Gottlob Frege

Što je funkcija?

(Jubilarni spis za L. Boltzmanna, 1904, str. 656-666)

Koje značenje riječ "funkcija"[1] ima u analizi, još nije riješeno svake dvojbe, premda je već dugo u učestaloj upotrebi. U objašnjenjima nalazimo dva izraza koji se uvijek ponavljaju, djelomice povezani a djelomice pojedinačno; to su računski izraz i varijabla[a]. Također primjećujemo neodlučnu upotrebu u jeziku, jer se funkcijom naziva čas ono što određuje vrstu zavisnosti ili čak vrsta sâme zavisnosti, a čas zavisna varijabla*.

U novije vrijeme prevladava u definicijama riječ "varijabla*". Ali sâma je ova riječ vrlo nedostatna za objašnjenje. Svaka promjena zbiva se u vremenu. Prema tome, analiza bi se, time što uključuje varijablu* u svoje razmatranje, morala pozabaviti vremenitim događanjem. No ona nema ništa s vremenom, jer to što može biti primijenjena na događanje u vremenu ne mijenja ništa na stvari. Postoje također primjene analize u geometriji, pri čemu se vrijeme ne uzima u obzir. Ovo je glavna poteškoća na koju uvijek nanovo nailazimo kad želimo nešto temeljito ispitati uz pomoć primjera. Jer čim pokušamo navesti jednu varijablu*, susrest ćemo se s nečim što se mijenja u vremenu i ne pripada dakle čistoj analizi. A ipak, ako su varijable* uopće predmet analize, mora biti moguće pokazati varijablu* koja sa sobom ne nosi ništa tuđe aritmetici.

U promjeni leži jedna nova poteškoća kada pitamo što se mijenja. Kao odgovor se prije svega dobiva: mijenja se veličina. Potražimo primjer! Neki štap možemo nazvati veličinom utoliko što je dugačak. Svaka promjena štapa s obzirom na njegovu dužinu, koja može biti prouzročena npr. zagrijavanjem, događa se u vremenu, a niti štapovi niti dužine nisu predmeti čiste analize. Pokušaj da se u analizi pokaže promjenjiva veličina ne uspijeva, a isto tako moraju propasti i mnogi drugi, jer veličine dužine, veličine površine, veličine kuta, a niti veličine mase nisu predmeti aritmetike. Prije svih veličina pripadaju joj sami brojevi. A upravo zato što se ova znanost dade razlikovati po mjerenjima čije veličine u pojedinim slučajevima postaju brojevi, moguća je njena najrazličitija primjena. Mi dakle

---

[1] *Ovo razmatranje treba biti ograničeno na funkcije s jednim jedinim argumentom.*

[a] *Frege ovdje koristi izraz die Veränderliche, promjenjiva, a ne die Variable, varijabla, što također prevodim kao varijabla jer je to kod nas ustaljeno, no svako takvo mjesto bit će naznačeno zvjezdicom.*

