*Lidija Dedi**

UDK 336.763.2
JEL Classification G13
Pregledni članak

# MOGUĆNOSTI PRIMJENE GEOMETRIJSKOG BROWNOVOG GIBANJA ZA VREDNOVANJE OPCIJA

*Ponašanje cijena dionica u veoma kratkom vremenu osnovica je vrednovanja uvjetovanih tražbina, posebno onih koje se javljaju kao formalizirane opcije, ali i u parametrima koji definiraju dugoročno ponašanje u dionicama skrivenih opcija. Promjenama cijena dionica mijenja se rizičnost uvjetovanih tražbina, pa za vrednovanje većine njih nije moguće primijeniti koncept ekonomske vrijednosti. Jedna je od mogućnosti vrednovanja opcija oslanjanje na stohastičko ponašanje cijena dionica ili neke druge vezane imovine, pa je važno odrediti stohastički proces koji opisuje to ponašanje. Stohastički proces u kontinuiranom vremenu, poznat pod nazivom geometrijsko Brownovo gibanje, odnosno Wienerov proces sastavni je dio mnogih modela vrednovanja opcija. Najpoznatiji model vrednovanja opcija jest Black–Scholes model, a polazi od pretpostavke da cijene dionica slijede geometrijsko Brownovo gibanje. Bez obzira na kritike i postojanje brojnih alternativnih modela vrednovanja opcija, B/S model najkorišteniji je model i zajedno s različitim prilagodbama može poslužiti za vrednovanje različitih opcija i poslovnih procesa koji sadrže određene opcijske elemente.*

*Ključne riječi: vrednovanje opcija, geometrijsko Brownovo gibanje, Black-Scholes model*

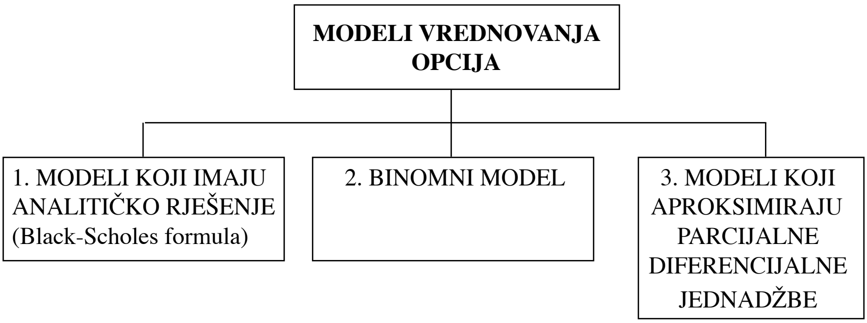
## Uvod

Vrednovanje investicija zasniva se na konceptu ekonomske vrijednosti. Ekonomska vrijednost određuje se kroz međuovisnost rizika i nagrade, pa je ključno

* L. Dedi, mr. sc., asistentica na Ekonomskom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Rad primljen u uredništvo: 28. listopada 2004.

određivanje riziku prilagođene diskontne stope koja će se primijeniti na struju očekivanih novčanih tokova. Instrumenti izvedeni iz dionica mijenjaju svoja profitno-rizična obilježja sa svakom promjenom cijene dionica, pa je nemoguće odrediti jednu riziku prilagođenu diskontnu stopu. Zbog toga je ponašanje cijena dionica u veoma kratkome vremenu osnovica vrednovanja izvedenica, posebno onih koje se javljaju kao formalizirane opcije ali i u parametrima koji definiraju dugoročno ponašanje u dionicama skrivenih opcija. Cijena bilo koje izvedenice funkcija je cijene vezane imovine, rizika i vremena. Promjene cijena dionica u veoma kratkome razdoblju ponašaju se kao slučajne varijable. U tom je smislu za vrednovanje opcija najvažnije odrediti stohastički proces koji opisuje ponašanje cijena dionica ili neke druge vezane imovine. Stohastički proces u kontinuiranom vremenu koji opisuje ponašanje cijena vezane imovine poistovjećuje se s Wienerovim procesom, odnosno s geometrijskim Brownovim gibanjem i Itôvim procesom. Diferenciranje i integriranje funkcija stohastičkog procesa omogućeno je korištenjem Itôve lemme. Model geometrijskog Brownovog gibanja opisuje distribuciju vjerojatnosti buduće cijene dionice i sastavni je dio Black-Scholes formule, ali i drugih modela vrednovanja opcija. Black i Scholes (1973.) dali su najpoznatiji pristup vrednovanju opcija.

Prema različitim autorima postoje različite klasifikacije modela vrednovanja opcija.[1] Općenito, modeli vrednovanja opcija mogu se podijeliti u tri karakteristične skupine, kao što je prikazano u tablici.




1. Analitičko rješenje dobiva se rješavanjem parcijalne diferencijalne jednadžbe kojom se izjednačuju promjene vrijednosti opcije s promjenama vrijednosti držanog portfelja. Najpoznatiju parcijalnu diferencijalnu jednadžbu i njezino rješenje izveli su Black i Scholes (1973.) i Merton (1973.). Na osnovama radova Blacka i Scholesa (1973.) i Mertona (1973.) intenzivirano je vrednovanje financijskih i stvarnih opcija. Primjeri modela s analitičkim rješenjima jesu «model skoka» Cox

[1] Vidi podrobnije Geske i Shastri(1985.); Trigeorgis, L. (1996.); Bakshi, Cao i Chen (1997.); Amram i Kulatilaka (1999.) i Hull (2003.).

i Ross (1976.), «kombinirani skok-difuzijski model» Merton (1976.) i «difuzijski model s promjenjivom varijancom» Geske (1979.).

