

UDK 624.074.4.001.5:624-711

Primljeno 25. 1. 2001.

# Statička i dinamička analiza betonskih ljusaka - element ljuske i modeli

Jure Radnić, Alen Harapin, Domagoj Matešan

## Ključne riječi

betonska ljuska,  
statička analiza,  
dinamička analiza,  
nelinearnost,  
modeli materijala,  
geometrija

## Key words

concrete shell,  
static analysis,  
dynamic analysis,  
nonlinearity,  
material models,  
geometry

## Mots clés

coque en béton,  
analyse statique,  
analyse dynamique,  
non-linéarité,  
modèles de matériaux,  
géométrie

## Ключевые слова:

бетонная оболочка,  
статический анализ,  
динамический анализ,  
нелинейность, модели  
материалов, геометрия

## Schlüsselworte:

Betonschale,  
statische Analyse,  
dynamische Analyse,  
Unlinearität,  
Materialmodelle,  
Geometrie

J. Radnić, A. Harapin, D. Matešan

Izvorni znanstveni rad

## Statička i dinamička analiza betonskih ljusaka – element ljuske i modeli

Opisan je model i odgovarajući softver za statičku i dinamičku analizu betonskih ploča i ljusaka. Model simulira materijalnu i geometrijsku nelinearnost. Pokazano je da je moguće uključiti dominantne nelinearne efekte armiranog betona (betona i armature). U ovom radu koji čini prvi dio jedne cjeline, opisan je usvojeni element ljuske, modeli materijala za beton i armaturu, te model geometrije. U drugom radu koji slijedi bit će prikazana numerička analiza, ilustrirana primjerima.

J. Radnić, A. Harapin, D. Matešan

Original scientific paper

## Static and dynamic analysis of concrete shells - shell element and models

The model and the corresponding software for the static and dynamic analysis of concrete plates and shells is described. The model simulates the material and geometrical nonlinearity. It is demonstrated that dominant nonlinear effects of the reinforced concrete (concrete and reinforcing bars) can be taken into account. This paper, which is the first portion of a more extensive analysis, describes the adopted shell element, material models for concrete and reinforcing bars, and the geometry model. In the second paper, which is to follow shortly, the authors will describe numerical analysis illustrated with appropriate examples.

J. Radnić, A. Harapin, D. Matešan

Ouvrage scientifique original

## Analyse statique et dynamique des coques en béton – élément de la coque et modèles

L'article décrit le modèle et le logiciel adapté à l'analyse statique et dynamique des dalles et des coques en béton. Le modèle simule la non-linéarité matérielle et géométrique. Il est démontré que les effets dominants non-linéaires du béton armé (béton et armature) peuvent être inclus. Cet article est la première partie d'un ensemble et il traite de l'élément retenu de la coque, des modèles des matériaux pour le béton et l'armature, ainsi que du modèle de la géométrie. Un deuxième article qui suit décrira l'analyse numérique, illustrée par des exemples.

Ю. Раднич, А. Харанин, Д. Матешан

Оригинальную научную работа

## Статический и динамический анализ бетонных оболочек - элемент оболочки и модели

В работе описаны модель и софтвер для статического и динамического анализов бетонных плит и оболочек. Модель воспроизводит материальную и геометрическую нелинейность. Показано, что возможно включить доминантные нелинейные эффекты железобетона (бетона и арматуры). В той работе, являющейся частью одного целого, описаны принятый элемент оболочки, модели материалов для бетона и арматуры и геометрическая модель. В другой работе, которая следует, будет описан численный анализ, иллюстрированный и примерами.

J. Radnić, A. Harapin, D. Matešan

Wissenschaftlicher Originalbeitrag

## Statische und dynamische Analyse von Betonschalen – Schalenelement und Modelle

Beschrieben ist ein Modell und das entsprechende Software für die statische und dynamische Analyse von Betonplatten und -schalen. Das Modell simuliert materielle und geometrische Unlinearität. Es wurde gezeigt dass es möglich ist dominante unlineare Effekte des Stahlbetons (Beton und Bewehrung) einzuschliessen. In diesem Artikel, dem ersten Teil einer Gesamtheit, beschreibt man das angenommene Schalenelement, Modelle für Beton und Bewehrung und das Modell der Geometrie. Im folgenden Artikel wird die numerische Analyse beschrieben und mit Beispielen illustriert werden.