pitamo: da li su varijable* u analizi promjenjivi brojevi? Što bi drugo trebale biti ako uopće trebaju pripasti analizi? Ali otkud onda to da se gotovo nikad ne kaže “promjenjivi broj”, dok se često nasuprot tome kaže “promjenjiva veličina”? Potonji izraz zvuči prihvatljivije jer nam ovdje iskrsava dvojba: postoje li promjenjivi brojevi? Ne zadržava li svaki broj svoje nepromjenjivo svojstvo? Kaže se doduše da su 3 i ˘ posve jasno nepromjenjivi brojevi, konstante, ali postoje ipak i promjenjivi brojevi. Ako primjerice kažem “broj koji označuje dužinu ovog štapa u milimetrima”, imenujem jedan broj, a on je promjenjiv budući da štap ne zadržava istu dužinu. Dakle, s tim sam izrazom označio promjenjivi broj. Usporedimo ovaj primjer sa sljedećim! Ako kažem “kralj ove države”, označujem jednog čovjeka. Prije deset godina kralj ove države bio je starac, sada je kralj ove države mladić. Označio sam dakle ovim izrazom jednog čovjeka koji je bio starac, a sada je mladić. Ovdje mora biti neka greška. Izraz “kralj ove države” bez vremenskog navoda ne označava nikoga. Tek kad je pridodan navod o vremenu, može on nedvosmisleno označavati jednog čovjeka i tada je ovaj vremenski navod nužni sastavni dio izraza; ako navedemo drugo vrijeme, dobivamo drugi izraz. Dakle, uopće nemamo isti subjekt izraza u obje naše rečenice. Isto tako, izraz “broj koji označuje dužinu ovog štapa u milimetrima” bez vremenskog navoda ne označava nijedan broj. Ako je pridodan vremenski navod, time može biti označen neki broj, npr. 1000, ali je on tada nepromjenjiv. Pri drugom vremenskom navodu dobivamo drugi izraz koji može označiti neki drugi broj, npr. 1001. Ako kažemo: “Prije pola sata je broj koji je u milimetrima pokazivao dužinu ovog štapa bio broj na treću potenciju. Sada broj koji u milimetrima navodi dužinu ovog štapa nije broj na treću potenciju”, onda uopće nemamo isti subjekt iskaza. Broj 1000 se nije povećao na 1001, nego je njime zamijenjen. Ili je možda broj 1000 isti kao broj 1001, samo s drugim oblikom izraza? Ako se nešto promijeni, onda imamo jedno za drugim različita svojstva, različite prilike pri istom predmetu. Da nije isti, ne bismo uopće imali subjekt o kojem bismo mogli izreći promjenu. Štap se zagrijavanjem rasteže. Kada to prođe, on je opet isti. Ako se umjesto toga makne u stranu i zamijeni nekim dužim, ne bi se moglo reći da se rastegnuo. Čovjek biva starijim, ali kada ga usprkos tome ne bismo mogli prepoznati kao istog, ne bismo imali ništa od toga što možemo izraziti starenje. Primijenimo to na broj! Što ostaje isto kada se broj mijenja? Ništa! Broj se prema tome uopće ne mijenja, jer mi nemamo ništa o čemu bi izrazili promjenu. Broj na treću potenciju nikada ne postaje primbroj, a iracionalni nikad racionalni.

Nema dakle promjenjivih brojeva, a to je potvrđeno time što nemamo vlastita imena za promjenjive brojeve. Propao nam je pokušaj da izrazom “broj koji označuje dužinu ovog štapa u milimetrima” označimo promjenjivi broj. No ne označujemo li izrazima “x”, “y”, “z” promjenjive brojeve? Takav se način govora doista upotrebljava, ali ova slova nisu vlastita imena promjenjivih brojeva kao što su “2” i “3” vlastita imena za konstantne brojeve. Dok se broj 2 i broj 3 razlikuju na očigledan način, po čemu se razlikuju varijable[*] navodno označene sa “x” i “y”? To se ne može reći. Ne možemo navesti koja svojstva ima x, a koja od toga odstupajuća svojstva ima y. Ako sa slovima uopće nešto povezujemo, onda je to i kod jednog i kod drugog nejasna predodžba. Tamo gdje se prividno pojavljuju razlike radi se o primjenama, ali o njima ovdje ne govorimo. Ne možemo uhvatiti svaku varijablu[*] u njezinoj posebnosti, ne možemo im pridati vlastita imena.

Gospodin je Czuber nekoliko navedenih poteškoća pokušao izbjeći.[2] Da bi se riješio vremena, objašnjava varijablu[*] kao neodređeni broj. Ali postoje li neodređeni brojevi? Mogu li se brojevi dijeliti na određene i neodređene? Postoje li neodređeni ljudi? Ne mora li svaki predmet biti određen? Ipak, nije li broj n neodređen? Broj n ja ne poznajem. “n” nije vlastito ime ikojeg broja, niti određenog niti neodređenog, a ipak se ponekad kaže “broj n”. Kako je to moguće? Takav se izraz mora promatrati u vezi s drugima. Uzmimo primjer! “Ako je upravo n broj, onda je i cos nˇ=1 broj”. Ovdje samo cjelina ima smisla, a ne pomoćni dio niti dio koji slijedi. Pitanje da li je upravo n broj nema odgovora, isto kao ni da li je cos n□=1 broj. Pored toga, “n” mora biti vlastito ime jednog broja koji je tada nužno određen. Piše se slovo “n” kako bi se postigla cjelina. Pretpostavka je pritom da, ako ga se zamijeni vlastitim imenom broja, pomoćni dio kao i dio koji slijedi zadobivaju smisao.

