Pitagorini brojevi i Pitagorina jednadžba

Dominika Crnjac Milić*

Sažetak. *Jedna od najjednostavnijih kvadratnih diofantskih jednadžbi i odavno poznatih jednadžbi je Pitagorina jednadžba. U radu ćemo pokazati da su sve cjelobrojne Pitagorine trojke dane s*

$$(2\,a\,b\,t, (a^2-b^2)t, (a^2+b^2)t),$$

pri čemu su $a, b, t \in \mathbb{Z}$ i $D(a,b) = 1$, gdje je $D(a,b)$ najveći zajednički djelitelj brojeva a i b.

Ključne riječi: *relativno prosti prirodni brojevi, Pitagorina jednadžba, Pitagorina trojka*

Pythagora's numbers and Pythagora's equation

Abstract. *One of the simplest quadratic Diophantine equations and homogeneous equations known from long time ago is Pythagora's equation. In the paper it will be shown that all Pythagorean integer triples are given by*

$$(2\,a\,b\,t, (a^2-b^2)t, (a^2+b^2)t),$$

where $a, b, t \in \mathbb{Z}$, $D(a,b) = 1$.

Key words: *natural relative prime numbers, Pythagora's equation, Pythagora's triple.*

1. Uvod

Odavno je poznata činjenica da je kvadrat duljine hipotenuze pravokutnog trokuta jednak zbroju kvadrata duljina kateta. Prethodna tvrdnja poznata je kao Pitagorin poučak. Poznato je da postoje pravokutni trokuti čije su duljine stranica prirodni brojevi, tj. da postoje prirodni brojevi x, y, z takvi da je $x^2 + y^2 = z^2$. Postavlja se pitanje mogu li se naći sva rješenja jednadžbe $x^2 + y^2 = z^2$ u skupu prirodnih brojeva?

*Elektrotehnički fakultet, Osijek, Kneza Trpimira 2b, e-mail: dominika.crnjac@etfos.hr

2. Pitagorina jednadžba

Jednadžba

$$x^2 + y^2 = z^2, \tag{1}$$

je diofantska jednadžba drugog stupnja (za jednadžbe višeg stupnja vidi [4]). Naš je zadatak pronaći prirodne brojeve x, y, z koji su rješenje jednadžbe (1) (vidi [3]). U tu svrhu najprije nađimo u parovima relativno proste brojeve x, y, z koji zadovoljavaju jednadžbu (1). Dakle, $x^2 + y^2 = z^2$ možemo pisati u obliku $z^2 - x^2 = y^2$ tj. $(z - x)(z + x) = y^2$, pa imamo

$$z - x = \frac{y}{r}, \tag{2}$$

$$z + x = ry \tag{3}$$

pri čemu je $r \in \mathbb{Q}$.

Nadalje, nakon zbrajanja (2) i (3) dobivamo

$$2z = \left(r + \frac{1}{r}\right) y. \tag{4}$$

Oduzmemo li od (3) jednadžbu (2) imamo

$$2x = \left(r - \frac{1}{r}\right) y. \tag{5}$$

Podijelimo li (4) sa (5) dobivamo

$$\frac{z}{x} = \frac{r^2 + 1}{r^2 - 1}.$$

Stavimo li $r = \frac{a}{b}$, pri čemu su a i b relativno prosti, slijedi $\frac{z}{x} = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$. Kako je $D(a, b) = 1$, slijedi $D(a^2, b^2) = 1$ te su brojevi $a^2 + b^2$ i $a^2 - b^2$ relativno prosti ili je njihova najveća zajednička mjera jednaka 2.

Brojevi a^2+b^2 i a^2-b^2 su relativno prosti kad su a i b različite parnosti. Nadalje, brojevi $a^2 + b^2$ i $a^2 - b^2$ imaju najveću zajedničku mjeru jednaku 2 u slučaju kada su a i b neparni.

U prvom slučaju jednadžba $\frac{z}{x} = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$ ima smisla ako je $z = a^2 + b^2$ te $x = a^2 - b^2$. Uvrstimo li tako odabrane z i x u jednadžbu $(z - x)(z + x) = y^2$ dobivamo $y = 2ab$. Brojevi $x = a^2 - b^2, y = 2ab, z = a^2 + b^2$ su rješenja jednadžbe (1), pri čemu su a i b relativno prosti brojevi različite parnosti i $a > b$.

U drugom slučaju kad su a i b neparni brojevi, izraz $\frac{z}{x} = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$ možemo skratiti sa 2. Tada je $x = \frac{a^2-b^2}{2}, y = ab, z = \frac{a^2+b^2}{2}$, a to je rješenje jednadžbe (1). Po pretpostavci, a i b su neparni brojevi, tj. brojevi oblika $a = 2m+1, b = 2n+1, m, n \in \mathbb{Z}$ pa imamo

$$\begin{aligned} x &= 2(m - n)(m + n + 1), \\ y &= (m + n + 1)^2 - (m - n)^2, \\ z &= (m + n + 1)^2 + (m - n)^2. \end{aligned}$$

Nije teško vidjeti da su brojevi $m+n+1$ i $m-n$ različite parnosti, te da su relativno prosti. Dakle, zaključak za prvi slučaj, vrijedi i za drugi.