Autori: Prof. dr. sc. **Jure Radnić**, dipl. ing. građ.; doc. dr. sc. **Alen Harapin**, dipl. ing. građ., Građevinski fakultet Sveučilišta u Splitu; mr. sc. **Domagoj Matešan**, dipl. ing. građ., Institut građevinarstva Hrvatske, PC Split

## 1 Uvod

Ljuske, kao vrlo racionalne konstrukcije, odavno se upotrebljavaju u visokogradnji i niskogradnji. Simulacija realnog ponašanja betonskih ljsusaka, a osobito u slučajevima visokih razina naprezanja i dinamičkog (udarnog) opterećenja, još uvijek je složen zadatak. Pritom treba obuhvatiti ne samo materijalnu, već i geometrijsku nelinearnost konstrukcije.

Općenito, mehaničko ponašanje betona vrlo je složeno. Ono prije svega ovisi o vrsti, intenzitetu i uvjetima naprezanja i opterećenja. Dominantno nelinearno ponašanje betona jest zbog pojave i razvoja pukotina u vlaklu, i to kod vrlo niskih razina opterećenja. Modeliranje vlačne i posmične krutosti ispucanog betona još uvijek je u fazi intenzivnog istraživanja. Simuliranje popuštanja betona u tlaku, a osobito neposredno prije i nakon dosezanja tlačne čvrstoće (područje tzv. tlačnog omekšanja) također je još uvijek izuzetno složena zadaća. Utjecaj brzine nanošenja opterećenja, odnosno utjecaj brzine deformacije na mehaničke karakteristike betona i čelika veoma je značajan kod oštirih dinamičkih (udarnih) opterećenja. Ako se tomu pridodaju nelinearnosti zbog proklizavanja armature u odnosu prema okolnom betonu i nelinearno ponašanje armature, očito je da modeliranje realnog ponašanja betonskih ljsusaka u uvjetima kratkotrajnoga statičkog i dinamičkog opterećenja zahtijeva osobitu pozornost.

Kako su ljsuske vrlo tanke konstrukcije, utjecaj promjene geometrije pod opterećenjem može biti posebno značajno za stabilnost sustava. Promjena geometrije konstrukcije može pridonositi njezinu omekšanju ili pak ojačanju, ovisno o tipu nosivog sklopa.

Formulacija efikasnoga konačnog elementa ljsuske još uvijek nije potpuno riješena. Naime, još uvijek nije razvijen takav element koji precizno opisuje stvarno ponašanje konstrukcije i nema nikakvih drugih nedostataka. Degenerirani element ljsuske temeljen na trodimenzionalnoj teoriji kontinuuma danas ima, nedvojbeno, najveću primjenu.

U ovom radu prikazan je jedan numerički model za statičku i dinamičku analizu betonskih ljsusaka (nearniranih, klasično armiranih i prednapetih). Model je relativno jednostavan, a u isto vrijeme obuhvaća dominantne nelinearne efekte ponašanja armiranobetonskih konstrukcija kao što su:

- utjecaj brzine deformacije na mehaničke karakteristike betona i čelika kod dinamičkih opterećenja
- puzanje betona u tlaku
- nastajanje i razvoj pukotina betona u vlaklu
- otvaranje i zatvaranje pukotina

- vlačna krutost ispucanog betona
- posmična krutost ispucanog betona
- nelinearno ponašanje armature.

Usvojeni degenerirani konačni element ljsuske eliminira negativne utjecaje tzv. posmičnog i membranskog "lockinga". Uporabljani su 8-čvorni i 9-čvorni elementi zakrivljene ljsuske, s uslojenim modelom materijala po debljini ljsuske. Svojstva betona mogu se razlikovati za svaki sloj po debljini ljsuske. Armatura se modelira kao posebna lamela odgovarajuće debljine, s čvrstoćom i krutošću samo u smjeru pružanja šipki. Primijenjen je model tzv. raspodijeljenih pukotina, pretpostavljajući kontinuitet konstrukcije i nakon pojave pukotina. Pretpostavljena je potpuna kompatibilnost pomaka armature i okolnog betona, bez mogućnosti proklizavanja armature.

