Alma Mater Studiorum
Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Astronomia
Dipartimento di Fisica e Astronomia

DINAMICA DEI FLUIDI

Tesi di laurea

Candidato:
Noemi La Bella

Relatore:
**Chiar.mo Prof.
Daniele Dallacasa**

Sessione III
Anno Accademico 2016-2017

Sommario

Questo elaborato vuole descrivere le caratteristiche fondamentali della dinamica dei fluidi. Il primo capitolo introduttivo fornirà le nozioni alla base della seguente trattazione: il concetto di *elemento di fluido* e di *derivata materiale* , cosa si intende per una *descrizione lagrangiana* ed una *descrizione euleriana* del moto di un fluido, l'enunciato del *Teorema del Trasporto di Reynolds*. In possesso di queste conoscenze, nel secondo capitolo verranno presentate le equazioni fondamentali della fluidodinamica: l'*equazione di continuità*, l'*equazione del moto* e l'*equazione dell'energia* con un sottoparagrafo dedicato a cosa accade per i *fluidi viscosi*. Data la vastità dell'argomento e la moltitudine di applicazioni astrofisiche, nell'ultimo capitolo si è scelto di illustrare come avviene la propagazione di *onde sonore* in un *mezzo compressibile* e quando, con l'aggiunta di un potenziale di autogravità, possa insorgere un'*instabilità gravitazionale*. Infine, verrà spiegato brevemente come avviene il *collasso gravitazionale* e come questo possa portare alla nascita di una *protostella*.

Indice

Capitolo 1

Introduzione

La dinamica dei fluidi è quella branca della fisica che si occupa di determinare le proprietà dei fluidi in moto. I fluidi (gas o liquidi) nonostante siano composti da un numero grandissimo di particelle a livello microscopico sono trattati come un mezzo continuo e hanno specifiche proprietà macroscopiche in ogni punto. Queste grandezze sono mediate su regioni infinitesime di fluido chiamate **elementi di fluido** e su questo concetto sono basate le importanti equazioni della fluidodinamica. Un *elemento di fluido* è una parte di fluido di dimensione l grande abbastanza da contenere un numero elevato di particelle che, in un *fluido collisionale* [1], interagiscono continuamente tra loro rendendo il loro moto all'interno dell'elemento completamente random. Allo stesso tempo le particelle collidono tra loro in una scala spaziale molto più piccola della scala caratteristica del sistema macroscopico. Quindi per definire un elemento di fluido è necessario siano soddisfatte le seguenti diseguaglianze:

$$\lambda \ll l \ll L$$

dove λ è il libero cammino medio e L è la dimensione del sistema al di sopra del quale vi è una variazione significativa di ogni variabile q, ovvero

$$L \sim \frac{q}{|\boldsymbol{\nabla} q|}$$

Se l'elemento di fluido è in moto è necessario conoscere la sua velocità $\mathbf{u}$. Le quantità $(P, \rho, T, \mathbf{u})$ sono funzioni continue nello spazio e nel tempo che possiamo scrivere come una generica quantità fisica $q = q(\mathbf{r}, t)$. La variazione nel tempo di questa quantità in un elemento di fluido quando il fluido si muove può essere scritta come

$$\frac{\mathrm{D}q(\mathbf{r}, t)}{\mathrm{D}t} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{q(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}, t + \delta t) - q(\mathbf{r}, t)}{\delta t}$$

dove D/Dt è la *derivata Lagrangiana o materiale* che si può scrivere in maniera più compatta come segue:

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nabla} \tag{1.1}$$

[1] In questa trattazione i fluidi sono collisionali. Le interazioni all'interno del fluido portano alla condizione di massima entropia, questo vuol dire che ogni elemento di fluido è descritto dalle sue variabili termodinamiche (pressione, densità...) e il fluido ha un'opportuna equazione di stato.

1.1 La Descrizione Lagrangiana ed Euleriana

Per poter derivare le equazioni alla base della fluidodinamica è necessario farlo dal punto di vista della meccanica del continuo. Gli aspetti cinematici di un corpo continuo sono legati a due formalismi diversi a secondo se le derivate sono fatte rispetto ad una fissata posizione o ad un fissato elemento di fluido.

- *La descrizione Euleriana* descrive il moto di un fluido da un sistema di coordinate esterno al fluido, in particolare la quantità fisica $q(\mathbf{r}, t)$ sarà funzione del tempo t e di una fissata posizione spaziale e la sua variazione temporale viene calcolata mediante la derivata euleriana $\frac{\partial}{\partial t}$ mantenendo fissa la posizione nello spazio dell'osservatore.

- *La descrizione Lagrangiana* descrive il moto di un fluido in un sistema di coordinate solidale con l'elemento di fluido. Le proprietà del fluido dipendono solo dalla variabile temporale e in questo caso entra in gioco la derivata materiale o Lagrangiana 1.1 la quale aggiunge alla variazione temporale ad una fissata posizione del fluido, la variazione dovuta al moto del fluido stesso descritta dall'operatore di avvezione $\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nabla}$.

È possibile studiare la traiettoria di un corpo continuo considerando le linee tracciate da *particelle di fluido* [2] in moto. Fra tutte le linee che possono rappresentare un campo vettoriale di velocità $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ consideriamo le **streamlines** e le **pathlines**. Le streamlines (linee di flusso) sono tangenti al vettore velocità in ogni loro punto; ottenute congelando il tempo, mostrano instantaneamente il comportamento del flusso e appartengono alla descrizione euleriana. Le pathlines(linee di percorso) indicano il percorso realmente seguito da una particella di fluido in un certo intervallo di tempo e appartengono ad una descrizione lagrangiana. Streamlines e pathlines coincidono per *fluidi stazionari*, ovvero quando il campo di velocità non varia nel tempo.

