Egipatski razlomci

Dragana Jankov*

Sažetak. *U ovome radu su prezentirane osnovne odrednice matematike starih Egipćana, s posebnim naglaskom na vrstu razlomaka koje su oni poznavali, te ih stoga nazivamo egipatski razlomci ili jedinični razlomci. Rad sadrži i slike na kojima su predstavljeni posebni simboli koje su za brojeve dekadskog sustava i jedinične razlomke koristili stari Egipćani.*

Ključne riječi: *egipatska matematika, egipatski razlomak, jedinični razlomak*

Egyptian fractions

Sažetak. *In this paper we present the basic principles of mathematics of the ancient Egyptians, with special emphasis on the type of fractions that they used, so they called Egyptian fractions, or unit fractions. The paper also includes images which present the special symbols which were used by Egyptians, as the symbols for decimal system and unit fractions.*

Key words: *Egyptian mathematics, Egyptian fraction, unit fraction*

1. Egipatska matematika

Jedna od najranijih velikih civilizacija bila je staroegipatska, pa tako kod starih Egipćana nalazimo i neke od prvih matematičkih ideja. Najstarija egipatska bilješka o broju potječe otprilike oko 3300. godine prije Krista i pet je stoljeća starija od prve piramide (vidi [2]). Stari su Egipćani imali razvijen decimalni sustav i svoje oznake za brojeve, a bili su vrlo vješti u zbrajanju, oduzimanju, množenju, dijeljenju, te računanju s razlomcima. Oni nisu imali namjeru razviti općenite matematičke metode i teorije, nego im je matematika služila pri rješavanju praktičnih problema koji su za njih imali primjenu u zemljoradnji, građevini, ekonomiji i religiji. Egipatska matematika se u potpunosti temelji na osnovi računanja - na brojenju i pojmu razlomka, a o njoj saznajemo iz dva glavna izvora:

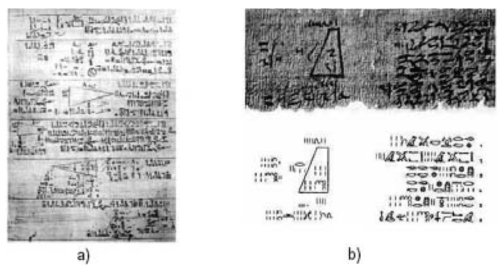
*asistent na Odjelu za matematiku, Sveučilište u Osijeku, Trg Ljudevita Gaja 6, HR-31000 Osijekdjankov@mathos.hr

- **Rhindov papirus**

  Rhindov papirus (vidi [3]), koji je prikazan na Slici 1 a) nastao je oko 1650. prije Krista. Dobio je ime po egiptologu Alexander Henry Rhindu, koji ga je 1858. kupio u Luxoru. Nakon njegove smrti papirus stiže u British Museum, gdje se nalazi i danas. Smatra se da on predstavlja matematiku poznatu oko 2000. prije Krista. Sadrži 84 zadatka namijenjena školama pisara.

- **Moskovski papirus**

  Moskovski papirus (Slika 2 b), vidi [3]) otkrio je V. S. Goleničev i 1893. donio u Moskvu. On sadrži 25 zadataka od kojih je najzanimljiviji 14. o računanju volumena krnje kvadratne piramide.



Slika 1: Rhindov i Moskovski papirus

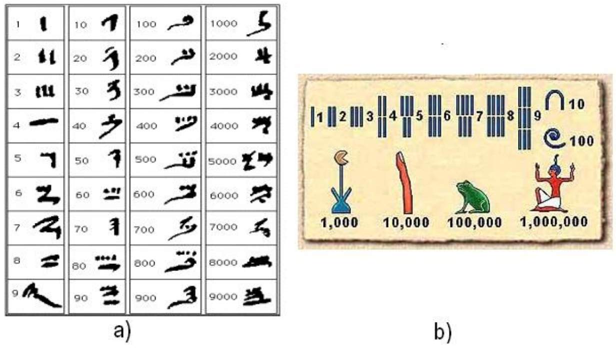
U oba spomenuta papirusa, nalaze se zadaci vezani uz praktične probleme, razine četiri elementarne operacije, rješavanja linearnih jednadžbi, računanja volumena i slično.