Utjecaj promjene geometrije konstrukcije uključen je preko tzv. pomičnog Lagrangeova koordinatnog sustava. U svakom iterativnom koraku traženja rješenja, ažuriraju se koordinate čvorova sustava te uspostavlja nova veza pomak-deformacija na deformiranoj konstrukciji.

U inženjerskoj praksi ljsuskama se obično nazivaju samo zakrivljene tanke konstrukcije, dok se ostale ravne tanke konstrukcije nazivaju pločama. Naime, u pločama se pojavljuju samo savojna djelovanja, dok se u ljsuskama pojavljuju savojna i membranska djelovanja. Kako teorija ljsusaka kao poseban pojednostavljeni slučaj uključuje teoriju ploča (nema zakrivljenosti elementa i membranskih sila), očito je da se izloženi model može primijeniti za analizu ploča i ljsusaka. U ovom se radu, ako to nije posebno raščlanjeno, pod ljsuskama uvijek podrazumijevati i ploče.

## 2 Usvojeni element ljsuske

Usvojeni element ljsuske pobliže je opisan u [32], [40], a u nastavku će se samo ukratko izložiti.

### 2.1 Formulacija klasičnog elementa degenerirane ljsuske

U većini slučajeva analitičko rješenje problema kontinuuma nije moguće. Stoga je potrebno problem riješiti numerički, tj. izvršiti njegovu diskretizaciju. Postoji nekoliko tehnika rješavanja diskretiziranog modela kontinuuma. Danas se najviše primjenjuje metoda konačnih elemenata (MKE) koja se zasniva na varijacijskim principima (ili principima virtualnog rada), a pokazala se kao najprikladnija tehnika diskretizacije kontinuuma. Svoju široku primjenu MKE je upravo doživjela u analizi ploča i ljsusaka. Ovdje je razmatrana metoda pomaka te je stoga uporabljen funkcional ukupne potencijalne energije za definiranje konačnog elementa ljsuske.

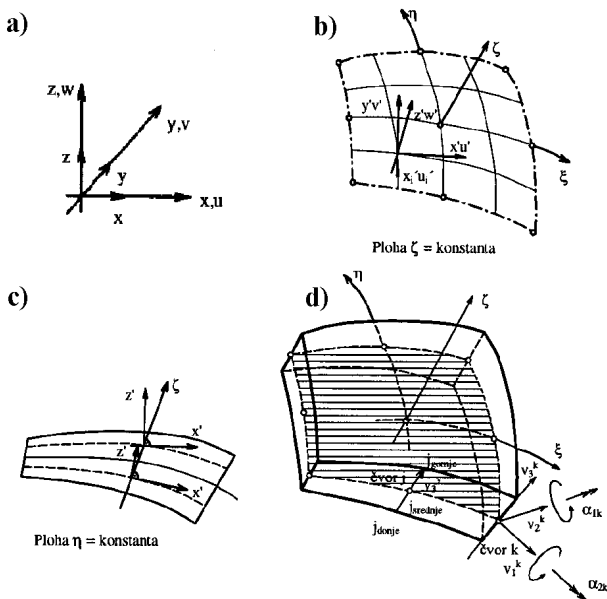
Obično se rabe tri načina diskretizacije ljsusaka s pomoću:

- ravnih “pločastih” elemenata
- elemenata formuliranih na temelju teorije zakrivljenih ljsusaka
- degeneriranih izoparametrijskih elemenata.