2. Binomni model predstavili su Cox, Ross i Rubinstein (1979.) i omogućili su jednostavnije vrednovanje opcija. CRR binomni model vrednovanja proširili su Rendleman i Barter (1979.), Boyle (1988.), Hull i White (1988.). Log-transformirani binomni pristup prikazao je Trigeorgis (1991.), a Figlevski i Gao (1999.) razvili su model prilagođene mreže za učinkovitije vrednovanje opcija.

3. Numerička rješenja koriste se za rješavanje parcijalne diferencijalne jednadžbe kada analitičko rješenje nije moguće. Od numeričkih rješenja najviše se koriste metode konačne diferencije koje su predstavili su Brennan i Schwartz (1977., 1978.). Hull i White (1990.) prikazali su modifikaciju metode eksplicitne konačne diferencije.

Pored nabrojenih modela postoje brojni alternativni modeli vrednovanja opcija. Na primjer, Bakshi, Cao i Chen (1997.) razvili su alternativni model vrednovanja opcija koji dopušta stohastičku volatilnost, stohastičke kamatne stope i slučajne skokove, a nazvan je SVSI-J model. Barone-Adesi i Whaley (1987.) prikazali su analitičku aproksimaciju vrednovanja Američkih opcija.

Opsežan pregled tehnika vrednovanja financijskih opcija može se pronaći kod Geske i Shastri (1985.), Rubinstein (1987.) i Hull (2003.). Modeli vrednovanja stvarnih opcija mogu se pronaći kod Brennan i Schwartz (1985.), McDonald i Siegel (1985., 1986.), Morck, Schwartz i Stangeland (1989.), Brennan (1990.), Gibson i Schwartz (1990.), Pindyck (1991.), Dixit i Pindyck (1994.), Mun (2002.) i Copeland i Antikarov (2003.).

Polazeći od značaja ponašanja cijena dionica u veoma kratkom razdoblju, cilj je rada istražiti stohastičke procese u kontinuiranom vremenu s naglaskom na geometrijsko Brownovo gibanje kao podlogu za vrednovanje opcija i sastavnog dijela B/S modela. Za ispitivanje pretpostavke ponašanja cijena dionica prema slučajnim procesima najprije se razmatra Wienerov proces kao model ponašanja cijena dionica, s naglaskom na geometrijsko Brownovo gibanje. Nakon toga prikazuje se primjena geometrijskog Brown-ovog gibanja za vrednovanje. U posljednjem dijelu rada prikazuje se važnost geometrijskog Brownovog gibanja za Black-Scholes model.

## Wienerov proces kao model ponašanja cijena dionica

Stohastički procesi u kontinuiranom vremenu primijenjeni na kretanje cijena dionica važni su za razumijevanje vrednovanja opcija. Sastavni su dio mnogih modela vrednovanja opcija Wienerov proces ili Brownovo gibanje. Wienerov proces ima tri važna svojstva:[2]

1. Wienerov proces zadovoljava svojstvo Markovljeva procesa. Distribucija vjerojatnosti za sve buduće vrijednosti procesa ovisi samo o tekućim vrijednostima. Cijene dionica mogu se prikazati kao Markovljevi procesi na osnovi javnih informacija koje su brzo inkorporirane u tekuće cijene dionica. Zbog toga se prošlim primjerima ponašanja cijena ne može koristiti za predviđanje budućih cijena. Tako se Markovljevim procesom opisuje slaba efikasnost tržišta, kojom se negira mogućnost da se tehničkom analizom «pobijedi tržište».
2. Ima neovisne priraste. Distribucija vjerojatnosti za promjene u procesu u nekom vremenskom intervalu neovisna je za neki drugi vremenski interval. U tom smislu Wienerov proces predstavlja verziju slučajnog pomaka u kontinuiranom vremenu.
3. Promjene u procesu (Δz) u nekom konačnom vremenskom intervalu normalno su distribuirane, s očekivanom vrijednošću 0 i s varijancom koja se povećava linearno s vremenskim intervalom, odnosno

$$\Delta z = \varepsilon_t \sqrt{\Delta t} \qquad (1)$$

gdje je $\varepsilon_t$ slučajna varijabla raspoređena po standardiziranoj normalnoj distribuciji s očekivanom vrijednošću 0 i varijancom 1. U kontinuiranom vremenu, kako $\Delta t \to 0$, prirast standardnog Wienerovog procesa postaje

$$dz = \varepsilon_t \sqrt{dt} \qquad (2)$$

s očekivanom vrijednošću 0 i varijancom jednakom dt.

Wiener-ov proces s očekivanom stopom promjene najjednostavnija je generalizacija jednadžbe (2) i može se zapisati

$$dx = adt + bdz \qquad (3)$$

gdje su a i b konstantne.[3] Proces dan jednadžbom (3) ima stopu očekivane promjene a i varijancu $b^2$, kao što je prikazano na slici 1.