1.2 Il Teorema del Trasporto di Reynolds

Si consideri un campo (scalare o vettoriale) $q(\mathbf{r}, t)$, un campo vettoriale $\mathbf{u}$ e una porzione di fluido con un volume arbitrario Ω_0 che varia di dimensione nel tempo. Dopo un tempo t ogni particella di Ω_0 avrà tracciato la sua pathlines e si troverà in punto diverso da quello iniziale, dunque la parte di fluido considerata da Ω_0 avrà un volume finale Ω_t. Il *Teorema del Trasporto* dice cosa succede alla proprietà $q(\mathbf{r}, t)$ trasportata quando si muove un volume in un fluido. Si può formulare nel seguente modo:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\Omega_t} q \, \mathrm{d}^3\mathbf{r} = \int_{\Omega_t} \Big(\frac{\mathrm{D}q}{\mathrm{D}t} + q \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u} \Big) \, \mathrm{d}^3\mathbf{r} \tag{1.2}$$

Usando la (1.1) e l'identità $\boldsymbol{\nabla} \cdot (q\mathbf{u}) = \boldsymbol{\nabla} q \cdot \mathbf{u} + q \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u}$, è possibile scriverlo nella forma:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\Omega_t} q \, \mathrm{d}^3\mathbf{r} = \int_{\Omega_t} \Big[\frac{\partial q}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (q \, \mathbf{u}) \Big] \, \mathrm{d}^3\mathbf{r}$$

Questo importante teorema permette di spostare l'operatore di derivazione dentro il segno di integrale, utile per ricavare le leggi di conservazione. [3]

[2] Il termine particelle di fluido è usato per indicare gli elementi di fluido.

[3] Se il flusso deriva da un campo vettoriale solenoidale, $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u} = 0$, Ω_t può cambiare forma e non il volume, in particolare si parla di *fluidi incomprimibili.*

Capitolo 2

Le equazioni della fluidodinamica

2.1 L'equazione di Continuità

Deriviamo ora le equazioni fondamentali della dinamica dei fluidi. Iniziamo dall*'equazione di conservazione della massa*, associando alla quantità $q(\mathbf{r}, t)$ il significato di densità del fluido $\rho(\mathbf{r}, t)$ e integrandola nell'intero volume spaziale Ω_t. Si ottiene la *massa del fluido* $M = \int_{\Omega_t} \rho d^3\mathbf{r}$,la cui variazione rispetto al tempo è nulla. [1]. L'equazione di bilancio della massa può essere pertanto formulata imponendo il fatto che, in assenza di pozzi o sorgenti di materia, la massa resti costante quando si ha una variazione di volume, ovvero $dM/dt = 0$ e quindi dal teorema 1.2 si ha che:

$$\int_{\Omega_t} \Big[\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} + \rho\ \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u}\Big]\ \mathrm{d}^3\mathbf{r} = 0$$

essendo l'equazione valida per qualsiasi volume, anche l'integrando sarà nullo e si ottiene l'**equazione di continuità della massa**:

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} + \rho\ \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{2.1}$$

Il tipo di approccio utilizzato fino ad ora è quello lagrangiano in cui si studia la variazione della densità del fluido seguendo un elemento di fluido nella sua pathlines. Prima di procedere ad un'equazione alternativa della 2.1, dove viene considerato un volume fisso nel tempo e quindi un tipo di descrizione euleriana, è possibile notare come la derivata materiale della densità nell'equazione 2.1 suggerisca qualcosa sui *fluidi incomprimibili*. Infatti in questo caso si avrebbe $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u} = 0$, quindi una $\mathrm{D}\rho/\mathrm{d}t = 0$. Bisogna stare attenti che questo non significa che la densità è costante dappertutto, ma che rimane la stessa in ogni pathlines. Dalla definizione 1.1 otteniamo la formulazione Euleriana:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho\mathbf{u}) = 0 \tag{2.2}$$

Si considera quest'ultima riscrittura dell'equazione di Continuità e si integra in un volume euleriano arbitrario Ω_0 che rimane fisso nello spazio mentre il fluido lo attraversa:

$$\int_{\Omega_0} \frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}^3\mathbf{r} + \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho\mathbf{u})\mathrm{d}^3\mathbf{r} = 0$$

[1]Come affermava A. Lavoisier *"nulla si crea, nulla si distrugge, tutto si trasforma."*

Si osservano singolarmente i due termini della somma. Nel primo, essendo Ω_0 fisso,si porta la derivata rispetto al tempo fuori l'integrale e si ottiene quanta massa in quel momento vi è nel volume Ω_0, cioè $dM(\Omega_0)/dt$. Al secondo integrale invece si applica il Teorema della Divergenza, ottenendo:

$$\frac{dM(\Omega_0)}{dt} + \int_{\partial\Omega_0} \rho\mathbf{u} \cdot \ \hat{\mathbf{n}} \ \mathrm{d}^2\mathbf{r} = 0$$

La variazione della massa del fluido in una fissata posizione è uguale al flusso del fluido attraverso la superficie che delimita questo volume. Il termine $\rho\mathbf{u}$ infatti rappresenta la *densità di flusso*, ovvero dice per ogni $\mathrm{d}^2\mathbf{r}$ sul bordo di Ω_0 quanta materia entra o esce. La sua direzione è quella del moto del fluido e il suo modulo è uguale alla massa del fluido che attraversa nell'unità di tempo la superficie unitaria normale alla direzione della velocità.