Trojka (x, y, z), gdje su $x = a^2 - b^2, y = 2ab, z = a^2 + b^2$, zovemo temeljno rješenje jednadžbe (1). Sva ostala rješenja koja se generiraju pomoću temeljnog zovemo opće rješenje jednadžbe (1). Dakle, opće rješenje jednadžbe (1) je oblika (tx, ty, tz), tj.

$$(2abt, (a^2 - b^2)t, (a^2 + b^2)t), \tag{6}$$

gdje su $a, b, t \in \mathbb{Z}$, za koje je $a > b$ i $D(a, b) = 1$ (vidi [1]).

3. Pitagorini brojevi

Tri prirodna broja x, y, z koji zadovoljavaju jednadžbu (1) nazivamo Pitagorinim brojevima ili Pitagorinom trojkom i također označavamo s (x, y, z) (vidi [2]). Pitagora je za nalaženje ovih brojeva dao formule

$$x = 2n + 1, y = 2n^2 + 2n, z = 2n^2 + 2n + 1, n \in \mathbb{N}.$$

S druge strane Platon je dao formule

$$x = n^2 - 1, y = 2n, z = n^2 + 1, n \in \mathbb{N}.$$

Prirodno je vjerovati da se Pitagorinim i Platonovim formulama određuju svi Pitagorini brojevi, što nije istinito.

Nije teško vidjeti da primjerice Pitagorina trojka prirodnih brojeva (20, 21, 29) nije dana niti Pitagorinim niti Platonovim formulama.

Primijetimo da se Pitagorine formule dobivaju iz formula (6) stavljajući $a = n + 1, b = n, t = 1$, a Platonove stavljajući $a = n, b = 1, t = 1$. Očito da je prethodna činjenica izvjesno poopćenje pa se nameće pitanje generiraju li formule (6) sve Pitagorine trojke? Pozitivan odgovor dat ćemo kroz nekoliko tvrdnji.

Tvrdnja 1. *Ako je $x^2 + y^2 = z^2$, tada x i y ne mogu istodobno biti neparni prirodni brojevi.*

Dokaz. Neka je $x = 2m + 1, y = 2n + 1$. Tada je $z^2 = 4(m^2 + n^2 + m + n) + 2$. Primijetimo da desna strana prethodne jednadžbe ne može biti kvadrat prirodnog broja, jer pri dijeljenju sa 4 daje ostatak 2.

Tvrdnja 2. *Vrijedi*

$$D(x, y) = D(x, z) = D(x, y) = D(x, y, z).$$

Dokaz. Broj $D(x, y, z)$ je djelitelj brojeva x, y, z, pa je $D(x, y) = D(x, y, z)$. Slično se pokaže da je $D(x, z) = D(y, z)$.

Tvrdnja 3. *Ako su y i z neparni prirodni brojevi i $D(y, z) = 1$, onda je i*

$$D\left(\frac{z + y}{2}, \frac{z - y}{2}\right) = 1.$$

Dokaz. Ako je $D\left(\frac{z+y}{2}, \frac{z-y}{2}\right) = k$, tada su i $z = \frac{z+y}{2} + \frac{z-y}{2}, y = \frac{z+y}{2} - \frac{z-y}{2}$ djeljivi s k, pa je $k = 1$.

Tvrdnja 4. *Formule (6) za $a > b$ daju sve Pitagorine trojke prirodnih brojeva.*
Dokaz. Neka je (x, y, z) bilo koja Pitagorina trojka prirodnih brojeva i $D(x, y) \neq 1$. Tada je $x = x_1 t, y = y_1 t, z = z_1 t$ i $x_1^2 + y_1^2 = z_1^2$, pri čemu je $D(x_1, y_1) = 1$. Jedan od brojeva x_1, y_1 je paran a drugi neparan. Neka je x_1 paran prirodan broj. Budući da je $x_1^2 + y_1^2 = z_1^2$ slijedi $x_1^2 = 4 \cdot \frac{z_1+y_1}{2} \cdot \frac{z_1-y_1}{2}$.

Koristeći Tvrdnju 2 i Tvrdnju 3 i činjenicu $D(x_1, y_1) = 1$ dobivamo

$$D\left(\frac{z_1 + y_1}{2}, \frac{z_1 - y_1}{2}\right) = 1,$$

pa je $\frac{z_1+y_1}{2} = a^2$ i $\frac{z_1-y_1}{2} = b^2$.