U posljednje je vrijeme najpopularniji Ahmadov degenerirani izoparametrijski element ljsuske kod kojeg postoji nezavisna interpolacija rotacija i translacijskih pomaka [2]. Kod ovog elementa primijenjena je Mindlinova teorija ploča. Usvojena je pretpostavka da normala na srednju plohu trodimenzionalnog elementa ostaje ravna i nakon deformiranja, kako bi se izbjegle numeričke teškoće vezane za velike omjere krutosti po debljini elementa. Također je zanemarena energija deformacije od naprezanja okomitih na lokalnu  $x'-y'$  plohu, te usvojeno da je normalna komponenta naprezanja jednaka nuli zbog pojednostavljenja konstitutivnih jednadžbi. Usvajanjem izoparametrijskog opisa geometrije, element se može uporabiti za opis tankih i debelih ljsusaka različitih složenih oblika i geometrije.

2.1.1 Koordinatni sustavi

U formulaciji degeneriranog elementa ljsuske primjenjuju se četiri koordinatna sustava (slika 1.).



Slika 1. Koordinatni sustavi

- Globalni Cartesijev koordinatni sustav primjenjuje se za definiranje koordinata i pomaka čvorova.
- Prirodni (krivolinijski) koordinatni sustav rabi se za definiranje baznih funkcija  $N_i$ . Srednja ploha elementa ljsuske definirana je s pomoću  $\xi$  i  $\eta$  koordinata. Smjer  $\zeta$  je samo približno okomit na srednju plohu ljsuske, a varira od +1 do -1 po debljini elementa.

- Lokalni Cartesijev koordinatni sustav definira lokalna naprezanja i deformacije u nekoj točki unutar elementa ljsuske. Pri tome je uzeto da je smjer  $z'$  okomit na plohu  $\zeta = \text{konstanta}$ . Smjer  $z'$  definira vektor  $V'_3$ , koji se dobiva kao vektorski produkt vektora tangencijalni sa smjerovima  $\xi$  i  $\eta$ , tj.

$$V'_3 = \xi \times \eta = \begin{bmatrix} \partial x / \partial \xi \\ \partial y / \partial \xi \\ \partial z / \partial \xi \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \partial x / \partial \eta \\ \partial y / \partial \eta \\ \partial z / \partial \eta \end{bmatrix} \quad (1)$$

Vektor  $V'_1$ , koji je u smjeru  $x'$ , uzima se da se podudara s tangentom u smjeru  $\xi$ , odnosno

$$V'_1 = \xi = \left[ \frac{\partial x}{\partial \xi}, \frac{\partial y}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \xi} \right]^T \quad (2)$$

Vektor  $V'_2$  u smjeru  $y'$  definiran je s pomoću vektorskog produkta vektora  $V'_3$  i  $V'_1$ , tj.

$$V'_2 = V'_3 \times V'_1 \quad (3)$$

Lokalni koordinatni sustav varira uzduž ljsuske pa je korisno odrediti matricu kosinusa smjerova  $\theta$  koja omogućuje transformaciju između lokalnog i globalnog koordinatnog sustava, koja je definirana sa

$$\theta = [V_1, V_2, V_3] \quad (4)$$

gdje su  $V_1, V_2$  i  $V_3$  jedinični vektori uzduž  $x', y'$  i  $z'$  osi, a koji su okomiti na vektore  $V'_1, V'_2$  i  $V'_3$ .

- Čvorni Cartesijev koordinatni sustav lokalni je Cartesijev koordinatni sustav pridružen u svakoj čvornoj točki elementa ljsuske, s ishodištem u srednjoj plohi ljsuske. Vektor  $V_3^k$  je zadan čvornim koordinatama na gornjoj i donjoj plohi ljsuske, tako da je za čvor  $k$

$$V_3^k = \Delta x_i^k / \left( [\Delta x_1^k]^2 + [\Delta x_2^k]^2 + [\Delta x_3^k]^2 \right)^{1/2} \quad (5)$$

( $i = 1, 2, 3$ )

gdje je

$$\Delta x_i^k = x_{i,gornje}^k - x_{i,donje}^k \quad (i = 1, 2, 3) \quad (6)$$

Vektor  $V_1^k$  je okomit na  $V_3^k$  i paralelan s globalnom  $x, z$  ravninom, tako da je

$$V_1^k = \mathbf{j} \times V_3^k / |\mathbf{j} \times V_3^k| \quad (7)$$

Ako je  $V_3^k$  u smjeru  $y$ , tada je

$$V_1^k = V_3^k \times \mathbf{i} / |V_3^k \times \mathbf{i}| \quad (8)$$

gdje su  $\mathbf{i}$  i  $\mathbf{j}$  jedinični vektori uzduž  $x$  i  $y$  smjera. Vektor  $V_2^k$  je okomit na ravninu definiranu s  $V_1^k$  i  $V_3^k$ , tj.

