Pregledni rad
UDK: 519.812:330.13

Doc. dr. sc. Ilko Vrankić
Darjan Milutinović

MATEMATIČKA ANALIZA I KOMPARATIVNA STATIKA SLOŽENOG DOBRA

MATHEMATICAL AND COMPARATIVE STATIC ANALYSIS OF COMPOSITE COMODITY

SAŽETAK: Sadržaj ovog rada je sveobuhvatna analiza složenog dobra koja se oslanja na proporcionalnu promjenu cijena. Posebna se pozornost pridaje svojstvima izvedene funkcije korisnosti iz kojih proizlaze negativno nagnute i konveksne krivulje indiferencije. Prednost izvedenog problema efikasne raspodjele ograničenog dohotka očituje se u znatno manjem broju varijabli odlučivanja. Inducirane preferencije alternativno opisuje indirektna funkcija korisnosti i zamjena dualnih varijabli potvrđuje teorem o složenom dobru. Raspravu upotpunjava komparativno statička analiza koja obuhvaća suvremeni zakon potražnje za novcem kojim se supstituira bilo koje dobro.

KLJUČNE RIJEČI: inducirane preferencije, izvedena funkcija korisnosti, izvedena indirektna funkcija korisnosti, dualne varijable, Hicks-Marshallov novac.

ABSTRACT: The content of this paper is a comprehensive analysis of composite commodity that relies on the proportional change in prices. Particular attention is paid to the properties of the derived utility function, which leads to a negative sloped and convex indifference curves. The advantage of derived problem of efficient distribution of income is reflected in a significantly smaller number of decision variables. Induced preferences are alternatively described by the indirect utility function and the replacement of dual variables confirms the theory of composite commodity. The discussion is completed by the comparative static analysis, which includes a modern law of demand for money which substitutes any commodity.

KEYWORDS: induced preferences, derived utility function, derived indirect utility function, dual variables, the Hicks-Marshall money.

1. UVOD

Analiza ponašanja potrošača nerijetko počiva na geometrijskim argumentima i slikovito se predočava u dvodimenzionalnoj ravnini. Takva analiza ima znatno širu primjenu kada se umjesto fizičkih dobara promatra jedno fizičko dobro i potrošnja na sva ostala dobra. Problem agregiranja dobara prvi je razmatrao poznati ekonomist J. R. Hicks /4/. U svom se radu oslanjao na proporcionalnu promjenu cijena i našao da je učinak supstitucije za grupu dobara negativan. Taj su nalaz upotrebom dualnih tehnika potvrdili i drugi autori /1, 2, 3, 7/. Problem svojstava induciranih preferencija i podudarnosti rješenja odgovarajućih problema optimizacije ističu G. A. Jehle i P. J. Reny /5/. Sama svojstva skupova ostvarive potrošnje opisuju G. S. Maddala i E. Miller /6/.

Sam opis budžetskog prostora ne govori ništa o odnosu polaznih i induciranih preferencija, ni o rješenjima odgovarajućih problema efikasne raspodjele ograničenog dohotka. Takav površan pristup ne ističe intelektualne poteškoće u shvaćanju složenog dobra. Taj se nedostatak u ovom radu otklanja sveobuhvatnom analizom u kojoj ukus potrošača opisujemo različitim skupovima varijabli. Dokazujemo da je izvedena funkcija korisnosti striktno kvazikonkavna i da u analizi možemo poći od jednostavnijeg induciranog problema optimizacije znajući da ćemo zaista dobiti optimalnu potrošnju prvog dobra i optimalne izdatke na ostala dobra. Ističemo komparativno-statičku analizu kojom u novom ruhu prikazujemo Hicksove rezultate. Doprinosi se očituju u izvođenju osnovne jednadžbe teorije vrijednosti koja za grupu dobara sažimlje suvremeni zakon potražnje.

Mogućnost da grupiramo izdatke na pojedina dobra nije dovoljna da ih agregiramo. Postavlja se pitanje uvjeta pod kojima su kruh i vino zaista jedina dobra. Zamjena grupe dobara jednim složenim dobrom oslanja se na specifičnu strukturu preferencija ili specifičnu promjenu cijena. Proporcionalna promjena cijena kojih se odnosi ne mijenjaju polazište je ovog rada u kojem na sveobuhvatan način govorimo o složenom dobru ili Hicks-Marshallovom novcu. Nakon što na osnovi induciranog budžetskog prostora odredimo cijenu složenog dobra opisujemo izvedenu funkciju korisnosti i proučavamo njezina svojstva. Dokazujemo da optimalna količina prvog dobra i izdaci pri polaznim cijenama na optimalne količine ostalih dobara rješavaju problem maksimizacije izvedene funkcije korisnosti uz inducirano budžetsko ograničenje. Do istog rezultata još jednostavnije dolazimo kada količine zamijenimo cijenama. Dualni pristup nadopunjava komparativno-statička analiza koja otkriva suvremeni zakon potražnje za složenim dobrom.