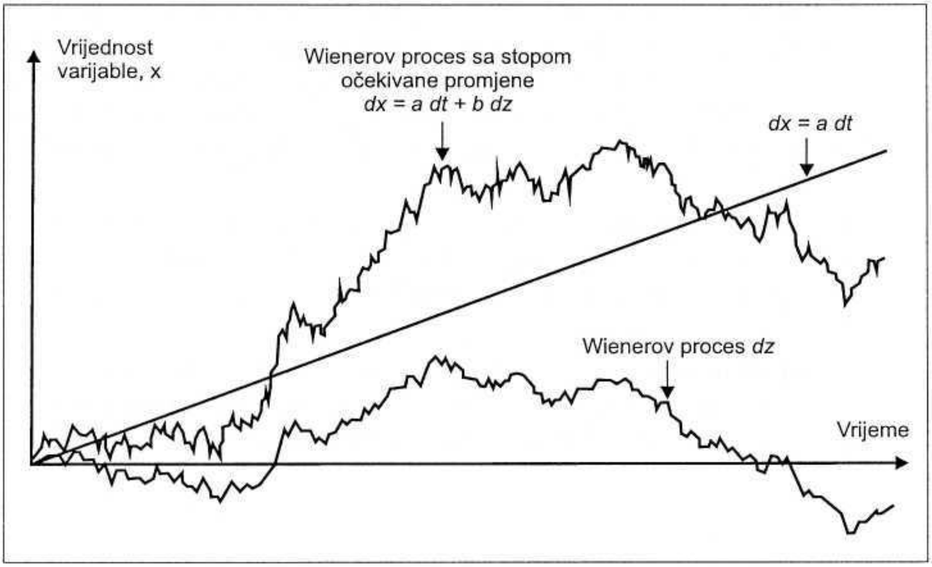
---

[2] Prema Rico-Ramirez, V., Divekar, U.B., Morel, B. (2003). «Real Option Theory from Finance to Batch Distillation», Computers and Chemical Engineering, (27), 15: 1867-1882; Dixit, A.K., Pindyck, R.S. (1994). Investment under Uncertainty, New Jersey, Princeton University Press, str.63-65 i Hull, J.C. (2003). Options, Futures and Other Derivatives, New Jersey, Prentice Hall, str. 217-221.

[3] Vidi podrobnije u Hull, J.C. (2003). Options, Futures and Other Derivatives, Prentice Hall.

*Slika 1*

WIENER-OV PROCES SA STOPOM OČEKIVANE PROMJENE




Izvor: Hull, J.C. (2003). Options, Futures, and Other Derivatives, str. 221.

Iako se može pretpostaviti da cijene dionica zadovoljavaju svojstvo Markovljevog procesa i imaju neovisne priraste, promjene cijena dionica ne mogu se prikazati kao normalne distribucije, jer cijene dionica ne mogu poprimiti negativnu vrijednost. Cijene su dionica log-normalno distribuirane, pa se može pretpostaviti da logaritam cijena slijedi Wienerov proces. U tom je smislu prihvatljiviji generalizirani Wienerov proces[4]

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz \tag{4}$$

[4] Prema Rico-Ramirez, V., Diwekar, U.M., Morel, B. (2003). "Real option theory from finance to batch distillation", Computers and Chemical Engineering, (27), 15: 1867-1882; Dixit, A.K., Pindyck, R.S. (1994). Investment under Uncertainty, New Jersey, Princeton University Press; Trigeorgis, L. (1996). Real Options:managerial flexibility and strategy in resource allocation, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts.

gdje je dz prirast standardnog Wienerovog procesa (2) s očekivanom vrijednošću 0 $[E(dz)=0]$ i varijancom dt [ $E(dz)^2 = dt$ ], a $a(x,t)$ i $b(x,t)$ su stopa očekivane promjene i varijanca kao funkcije vezane imovine i vremena. Stohastički proces u kontinuiranom vremenu u kojem je prirast stohastičke varijable, *dx* prikazan jednadžbom (4) naziva se Itôv proces. Diferenciranje i integriranje funkcija stohastičkog procesa (4) moguće je korištenjem Itôve lemme.[5] U teoriji stvarnih opcija Dixit i Pindyck (1994.) koriste se Itôvom lemmom zajedno s dinamičkim programiranjem za proučavanje neizvjesnih investicijkih odluka.

Wienerov proces (3) koristi se konstantnom stopom očekivane promjene i konstantnom varijancom. Osim rizikom, investitorske akcije motivirane su očekivanim, odnosno zahtijevanim prinosom. Upravo očekivani prinos određuje cijenu dionice. Zbog toga konstantnu stopu očekivane promjene valja zamijeniti s pretpostavkom konstantnog očekivanog prinosa.

Ako je S cijena dionice u vremenu t, stopa očekivane promjene u $S$ jest $\mu S$. Parametar $\mu$ konstantan je očekivani prinos na dionice. U kratkome intervalu $\Delta t$ je stopa očekivane promjene u $S$ *je* $\mu S \Delta t$. Ako je volatilnost dionica uvijek 0, ovaj model podrazumijeva[6]

$$\Delta S = \mu S \Delta t$$

uz granični uvjet kad $\Delta t \to 0$ $\qquad dS = \mu S dt$

ili

$$\frac{dS}{S} = \mu dt$$

Integriranjem između vremena 0 i vremena t, dobiva se

$$S_T = S_0 e^{\mu T} \tag{5}$$

gdje su $S_0$ i $S_T$ cijene dionica u vremenu 0 i vremenu T. Ta jednadžba pokazuje da, kada je varijanca jednaka nuli cijena dionice raste po stopi kontinuiranog ukamaćivanja $\mu$ po jedinici vremena.