Dakako, može se ovdje govoriti o neodređenosti, no “neodređen” nije pridjev uz “broj”, nego možda prilog uz “nagovijestiti”. Ne može se reći da “n” označava neodređeni broj, ali se može reći da brojeve neodređeno nagovješćuje. A tako je uvijek tamo gdje su u aritmetici upotrebljena slova, s iznimkom nekoliko slučajeva (ˇ, e, i) gdje slova nastupaju kao vlastita imena i označavaju određene, nepromjenjive brojeve. Dakle, ne postoje neodređeni brojevi i ovaj je pokušaj gospodina Czubera neuspio.

Drugi nedostatak kojem želi doskočiti je taj što se nijedna varijabla[*] ne može shvatiti kao razlučiva od ostalih. On imenuje cjelinu vrijednosti koje jedna varijabla[b] može poprimiti i kaže: “Varijabla x vrijedi kao definirana ukoliko za bilo koji realni broj koji se označuje može biti utvrđeno pripada li on domeni ili ne.” Vrijedi kao definirana - no da li je uistinu tako? Kako ne postoje neodređeni

---

[2] *Predavanje o diferencijalnom i integralnom računu, Lepzig, Teubner, 1. §2.*

[b] *Frege ovdje, i dalje, koristi izraz die Variable - varijabla.*

brojevi, nije moguće ni definirati neodređeni broj. Domena je postavljena kao određujuća za varijablu. Po tome bismo imali iste varijable pri istim domenama. U jednadžbi “$y=x^2$” bi y dakle bio ista varijabla kao x, ako je domena od x ona pozitivnih brojeva.

Ovaj se pokušaj mora smatrati propalim, a naročito izraz “varijabla poprima vrijednost” koji je posve nejasan. Varijabla bi trebala biti neodređeni broj. Kako dakle neodređeni broj postaje broj? Jer vrijednost je očigledno broj. Poprima li možda neodređeni čovjek svojstva određenog? Inače se doista kaže kako predmet poprima svojstvo, no ovdje broj mora igrati obje uloge. Kao predmet postaje varijabla ili promjenjiva veličina, a kao svojstvo nazvan je vrijednošću. Zbog toga se dakle daje prednost riječi “veličina” pred riječi “broj”, jer se time zavarava kako su promjenjiva veličina i vrijednost koju tobože poprima u temelju isti, kako nema slučaja gdje predmet poprima redom različita svojstva, kako dakle o promjeni ni u kojem slučaju ne može biti riječi.

S obzirom na varijable* proizlazi sljedeće. Može se priznati postojanje promjenjivih veličina, ali one ne pripadaju čistoj analizi. Promjenjivi brojevi ne postoje. Riječ “varijabla*” stoga u čistoj analizi nema opravdanja.

Kako uopće dospijevamo od varijable do funkcija? To se događa uvijek na isti način i stoga ćemo slijediti prikaz gospodina Czubera koji piše u §3: “Ako je svakoj vrijednosti realne varijable x, koja pripada svojoj domeni, pridružen određen broj y, onda je y definiran općenito kao varijabla i nazvan funkcijom realne varijable x. Ovo se stanje stvari izražava jednadžbom oblika $y=f(x)$.”

Ovdje najprije pada u oči kako je y nazvan određenim brojem, dok bi ipak kao varijabla trebao biti neodređen. y nije niti određeni niti neodređeni broj, nego je znak “y” na pogrešan način pridodan mnogim brojevima, a poslije se ipak govori kao da je jedan jedini. Slučaj bi se svakako jednostavnije i jasnije prikazao ovako: svakom broju x-domene pridodan je jedan broj. Cjelinu tih brojeva nazivam y-domena. Doduše, ovako imamo y-domenu, ali ne i y o kojem bi mogli reći kako je funkcija realnih varijabli x.

Razgraničenje domene se čini nevažnim za pitanje o biti funkcije. Zašto ne bismo cjelinu realnih brojeva i cjelinu kompleksnih skupa s realnim odmah prihvatili kao domenu? Bit stvari leži skrivena posve drugdje, naime u riječi “pridružen”. Dakle, po čemu vidim da li je broj 5 pridružen broju 4? Na to se pitanje ne može odgovoriti ukoliko ga nekako ne nadopunimo. A ipak se prema Czuberovom tumačenju čini kako je za svaka dva broja bez daljnjega određeno da li je prvi pridružen drugom ili ne. Gospodin Czuber srećom dodaje napomenu:

“O zakonu pridruživanja, koji je u najopćenitijem smislu nagoviješten karakteristikom f, prije spomenuta definicija ne govori ništa. On može biti ustanovljen na najrazličitiji način.”