2.2 L'equazione dell'impulso

La seconda legge della fluidodinamica è chiamata **Equazione del Moto di Eulero**. Il punto di partenza è la seconda Equazione di Newton della Dinamica per i fluidi. Sapendo che questa dice che *l'impulso complessivo in un qualsiasi sistema cambia solo in funzione alla somma totale delle forze esterne che agiscono sullo stesso*, possiamo scrivere :

$$\int_{\Omega_t} (\rho u_i) \ \mathrm{d}^3\mathbf{r} = F_i$$

dove si calcola la componente lungo la direzione i dell'impulso, mentre le F_i [2] in gioco sono : le *Forze di Volume*, che saranno indicate come ρf_i , ad esempio la forza di gravità o le forze elettromagnetiche; le *Forze di Superficie*, quali la pressione che agisce perpendicolarmente alla superficie. Queste seconde forze agiscono in ogni punto come un tensore. Questo viene chiamato *tensore degli sforzi* σ_{ij} ed è simmetrico $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ (Teorema di Cauchy). Quindi dalle considerazioni fatte:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \int_{\Omega_t} \rho u_i \ \mathrm{d}^3\mathbf{r} = \int_{\Omega_t} \rho \ f_i \mathrm{d}^3\mathbf{r} + \int_{\partial\Omega_t} \sigma_{ij} n_j \ \mathrm{d}^2\mathbf{r}$$

Portando all'interno dell'integrale la derivata, sfruttando il teorema della Divergenza che permette di passare all'integrale di volume, considerando il seguente lemma matematico $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \int_{\Omega_t} \rho f \mathrm{d}^3\mathbf{r} = \int_{\Omega_t} \rho \frac{\mathrm{D}f}{\mathrm{Dt}} \mathrm{d}^3\mathbf{r}$ e portando tutto a primo membro si ottiene:

$$\int_{\Omega_t} \Big(\rho \frac{\mathrm{D}u_i}{\mathrm{Dt}} - \rho f_i - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial r_j}\Big) \ \mathrm{d}^3\mathbf{r} = 0$$

Come prima, essendo valido per tutti i volumi e ponendo l'integrando uguale a zero

$$\rho \frac{\mathrm{D}u_i}{\mathrm{Dt}} - \rho f_i - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial r_j} = 0 \tag{2.3}$$

si ottiene una formulazione più generale dell'**equazione di Eulero** nella sua forma Lagrangiana.

[2]È stata utilizzata la notazione di Einstein degli indici ripetuti.

Il *tensore degli sforzi* σ_{ij} è definito come segue:

$$\sigma_{ij} = -\ P\delta_{ij} +\ \tau_{ij} \tag{2.4}$$

dove P è la pressione termodinamica, δ_{ij} è la delta di Kronecker e τ_{ij} è chiamato *tensore degli sforzi viscoso.* Per il momento escludiamo quest'ultimo termine, ovvero ci poniamo nel caso di fluidi ideali (detti anche inviscidi). Considerando un elemento di fluido e la normale alla superficie, nel prodotto tra la σ_{ij} e n_j, essendo δ_{ij} un tensore diagonale, si ottiene una pressione che agisce perpendicolarmente alla superficie. Assumendo come $\mathbf{f} = -\boldsymbol{\nabla}\phi$, con ϕ il potenziale di un campo di forze esterno(in genere la gravità), possiamo scrivere l'**equazione di Eulero** nella versione lagrangiana come:

$$\rho\frac{\mathrm{D}\mathbf{u}}{\mathrm{D}t} = -\rho\boldsymbol{\nabla}\phi - \boldsymbol{\nabla}P \tag{2.5}$$

In un fluido reale entrano in gioco quelle interazioni interne microscopiche dovute ai moti casuali delle particelle, infatti quando queste si muovono con velocità diverse, avvengono degli attriti interni che causano un moto relativo tra le varie parti del fluido. In questo caso è necessario tenere conto della **viscosità** del fluido. Il tensore τ_{ij} è $\neq 0$ per i fluidi newtoniani[3] ed è definito nella seguente maniera:

$$\tau_{ij} = \mu\Big(\frac{\partial u_i}{\partial r_j} + \frac{\partial u_j}{\partial r_i}\Big)+\lambda\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u}\ \delta_{ij} \tag{2.6}$$

Attenzioniamo singolarmente i due termini della definizione 2.6 :

- μ è uno scalare chiamato *primo coefficiente di viscosità* che moltiplica un termine corrispondente alla parte simmetrica del tensore che rappresenta la deformazione a cui è soggetto un elemento di fluido che segue la sua pathlines in un fluido in moto. Si considera solo la parte che causa l'allungamento o la compressione dell'elemento e non la parte di rotazione rigida, infatti affinchè agisca l'attrito nel fluido è necessario che due parti del fluido in contatto si muovino con velocità differenti. [4]

- λ è invece il *secondo coefficiente di viscosità* il quale viene moltiplicato per la divergenza del campo vettoriale della velocità e il tensore unitario. È evidente come questo coefficiente agisca soltanto nel caso di fluidi compressibili.

Si può infine notare come la definizione 2.6 rispetta la condizione di simmetria richiesta dal Teorema di Cauchy. Ponendo 2.6 in 2.4 ed inserendo il tensore degli sforzi trovato all'interno dell'Equazione del Moto di Eulero 2.3 si ottiene una nuova espressione dell'Equazione del Moto che descrive il moto dei fluidi in presenza di forze viscose e che prende il nome di **Equazione di Navier-Stockes**.

