POVIJESNA RUBRIKA

Georg Cantor (1845.–1918.)

Bit matematike je u njenoj slobodi.

Franka Miriam Brückler*

Teorija skupova kao disciplina nije nastala poimanjem da neki objekti uzeti skupa čine skupove. Karakteristika teorije skupova jest da je ona omogućila precizno baratanje s pojmom beskonačnosti i razlikovanje različitih beskonačnosti. Možda Vam se čini čudnim da postoje beskonačnosti različite "veličine"? A što biste onda rekli na to da postoji beskonačno mnogo različitih beskonačnosti? Upravo to je pokazao otac teorije skupova Georg Cantor. No, krenimo kronološki...

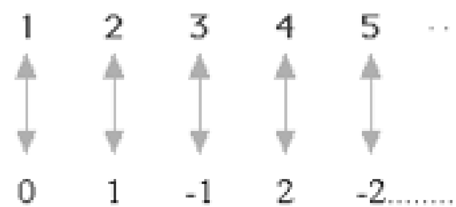
Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor, rođen je 3. ožujka 1845. u St. Petersburgu u Rusiji. Otac mu je bio Nijemac i trgovac, a majka Ruskinja. Prema nekim izvorima otac je bio Danac, a prema drugim Cantorovo porijeklo je židovsko. U svakom slučaju, odgojen je u vjeri svoga oca, kao protestant (majka je bila katolkinja), a od majke je naslijedio talent za glazbu te je bio uspješan violinist. Zbog slabog očeva zdravlja obitelj se preselila u Njemačku, u Frankfurt, kad je Georgu bilo 11 godina. Studirao je matematiku, prvo u Zürichu, a nakon očeve smrti studij je nastavio u Berlinu, gdje je diplomirao i doktorirao. Za vrijeme studija u Berlinu pohađao je predavanja tada najuglednijih matematičara poput Karla Weierstrassa i Leopolda Kroneckera. Kronecker će bitno utjecati na Cantorov kasniji profesionalni život te ga se ponekad naziva "čovjekom zbog kojeg je Cantor poludio", iako je to pomalo pretjerano.

Cantor je doktorirao iz područja teorije brojeva, a znanstveni interes je usmjerio prema matematičkoj analizi nakon što je 1869. dobio mjesto na sveučilištu u gradu Halle. Tu ga je naime stariji kolega Heinrich Edouard Heine usmjerio na problematiku konvergencije trigonometrijskih redova. Dok se bavio tim pitanjima uočio je potrebu preciziranja pojma skupa realnih brojeva te je definirao iracionalne brojeve kao limese nizova racionalnih brojeva. U isto doba drugačiji, ali također točan, način pravilnog definiranja skupa realnih brojeva imao je Richard Dedekind, s kojim se Cantor sprijateljio tokom jednog odmora u Švicarskoj 1872. Iz iste godine potječu i Cantorova i Dedekindova definicija iracionalnih brojeva.

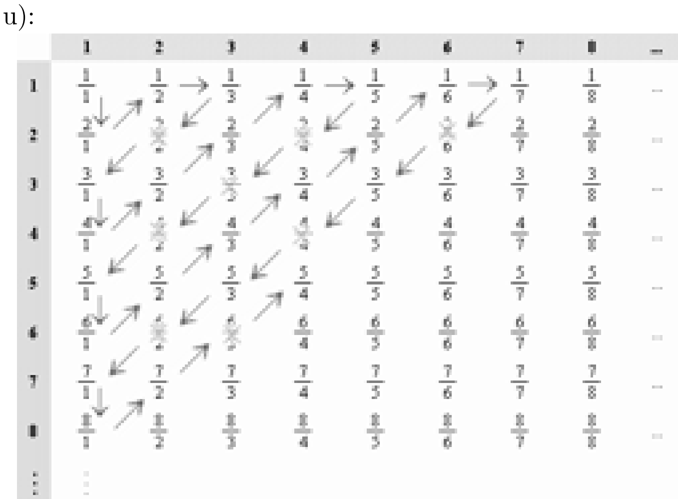
*Matematički odjel PMF-a, Sveučilište u Zagrebu, Bijenička 30, HR-10000 Zagreb, e-mail: bruckler@math.hr