Dakle, pridruživanje se događa prema zakonu, a zamislivi su razni takvi zakoni. Izraz “y je funkcija od x“ nema smisla dok nije nadopunjen navodom zakona prema kojem se zbiva pridruživanje. To je pogreška u definiciji. I nije li zakon, s kojim tumačenje postupa kao s nepostojećim, upravo glavna stvar? Primjećujemo kako je time promjenjivost izgubljena iz vida, dok je općenitost stupila na obzor jer je nagoviještena riječju “zakon”.

Razlike između zakonâ pridruživanja povezane su s razlikama između funkcija i ne mogu više biti shvaćene kao kvantitativne. Sjetimo se samo algebarskih funkcija, logaritamskih, eliptičkih, te ćemo se tako odmah uvjeriti kako se ovdje radi o kvalitativnim razlikama, što je razlog više da se funkcije ne tumače kao varijable*. Kad bi bile varijable*, tada bi i eliptične funkcije bile eliptične varijable*.

Takav zakon pridruživanja općenito izražavamo jednakošću na čijoj lijevoj strani stoji slovo “y”, dok se desno pojavljuje računski izraz koji se sastoji od oznaka za brojeve, oznaka za račun i slova “x”, kao npr.
“$y=x^2+3x$”.

Funkciju se dakle definiralo kao takav računski izraz. U novije vrijeme takav se pojam drži preuskim. Tu bi se nevolju izbjeglo uvođenjem novih zakona u aritmetički jezik znakova. Teži je bio jedan drugi prigovor, da računski izraz kao grupa znakova ne spada u aritmetiku. Formalnu teoriju, koja za svoje predmete izdaje znakove, mogu smatrati konačno uklonjenom mojom kritikom u drugom svesku mojih Osnova aritmetike. Znak i označeno nije uvijek oštro razlikovano, tako da se pod računskim izrazom (expressio analytica) razumjelo dijelom i njegovo značenje. Što dakle označuje “x^2+3x”? Zapravo uopće ništa, budući da ovdje slovo “x” samo nagovješćuje brojeve, a ne označuje. Zamijenimo li “x” oznakom za broj, dobivamo izraz koji označuje broj, dakle ništa novo. Kao što “x” sâm nagovješćuje “x^2+3x”. To se dopušta kako bi se izrazila općenitost, kao u rečenicama:
“$x^2+3x=x(x+3)$”,
“ako je $x>0$, onda je $x^2+3x>0$”.

No gdje je ostala funkcija? Niti računski izraz sâm niti njegovo značenje, čini se, ne mogu se smatrati funkcijom. A ipak nismo daleko od pravog puta. Svaki od izraza “sin 0”, “sin 1”, “sin 2” znači jedan poseban broj, ali imamo zajednički sastavni dio “sin” u kojem nalazimo označenu pravu bit sinusne funkcije. Ovaj “sin” odgovara onome “f” o kojem gospodin Czuber govori kako nagovješćuje zakon, a prijelaz od “f” k “sin” je sličan onome od “a” k “2”, prijelazu od jednog znaka koji nagovješćuje k drugome koji označuje. To dakako nije u potpunosti točno. Zakon nam se čini bolje izraženim u jednadžbi “y=sin x”, koje je znak “sin” samo jedan dio, svakako onaj koji obilježava osobitost zakona. A nemamo li ovdje to što tražimo - funkciju? Dakle, i “f” će zapravo nagovještavati funkciju. Sada dolazimo do onoga po čemu se funkcije razlikuju od brojeva. Ovo “sin” treba naime nadopunu putem znamenke, koja međutim ne spada u označavanje funkcije. Ovo vrijedi općenito: oznaka funkcije je nezasićena, treba nadopunu putem znamenke koju tada nazivamo argumentom. Vidimo to i kod znakova za korijen i logaritam. Znakovi se funkcije ne mogu poput znamenke nalaziti sami na jednoj strani jednadžbe, nego samo nadopunjeni znakovima koji označuju broj ili ga nagovješćuju. Što dakle znači takva veza funkcijskog znaka i znamenke, kao “sin 1”, “□1”, “l1”? Svaki put broj. Tako dobivamo znak za broj koji je sastavljen od dva nejednaka dijela, budući da je nezasićeni dopunjen drugim.