$$\mathbf{V}_2^k = \mathbf{V}_3^k \times \mathbf{V}_1^k / |\mathbf{V}_3^k \times \mathbf{V}_1^k| \quad (9)$$

Vektor  $\mathbf{V}_3^k$  definira smjer "normale" u čvoru  $k$ , koja nije nužno okomita na srednju plohu u  $k$ . Vektori  $\mathbf{V}_1^k$  i  $\mathbf{V}_2^k$  definiraju rotacije  $\alpha_2^k$  i  $\alpha_1^k$ .

2.1.2 Geometrija elementa

Za slučaj degeneriranog elementa ljsuske, svaki čvor ima pet stupnjeva slobode: tri translacijska pomaka u smjeru globalnih osi i dvije rotacije oko osi u ravnini srednje plohe. Koordinate točke na vektoru  $\mathbf{V}_3^k$  mogu se izraziti s pomoću

$$\bar{x}_i^k = x_i^k + \frac{\zeta}{2} h V_{3i}^k \quad (i = 1, 2, 3) \quad (10)$$

Potom je

$$x_i = \sum_{k=1}^n N^k(\xi, \eta) \bar{x}_i^k = \sum_{k=1}^n N^k(\xi, \eta) x_i^k + \frac{\zeta}{2} \sum_{k=1}^n N^k(\xi, \eta) h^k V_{3i}^k \quad (i = 1, 2, 3) \quad (11)$$

	<p>Bazne funkcije 8-čvornog degeneriranog konačnog elementa ljsuske</p> $N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) \cdot (\xi_i \xi + \eta_i \eta - 1)$ <p>za <math>i = 1, 3, 5, 7</math></p> $N_i = \frac{\xi_i^2}{2} (1 + \xi_i \xi) (1 - \eta^2) + \frac{\eta_i^2}{2} (1 + \eta_i \eta) (1 - \xi^2)$ <p>za <math>i = 2, 4, 6, 8</math></p>
	<p>Bazne funkcije 9-čvornog degeneriranog konačnog elementa ljsuske</p> $N_i = \frac{1}{4} \xi \eta (\xi + \xi_i) (\eta + \eta_i)$ <p>za <math>i = 1, 3, 5, 7</math></p> $N_i = \frac{\xi_i^2 \xi}{2} (\xi + \xi_i) (1 - \eta^2) + \frac{\eta_i^2 \eta}{2} (\eta + \eta_i) (1 - \xi^2)$ <p>za <math>i = 2, 4, 6, 8</math></p> $N_i = (1 - \eta^2) (1 - \xi^2)$ <p>za <math>i = 9</math></p>

Slika 2. Bazne funkcije

Alternativno se za određivanje geometrije u svakoj točki često rabe globalne koordinate točaka na gornjoj i donjoj plohi ljsuske (sliku 1.) to jest.

$$x_i = \sum_{k=1}^n N^k(\xi, \eta) \left[ \frac{1+\zeta}{2} x_{i,gornje}^k + \frac{1-\zeta}{2} x_{i,donje}^k \right] \quad (12)$$

U navedenim izrazima  $x_i$  označava Cartesijeve koordinate u nekoj točki elementa;  $x_i^k$  su Cartesijeve koordinate u čvornoj točki  $k$ ;  $h^k$  je debljina ljsuske u  $\zeta$  smjeru u čvornoj točki  $k$ ;  $V_{3i}^k$  je  $i$ -ta komponenta jediničnog vektora okomitog na srednju plohu;  $N^k(\xi, \eta)$  je dvodimenzionalna interpolacijska funkcija u pripadajućem čvoru  $k$  i  $\zeta$  = udaljenost od srednje plohe (slika 2.).