U praksi su cijene dionica izložene volatilnosti. Pretpostavlja se ista varijabilnost prinosa u kratkom vremenskome razdoblju $\Delta t$ u odnosu na cijenu dionica. Drugim riječima, investitor je jednako nesiguran u prinos kada je cijena dionice

[5] Vidi podrobnije o Itô-voj lemmi i primjeni u Hull, J.C. (2003).i Dixit i Pindyck (1994).

[6] Prema Hull, J.C. (2003). Options, Futures, and Other Derivatives, Prentice Hall, str. 222-223.

500 kn i kada je cijena dionica 100 kn. Iz toga proizlazi da je standardna devijacija promjene u kratkom razdobljuu $\Delta t$ proporcionalna cijeni dionica i vodi modelu

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \tag{6}$$

odnosno

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz \tag{6a}$$

gdje je $\mu$ očekivani prinos na dionicu, $\sigma$ volatilnost cijene dionica, a dz je diferencijal standardnog Wienerovog procesa s očekivanom vrijednošću 0 i varijancom jednakom dt.

### *Geometrijsko Brownovo gibanje kao model ponašanja cijena dionica*

Prikazani model (6) ponašanja cijena dionica poznat je pod nazivom geometrijsko Brownovo gibanje i najviše je korišten model ponašanja cijena dionica.[7] Koristili su se njime Black i Scholes (1973.) i Merton (1971., 1973.) u svojim radovima na osnovi kojih je od početka sedamdesetih godina prošlog stoljeća sustavno razvijano vrednovanje financijskih i stvarnih opcija.

Verzija modela (6a) u diskretnom je vremenu

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t} \tag{7}$$

odnosno

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \varepsilon \sqrt{\Delta t} \tag{7a}$$

$\Delta S$ označuje promjenu u cijeni dionica S u kratkom intervalu $\Delta t$, $\varepsilon$ je slučajna varijabla raspoređena po standardiziranoj normalnoj distribuciji, $\mu$ je očekivana stopa prinosa na dionicu, a $\sigma$ volatilnost cijene dionice. Pretpostavlja se da su parametri $\mu$ i $\sigma$ konstantni. U modelu (7), $\frac{\Delta S}{S}$ označuje prinos na dionice u kratkom

[7] Vidi podrobnije o geometrijskom Brownovom gibanju u Hull, J.C. (2003.); Trigeorgis, L. (1996.); Dixit, A.K., Pindyck, R.S. (1994.) i Chriss, N.A. (1997.).

intervalu $\Delta t$, $\mu\Delta t$ označuje očekivanu vrijednost prinosa, a $\sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t}$ stohastičku komponentu prinosa. Varijanca stohastičke komponente, a tako i cijelog prinosa označuje se s $\sigma^2\Delta t$, odnosno $\sigma\sqrt{\Delta t}$.

Model geometrijskog Brownovog gibanja opisuje distribuciju vjerojatnosti buduće cijene dionice. Model pokazuje da su budući prinosi normalno distribuirani i da se standardna devijacija te distribucije može procijeniti iz povijesnih podataka. Odnosno, prinos na dionice između vremena 0 i nekog veoma kratkog vremena u budućnosti, $\Delta t$, normalno je distribuiran s očekivanom vrijednošću distribucije $\mu\Delta t$ i standardnom devijacijom $\sigma\sqrt{\Delta t}$.[8]

Model geometrijskog Brownovog gibanja određuju dva parametra:[9]

$\mu$ - očekivani, odnosno zahtijevani prinos i

$\sigma$ - volatilnost cijena dionica.

Očekivani prinos $\mu$ mjeri se godišnjom stopom uz pretpostavku kontinuiranog prirasta. Investitori su općenito skloniji sadašnjoj potrošnji. Zbog toga očekuju od investicija nagradu za odgađanje potrošnje koja odgovara razini kamatnih stopa u gospodarstvu. Što su kamatne stope više, izraženija je sklonost potrošnji u sadašnjosti, pa se zahtijeva i viši očekivani prinos na bilo koju dionicu. Investitori su osjetljivi i na rizik, odnosno oni imaju određeni stupanj averzije prema riziku. Stoga oni za preuzeti veći rizik zahtijevaju viši očekivani prinos.[10] Na taj se način, očekivani odnosno zahtijevani, prinos javlja kao cijena kapitala koja se sastoji od cijene vremena i cijene rizika.

Volatilnost cijene dionice $\sigma$ mjera je neizvjesnosti prinosa na dionice. Volatilnost cijene dionice može se definirati kao standardno odstupanje prinosa od očekivane vrijednosti, a mjeri se standardnom devijacijom. Vrijednosti standardne devijacije $\sigma$ za dionice kreću se u rasponu od 20% do 50%.[11] Standardna devijacija promjene cijene dionice u malom vremenskom intervalu $\Delta t$ jest $\sigma\sqrt{\Delta t}$. U relativno dužem vremenskom intervalu $T$ standardna devijacija promjene cijene dionice aproksimativno se može zapisati kao $\sigma\sqrt{T}$. Iz toga slijedi da se volatilnost može interpretirati kao standardna devijacija promjene u cijeni dionice u jednoj godini. Standardna devijacija promjene u cijeni dionice raste približno sa drugim korijenom vremena.