Ova potreba za ispunjenjem može se učiniti vidljivom praznim zagradama, npr. “sin( )” ili “( )^2+3·( )”. Premda je zapravo najstručnije i najprikladnije da se znak za argument promatra kao dio funkcijskog znaka, takvo označavanje ne nailazi na prijem[3]. U tu svrhu se jedno slovo može i promijeniti. Izaberimo za to takav □, tako da su “sin □” i “□^{2}+3□” znakovi funkcije. Moramo se pritom pridržavati toga da “□” ima jedinu zadaću da mjesta gdje treba nastupiti znak nadopunjavanja učini prepoznatljivima. Bit će dobro ako se ovo slovo ne upotrebljava ni u koju drugu svrhu, dakle ne umjesto “x” koji u našim primjerima služi za izraze općenitosti.

Nedostatak je u uobičajenom označavanju diferencijalnih kvocijenata što slovo “x”, kao što čini prepoznatljivim mjesta argumenta, isto tako služi i za izraze općenitosti, kao u jednadžbi

x

d cos—

2 1 x “

——————————= - ———sin — .

“ dx 2 2

Otud proizlazi jedna teškoća. Prema općim temeljnim načelima upotrebe slova u aritmetici može se pojaviti slučaj da se za “x” umetne znamenka. No izraz

---

[3] *Ovo je uostalom mišljeno za izuzetan slučaj, gdje se funkciju želi označiti potpuno izolirano. U “sin 2” već sâm “sin” označuje funkciju.*

2 “

d cos—

2

“ d 2

je nerazumljiv, jer funkcija nije prepoznatljiva. Mi ne znamo da li je to

( ) 2 ( )

cos—— ili cos—— ili cos——.

2 ( ) ( )

Time smo prisiljeni na spori način pisanja

x .”

d cos—

“ dx . x=2.

Najveći nedostatak je taj što je razumijevanje biti funkcije time otežano.

Posebnost funkcijskih znakova, koju smo nazvali nezasićenošću, odgovara funkcijama samim. I ove možemo nazvati nezasićenima i označiti ih time u temelju različitima od brojeva. To dakako nije nikakva definicija, no ona ovdje nije ni moguća[4]. Moram se od toga ograditi, slikovitim izrazom uputiti na to što mislim, a pritom očekujem susretljivo razumijevanje čitaoca.

Ako je funkcija brojem nadopunjena do nekog drugog broja, onda potonjeg nazivamo vrijednošću funkcije za svaki onaj prvi broj koji je argument. Uobičajilo se jednadžbu “y=f(x)” čitati: “y je funkcija od x”. U tome su dvije pogreške: prvo, što se znak jednakosti prevodi kopulom; drugo, što se funkcija zamjenjuje sa svojom vrijednošću za argument. Na ovim pogreškama počiva mišljenje da je funkcija broj, iako promjenjivi ili neodređeni. Vidjeli smo naprotiv kako takvi brojevi uopće ne postoje i kako se funkcije u temelju razlikuju od brojeva.

---

[4] *Definicija koju daje H. Hankel u svojim istraživanjima o beskonačno često oscilirajučim i nestalnim funkcijama (Sveučilišni program, Tübingen 1870, §1) zbog svoje je pogrešne cirkularnosti neupotrebljiva, jer sadrži izraz “f(x)” koji pretpostavlja za svoje objašnjenje to što se definira.*

Stremljenje kratkoći uvelo je mnoge netočne izraze u matematički jezik, a ovi su povratno djelujući zamutili misli i izveli pogrešne definicije. Matematika bi zapravo trebala biti uzor logičke jasnoće. U stvarnosti se u spisima možda nijedne znanosti ne nalazi više sumnjivih izraza, i poradi toga više sumnjivih misli, nego u matematičkima. Nikada ne treba žrtvovati logičku točnost kratkoći izraza. Stoga je od velike važnosti da se stvori jedan matematički jezik koji spaja najstrožu točnost i moguću kratkoću. Za to bi najprikladnije bilo pojmovno pismo, cjelina pravila prema kojima bi se putem napisanih ili otisnutih znakova neposredno moglo izraziti misli bez posredovanja glasova.