2. BUDŽETSKI PROSTOR

Jednakost između ukupnih izdataka i ograničenog dohotka, M, potrošača opisuje dio hiperravnine koji odozgo ograničava budžetski prostor,

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n = M.$$

Pritom su p_i jedinične cijene dobara i x_i količine tih dobara kojih ima n. Asocijativnost zbrajanja omogućava objedinjavanje izdataka na sva ostala dobra,

$$p_1 x_1 + (p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n) = M,$$

$$p_1 x_1 + \mathbf{p}_{n-1} \mathbf{x}_{n-1} = M.$$

Drugi je pribrojnik zapravo skalarni produkt fiksnih cijena $\mathbf{p}_{n-1} = (p_2,...,p_n)$ i dostupnih količina drugih dobara $\mathbf{x}_{n-1} = (x_2,...,x_n)$. Ako se proporcionalno mijenjaju cijene drugih dobara, budžetsko je ograničenje:

$$p_1 x_1 + \vartheta \mathbf{p}_{n-1}\mathbf{x}_{n-1} = M.$$

Faktor proporcionalnosti ϑ opisuje cijenu složenog dobra kojeg je količina

$$x_c = \mathbf{p}_{n-1}\mathbf{x}_{n-1}.$$

Bilo koji iznos potrošač može na različite načine potrošiti na ostala dobra. Podvostruče li se cijene tih dobara, prepolove se količine dobara koja čine složeno dobro i intuitivno potvrđuje njegova cijena. Produkt te cijene i količine složenog dobra opisuje izdatke na ostala dobra i jednadžba je budžetskog ograničenja:

$$p_1 x_1 + \vartheta x_c = M.$$

Vidimo da je inducirani budžetski prostor dio dvodimenzionalne ravnine i možemo ga grafički prikazati.

3. IZVEDENA FUNKCIJA KORISNOSTI

Pođimo od neprekidne,strogo rastuće i striktno kvazikonkavne funkcije korisnosti $u(x_1, \mathbf{x}_{n-1})$. Za zadane količine prvog dobra i složenog dobra racionalno je izabrati količine ostalih dobara koje maksimiziraju korisnost potrošača,

$$u^c(x_1, x_c) = \max_{\mathbf{x}_{n-1}} u(x_1, \mathbf{x}_{n-1})$$
$$\mathbf{p}_{n-1}\mathbf{x}_{n-1} = x_c.$$

Primijetimo da smo dobili indirektnu funkciju korisnosti kojoj su argumenti količina prvog dobra i količina složenog dobra. Pritom se u ograničenju cijena složenog dobra pokratila. Izvedena funkcija korisnosti nasljeđuje svojstva polazne funkcije korisnosti i povezuje ih jednakost u kojoj se pojavljuje jedinstveno rješenje prethodnog problema optimizacije,

$$u^c(x_1, x_c) = u(x_1, \mathbf{x}_{n-1}(x_1, x_c)).$$

Neprekidnost izvedene funkcije korisnosti dobijemo primjenom teorema o maksimumu, monotonost slijedi iz monotonosti polazne funkcije korisnosti i preostaje dokazati striktnu kvazikonkavnost. Od dviju različitih košara dobara, $(x_1^0, x_c^0) \neq (x_1^1, x_c^1)$, sačinimo ponderiranu aritmetičku sredinu,

$$(x_1^t, x_c^t) = (1-t)(x_1^0, x_c^0) + t(x_1^1, x_c^1), t \in \langle 0,1 \rangle.$$

S istim ponderima uprosječimo odgovarajuća rješenja prethodnog problema optimizacije,

$$\mathbf{x}_{n-1}^* = (1-t)\mathbf{x}_{n-1}(x_1^0, x_c^0) + t\mathbf{x}_{n-1}(x_1^1, x_c^1).$$