[3] I fluidi Newtoniani sono fluidi con una viscosità che non dipende dalla velocità con cui viene misurata. Nel caso di fluidi stazionari, anche se il fluido è viscoso, si ha un $\tau_{ij} = 0$.

[4] Solitamente il tensore simmetrico viene denominato *strain tensor*, mentre quello antisimmetrico *rotation tensor*.

2.2.1 L'equazione di Navier-Stockes

L'equazione di Navier-Stockes può essere formulata nel seguente modo:

$$\rho\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{u} = -\rho\boldsymbol{\nabla}\phi - \boldsymbol{\nabla}P + \mu\nabla^2\mathbf{u} + (\lambda+\mu)\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u}) \tag{2.7}$$

dove è stata utilizzata la definizione 1.1 e i coefficienti di viscosità sono stati considerati costanti [5]. Considerando il caso di fluidi incompressibili e dividendo la 2.7 per ρ si ottiene:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{u} = -\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla}P + \nu\nabla^2\mathbf{u} \tag{2.8}$$

dove $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ è il *coefficiente di viscosità cinematica.* Nel caso di fluido stazionario, quindi ponendo $\mathbf{u} = 0$, si ottiene l'equazione dell'Equilibrio Idrostatico. Se trascuriamo la forza di gravità :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla}P + \nu\nabla^2\mathbf{u} \tag{2.9}$$

Quest'equazione concerne importanti osservazioni sul comportamento del fluido, in particolare porta al concetto di *turbolenza.* Infatti se si *adimensionalizza* l'equazione (2.9), ovvero si definiscono due grandezze caratteristiche L e V, una legata alla lunghezza del fluido, l'altra alla velocità, con semplici sostituzioni [6] si ottengono le variabili adimensionalizzate che inserite nell'equazione (2.9) portano a questa nuova forma dell'equazione di Navier-Stockes [7]:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{u} = -\boldsymbol{\nabla}P + \frac{1}{R_E}\nabla^2\mathbf{u} \tag{2.10}$$

dove $R_E = \frac{LV}{\nu}$ è il **numero di Reynolds**. Questo numero è definito come il rapporto tra le forze d'inerzia e le forze viscose nell'Equazione di Navier Stockes. Quando dominano le prime allora il fluido è in un *regime turbolento*(alte velocità, bassa viscosità), viceversa si parla di *regime laminare* (basse velocità, alta viscosità). Il numero di Reynolds rappresenta la transizione tra i due regimi, infatti se è più alto di un certo valore critico($R_E > R_{Ecrit} \sim 10^{3-4}$) allora il fluido è nella condizione in cui può creare dei vortici.

2.3 L'equazione dell'Energia

La terza equazione di conservazione della fluidodinamica è l'equazione dell'Energia, ovvero si vuole ricavare un'espressione del *Primo Principio della Termodinamica* nel caso di fluidi. Dal *Teorema delle Forze Vive* [8], si ha che la *variazione dell'energia totale* nell'unità di tempo di un elemento di fluido integrato su un volume arbitario Ω_t sarà data da una parte legata al suo spostamento, quindi all'energia cinetica, e da una parte riferita alla sua energia interna U. L'energia totale puó variare per effetto del *lavoro L* eseguito dalle forze esterne agenti su questo volume arbitrario e a causa degli scambi

[5] μ e λ nella seguente trattazione si considerano costanti dal momento che in generale variano solo leggermente dalle variabili termodinamiche da cui dipendono.

[6] $\forall$i=1,2,3; $r_i^{'} = r_i/L$; $u_i^{'} = u_i/V$;$t^{'} = t/(L/V)$ e $P^{'} = P/(V^2\rho)$

[7] Vengono tolti gli apici per semplificare la notazione.

[8] *Il lavoro compiuto da tutte le forze meccaniche che agiscono in un sistema è pari alla variazione di energia cinetica.* Le forze conservative hanno la proprietà di conservare l'energia meccanica totale.

di calore, dove il *calore* verrà indicato con Q. Riassumendo il tutto in un'equazione otteniamo la seguente espressione del primo principio della Termodinamica:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega_t}\Big(\rho\frac{\|\mathbf{u}\|^2}{2}+U\Big)\mathrm{d}^3\mathbf{r} = L + Q \tag{2.11}$$

L'energia interna U e l'energia cinetica sono per unità di volume. Il lavoro delle forze esterne é dato dalla somma dal lavoro delle forze di superficie agenti sul bordo $\partial\Omega_t$ e dalle forze di volume, cioè

$$L = \int_{\Omega_t}\rho f_i u_i \mathrm{d}^3\mathbf{r} + \int_{\partial\Omega_t}\sigma_{ij}u_i n_j \mathrm{d}^2\mathbf{r}$$

mentre il calore può essere scritto come segue:

$$Q = \int_{\Omega_t} q_v \mathrm{d}^3\mathbf{r} - \int_{\partial\Omega_t} q_i n_i \mathrm{d}^2\mathbf{r}$$

dove il primo integrale di volume si riferisce alla densità di calore che viene aggiunta o tolta, il secondo invece indica il *flusso di calore* che attraversa la superficie $\partial\Omega_t$ nell'unitá di tempo. Il segno meno deriva dal fatto che la normale è positiva se orientata esternamente alla superficie Ω_t. Per ricavare un'equazione di conservazione per l'energia in forma differenziale si procede allo stesso modo fatto per l'impulso, ovvero si applica Teorema della divergenza di Gauss in modo da avere tutti integrali di volume e considerando il Teorema del Trasporto 1.2 si ottiene:

$$\int_{\Omega_t}\Big[\frac{\rho}{2}\frac{\mathrm{D}\|\mathbf{u}\|^2}{\mathrm{D}t} + \frac{\mathrm{D}U}{Dt} + U(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u})\Big]\mathrm{d}^3\mathbf{r} = \int_{\Omega_t}\rho f_i u_i \mathrm{d}^3\mathbf{r} + \int_{\Omega_t}\frac{\partial}{\partial r_j}(\sigma_{ij}u_i)\mathrm{d}^3\mathbf{r} - \int_{\Omega_t}\frac{\partial}{\partial r_i}q_i \mathrm{d}^3\mathbf{r}$$

essendo gli integrali validi $\forall\ \Omega_t$, possiamo portare tutto a primo membro e porre l'integrando nullo. Sviluppando e utilizzando l'equazione del moto (2.3) si ha:

$$\frac{\mathrm{D}U}{\mathrm{D}t} + U(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u}) = \sigma_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial r_j} - \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{q} \tag{2.12}$$

La variazione di energia interna è legata solo alle forze di superficie. Con $\mathbf{q}$ è indicato il *vettore flusso di calore*. Una proposta costitutiva per $\mathbf{q}$ può essere legata alla conduzione termica tramite le *legge di Fourier*:

$$\mathbf{q} = -k\boldsymbol{\nabla}T$$

con $k \geq 0$ è la conduttività termica [9] e T è la temperatura. Il segno meno viene giustificato dalla convenzione di assumere il flusso di calore in direzione opposta al gradiente di temperatura.

[9] k, anche detta mobilità termica, non è detto che sia una costante ma potrebbe dipendere dalla temperatura.

Capitolo 3

La dinamica dei Fluidi in Astrofisica

La maggior parte dei fenomeni astrofisici vengono descritti mediante la dinamica dei fluidi. Quando si parla di *fluidi dell'Universo* ci si riferisce ad un'ampia categoria di oggetti astrofisici: stelle, gas nel ISM o nell IGM, venti stellari, dischi di accrescimento e getti, stelle di neutroni e nane bianche e molti altri. Le due applicazioni trattate in questo capitolo sono la propagazione di **onde sonore** in un mezzo compressibile e come queste possono dare origine a effetti di instabilità. Infatti la propagazione di onde sonore e lo sviluppo di instabilità nei fluidi sono sempre intimamente legati. Quando vi è un una compressione in un mezzo uniforme, l'eccesso di pressione prodotto tende a riportare il sistema nella condizione di equilibrio generando delle oscillazioni. Mentre quando si parla di onde sonore nell'atmosfera è possibile trascurare gli effetti gravitazionali, questo non avviene nel caso di fluidi astrofisici, in cui il campo di gravità può giocare un ruolo rilevante nella spinta della pressione. Una delle più importanti instabilità in astrofisica è l'**instabilità di Jeans**, fondamentale nella formazione di stelle, galassie e ammassi nell'Universo.

3.1 Le Onde Sonore

Si consideri un mezzo compressibile [1], omogeneo, all'equilibrio ($\partial/\partial t = 0$), con pressione P_0 e densità ρ_0 costanti e che sia a riposo ($\mathbf{u} = 0$). A questa soluzione di equilibrio si applica la *tecnica perturbativa*, ovvero le quantità di un generico elemento di fluido si modificano con perturbazioni infinitesime. [2] Queste piccole oscillazioni si chiamano **Onde Sonore**.

$$P = P_0 + \delta P$$

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho$$

$$\mathbf{u} = \delta\mathbf{u}$$

Riprendendo l'equazione di continuità 2.2 e l'equazione 2.5 in forma euleriana scritta in assenza di forze gravitazionali, è possibile sostituire le nuove quantità perturbate e

[1] In generale i fluidi comprimibili sono i gas.

[2] Le perturbazioni sono lagrangiane perchè si riferiscono all'elemento di fluido, ma anche nel caso euleriano avranno la stessa forma dal momento che il mezzo è omogeneo.

ottenere le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\delta\rho + \rho_0 \boldsymbol{\nabla}\cdot\delta\mathbf{u} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}\delta\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0}\boldsymbol{\nabla}\delta P \end{cases} \tag{3.1}$$

Queste equazioni sono linearizzate,infatti sono trascurati i termini quadratici o di ordine superiore. In generale, in gas ideali, l'equazione di stato suggerisce una pressione che dipende da due variabili termodinamiche, in questo caso $P = P(\rho, S)$, dove S è l'entropia ed è assunta costante. [3] Date delle perturbazioni infinitesime e adiabatiche, è possibile scrivere la perturbazione della pressione come:

$$\delta P = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_S \delta\rho$$

In particolare si definisce la **velocità del suono** del fluido :

$$c_s^2 \equiv \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_S \tag{3.2}$$