Iz prethodne dvije jednadžbe imamo:

$$y_1 = a^2 - b^2, z_1 = a^2 + b^2 \text{ pa je } x_1 = 2ab.$$

Zamjenom vrijednosti za x_1, y_1, z_1 dobivamo $x = 2abt, y = (a^2 - b^2)t, z = (a^2 + b^2)t$. Primijetimo da je $a > b$ i jedan od brojeva a, b je paran a drugi neparan, jer su y_1, z_1 neparni brojevi.

Dvije različite trojke prirodnih brojeva ne generiraju uvijek dvije različite Pitagorine trojke prirodnih brojeva. Primjerice (2, 1, 2) i (3, 1, 1) daju istu Pitagorinu trojku prirodnih brojeva (6, 8, 10). Uređene trojke (ma_1, mb_1, t_1) i (a_1, b_1, mt_1) daju istu Pitagorinu trojku prirodnih brojeva. Prethodno vrijedi za uređene trojke $(a_1, b_1, 2t_1)$ i $(a_1 + b_1, a_1 - b_1, t_1)$. Ako su $\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_1-b_1}{2}$ prirodni brojevi, tada uređene trojke (a_1, b_1, t_1) i $(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_1-b_1}{2}, 2t_1)$, generiraju istu Pitagorinu trojku prirodnih brojeva. Cilj nam je utvrditi pod kojim uvjetima formule (6) daju sve Pitagorine trojke prirodnih brojeva bez ponavljanja, a to daje sljedeća tvrdnja.

Tvrdnja 5. *Formule (6) generiraju sve Pitagorine trojke prirodnih brojeva bez ponavljanja ako je $a > b, D(a, b) = 1$ i jedan od njih je paran a drugi neparan broj.*

Dokaz. Neka su

$$(y, x, z) = (2abt, (a^2 - b^2)t, (a^2 + b^2)t)$$

i

$$(y_1, x_1, z_1) = (2a_1 b_1 t_1, (a_1^2 - b_1^2)t_1, (a_1^2 + b_1^2)t_1),$$

bilo koje dvije trojke Pitagorinih brojeva, pri čemu je $a > b, D(a, b) = 1$ i jedan od brojeva a, b je paran, a drugi neparan. Također neka je $a_1 > b_1, D(a_1, b_1) = 1$ i jedan od brojeva a_1, b_1 je paran, a drugi neparan. Da bi prethodne dvije trojke bile jednake, mora biti $x = y_1, y = x_1, z = z_1$ ili $x = x_1, y = y_1, z = z_1$.

Prva kombinacija otpada jer iz sustava jednadžbi

$$\begin{aligned} (a^2 - b^2)t &= 2a_1 b_1 t_1 \\ 2abt &= (a_1^2 - b_1^2)t_1, \end{aligned}$$

dobivamo $(a^2 - b^2)(a_1^2 - b_1^2) = 4aba_1 b_1$, pri čemu je na lijevoj strani neparan broj, a na desnoj paran.

Neka je stoga $x = x_1, y = y_1, z = z_1$. Tada je $(a^2 - b^2)t = (a_1^2 - b_1^2)t_1, (a^2 + b^2)t = (a_1^2 + b_1^2)t_1$. Iz prethodne dvije jednadžbe dobiva se $ta^2 = t_1 a_1^2, t_1 b_1^2 = tb^2$ pa je $ab_1 = a_1 b$. Budući da je $D(a, b) = 1$ i $D(a_1, b_1) = 1$ tada je $a = a_1 h, b = b_1 h$ tj. $ab_1 = a_1 b_1 h$ i $a_1 b = a_1 b_1 h_1$ pa je $h = h_1 = 1$ i $a = a_1, b = b_1, t = t_1$.

4. Zaključak

Ovim člankom pokazali smo da se sve Pitagorine trojke (x, y, z) mogu prikazati u obliku $(2abt, (a^2 - b^2)t, (a^2 + b^2)t)$, pri čemu su $a, b, t \in \mathbb{Z}$ i $D(a, b) = 1$. Naveli smo neke Pitagorine trojke kao i Pitagorinu trojku koja nije dana Pitagorinim ni Platonovim formulama. Primijetimo da poznavanjem neke Pitagorine trojke, množenjem s nekim cijelim brojem dobivamo nove Pitagorine trojke.

Literatura

[1] B. Pavković, B. Dakić, Z. Hanjš, P. Mladinić, *Elementarna teorija brojeva*, HMD, Zagreb, 1994.

[2] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika 2*, Školska knjiga, Zagreb, 1995.

[3] S. Kurepa, *Uvod u matematiku*, Školska knjiga, Zagreb, 1970.

[4] T. Andrescu, D. Andrica, *An Introduction to Diophantine Equations*, GIL, Zalen, 2002.