2.1.3 Polje pomaka

Pomaci u nekoj točki elementa ljsuske određeni su trima Cartesijevim komponentama čvornih pomaka srednje plohe  $u_{0i}^k$  i dvjema rotacijama čvornog vektora  $\mathbf{V}_3^k$  oko ortogonalnog smjera okomitog na njega. Pomaci  $u_i^k$  po debljini ljsuske u svakoj čvornoj točki su

$$u_i^k = u_{0i}^k + x_3' \left[ \theta_{x_1'}^k \left( \frac{\partial x_i}{\partial x_1'} \right)^k + \theta_{x_2'}^k \left( \frac{\partial x_i}{\partial x_2'} \right)^k \right] \quad (13)$$

$$= u_{0i}^k + \frac{\zeta}{2} h^k (V_{1i}^k \alpha_1^k - V_{2i}^k \alpha_2^k)$$

Prema [2], dobiva se

$$u_i = \sum_{k=1}^n N^k(\xi, \eta) u_i^k = \sum_{k=1}^n N^k(\xi, \eta) u_{0i}^k + \frac{\zeta}{2} \sum_{k=1}^n N^k(\xi, \eta) h^k (V_{1i}^k \alpha_1^k - V_{2i}^k \alpha_2^k) \quad (14)$$

$$= \sum_{k=1}^n \bar{N}^k(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{d}^k \quad (i = 1, 2, 3)$$

i

$$\mathbf{d}^k = [u_{01}^k, u_{02}^k, u_{03}^k, \alpha_1^k, \alpha_2^k]^T \quad (15)$$

gdje je  $u_{0i}^k$  pomak  $k$ -te čvorne točke u Cartesijevim koordinatama, a  $\alpha_1^k$  i  $\alpha_2^k$  su rotacije oko  $\mathbf{V}_2^k$  i  $\mathbf{V}_1^k$  [2], [3]. Pri tome je

$$\theta_{x_1'}^k = \alpha_1^k$$

$$\theta_{x_2'}^k = -\alpha_2^k \quad (16)$$

Očito jest da usvojena funkcija pomaka u (14) vrijedi samo za male rotacije.

Kao što je prije spomenuto, u metodi konačnih elemenata  $\mathbf{V}_3^k$  nije nužno okomit na srednju plohu ljsuske. Prema tome, uvedena je određena aproksimacija protivno pretpostavci o ravnoj normali.

2.1.4 Polje deformacija

Razmatrane komponente deformacija su

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}'_f \\ \boldsymbol{\varepsilon}'_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} \\ \frac{\partial v'}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial v'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial y'} \end{bmatrix} \quad (17)$$

gdje je  $\boldsymbol{\varepsilon}'_f$  vektor deformacija u ravnini (definiran u lokalnim koordinatama),  $\boldsymbol{\varepsilon}'_s$  je vektor poprečnih posmičnih deformacija, a  $u'$ ,  $v'$  i  $w'$  su komponente pomaka u lokalnom sustavu  $x'_i$ .

U lokalnom Cartesijevu koordinatnom sustavu gdje ravnina  $x' - y'$  tangira srednju plohu ljsuske,  $\boldsymbol{\varepsilon}'_f$  se može podijeliti na dva dijela: jedan za membransko djelovanje,  $\boldsymbol{\varepsilon}'_m$ , a drugi za savojno djelovanje,  $\boldsymbol{\varepsilon}'_b$ , tako da je

$$\boldsymbol{\varepsilon}'_f = \boldsymbol{\varepsilon}'_m + \boldsymbol{\varepsilon}'_b \quad (18)$$

gdje je

$$\boldsymbol{\varepsilon}'_m = \begin{bmatrix} \frac{\partial u'_o}{\partial x'} \\ \frac{\partial v'_o}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'_o}{\partial y'} + \frac{\partial v'_o}{\partial x'} \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}'_b = \begin{bmatrix} z' \frac{\partial \theta_{x'}}{\partial x'} \\ z' \frac{\partial \theta_{y'}}{\partial y'} \\ z' \left( \frac{\partial \theta_{x'}}{\partial y'} + \frac{\partial \theta_{y'}}{\partial x'} \right) \end{bmatrix} \quad (20)$$