2. Egipatski brojevni sustav

Smatra se da Egipćani brojeve nisu smatrali apstraktnim vrijednostima, nego su pod npr. brojem 10 podrazumijevali 10 jabuka ili 10 buba–mara. Brojevni sustav starih Egipćana je dekadski s posebnim znakovima za brojeve 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000 i 1000000, a svaki se simbol u zapisu broja ponavlja potreban broj puta (najviše devet). Egipćani su poznavali dvije vrste brojeva (vidi [5]): hijeratske (Slika 2 a)) i hijeroglifske (Slika 2 b)).

U nastavku je naveden opis hijeroglifskih brojeva, preuzet iz [4], koji prati Sliku 2 b).

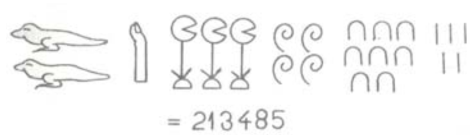
- 1 je prikazan kao jedan štapić,



Slika 2: Hijeratski i hijeroglifski brojevi

- 10 ima oblik prolaza, tunela,
- 100 je prikazan kao namotano uže,
- 1000 kao lokvanj,
- 10000 je predstavljen ljudskim prstom,
- 100000 je prikazan slikom punoglavca, a
- 1000000 figurom boga s rukama podignutim iznad glave.

Primjer 1. *Broj* 213485*, pomoću hijeroglifskih brojeva, možemo zapisati u sljedećem obliku (vidi [1]):*



Slika 3: Zapis broja 213485 pomoću hijeroglifskih brojeva

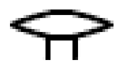
3. Egipatski razlomci

Egipćani su razlomke označavali na način koji nema sličnosti niti s jednom drugom kulturom. Svaki razlomak su pisali s jediničnim brojnikom, a ako to nije bilo moguće, onda su ga prikazivali kao zbroj takvih. Dakle, oni su poznavali samo jedinične razlomke, odnosno razlomke s brojnikom 1. Takav zapis razlomka zove se zapis u egipatskom obliku odnosno *egipatski razlomak*.

Iznimka je bio razlomak $\frac{2}{3}$ prikazan na Slici 4 (vidi [2], [8]). Stari Egipćani su znali i koristili činjenicu da se $\frac{2}{3}$ od $\frac{1}{n}$ može računati kao

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n},$$

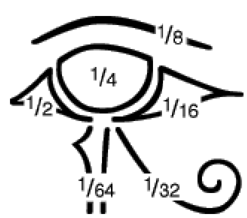
te zato $\frac{2}{3}$ nisu rastavljali na jedinične razlomke i vrlo često su ga koristili u računima.



Slika 4: Simbol za 2/3

3.1. Povijesni detalj

Stari Egipćani su vjerovali da ih *Rx* (simbol oka boga Horusa (Slika 5, vidi [5]) štiti od zla, pa su i u matematiku ugradili simboliku. Razlomke su tvorili tako što su kombinirali pojedine dijelove simbola oka boga Horusa (vidi [6]). Svaki dio imao je različitu vrijednost. Cjelokupni simbol oka ima vrijednost 1, a cijeli sustav se temelji na podjeli na polovice:
Pola od 1 je $\frac{1}{2}$, pola od $\frac{1}{2}$ je $\frac{1}{4}$ i tako sve do $\frac{1}{64}$.



Slika 5: Horusovo oko

3.2. Zapis egipatskih razlomaka

Egipćani su jedinične razlomke zapisivali tako da je iznad nazivnika stavljen poseban znak sa značenjem *dio* (vidi Sliku 6). To je bio hijeroglif koji je označavao *otvorena usta*. Danas pojednostavljeno razlomke s jedinicom u brojniku pišemo s kosom crtom iza koje slijedi nazivnik. Na primjer $\frac{1}{2}$ zapisujemo kao /2, $\frac{1}{4}$ kao /4, dok se iznimka $\frac{2}{3}$ piše //3.

Slika 6: Simbol za 1/3

3.3. Pravila za računanje s razlomcima

Kako su svi razlomci morali biti prikazani s brojnikom 1, metode zapisivanja nisu dopuštale starim Egipćanima da pišu jednostavne razlomke kao što su $\frac{3}{5}$ ili $\frac{15}{33}$.