Pri uprosječenim izdacima na ostala dobra prosjek je rješenja dostupna košara dobara,

$$\mathbf{p}_{n-1}\mathbf{x}_{n-1}^* = (1-t)\mathbf{p}_{n-1}\mathbf{x}_{n-1}(x_1^0, x_c^0) + t\mathbf{p}_{n-1}\mathbf{x}_{n-1}(x_1^1, x_c^1),$$

$$\mathbf{p}_{n-1}\mathbf{x}_{n-1}^* = (1-t)x_c^0 + tx_c^1,$$

$$\mathbf{p}_{n-1}\mathbf{x}_{n-1}^* = x_c^t.$$

Stoga maksimalna korisnost za uprosječenu količinu prvog dobra i uprosječene izdatke nije manja od korisnosti košare dobara koja sadrži prosjek količina prvog dobra i odgovarajućih rješenja,

$$u^c(x_1^t, x_c^t) \geq u(x_1^t, \mathbf{x}_{n-1}^*),$$

$$u^c(x_1^t, x_c^t) \geq u((1-t)(x_1^0, \mathbf{x}_{n-1}(x_1^0, x_c^0)) + t(x_1^1, \mathbf{x}_{n-1}(x_1^1, x_c^1))).$$

Iz striktne kvazikonkavnosti polazne funkcije korisnosti slijedi:

$$u^c(x_1^t, x_c^t) > \min\{u(x_1^0, \mathbf{x}_{n-1}(x_1^0, x_c^0)), u(x_1^1, \mathbf{x}_{n-1}(x_1^1, x_c^1))\},$$

$$u^c(x_1^t, x_c^t) > \min\{u^c(x_1^0, x_c^0), u^c(x_1^1, x_c^1)\}.$$

Izvedeni zaključak prema kojem je izvedena funkcija korisnosti zaista striktno kvazikonkavna opravdava različitost rješenja problema optimizacije u kojima je zadana količina prvog dobra ista i količina složenog dobra različita.

4. PODUDARNOST RJEŠENJA

U ovom poglavlju uspoređujemo rješenja dvaju problema optimizacije. U izvornom problemu maksimizacije korisnosti uz zadano budžetsko ograničenje pojavljuje se veliki broj varijabli odlučivanja,

$$v(p_1, \mathbf{p}_{n-1}, M) = \max_{x_1, \mathbf{x}_{n-1}} u(x_1, \mathbf{x}_{n-1})$$

$$p_1 x_1 + \mathbf{p}_{n-1}\mathbf{x}_{n-1} = M.$$

Tvrdimo da optimalna količina prvog dobra $x_1(p_1, \vartheta\mathbf{p}_{n-1}, M)$ i izdaci pri polaznim cijenama na optimalne količine ostalih dobara $\mathbf{p}_{n-1}\mathbf{x}_{n-1}(p_1, \vartheta\mathbf{p}_{n-1}, M)$, koji uzimaju u obzir proporcionalnu promjenu cijena grupe dobara, optimalno rješavaju problem maksimizacije izvedene funkcije korisnosti uz inducirano budžetsko ograničenje,

$$v^c(p_1, \vartheta, M) = \max_{x_1, x_c} u^c(x_1, x_c)$$

$$p_1 x_1 + \vartheta x_c = M.$$

Optimalne količine prvog dobra i složenog dobra ispunjavaju budžetsko ograničenje i vrijedi:

$$u^c(x_1(p_1, \vartheta\mathbf{p}_{n-1}, M), \mathbf{p}_{n-1}\mathbf{x}_{n-1}(p_1, \vartheta\mathbf{p}_{n-1}, M)) = u^c(x_1(p_1, \vartheta\mathbf{p}_{n-1}, M), \frac{1}{\vartheta}(M - p_1 x_1(p_1, \vartheta\mathbf{p}_{n-1}, M))).$$

Iz definicije izvedene funkcije korisnosti slijedi da je desna strana prethodne jednakosti zapravo

$$u(x_1(p_1, \vartheta\mathbf{p}_{n-1}, M), \mathbf{x}_{n-1}(x_1(p_1, \vartheta\mathbf{p}_{n-1}, M), \frac{1}{\vartheta}(M - p_1 x_1(p_1, \vartheta\mathbf{p}_{n-1}, M)))).$$