Za procjenu volatilnosti, promatraju se cijene dionica u fiksnim vremenskim intervalima, na primjer, svaki dan, tjedan ili mjesec. Kod izračunavanja procijenjene

---

[8] Prema Chriss, N.A. (1997.). Black-Scholes and Beyond: "Option Pricing Models". McGraw Hill, str.97-98 i Hull, J.C. (2003.). "Options, Futures, and Other Derivatives", Prentice Hall.

[9] Prema Hull, J. C. (2003.). "Options, Futures, and Other Derivatives", Prentice Hall, str. 225

[10] Orsag, S. (1997.). "Financiranje emisijom vrijednosnih papira", RIFIN, Zagreb, str. 227

[11] Hull, J. C., (2003.). "Options, Futures, and Other Derivatives", Prentice Hall, str. 225-238

volatilnosti javljaju se određena važna pitanja. Na primjer, je li potrebno koristiti se cijenama otvaranja ili zatvaranja, je li potrebno vrijeme mjeriti u kalendarskim danima ili u danima trgovanja. Fama (1965.) i K.R. French (1980.) empirijski su testirali volatilnost cijena dionica za dane kada je burza otvorena i kada je zatvorena.[12] Oba su došla do sličnih rezultata i zaključka da je volatilnost cijena dionica mnogo veća kada se trguje dionicama, odnosno kada je burza otvorena. Trgovanje dionicama samo po sebi uzrokuje volatilnost cijena dionica, a to su empirijski dokazali K.R. French i Roll (1986.).

## Primjena geometrijskog Brownovog gibanja za vrednovanje opcija

Modelom geometrijskog Brownovog gibanja koristi se za oblikovanje cijena dionica, kamatnih stopa, sadašnje vrijednosti novčanih tokova projekta i ostalih ekonomskih i financijskih varijabli koje se mijenjaju stohastički kroz vrijeme. Geometrijsko Brownovo gibanje dobar je model ponašanja cijena vezane imovine, bilo da se radi o vrednovanju financijskih ili stvarnih opcija. To potvrđuju brojna istraživanja i radovi, a samo neki od njih prikazani su u nastavku.

Najpoznatiji model vrednovanja opcija (B/S model) koji su izveli Black i Scholes (1973.) polazi od pretpostavke da cijene dionica slijede geometrijsko Brownovo gibanje. Margrabe (1978.) vrednuje opciju zamjene jedne rizične imovine za drugu, uz pretpostavku da cijene imovine slijede geometrijsko Brownovo gibanje. Cox, Ross i Rubinstein (1979.) razvili su binomni model vrednovanja u kojem cijena dionice slijedi geometrijsko Brownovo gibanje, a Brownovo gibanje predstavili su slučajnim pomakom. Carr (1988.) kombinira elemente složenosti i opciju zamjene kod vrednovanja sekvencijalne opcije zamjene uz pretpostavku da vezana rizična imovina slijedi geometrijsko Brownovo gibanje, Omberg (1987.) vrednuje Američke opcije uz pretpostavku da cijena dionice slijedi Wienerov proces. McDonald i Siegel (1985.) prikazali su da se jedinični projekt s fiksnim operativnim troškovima može vrednovati kao zbroj infinitivnog seta Europskih call opcija, uz pretpostavku da izlazne cijene slijede geometrijsko Brownovo gibanje. Lafuente i Novales (2003) empirijski su testirali optimalni odnos živičenja (“hedging”) između tržišne cijene ročnice na indekse dionica i njezine teoretske vrijednosti, uz pretpostavku da spot cijena indeksa slijedi geometrijsko Brownovo gibanje.

Osnovni model ireverzibilnog ulaganja u kontinuiranom vremenu izvorno su razvili McDonald i Siegel (1986.), proučavajući najpogodnije vrijeme ulaganja u određeni projekt uz pretpostavku da su investicijski troškovi poznati i fiksni, a

---

[12] Posebno su testirali volatilnost cijena dionica od ponedjeljka do petka, a posebno od petka nakon zatvaranja burze do zatvaranja u ponedjeljak.

sadašnja vrijednost novčanih tokova projekta slijedi geometrijsko Brownovo gibanje. U istraživanjima Pindycka (1991.) i Dixita (1992.) prikazan je osnovni slučaj ulaganja u projekt u kojem novčani tokovi projekta slijede geometrijsko Brownovo gibanje, a Quigg (1993.) je empirijski testirala modele vrednovanja stvarnih opcija inkorporirajući opciju čekanja kod vrednovanja gradskog zemljišta, uz pretpostavku da cijena vezane imovine (cijena zgrade) slijedi geometrijsko Brownovo gibanje. Grenadier i Weiss (1997.) razvijaju model optimalne strategije ulaganja za poduzeće suočeno s nizom tehnoloških inovacija. Osnovna je pretpostavka modela da vrijednost tehnološkog napretka slijedi geometrijsko Brownovo gibanje.

