} \right] . \tag{16}$$

Budući da su ispunjene sve pretpostavke Leme 2.6.a), primjenom te leme slijedi da je vrijednost $\Delta_C^D C_n$ dana izrazom (3.7) strogo pozitivna, što znači da će, u odnosu na osobu C, osoba D raspolagati s većom konačnom vrijednošću uložene glavnice. Stoga se može zaključiti: *Ako se sve četiri glavnice kapitaliziraju kraće od jedne godine, osoba D će raspolagati s najvećom konačnom vrijednošću uložene glavnice.* Drugim riječima, u slučaju ispodgodišnje kapitalizacije i uz stalan godišnji kamatnjak strogo manji od 100, složeni kamatni račun uz anticipativan obračun kamata generira (*ceteris paribus*) najveće kamate.
Rangiramo li sve četiri osobe prema kriteriju raspoložive konačne vrijednosti uložene

glavnice tako da osoba koja raspolaže s najvećom konačnom vrijednošću uložene glavnice ima najveći rang, dobivamo sljedeću rang-listu:
1. D
2. C
3. A
4. B □

Primjer 4. *Neka je $p \in \langle 0, 100\rangle$ proizvoljan, ali fiksiran. Tri osobe A, B i D u početnom trenutku raspolažu s istim novčanim iznosom od C_0 novčanih jedinica.*
Osoba A uloži svoj novac u banku X na $n \geq \frac{100}{p}$ godina uz stalan godišnji dekurzivni kamatnjak p, te dogovoren jednostavan i dekurzivan obračun kamata.
Osoba B uloži svoj novac u banku Y na $n \geq \frac{100}{p}$ godina uz stalan godišnji dekurzivni kamatnjak p, te dogovoren složen i dekurzivan obračun kamata.
Osoba D uloži svoj novac u banku Z na $n \geq \frac{100}{p}$ godina uz stalan godišnji anticipativni kamatnjak p, te dogovoren složen i anticipativan obračun kamata.
Koja osoba će na kraju vremena trajanja kapitalizacije raspolagati s najvećom konačnom vrijednošću uložene glavnice?

Napomena: Uz navedeni primjer vrijede napomene jednake onima uz Primjer 2.

Rješenje Primjera 4.:
Iz pretpostavki $p \in \langle 0, 100\rangle$ i $n \geq \frac{100}{p}$ slijedi $n > 1$, što znači da je kapitalizacija iznadgodišnja. Konačni iznosi kojima će raspolagati osobe A i B dani su redom izrazima (3.1) i (3.2), pa primjenom Leme 2.2.c) slijedi da je vrijednost $\Delta_A^B C_n$ definirana s (3.3) strogo pozitivna. To znači da će, u odnosu na osobu A, osoba B raspolagati s većom konačnom vrijednošću uložene glavnice.
Na kraju vremena kapitalizacije osoba D raspolagat će s iznosom $(C_n)_D$ danim formulom (3.6). Razlika konačnih vrijednosti uloženih glavnica osoba D i B jednaka je

$$\Delta_B^D C_n = (C_n)_D - (C_n)_B = C_0 \cdot \left[\left(\frac{100}{100-p}\right)^n - \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n\right]. \tag{17}$$

Primjenom Leme 2.4.b) slijedi da je vrijednost $\Delta_B^D C_n$ strogo pozitivna, što znači da će, u odnosu na osobu B, osoba D na kraju vremena trajanja kapitalizacije raspolagati s većom konačnom vrijednošću glavnice.
Iz svega navedenoga slijedi da će *osoba D raspolagati s najvećom konačnom vrijednošću uložene glavnice*. Drugim riječima, u ovom slučaju složeni kamatni račun uz anticipativan obračun kamata generira (*ceteris paribus*) najveće kamate.
Rangiramo li sve tri osobe prema kriteriju raspoložive konačne vrijednosti uložene glavnice tako da osoba koja raspolaže s najvećom konačnom vrijednošću uložene glavnice ima najveći rang, dobivamo sljedeću rang-listu:
1. D
2. B
3. A □

Primjer 5. *Neka je $p \in \langle 0, 100\rangle$ proizvoljan, ali fiksiran. Četiri osobe A, B, C i D u početnom trenutku raspolažu s istim novčanim iznosom od C_0 novčanih jedinica.*
Osoba A uloži svoj novac u banku X na $n \in [1, \frac{100}{p}\rangle$ godina uz stalan godišnji

dekurzivni kamatnjak p, te dogovoren jednostavan i dekurzivan obračun kamata.
Osoba B uloži svoj novac u banku Y na $n \in [1, \frac{100}{p}\rangle$ *godina uz stalan godišnji dekurzivni kamatnjak p, te dogovoren složen i dekurzivan obračun kamata.*
Osoba C uloži svoj novac u banku Z na $n \in [1, \frac{100}{p}\rangle$ *godina uz stalan godišnji anticipativni kamatnjak p, te dogovoren jednostavan i anticipativan obračun kamata.*
Osoba D uloži svoj novac u banku W na $n \in [1, \frac{100}{p}\rangle$ *godina uz stalan godišnji anticipativni kamatnjak p, te dogovoren složen i anticipativan obračun kamata.*
Koja osoba će na kraju vremena trajanja kapitalizacije raspolagati s najvećom konačnom vrijednošću uložene glavnice?