U toku 1873. Cantor je dokazao da skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ ima jednako mnogo elemenata kao i skup cijelih $\mathbb{Z}$ te kao i skup $\mathbb{Q}$ racionalnih brojeva. Prije nego opišemo te dokaze, moramo se prvo dogovoriti oko pojmova. Očito su sva tri navedena skupa beskonačni - kako onda za njih smisleno definirati kad imaju jednako mnogo elemenata? Ideja je poopćiti ono što funkcionira kod konačnih skupova: za skup $\{\diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit, \clubsuit\}$ kažemo da ima 4 elementa jer možemo definirati da je $\diamondsuit$ prvi, $\heartsuit$ drugi, $\spadesuit$ treći i $\clubsuit$ četvrti. Drugim riječima, imamo bijekciju s $\{1, 2, 3, 4\}$ na $\{\diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit, \clubsuit\}$. Općenito, konačan skup A ima n elemenata ako možemo naći bijekciju s $\{1, 2, \ldots, n\}$ na A. Slično bismo vidjeli da bilo koja dva konačna skupa imaju jednako mnogo elemenata točno ako možemo naći bijekciju među njima. Stoga se kao definicija jednakobrojnosti (ekvipotentnosti) za bilo koje skupove uzima iduća: dva skupa A i B su jednakobrojna (ekvipotentna) ako postoji (bar jedna) bijekcija s A na B; kažemo i da A i B imaju isti kardinalni broj. Cantor je koristio upravo tu definiciju u svojim dokazima iz 1873., iako ju je izrekao mnogo kasnije. Primijetimo da je neki skup jednakobrojan s $\mathbb{N}$ točno ako se njegove elemente može poredati u niz.

Da su $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}$ jednakobrojni vidi se bijekcijom



Jednakobrojnost $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Q}$ slijedi iz jednakobrojnosti $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Q}^+$, a ona se pokazuje tako da pozitivne racionalne brojeve poredamo u niz pomoću idućeg dijagrama (duplikati se ignoriraju):



Skupovi koji imaju jednako mnogo elemenata kao i $\mathbb{N}$ zovu se **prebrojivi**; i taj pojam je Cantor uveo tek kasnije, a pripadni kardinalni broj označio je s $\aleph_0$ (alef-nula, alef je prvo slovo hebrejske abecede). Danas stoga kažemo: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$ imaju $\aleph_0$ elemenata.

Zadatak: Pokažite da su skup svih parnih prirodnih brojeva i skup svih prirodnih brojeva koji pri dijeljenju s 5 daju ostatak 2 prebrojivi.

Prirodno pitanje koje si je Cantor postavio je: ima li i realnih brojeva jednako mnogo kao prirodnih tj. je li i skup $\mathbb{R}$ prebrojiv? Da je odgovor "ne" dokazao je u prosincu 1873. i opisao ga u pismu Dedekindu. Taj dokaz smatra se rođendanom teorije skupova: otkriveno je da postoje beskonačni skupovi koji nemaju jednako mnogo elemenata. Dokaz je objavio u vrlo uglednom časopisu *Crelle's Journal* 1874. Objavljivanju se protivio jedan od urednika časopisa, Leopold Kronecker, te je članak objavljen tek nakon što su se Weirerstrass i Dedekind založili za njegovo objavljivanje. Razlog Kroneckerovog protivljenja bio je filozofske prirode: Kronecker je pripadao struji konstruktivista, matematičara koji priznaju samo onaj dokaz postojanja nekog matematičkog objekta koji daje način konstrukcije tog objekta. Cantorovi dokazi iz teorije skupova su pak bitno nekonstruktivistički. Zanimljivost ovog Cantorovog članka je i da je kao jednostavnu posljedicu neprebrojivosti skupa $\mathbb{R}$ dobio da postoji beskonačno[1] mnogo transendentnih[2] brojeva (Cantor i Dedekind su već ranije dokazali da je skup algebarskih brojeva prebrojiv). To je bilo osobito senzacionalno uzevši u obzir da je tek 1851. Joseph Liouville dokazao da takvi brojevi postoje.

Nakon gornjeg dokaza, Cantor je pokušao dokazati nešto što je (samo) naizgled očito: da dužina i kvadrat nisu jednakobrojni. No, 1877. dokazao je upravo suprotno: ne samo da dužina i kvadrat imaju jednako mnogo točaka, nego i kocka ima isto toliko. Općenito: svi skupovi $\mathbb{R}^n$ su jednakobrojni! Tom je prilikom Cantor rekao: *Vidim, ali ne vjerujem!* Taj je rezultat također objavio, ponovno uz velik Kroneckerov otpor, u *Crelle's Journal*-u, no nakon toga više nije objavljivao u tom časopisu. Kasnije se Cantor pokušao pomiriti s Kroneckerom te ga je pozvao na prvi sastanak *Deutsche Mathematische Vereinigung* (Njemačkog matematičkog društva) 1891. No, Kronecker nije mogao doći na taj sastanak zbog smrti supruge, a ubrzo zatim je i sam umro.