Neki autori[13] kritiziraju model geometrijskog Brownovog gibanja i smatraju da je za oblikovanje pojedinih tržišnih varijabli (kamatne stope, cijene nafte) koje imaju tendenciju povlačenja na neku dugoročno prosječnu razinu, bolje koristiti se Ornstein-Uhlenbeck procesom.[14]

## Geometrijsko Brownovo gibanje i Black-Scholes model

Prikazano je da geometrijsko Brownovo gibanje određuju očekivani, odnosno zahtijevani prinos i volatilnost cijena dionica. Za vrednovanje opcija korištenjem B/S modela važna je samo volatilnost cijena dionica, jer B/S model ne uključuje očekivani prinos vezane imovine. Black-Scholes model obično se ilustrira sljedećim setom ključnih relacija:[15]

$$C_0 = P_0 N(d_1) - Ee^{-kt} N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln(P_0 / E) + [k + (\sigma^2 / 2)]}{\sigma \sqrt{t}} \qquad (8)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{t}$$

$P_0$ označuje tekuću tržišnu cijenu dionice, E izvršnu cijenu, k nerizičnu kamatnu stopu za kontinuirano ukamaćivanje, $N(d_1)$ i $N(d_2)$ vjerojatnosti za $d_1$ i $d_2$ očitane vrijednosti ispod normalne krivulje, t vrijeme isteka važenja opcije, a $\sigma$ volatilnost cijena dionica.

Volatilnost cijena dionica , $\sigma$, kojom se koristi u modelu geometrijskog Brown-ovog gibanja sastavni je dio B/S modela vrednovanja opcija. Osnovna je

---

[13] Schwartz, (1997), Bessembinder i ostali, (1995) i Sarkar, (2003).

[14] Više o samom procesu vidi detaljnije Dixit, K.A., Pindyck, R.S. (1994). i Hull, J.C. (2003).

[15] Prema Orsag, S. (2003). Vrijednosni papiri, Sarajevo, Revicon, str. 755-756

pretpostavka B/S modela da cijena vezane imovine slijedi geometrijsko Brownovo gibanje. Izračunavanje, odnosno procjenjivanje volatilnosti dionica iz povijesnih podataka presudno je za korištenje B/S formule za vrednovanje opcija. Podroban postupak izračunavanja volatilnosti cijena dionica za potrebe B/S modela može se pronaći kod Chriss (1997.) i Hull (2003.). Ostale pretpostavke Black-Scholes modela neće se prikazivati, jer su sastavni dio financijske literature i mogu se pronaći kod Brigham i Gapenski (1997.), Chriss (1997.), Brealey i Myers (2000.) i Hull (2003.).

Black i Scholes (1973.) izveli su formulu (8) za vrednovanje Europske call opcije, koristeći se analizom u kontinuiranom vremenu uz pretpostavke «savršenog tržišta». Njihova formula vrednovanja call opcije izražena u terminima cijene vezane imovine (dionice) ne uključuje očekivani prinos na dionicu, očekivane novčane tokove, cijenu rizika ili kovarijancu prinosa dionice i tržišta koji su implicitni cijeni dionice. Zbog pretpostavki samog modela koje su previše ograničujuće, B/S model je u tijeku godina doživio brojne alternativne derivacije. Merton (1973.) je bio veliki kritičar B/S modela. Modifikacijom osnovnog B/S modela prikazao je upotrebljivost modela u slučaju kada su kamatne stope stohastičke, kada dionice nose dividende i kada se opcija izvršava prije dospijeća. Na osnovama B/S modela Merton (1976.) je prikazao model vrednovanja opcija kada su prinosi na dionice diskontinuirani. Black, Scholes i Merton prikazali su da se modelom može koristiti za vrednovanje različitih komponenti strukture kapitala poduzeća,[16] a uz određene modifikacije Black-Scholes modelom može se koristiti i za vrednovanje varanta.[17] B/S model može se prilagoditi i za vrednovanje put opcija.

Pregled modificiranih modela zasnovanih na B/S modelu i primjenu istih na vrednovanje ostalih uvjetovanih potražnji na imovinu dao je Smith (1976.). Polazeći od B/S modela, Bakshi, Cao i Chen (1997.) razvili su alternativni model vrednovanja opcija (SVSI-J model).

## Zaključak

Stohastički procesi u kontinuiranom vremenu primijenjeni na kretanje cijena dionica važni su za razumijevanje vrednovanja opcija. Najkorišteniji model pona-

---

[16] Merton, R.C. (1973). «Theory of Rational Option Pricing», The Bell Journal of Economics and Management Science, str. 178

[17] Vidi podrobnije Black., F., Scholes, M. (1973). «The Pricing of Options and Corporate Liabilities», Journal of Political Economy, 81, (637-659); Galai, D., Schneller, M. (1978). «Pricing Warrants and the Value of the Firm», Journal of Finance, 33 (1339-1342); Lauterbach, B., Schultz, P. (1990). «Pricing Warrants: An Empirical Study of the Black-Scholes Model and Its Alternatives», Journal of Finance, (45), 4: (1181-1209).

šanja cijena dionica poznat je pod nazivom geometrijsko Brownovo gibanje. Model geometrijskog Brownovog gibanja opisuje distribuciju vjerojatnosti buduće cijene dionice i sastavni je dio Black-Scholes formule, ali i drugih modela vrednovanja opcija. Taj model ponašanja cijena dionica određuju dva parametra: očekivani odnosno zahtijevani prinos i volatilnost cijena dionica. Modelom se koristi za oblikovanje cijena dionica, sadašnje vrijednosti novčanih tokova projekta i ostalih ekonomskih i financijskih varijabli koje se mijenjaju stohastički kroz vrijeme. Geometrijsko Brown-ovo gibanje dobar je model ponašanja cijena vezane imovine, a to potvrđuju brojna istraživanja, bez obzira na kritike pojedinih autora.