Rješenje Primjera 5.:
Najprije pretpostavimo da je $n = 1$. U rješenju Primjera 1. pokazano je da će tada osobe A i B na kraju vremena trajanja kapitalizacije (tj. na kraju prve godine) raspolagati s jednakim konačnim vrijednostima uloženih glavnica. Uvrštavanjem $n = 1$ u formule (3.4) i (3.6) slijedi da će osobe C i D raspolagati s jednakim konačnim vrijednostima uloženih glavnica. Primjenom Leme 2.4.a) slijedi da će osoba D raspolagati s većom konačnom vrijednošću uložene glavnice u odnosu na osobu A. Stoga se može zaključiti: *Ako se sve četiri glavnice kapitaliziraju točno jednu godinu, osobe C i D raspolagat će s najvećom konačnom vrijednošću uložene glavnice.* Drugim riječima, u slučaju jednogodišnje kapitalizacije oba tipa kamatnoga računa uz anticipativan obračun kamata generiraju (*ceteris paribus*) jednake kamate, i to strogo veće od kamata koji isti računi generiraju uz dekurzivan obračun kamata.
U nastavku pretpostavimo da je $n \in \langle 1, \frac{100}{p}\rangle$. U rješenju Primjera 1. pokazano je da će tada osoba B raspolagati s većom konačnom vrijednošću uložene glavnice u odnosu na osobu A. U rješenju Primjera 4. pokazano je da će, u istom slučaju, osoba D raspolagati s većom konačnom vrijednošću uložene glavnice u odnosu na osobu B.
Budući da su ispunjene sve pretpostavke Leme 2.6.b), primjenom te leme slijedi da je vrijednost $\Delta_C^D C_n$ dana izrazom (3.7) strogo negativna, što znači da će osoba C raspolagati s većom konačnom vrijednošću uložene glavnice u odnosu na osobu D. Stoga se može zaključiti: *Ako se sve četiri glavnice kapitaliziraju dulje od jedne godine, osoba C će raspolagati s najvećom konačnom vrijednošću uložene glavnice.* Dakle, u ovom slučaju jednostavni kamatni račun uz anticipativan obračun kamata generira (*ceteris paribus*) najveće kamate.
Rangiramo li sve četiri osobe prema kriteriju raspoložive konačne vrijednosti uložene glavnice tako da osoba koja raspolaže s najvećom konačnom vrijednošću uložene glavnice ima najveći rang, dobivamo sljedeću rang-listu:
1. C
2. D
3. B
4. A □

4. Zaključak

U gospodarskoj se praksi najčešće primjenjuju godišnji kamatnjaci strogo manji od 100, pa su praktično najvažniji rezultati Primjera 3., 4. i 5.
Zaključno treba istaknuti da razmatrana usporedba kvantitativnih efekata osnovnih kamatnih računa ne znači usporedbu pojedinih načina obračuna kamata jer je takva usporedba ekonomski besmislena i neprovediva. U nastavi gospodarske matematike na stručnim studijima prigodom obrade osnovnih vrsta kamatnih računa na konkretnim se primjerima uobičajeno provode upravo usporedbe (*ceteris paribus*) njihovih kvantitativnih efekata, što posebice dolazi do izražaja kod potrošačkih kredita (usporedba kvantitativnih efekata jednostavnoga kamatnoga računa uz dekurzivan, odnosno anticipativan obračun kamata). Međutim, vrlo rijetko se ističe da rezultati dobiveni razmatranjem konkretnih numeričkih primjera vrijede i općenito, pa se ovim radom nastoji popuniti ta praznina.

Literatura

[1] B. Gruić, I. Jemrić, I. Šutalo, H. Volarević, *Matematika za ekonomiste i managere*, MATE, Zagreb, 2008.

[2] S. Kurepa, *Matematička anaiza 1*, Školska knjiga, Zagreb, 1997.

[3] S. Kurepa, *Matematička anaiza 2*, Školska knjiga, Zagreb, 1997.

[4] B. Relić, *Gospodarska matematika*, Hrvatska zajednica računovođa i financijskih djelatnika, Zagreb, 2005.