Kada je pisar morao računati s razlomcima, bio je suočen s mnogim problemima, uglavnom vezanim za njihovo zapisivanje. Zato je koristio sljedeća pravila:

- Kada se razlomak može prikazati na više načina, koristi se način koji zahtijeva najmanji broj jediničnih razlomaka.
- Uvijek se koristi najveći mogući jedinični razlomak, osim ako to nije u kontradikciji s prvim pravilom.
- U prikazu razlomka $\frac{2}{n}$ ne mogu se pojaviti dva ista jedinična razlomka.
- Jedinični razlomci pišu se od većeg prema manjem.

3.3.1. Primjeri koji objašnjavaju pravila

- Razlomak $\frac{3}{4}$ je pisar mogao zapisati kao

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \quad \text{ili} \quad \frac{3}{4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}\,.$$

  Uvijek se koristi kraća verzija.

- Razlomak $\frac{7}{12}$ mogao se zapisati kao

$$\frac{7}{12} = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} \quad \text{ili} \quad \frac{7}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\,.$$

  Pisar bi koristio prvi zapis jer mora koristiti veći jedinični razlomak.

- Razlomak $\frac{9}{10}$ se nije mogao zapisati kao

$$\frac{9}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$$

  zato što se u zapisu ne mogu pojaviti dva ista jedinična razlomka.
  Zato se koristi zapis

$$\frac{9}{10} = \frac{2}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{30}\,.$$

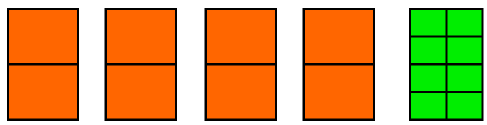
Iz ovog primjera vidimo kako su razlomci u zbroju pisani u padajućem redoslijedu:

$$\frac{2}{3} > \frac{1}{5} > \frac{1}{30}.$$

Primjer 2. *Poljoprivrednik ima* 5 *vreća žita (Slika* 7*, vidi* [7]*) koje treba podijeliti između* 8 *radnika. Kako će to učiniti?*

Rješenje.

Poljoprivrednik će prvo svakom radniku dati pola vreće žita. Ostat će mu još jedna vreća. Sada je lako podijeliti jednu vreću na 8 dijelova, pa svaki od njih dobiva još i dodatnu osminu vreće i sve zrno je jednako podijeljeno između 8 radnika.



Slika 7: Pet vreća žita

3.4. Uspoređivanje razlomaka pomoću egipatskih razlomaka

Kako usporediti $\frac{3}{4}$ i $\frac{4}{5}$?

Koristeći se egipatskim razlomcima možemo svaki napisati kao sumu jediničnih razlomaka:

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}, \ \ \frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{3}{10}.$$

Kako je

$$\frac{3}{10} = \frac{1}{4} + \frac{1}{20}$$

imamo da je

$$\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20}.$$

Iz toga slijedi

$$\frac{4}{5} = \frac{3}{4} + \frac{1}{20}.$$

Sada možemo vidjeti da je $\frac{4}{5}$ veće od $\frac{3}{4}$.

4. I poznati su se bavili egipatskim razlomcima

Najveći europski matematičar srednjeg vijeka Leonardo iz Pise, poznatiji kao Fibonacci, u svojoj je knjizi Liber Abaci iz 1202. opisao metodu pomoću koje možemo bilo koji razlomak zapisati u egipatskom obliku.

Metoda se sastoji u tome da se uzme zadani razlomak i od njega oduzme najveći jedinični razlomak manji od njega i tako sve dok se kao razlika ne dobije jedinični razlomak.