Black i Scholes (1973.) izveli su formulu za vrednovanje Europske call opcije, koristeći se analizom u kontinuiranom vremenu pod pretpostavkama «savršenog tržišta». Osnovna je pretpostavka modela da cijena dionice slijedi geometrijsko Brownovo gibanje. Volatilnost cijena dionica -  kojom se koristi u modelu geometrijskog Brownovog gibanja sastavni je dio B/S modela vrednovanja opcija. Procjenjivanje volatilnosti dionica iz povijesnih podataka presudno je za korištenje B/S modela. Na osnovi radova Blacka i Scholesa (1973.) i Mertona (1973.) intenzivirano je vrednovanje financijskih i stvarnih opcija. Bez obzira na kritike modela, B/S model najpoznatiji je i najkorišteniji model vrednovanja opcija. Sastavni je dio financijske literature i financijskih kalkulatora. Važnost modela prepoznata je godine 1997., kada su Robert Merton i Myron Scholes dobili Nobelovu nagradu.

## LITERATURA:

1. Amram, M., Kulatilaka, N. (1999.). *Real Options:Managing Strategic Investment in an Uncertain World*, Boston, Harvard Business School Press.
2. Bakshi, G., Cao, C., Chen, Z. (199.7). «Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models», *Journal of Finance*, (52), 5: 2003-2049.
3. Barone-Adesi, G., Whaley, R.E. (1987.). «Efficient Analytic Approximation of American Option Values», *Journal of Finance*, (42), 2: 301-320.
4. Bessembinder, H., Coughenour, J.F., Seguin, P.J., Smoller, M.M. (1995.). "Mean Reversion in Equilibrium Asset Prices: Evidence from the Futures Term Structure" *Journal of Finance*, (50), 1: 361-375.
5. Black, F., Scholes, M. (1973.). «The pricing of Options and Corporate Liabilities», *Journal of Political Economy*, (83), 3: 637-654.
6. Boyle, P.P. (1988.). «A Lattice Framework for Option pricing with Two State Variables», *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, (23), 1: 1-12.
7. Brealey, R.A., Myers, S.C. (2000.). *Principles of Corporate Finance*, 6th ed. Irwin/McGraw-Hill.

8. Brennan, M.J. (1990.). «Latent Assets», *Journal of Finance*, (45), 3: 709-730.
9. Brennan, M.J., Schwartz, E.S. (1977.). «The Valuation of American Put Options», *Journal of Finance*, (32) : 449-462.
10. Brennan, M.J., Schwartz, E.S. (1978.). «Finite Difference Methods and Jump Processes Arising in the Pricing of Contingent Claims: A Synthesis», *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, (13), 3: 461-474.
11. Brennan, M.J., Schwartz, E.S. (1985.). «Evaluating Natural Resource Investment», *Journal of Business*, (58), 2: 135-157.
12. Brigham, E.F., Gapenski, L.C. (1997.). *Financial Management: Theory and Practice*, 8th ed. Orlando, The Dryden Press.
13. Carr, P. (1988.). «The Valuation of Sequential Exchange Opportunities», The *Journal of Finance*, (43), 5: 1235-1256.
14. Chriss, N.A. (1997.). *Black-Scholes and Beyond: Option Pricing Models*. New York: McGraw Hill.
15. Copeland, T., Antikarov, V. (2003.). *Real Options, a Practitioner's Guide*. New York: Thomson Texere.
16. Cox, J.C., Ross, S.A., Rubinstein, M. (1979.). «Option Pricing: A Simplified Approach», *Journal of Financial Economics*, (7): 229-263.
17. Cox. J.C., Ross, S.A. (1976.). «The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes», *Journal of Financial Economics*, 3: 145-166
18. Dixit, A. (1992.). «Investment and Hysteresis», *Journal of Economic Perspectives*, (6), 1: 107-132.
19. Dixit, A.K., Pindyck, R.S. (1994.). *Investment under Uncertainty*. New Jersey: Princeton University Press.
20. Fama, E.F. (1965.). «The Behavior of Stock-Market prices», *The Journal of Business*, (38), 1: 34-105.
21. Figlewski, S., Gao, B. (1999.). «The Adaptive Mesh Model: A New Approach To Efficient Option Pricing», *Journal of Financial Economics*, 53: 313-351.
22. French, K.R. (1980.). «Stock Returns and the Weekend Effect», *Journal of Financial Economics*, (8): 55-69.
23. French, K.R., Roll, R. (198.6). «Stock Return Variances: The Arrival of Information and the Reaction of Traders», *Journal of Financial Economics*, (17): 5-26.
24. Galai, D., Schneller, M. (1978.). «Pricing Warrants and the Value of the Firm», *Journal of Finance*, (33), 5: 1339-1342.
25. Geske, R. (1979.). «The Valuation of Compound Options», *Journal of Financial Economics*, (7): 63-81.