Facendo la derivata rispetto al tempo della prima equazione della 3.1 e la divergenza della seconda equazione, trascurando i termini del secondo ordine e sottraendo la seconda equazione dalla prima si ottiene:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\delta\rho - c_s^2\boldsymbol{\nabla}^2\delta\rho = 0 \tag{3.3}$$

che rappresenta l'*equazione delle onde* per le onde sonore che si muovono a velocità c_s. Utilizzando le serie di Fourier, la prima semplice soluzione può essere scritta :

$$\delta\rho = \delta\rho_1 e^{i(kx-\omega t)} \tag{3.4}$$

dove $\delta\rho_1$ è l'ampiezza del modo di Fourier e se la sostituiamo nella (3.3) si ottiene la seguente *relazione di dispersione* delle onde sonore:

$$c_s = \frac{\omega}{k} \tag{3.5}$$

dove ω è la frequenza angolare ($\omega = 2\pi\nu$) e k è il numero d'onda ($\frac{2\pi}{\lambda}$). Le stesse perturbazioni si manifestano sia nella densità che nella velocità, quindi allo stesso modo è possibile trovare un'equazione per la velocità, dove si assume che l'onda si propaga lungo una direzione:

$$\delta u = \delta u_1 e^{i(kx-\omega t)} \tag{3.6}$$

È importante sottolineare che le onde sonore sono **onde longitudinali**: l'oscillazione avviene lungo la direzione di propagazione dell'onda. In particolare il mezzo viene compresso dall'onda non appena l'onda passa ed è questa compressione a propagarsi con una velocità del suono c_s. Per gas barotropici, la velocità del suono è completamente determinata dall'equazione di stato. Si possono ricavare le due forme della velocità del

[3] Sistemi di questo tipo vengono detti *baroclini*. In diverse circostanze $P = P(\rho)$ e il fluido viene detto *barotropico*. Il caso adiabatico e isotermo che vengono trattati in seguito sono sottocasi di questo.

suono nei due regimi di un gas barotropico: il caso *adiabatico* e il caso *isotermo*.
Per il primo, essendo $p \propto \rho^{\Gamma}$, si ha:

$$c_s = \sqrt{\frac{\Gamma P}{\rho}} = \sqrt{\frac{\Gamma K_B T}{m}} \tag{3.7}$$

Γ è il coefficiente di dilatazione adiabatica ed è dato da $\Gamma = \frac{C_P}{C_V}$ e K_B è la costante di Boltzmann.
Mentre per il secondo:

$$c_s = \sqrt{\frac{P}{\rho}} = \sqrt{\frac{K_B T}{m}} \tag{3.8}$$

dove $p \propto \rho$. È stata utilizzata l'equazione di stato dei gas perfetti:

$$\frac{P}{\rho} = \frac{K_B T}{m}$$

dove m è la massa media delle particelle del gas.
È importante definire il *crossing time*, utile nel paragrafo seguente,espresso nella seguente maniera:

$$t_{cross} \equiv \frac{\mathrm{L}}{c_s} \tag{3.9}$$

dove L è la grandezza della regione considerata. Viene indicato come il tempo impiegato da un'onda sonora per attraversare da una parte all'altra il fluido, ovvero se vi è un disturbo in qualche punto del fluido, rappresenta il tempo necessario per ristabilire l'equilibrio di pressione(o densità) o di reagire a questa variazione.

3.2 L'instabilità di Jeans

3.2.1 Lo swindle di Jeans

Come per le onde sonore, si considera un mezzo omogeneo, a riposo e si perturba lo stato d'equilibrio con oscillazioni infinitesime. Essendo in questo caso autogravitante, viene chiamato ϕ_0 il potenziale gravitazionale corrispondente a questa configurazione di equilibrio; le nuove quantità sono le seguenti:

$$P = P_0 + \delta P$$
$$\rho = \rho_0 + \delta\rho$$
$$\mathbf{u} = \delta\mathbf{u}$$
$$\phi = \phi_0 + \delta\phi$$

Questo potenziale di autogravità è legato alla densità mediante l'*equazione di Poisson*:

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho \tag{3.10}$$

dove G è la costante di gravitazione universale. L'equazione di Poisson nello stato di equilibrio porta ad una contraddizione molto discussa che prende il nome di *Jeans Swindle*. Dall'equazione del moto per lo stato imperturbato si ha che $\boldsymbol{\nabla}\phi_0 = 0$, questo sostituito nell'equazione di Poisson si legge come una densità dello stato impurtarbato nulla, il che porta ad una condizione fisicamente assurda. Per superare questo problema, vi sono molti approcci che modificano l'equazione di Poisson stazionaria. Si assume che l'equazione gravitazionale si presenti come un legame funzionale tra le due quantità densità ed il potenziale solo al momento delle perturbazioni, ovvero non applicabile allo stato iniziale perchè ci si aspetta che in un fluido infinito ed omogeneo la forza gravitazionale sia nulla in ogni punto del sistema. Questa tecnica prende il nome proprio di Inganno di Jeans. [4] In realtà si dovrebbero considerare anche le forze allo stato iniziale che controbilanciano il campo gravitazionale, come la rotazione, quindi una forza centrifuga o le forze magnetiche.

3.2.2 Il collasso gravitazionale: la nascita delle stelle

Ignorando i dettagli legati allo Swindle di Jeans, si procede con la tecnica perturbativa già vista nelle onde sonore, dal momento che nonostante la contraddizione apparentemente critica, le equazioni perturbate portano alle soluzioni corrette. Quindi sostituendo le perturbazioni delle quantità trovate prima nell'equazione di continuità 2.2, nell'equazione del moto 2.5 in forma euleriana e all'equazione di Poisson 3.10, si ottiene:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\delta\rho + \rho_0 \boldsymbol{\nabla}\cdot\delta\mathbf{u} = 0 \\ \frac{\partial \delta\mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\boldsymbol{\nabla}\delta P - \boldsymbol{\nabla}\delta\phi \\ \nabla^2\delta\phi = 4\pi G\delta\rho \end{cases} \tag{3.11}$$

dove sono stati trascurati tutti i termini quadratici. Scrivendo la pressione come $\delta P = c_s^2\delta\rho$ e facendo la derivata temporale della prima equazione della 3.11 e la divergenza della seconda, poi sostituendo il laplaciano di $\delta\phi$ nella seconda equazione con l'equazione di Poisson, si hanno le seguenti equazioni dove vengono di nuovo trascurati i termini al second'ordine:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\delta\rho + \rho_0 \boldsymbol{\nabla}\cdot\frac{\partial \delta\mathbf{u}}{\partial t} = 0 \\ \rho_0 \boldsymbol{\nabla}\cdot\frac{\partial \delta\mathbf{u}}{\partial t} = -c_s^2\nabla^2\delta\rho - 4\pi G\rho_0\delta\rho \end{cases} \tag{3.12}$$