Globalne derivacije pomaka  $u$ ,  $v$  i  $w$  transformiraju se u lokalne derivacije lokalnih pomaka  $u'$ ,  $v'$  i  $w'$  standardnim operacijama

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} & \frac{\partial v'}{\partial x'} & \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial u'}{\partial y'} & \frac{\partial v'}{\partial y'} & \frac{\partial w'}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} & \frac{\partial v'}{\partial z'} & \frac{\partial w'}{\partial z'} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\theta}^T \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \boldsymbol{\theta} \quad (21)$$

gdje je  $\boldsymbol{\theta}$  matrica transformacije oblika

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial x'} & \frac{\partial x}{\partial y'} & \frac{\partial x}{\partial z'} \\ \frac{\partial y}{\partial x'} & \frac{\partial y}{\partial y'} & \frac{\partial y}{\partial z'} \\ \frac{\partial z}{\partial x'} & \frac{\partial z}{\partial y'} & \frac{\partial z}{\partial z'} \end{bmatrix} \quad (22)$$

Globalne derivacije pomaka  $u$ ,  $v$ , i  $w$  dane su sa

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} & \frac{\partial v}{\partial \zeta} & \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (23)$$

gdje je  $\mathbf{J}$  Jacobijeva matrica

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (24)$$

U (23) derivacije pomaka u krivolinijskim koordinatama dobiju se iz (14), dok se Jacobijeva matrica dobije iz (11).

Matrica deformacije  $\mathbf{B}$ , koja povezuje komponente deformacije u lokalnom sustavu s čvornim nepoznicama elementa, može se konstruirati kao

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \sum_{k=1}^n \mathbf{B}_k \mathbf{d}_k \quad (25)$$

gdje su  $\boldsymbol{\varepsilon}'$  i  $\mathbf{d}_i$  definirani u (17) i (15), a  $\mathbf{B}$  je matrica s pet redaka i brojem stupaca koji je jednak broju čvornih varijabli elementa.

Izraz (25) može se napisati u parcijalnom obliku

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}'_f \\ \boldsymbol{\varepsilon}'_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n \mathbf{B}_{fk} \mathbf{d}_k \\ \sum_{k=1}^n \mathbf{B}_{sk} \mathbf{d}_k \end{bmatrix} \quad (26)$$

gdje su  $\boldsymbol{\varepsilon}'_f$  deformacije u ravnini, a  $\boldsymbol{\varepsilon}'_s$  poprečne posmične deformacije koje su definirane izrazom (17).

2.1.5 Naprezanja

Za opći anizotropni materijal, rabe se konstitutivne jednadžbe oblika

$$\boldsymbol{\sigma}^{ij} = \mathbf{C}^{ijkl} \boldsymbol{\varepsilon}_{kl} \quad (27)$$

gdje su  $\mathbf{C}^{ijkl}$  elastični koeficijenti, a  $\boldsymbol{\sigma}^{ij}$  naprezanja koja moraju zadovoljiti ravnotežu na elementu.

Za slučaj ortotropnog materijala koji ima tri međusobno okomite osi elastične simetrije, od kojih su dvije (1, 2) tangencijalne na materijalnu lamelu i treća (3) okomita na nju, dobiva se

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E_1}(\sigma_1 - \nu_{12}\sigma_2 - \nu_{13}\sigma_3) \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E_2}(\sigma_2 - \nu_{21}\sigma_1 - \nu_{23}\sigma_3) \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E_3}(\sigma_3 - \nu_{31}\sigma_1 - \nu_{32}\sigma_2) \\ \gamma_{12} &= \tau_{12} / G_{12}, \quad \gamma_{13} = \tau_{13} / G_{13}, \quad \gamma_{23} = \tau_{23} / G_{23} \end{aligned} \tag{28}$$