26. Geske, R., Shastri, K. (1985.). «Valuation by Approximation: A Comparison of Alternative Option Valuation Techniques», *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, (20), 1: 45-71.
27. Gibson, R., Schwartz, E. (1990.). «Stochastic Convenience Yield and the Pricing of Oil Contingent Claims», *Journal of Finance,* (45), 3: 959-976.
28. Grenadier, S.R., Weiss, A.M. (1997.). «Investment in Technological Innovations: An Option Pricing Approach», *Journal of Financial Economics*, (44): 397-416.
29. Hull, J., White, A. (1988.). «The Use of the Control Variate technique in Option Pricing», *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, (23), 3: 237-251.
30. Hull, J., White, A. (1990.). «Valuing Derivative Securities Using the Explicit Finite Difference Method», *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, (25), 1: 87-100.
31. Hull, J.C. (2003.). *Options, Futures and Other Derivatives 5ed*. New Jersey: Prentice Hall, Pearson Education International.
32. Lafuente, J.A., Novales, A. (2003.). «Optimal Hedging under Departures from the Cost-of-Carry Valuation: Evidence from the Spanish Stock Indeks Futures Market», *Journal of Banking and Finance*, 27: 1053-1078.
33. Lauterbach, B., Schultz, P. (1990.). «Pricing Warrants: An Empirical Study of the Black-Scholes Model and Its Alternatives», *Journal of Finance,* (45), 4: 1181-1209.
34. Margrabe, V. (1978.). «The Value of an Option to Exchange One Asset for Another», *The Journal of Finance*, (33), 1: 177-186.
35. McDonald, R.L., Siegel, D.R. (1985.). «Investment and the Valuation of Firms when there is and Option to Shut Down», *International Economic Review*, (26), 2: 331-349.
36. McDonald, R.L., Siegel, D.R. (1986.). «The Value of Waiting to Invest», *The Quarterly Journal of Economics*, November: 707-727.
37. Merton, R.C. (1971.). «Optimum Consumption and Portfolio Rules in Continuous-Time Model», *Journal of Economic Theory*, (3): 373-413.
38. Merton, R.C. (1973.). «Theory of Rational Option Pricing», *The Bell Journal of Economics and Management Science*, (4), 1: 141-183.
39. Merton, R.C. (1976.). «Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous», *Journal of Financial Economics*, 3: 125-144.
40. Morck, R., Schwartz, E., Stangeland, D. (1989.). «The Valuation of Forestry Resources under Stochastic Prices and Inventories», *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, (24), 4: 473-487.

41. Mun, J. (2002.). *Real Options Analysis: Tools and Techniques for Valuing Strategic Investments and Decisions*. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.
42. Omberg, E. (1987.). «A Note on the Convergence of Binomial-Pricing and Compound-Option Models», *The Journal of Finance*, (42), 2: 463-469.
43. Orsag, S. (1997.). *Financiranje emisijom vrijednosnih papira*. Zagreb: RI-FIN.ˇ
44. Orsag, S. (2003.). *Vrijednosni papiri*, Sarajevo: Revicon.
45. Pindyck, R. (1991.). «Irreversibility, Uncertainty and Investment», *Journal of Economic Literature*, (29), September: 1110-1148.
46. Quigg, L. (1993.). «Empirical Testing of Real Option-Pricing Models», *The Journal of Finance*, (48), 2: 621-640.
47. Rendleman Jr., R., Barter, B. (1979.). «Two State Option pricing», *The Journal of Finance*, (34), 5: 1093-1110.
48. Rico-Ramirez, V., Divekar, U.B., Morel, B. (2003.). «Real Options Theory from Finance to Batch Distillation», *Computers and Chemical Engineering*, (27), 15:1867-1882.
49. Rubinstein, M. (1987.). «Derivative Asset Analysis», *Economic Perspectives*, (1), 2: 73-93.
50. Sarkar, S. (2003.). «The effect of mean reversion on investment under uncertainty», *Journal of Economic Dynamics and Control,* 28: 377-396.
51. Schwartz, E.S. (1997.). «The Stochastic Behavior of Comodity Prices: Implications for Valuation and Hedging», *Journal of Finance*, (52), 3: 923-973.
52. Smith, C.W. (1976.). «Option Pricing: A Review», *Journal of Financial Economics*, 3: 3-51.
53. Trigeorgis, L. (1991.). «A log-Transformed Binomial Numerical Analysis method for Valuing Complex Multi-Option Investments», *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, (26), 3: 309 – 326.
54. Trigeorgis, L. (1996.). *Real Options: managerial flexibility and strategy in resource allocation*. Cambridge, Massachusetts: The MIT Press.

# POSSIBILITIES OF BROWNIAN MOTION APPLICATION FOR OPTION PRICING


## Summary

The behaviour of stock prices in a very short period of time is the base for valuing contingent claims, especially those that appear as formalized options, but also in the parameters that define long-term behaviour in stock's hidden options. Changes in stock prices alter the risk of contingent claims, and because of that, for valuing the most of them it is not possible to apply the economic value concept. One of the possibilities for pricing the options is to rely upon the stochastic behaviour of stock prices or other underlying asset. It is important to determine the stochastic process that describes this behaviour. The continuous time stochastic process is known as geometric Brownian motion or Wiener process and it is a building block for all kinds of models for options pricing. The best-known model for option pricing is the Black-Scholes model and it assumes that stock prices follow geometric Brownian motion. Despite critics and the existence of alternative models for option pricing, the Black-Scholes model is widely used and with appropriate adjustments it can be used for pricing of different options and business processes with embedded options.


Key words: option pricing, geometric Brownian motion, Black-Scholes model