Sottraendo la seconda equazione dalla prima:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\delta\rho = c_s^2\nabla^2\delta\rho + 4\pi G\rho_0\delta\rho \tag{3.13}$$

Dai modi di Fourier nel caso della densità:

$$\delta\rho = \delta\rho_1 e^{i(kx-\omega t)}$$

che inserita nella 3.13 porta alla seguente *relazione di dispersione*:

$$\omega^2 = k^2c_s^2 - 4\pi G\rho_0 \tag{3.14}$$

Si definisce *numero d'onda di Jeans*:

$$k_J^2 = \frac{4\pi G\rho_0}{c_s^2} \tag{3.15}$$

[4] Per superare l'inganno vi è ad esempio l'approccio di Einstein di ridefinire l'equazione di Poisson per un potenziale Non Newtoniano Ψ e introdurre una costante $\Lambda > 0$ compatibile con un Universo in espansione.

Quindi possiamo riscrivere la 3.14 nel seguente modo:

$$\omega^2 = c_s^2(k^2 - k_J^2) \tag{3.16}$$

Bisogna distinguere due casi:

- $\omega^2 > 0$, cioè con $k > k_J$, è una soluzione stabile, ovvero compatibile con la propagazione di onde longitudinali, dette *gravitosoniche*, che si propagano lungo la direzione individuata dal vettore d'onda. La velocità di fase con la quale si propagano queste onde è detta di *velocità di Jeans*:

$$v_J^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = (1 - \frac{k_J^2}{k^2})$$

- $\omega^2 < 0$, cioè per un numero d'onda $k < k_J$, la frequenza ω risulta immaginaria, il sistema è instabile e porta all'insorgenza del collasso gravitazionale.

Ricordando che la lunghezza d'onda è legata al numero d'onda per mezzo della relazione $\lambda = \frac{2\pi}{k}$, è possibile definire la *lunghezza d'onda di Jeans* in modo tale da rappresentare la condizione di instabilità gravitazionale come segue:

$$\lambda > \lambda_J \equiv \sqrt{\frac{\pi c_s^2}{G\rho}} \tag{3.17}$$

dove è stata inserita la densità ρ per rendere il criterio applicabile ad un generico mezzo. Nella seguente figura sono illustrate le due situazioni in una nube di mezzo interstellare.

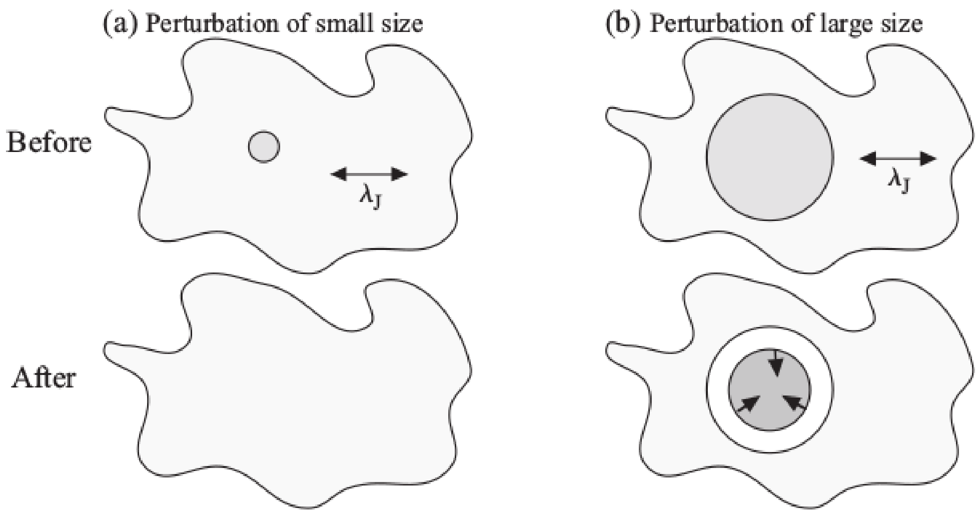

Figura 3.1: (a) Fluttuazioni della densità in una regione di una nube interstellare con di ampiezza minore della lunghezza di Jeans. (b) Fluttuazioni della densità in una regione di una nube interstellare con di ampiezza maggiore della lunghezza di Jeans.