Primjer 3. *Ako rastavljamo razlomak $\frac{4}{5}$, najveći jedinični razlomak manji od njega je $\frac{1}{2}$.*
Dakle imamo

$$\frac{4}{5} - \frac{1}{2} = \frac{3}{10}\,.$$

Najveći jedinični razlomak manji od $\frac{3}{10}$ je $\frac{1}{4}$, te dobivamo

$$\frac{3}{10} - \frac{1}{4} = \frac{1}{20}\,,$$

što je jedinični razlomak. Slijedi da je

$$\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20}\,.$$

Nije poznato je li Fibonacci znao da njegova metoda uvijek funkcionira (tj. da postupak uvijek staje nakon konačno mnogo koraka), ali je takav dokaz lako izvesti:

Lema 1. *Neka je $\dfrac{p}{q}$ bilo kakav razlomak manji od 1 koji nije jedinični. Neka je $\dfrac{1}{n}$ najveći jedinični razlomak manji od $\dfrac{p}{q}$. Tada je $\dfrac{p}{q} - \dfrac{1}{n} = \dfrac{r}{qn}$ razlomak sa svojstvom $r < p$.*

Dokaz. Imamo $\dfrac{p}{q} - \dfrac{1}{n} = \dfrac{pn-q}{qn}$. Ako je $p \leq pn - q = r$, pribrajanjem $q - p$ dobivamo $q \leq pn - p$. No tada je $\dfrac{1}{pn-p} \leq \dfrac{1}{q}$. Pomnožimo obje strane s p i dobivamo $\dfrac{1}{n-1} \leq \dfrac{p}{q}$. Budući $\dfrac{p}{q}$ nije jedinični razlomak, ali je manji od 1, slijedi da je $n > 2$, a $\dfrac{1}{n-1}$ je jedinični razlomak veći od $\dfrac{1}{n}$ i manji od $\dfrac{p}{q}$, što je kontradikcija s izborom n. □

Teorem 1 [Fibonaccijev teorem]. *Svaki (pozitivan) racionalan broj se može zapisati kao konačni zbroj jediničnih razlomaka.*

Dokaz. Neka je $\dfrac{p}{q}$ neki zadani pozitivan racionalan broj. Ukoliko je veći od 1, od njega oduzmemo najveći prirodni broj manji od njega (a taj sigurno možemo zapisati kao zbroj jedinica) i postupak primjenjujemo na ostatak. Prema tome, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $\dfrac{p}{q} < 1$. Primjenom Fibonaccijeve metode (oduzimanje najvećeg jediničnog razlomka $\dfrac{1}{n}$ manjeg od $\dfrac{p}{q}$) dobivamo da je $\frac{p}{q} = \frac{1}{n} + \frac{r}{qn}$. Ponovimo postupak s $\frac{r}{qn}$. Budući je po prethodnoj lemi $r < p$, slijedi da će ostatak u idućem koraku imati još manji brojnik. Uzastopnim ponavljanjem postupka dobiti ćemo niz razlomaka - ostataka s pripadnim padajućim nizom brojnika. Kako su brojnici prirodni brojevi, slijedi da niz brojnika mora biti konačan. □

Kako smo već do sada vidjeli, prikaz razlomka u egipatskom obliku nije jedinstven. O tome nam govori i sljedeća propozicija.

Propozicija 1. *Svaki razlomak se može na beskonačno mnogo načina prikazati u egipatskom obliku.*

Umjesto dokaza, uvjerimo se na još jednom primjeru kako ovo zaista vrijedi.

Primjer 4. *Broj* 1 *možemo prikazati kao* $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$. *Kako je*

$$\frac{5}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8},$$

dijeljenjem prve jednakosti s 8 *dobivamo*

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{16} + \frac{1}{24} + \frac{1}{48}.$$

Sada je

$$\frac{5}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{24} + \frac{1}{48}.$$

Istu stvar možemo učiniti i s razlomkom $\frac{1}{48}$ *(nakon dijeljenja prve jednakosti s* 48*).*

U svakom koraku ćemo dobiti novi prikaz razlomka $\frac{5}{8}$ *u egipatskom obliku. Na isti način se iz svakog egipatskog prikaza proizvoljnog razlomka može dobiti beskonačno mnogo takvih egipatskih prikaza.*

Literatura

[1] V. Devide, *Na izvorima matematike*, Zagreb, 1977.

[2] Š. Znam i drugi, *Pogled u povijest matematike*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1989.

[3] http://www.mathos.hr/~bruckler/skripta/Egipat.pdf

[4] http://www.thelighthouseforeducation.co.uk/solveit/previous/24.htm#top

[5] http://web.math.hr/mathe/egipat/index.html

[6] http://gwydir.demon.co.uk/jo/egypt/fractions.htm

[7] http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fractions/egyptian.html

[8] http://en.wikipedia.org/wiki/Egyptian_fraction