Među argumentima polazne funkcije korisnosti pojavljuju se optimalna količina prvog dobra i količine drugih dobara koje izabire racionalni potrošač za optimalnu količinu prvog dobra i optimalne izdatke na ostala dobra. Te se količine podudaraju s optimalnim,

$$u^c(x_1(p_1,\vartheta\mathbf{p}_{n-1},M),\mathbf{p}_{n-1}\mathbf{x}_{n-1}(p_1,\vartheta\mathbf{p}_{n-1},M)) = u(x_1(p_1,\vartheta\mathbf{p}_{n-1},M),\mathbf{x}_{n-1}(p_1,\vartheta\mathbf{p}_{n-1},M)),$$

$$u^c(x_1(p_1,\vartheta\mathbf{p}_{n-1},M),\mathbf{p}_{n-1}\mathbf{x}_{n-1}(p_1,\vartheta\mathbf{p}_{n-1},M)) = v(p_1,\vartheta\mathbf{p}_{n-1},M).$$

Istodobno bilo koje dostupne količine prvog i složenog dobra induciraju dostupne količine svih dobara,

$$\mathbf{p}_{n-1}\mathbf{x}_{n-1}(x_1,x_c) = x_c = \frac{1}{\vartheta}(M - p_1x_1),$$

$$p_1x_1 + \vartheta\mathbf{p}_{n-1}\mathbf{x}_{n-1}(x_1,x_c) = M.$$

Prema tome maksimalna korisnost u izvedenom problemu optimizacije ne može biti veća u odnosu na polazni problem,

$$v^c(p_1,\vartheta,M) = v(p_1,\vartheta\mathbf{p}_{n-1},M).$$

Zbog jedinstvenosti rješenja u analizi možemo poći od jednostavnijeg induciranog problema optimizacije znajući da ćemo zaista dobiti optimalnu potrošnju prvog dobra i optimalne izdatke na ostala dobra.

5. DUALNI PRISTUP I KOMPARATIVNO-STATIČKA ANALIZA

Znajući kako različiti skupovi varijabli mogu opisivati isti ekonomski fenomen prikladno je u analizi količine zamijeniti cijenama. Pritom polazimo od indirektne funkcije korisnosti koja dopušta proporcionalnu promjenu cijena grupe dobara,

$$v^c(p_1,\vartheta,M) = v(p_1,\vartheta\mathbf{p}_{n-1},M).$$

Inducirana funkcija ima svojstva indirektne funkcije korisnosti pri čemu je faktor proporcionalnosti cijena složenog dobra. Stoga se zaista radi o indirektnoj funkciji korisnosti induciranih preferencija i možemo primijeniti Royev identitet za usporedbu rješenja problema optimizacije različitih dimenzija:

$$x_1(p_1,\vartheta,M) = -\frac{\dfrac{\partial v^c}{\partial p_1}}{\dfrac{\partial v^c}{\partial M}} = -\frac{\dfrac{\partial v}{\partial p_1}}{\dfrac{\partial v}{\partial M}} = x_1(p_1,\vartheta\mathbf{p}_{n-1},M),$$

$$x_c(p_1,\vartheta,M) = -\frac{\dfrac{\partial v^c}{\partial \vartheta}}{\dfrac{\partial v^c}{\partial M}} = -\frac{\sum\limits_{i=2}^{n}\dfrac{\partial v}{\partial p_i}p_i}{\dfrac{\partial v}{\partial M}} = \sum_{i=2}^{n} p_i\left(-\frac{\dfrac{\partial v}{\partial p_i}}{\dfrac{\partial v}{\partial M}}\right) = \sum_{i=2}^{n} p_i x_i(p_1,\vartheta\mathbf{p}_{n-1},M).$$

Potvrđuje se da grupu dobara unutar koje se odnosi cijena ne zamjenjuje složeno dobro. Izračunajmo promjenu potrošnje složenog dobra na malu jedinicu povećanja cijene:

$$\frac{\partial x_c}{\partial \vartheta} = \sum_{i=2}^{n} p_i \sum_{j=2}^{n}\frac{\partial x_i}{\partial p_j}p_j = \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} p_i p_j \frac{\partial x_i}{\partial p_j}.$$

Utjecaj je jediničnog povećanja dohotka na potrošnju složenog dobra

$$\frac{\partial x_c}{\partial M} = \sum_{i=2}^{n} p_i \frac{\partial x_i}{\partial M}.$$

Prema tome složeno dobro je normalno ako su normalna dobra od kojih se sastoji i učinak je dohotka

$$-x_c \frac{\partial x_c}{\partial M} = -\sum_{j=2}^{n} p_j x_j \sum_{i=2}^{n} p_i \frac{\partial x_i}{\partial M} = \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} p_i p_j (-x_j \frac{\partial x_i}{\partial M}).$$