In Figura 3.1 (a) si ha una regione perturbata di ampiezza più piccola rispetto alla lunghezza di Jeans, il comportamento nel tempo della perturbazione di densità è oscillatorio, quindi la perturbazione non viene sostenuta. Il sistema si troverà in una condizione di equilibrio idrostatico con la propria autogravità, o addirittura, nel caso le dimensioni fossero molto più piccole rispetto λ_J la sua autogravità può essere trascurata. Queste strutture è possibile sopravvivano solo nel caso ci sia un mezzo esterno che le confina, altrimenti potrebbero disperdersi. Nel secondo caso,in Figura 3.1 (b) , le regioni di compressione corrispondono a dimensioni sufficientemente grandi, $\lambda > \lambda_J$, il gas non riesce a riespandersi per seguire l'oscillazione perché prevale la propria autogravità che favorisce la compressione, quindi la perturbazione continua a contrarsi portando al collasso in brevissimo tempo. Il tempo scala tipico per il collasso gravitazionale è chiamato *free-fall time*. Questo può essere stimato usando la seconda legge di Newton per un sistema sferico, in particolare assumendo che la sfera sia omogenea con una densità ρ e che $M(r)$ sia la massa contenuta all'interno di un raggio r, si ha:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = G\frac{M(r)}{r^2}$$

Da cui si può ricavare:

$$t_{ff} \simeq 0.5\sqrt{\frac{1}{G\rho}}$$

La lunghezza di Jeans è legata a questo tempo come:

$$\lambda_J \sim c_s t_{ff}$$

Ricordando la definizione 3.9 di *crossing time*, è possibile riscrivere il criterio di Jeans del collasso gravitazionale in termini dei tempi scala:

$$t_{cross} > t_{ff} \tag{3.18}$$

il che significa che quando il tempo di caduta libera è più piccolo del crossing time, il collasso non può essere fermato. Un altro modo per definire il criterio di Jeans, è tramite un'altra quantità di soglia, ovvero la *massa di Jeans*:

$$M_J = \frac{4\pi}{3}\rho\lambda_J^3 = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{\pi K_B}{Gm}\right)^{3/2}\frac{T^{3/2}}{\rho^{1/2}} \tag{3.19}$$

ricavata utilizzando la relazione tra velocità del suono e la temperatura nel caso isotermo. Quindi:

$$M > M_J$$

In termini di massa possiamo dire che una perturbazione tende a crescere di ampiezza solo se la sua dimensione è sufficientemente grande, ovvero se coinvolge una quantità di massa sufficientemente grande. La massa di Jeans è direttamente proporzionale alla temperatura ed inversamente proporzionale alla densità della nube, questo significa che quanto più bassa è la temperatura e quanto più alta la densità, tanto minore è la massa necessaria perché possa avvenire tale processo. Sostituendo i valori tipici dell'ISM è possibile trovare la massa che devono avere queste nubi instabili per dare origine al collasso e di conseguenza affinchè si possa instaurare la formazione stellare:

$$M_J \propto T^{3/2}\rho^{-1/2} = cost\ T^{3/2}\rho^{-1/2}$$

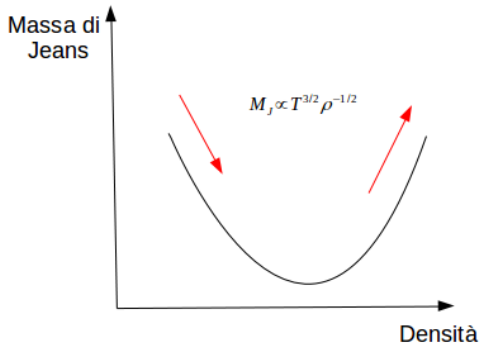

Figura 3.2: Grafico $M_J - \rho$. La massa di Jeans minima pone un limite alla frammentazione.

La costante nel sistema cgs ha un valore di $2.74 \cdot 10^{23} g^{3/2} K^{-3/2} cm^{-3/2}$. Prendendo delle temperature tipiche di 100 K e delle densità $\rho \sim 1 \cdot 10^{-24`} cm^{-3}$ si stima una massa di Jeans dell'ordine di $10^5 M_\odot$. Questo risultato però non è compatibile con le masse delle stelle che approssimativamente sono dell'ordine $0.1 - 100 M_\odot$, piuttosto corrisponde alla massa degli ammassi stellari.

Quindi in realtà il gas cosmico collassante subisce delle frammentazioni in nubi di massa uguale o superiore alla massa di Jeans. Nelle prime fasi del collasso la nube è in una fase isoterma, infatti atomi e molecole irradiano energia termica, in un processo di raffreddamento a spese dell'energia gravitazionale. Con il procedere del collasso, la temperatura è approssimativamente costante, la densità aumenta ragionevolmente e la massa di critica diminuisce consentendo la frammentazione; ogni "frammento" collassa nel proprio t_{ff}. La formazione dunque è un processo gerarchico. Quando però la nube diventa otticamente spessa, cioè opaca alla sua stessa radiazione,i processi di perdita radiativa dall'interno della nube che garantiscono l'isotermalità delle prime fasi del collasso diventano più difficili. Il processo diventa adiabatico e la radiazione non può più fuggire. La temperatura aumenta e di conseguenza anche la massa di Jeans comincia a crescere: le frammentazioni finiscono, si stabilizza il collasso e si forma una *protostella*.

Bibliografia

[1] C.Clarke; B.Carswell, *Principles of Astrophysical Fluid Dynamics.* Cambridge University Press, 2007

[2] Ciotti Luca, *Lecture Notes on Stellar Dynamics.* Scuola Normale Superiore, 2000

[3] Filippo Fraternali, *Gas dynamics in galaxies.* Department of Physics and Astronomy, University of Bologna

[4] Hale Bradt, *Astrophysics Processes.* Cambridge University Press, 2008

[5] Lev D. Landau; Evgenij M. Lifsits, *Fisica Teorica, Vol.6, Meccanica dei Fluidi.* Editori Riuniti University Press, 2013

[6] Mario Vietri, *Foundations of High-Energy Astrophysics.* The university of Chicago Press, 2008

[7] Joseph Silk, Arianna Di Cintio, Irina Dvorkin, *Galaxy formation.* Società Italiana di Fisica,2013