Najznamenitiji Cantorov teorem je tzv. **Osnovni Cantorov teorem teorije skupova**: Svaki skup S ima strogo manje elemenata nego njegov partitivni skup[3]. Taj je teorem dokazao **dijagonalnim argumentom**, kojim se može dokazati i neprebrojivost skupa $\mathbb{R}$. U slučaju da dokazujemo da je $\mathbb{R}$ neprebrojiv ili, što je ekvivalentno[4], s $\langle 0, 1\rangle$, pretpostavimo suprotno: neka je I prebrojiv tj. svi brojevi iz I se mogu zapisati kao niz $x_1, x_2, x_3, \ldots$. Tada se svaki od brojeva x_i može zapisati[5] u obliku $0, a_1^i a_2^i a_3^i \ldots$ (dakle, a_j^i je j-ta znamenka iza decimalnog zareza u i-tom broju). Sad gledamo sve "dijagonalne znamenke" (tj. a_i^i: i-ta znamenka i-tog broja - prva od prvog, druga od drugog itd.) i pogledamo broj $y = 0, y_1 y_2 y_3 \ldots$ kojem je i-ta znamenka različita od a_i^i. Tada se $y \in I$ bar na i-toj znamenki razlikuje od svakog x_i pa je različit od svih x_i, pa smo suprotno pretpostavci našli broj iz I

[1] Beskonačan skup koji nije prebrojiv zove se neprebrojiv. Skup $\mathbb{R}$ i skup transcendentnih brojeva su primjeri neprebrojivih skupova.

[2] Realan broj je transcendentan ako ne postoji polinomijalna jednadžba s cjelobrojnim koeficijentima kojoj je on rješenje. U suprotnom je broj algebarski.

[3] Partitivni skup od S je skup $\mathcal{P}(S)$ svih podskupova od S.

[4] Skup $\mathbb{R}$ je ekvipotentan s $I = \langle 0, 1\rangle$; bijekcija je npr. $f : \langle 0, 1\rangle \to \mathbb{R}$ definirane s $f(x) = \mathrm{tg}(\pi \cdot (x - 0,5))$.

[5] Taj zapis nije jedinstven i upravo zbog ove nepreciznosti opisani dokaz je pojednostavljena verzija potpunog dokaza.

koji nije među nabrojanima - imamo kontradikciju s pretpostavkom da smo ih sve mogli nabrojati.

Jednostavna posljedica osnovnog Cantorovog teorema teorije skupova je da postoji beskonačno mnogo beskonačnih kardinalnih brojeva: za kardinalni broj nekog skupa A, od njega je veći kardinalni broj od $B = \mathcal{P}(A)$, od tog je pak veći kardinalni broj od $C = \mathcal{P}(B)$ itd.

Najveći Cantorov doprinos je u otkriću načina za precizno baratanje pojmom beskonačnosti. No, Cantor je bitno doprinio i razvoju nekih drugih matematičkih disciplina osim teorije skupova, ponajviše topologije i matematičke analize.

Cantor se oženio sestrinom prijateljicom 1874. Tokom 1880-ih je počeo patiti od depresija; prvi zabilježeni napad doživio je 1884. Popularno se govori da je uzrok Cantorovih depresija Kroneckerov otpor njegovim idejama, no prema suvremenim saznanjima o bolesti depresije to je ipak vjerojatno bio samo povod izbijanja bolesti. S vremenom su se napadi sve češće pojavljivali i počeo se sve ekscentričnije ponašati. Tako je u svojim "mračnim" fazama bio skloniji baviti se filozofijom i teorijom da je Roger Bacon napisao Shakespeareove drame, nego matematikom. Objavio je i radove o toj teoriji, a kad je 1911. bio kao ugledan znanstvenik pozvan na petstotu obljetnicu St. Andrews sveučilišta u Škotskoj, govorio je uglavnom o Shakespeare-Bacon teoriji. Iako je i u tom kasnijem razdoblju imao značajnih matematičkih rezultata, oni nikad nisu dosegli razinu prije 1880. Godine 1896. umrla mu je majka, a 1899. mlađi brat i najmlađi sin. Nakon što je u razdoblju 1900.-1910. često zbog boravaka u sanatorijima bio odsutan s posla, povukao se u mirovinu 1913. Posljednje godine života proveo je slabo ishranjen zbog ratnih uvjeta, a umro je od srčanog udaru u sanatoriju u Halleu, 6. siječnja 1918.

Literatura

[1] A. D. Aczel, *Die Natur der Unendlichkeit*, Rowohlt, Hamburg, 2002.

[2] P. Basieux, *Abenteuer Mathematik - Brücken zwischen Wirklichkeit und Fiktion*, Rowohlt, Hamburg, 1999.

[3] E. Kasner, J. Newman, *Mathematics and the Imagination*, Dover Publications, Mineola, 2001.

[4] MacTutor History of Mathematics Archives: Cantor biography, `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cantor.html`

[5] Wikipedia: Georg Cantor, `http://en.wikipedia.org/wiki/Georg_Cantor`