Da bismo našli učinak supstitucije pođimo od kompenzirane potražnje za složenim dobrom,

$$x_c^H(p_1, \vartheta, u) = \sum_{i=2}^{n} p_i x_i^H (p_1, \vartheta \mathbf{p}_{n-1}, u).$$

Napomenimo da se kompenzirane funkcije potražnje izvode minimizacijom izdataka za danu razinu korisnosti. Deriviranjem dobijemo:

$$\frac{\partial x_c^H}{\partial \vartheta} = \sum_{i=2}^{n} p_i \sum_{j=2}^{n} \frac{\partial x_i^H}{\partial p_j} p_j = \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} p_i p_j \frac{\partial x_i^H}{\partial p_j}.$$

Negativan učinak supstitucije određuje negativno semidefinitna matrica supstitucije. Zbrajanjem učinka supstitucije i učinka dohotka dobijemo ukupni učinak,

$$\frac{\partial x_c^H}{\partial \vartheta} - x_c \frac{\partial x_c}{\partial M} = \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} p_i p_j (\frac{\partial x_i^H}{\partial p_j} - x_j \frac{\partial x_i}{\partial M}),$$

Vidimo da za složeno dobro vrijedi osnovna jednadžba teorije vrijednosti iz koje proizlazi suvremeni zakon potražnje. Povećaju li se proporcionalno cijene grupe normalnih dobara ukupni se izdaci, obračunati po polaznim cijenama, na ta dobra smanje. Obuhvaća li grupa dobara sva dobra osim jednog govorimo o Hicks-Marshallovom novcu. Konveksan oblik krivulja indiferencije kojima oslikavamo ukus potrošača u dvodimenzionalnoj ravnini otkriva da povećanje cijene prvog dobra povećava kompenziranu potražnju za složenim dobrom. To se saznanje podudara s intuitivnom predodžbom novca kao supstituta za svako dobro.

6. ZAKLJUČAK

Mogućnost da grupu dobara zamijenimo jednim dobrom nalazi primjenu i u empirijskim istraživanjima i u teorijskom okviru. U ovom se radu oslanjamo na proporcionalne promjene cijena i na sveobuhvatan način raspravljamo o složenom dobru. Njegovu cijenu opisuje inducirani budžetski prostor na kojem maksimiziramo izvedenu funkciju korisnosti. Pritom posebnu pozornost pridajemo svojstvima iz kojih proizlaze negativno nagnute i konveksne krivulje indiferencije. Opis izvedene funkcije korisnosti polazi od racionalne raspodjele izdataka na ostala dobra. Prema tome zadaća je izvedenog problema efikasno raspodijeliti ukupni dohodak na prvo dobro i izdatke na ostala dobra. Izvedeni je problem optimizacije po svojoj strukturi jednak polaznom problemu. Njegova se prednost očituje u znatno manjem broju varijabli odlučivanja i izvedena funkcija korisnosti opisuje inducirane preferencije potrošača. Alternativni opis subjektivnih preferencija potrošača polazi od indirektne funkcije korisnosti i količine ustupaju mjesto cijenama. Zamjena dualnih varijabli potvrđuje teorem o složenom dobru i nadopunjavamo je komparativno-statičkom analizom. Činjenica da povećanje cijene prvog dobra povećava kompenziranu potražnju za složenim dobrom ohrabruje sve one koji misle da novac nadomješta svako dobro.

LITERATURA:

1. Cornes, R. C., (1992): *Duality and modern economics*, Cambridge: Cambridge University Press.
2. Deaton, A. i J. Muelbauer, (1980): *Economics and consumer behavior*, Cambridge: Cambridge University Press.
3. Gravelle, H. i R. Rees, (2004): *Microeconomics*, Third Edition, London: Prentice Hall.
4. Hicks, J. (1946): *Value and Capital,* Second Edition, Oxford: Clarendon Press.
5. Jehle, G. A. i P. J. Reny, (2001): *Advanced Microeconomic Theory*, Second Edition, Addison Wesley.
6. Maddala, G. S. i E. Miller, (1989): *Microeconomics: Theory and Applications*, McGraw-Hill.
7. Silberberg, E. (1990): *The Structure of Economics: A Mathematical Analysis*, Second Edition, McGraw-Hill.