gdje su  $E_1, E_2$  i  $E_3$  moduli elastičnosti u materijalnim smjerovima 1, 2 i 3,  $\nu_{ij}$  je Poissonov koeficijent za poprečne deformacije u  $i$ -smjeru od naprezanja u  $j$ -smjeru, a  $G_{12}, G_{13}$  i  $G_{23}$  su moduli smika u 1-2, 1-3 i 2-3 ravninama. Zbog recipročne veze  $\nu_{ij} / E_i = \nu_{ji} / E_j$ , ostaje samo devet nezavisnih elastičnih konstanta za ortotropni elastični medij. Usvajajući da postoji ravninsko stanje naprezanja u srednjoj ravnini i da su promjene debljine ljsuske tijekom deformiranja zanemarive, (28) se reducira na standardni izraz

$$\sigma_{1,2,3} = \mathbf{D}\varepsilon_{1,2,3} \tag{29}$$

gdje su

$$\sigma_{1,2,3} = [\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23}]^T \tag{30}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1,2,3} &= [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23}]^T \\ \mathbf{D} &= \begin{bmatrix} D_1 & D_{12} & 0 & 0 & 0 \\ D_{12} & D_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_5 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned} D_1 &= E_1 / \Delta, \quad D_2 = E_2 / \Delta \\ D_{12} &= E_2 \nu_{12} / \Delta, \quad D_3 = G_{12}, \quad \Delta = 1 - \nu_{12}\nu_{21} \\ D_4 &= K_1 G_{13}, \quad D_5 = K_2 G_{23} \end{aligned} \tag{32}$$

$K_1$  i  $K_2$  su korekcijski faktori za posmik u 1-3 i 2-3 ravninama koji će se odrediti kasnije.

Općenito, glavne osi anizotropije 1 i 2 ne podudaraju se s osima  $x$  i  $y$ , već su rotirane za neki kut  $\omega$ . Konstitutivna veza (29) mora se transformirati prije određivanja matrice krutosti elementa, prema

$$\sigma_{1,2,3} = \mathbf{\Omega}_\sigma \sigma_{x,y,z} \tag{33}$$

$$\varepsilon_{1,2,3} = \mathbf{\Omega}_\varepsilon \varepsilon_{x,y,z} \tag{34}$$

gdje su

$$\begin{aligned} \sigma_{x,y,z} &= [\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}]^T \\ \varepsilon_{x,y,z} &= [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}]^T \end{aligned} \tag{35}$$

a matrice transformacije naprezanja i deformacija  $\mathbf{\Omega}_\sigma$  i  $\mathbf{\Omega}_\varepsilon$  dobivene su s pomoću izraza

$$\begin{aligned} \mathbf{\Omega}_\sigma &= \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs & 0 & 0 \\ s^2 & c^2 & -2cs & 0 & 0 \\ -cs & cs & c^2 - s^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix} \\ \mathbf{\Omega}_\varepsilon &= \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & cs & 0 & 0 \\ s^2 & c^2 & -cs & 0 & 0 \\ -2cs & 2cs & c^2 - s^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{36}$$

gdje je  $c = \cos \omega$ ,  $s = \sin \omega$ . Uvrštenjem (33)-(35) u (29), i ako se označi  $(\mathbf{\Omega}_\sigma)^{-1} = \mathbf{\Omega}_\sigma^T$ , dobiva se

$$\sigma_{x,y,z} = \bar{\mathbf{D}}\varepsilon_{x,y,z} \tag{37}$$

gdje je

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{D}} &= (\mathbf{\Omega}_\sigma)^{-1} \mathbf{D} \mathbf{\Omega}_\varepsilon = \mathbf{\Omega}_\sigma^T \mathbf{D} \mathbf{\Omega}_\varepsilon \\ &= \begin{bmatrix} \bar{D}_1 & \bar{D}_{12} & \bar{D}_{13} & 0 & 0 \\ \bar{D}_{12} & \bar{D}_2 & \bar{D}_{23} & 0 & 0 \\ \bar{D}_{13} & \bar{D}_{23} & \bar{D}_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{D}_4 & \bar{D}_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{D}_{45} & \bar{D}_5 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{38}$$

Prethodne konstitutivne jednačbe zapisane u parcijalnom obliku su

$$\sigma' = \begin{bmatrix} \sigma'_f \\ - \\ \sigma'_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \tau_{x'y'} \\ - \\ \tau_{x'z'} \\ \tau_{y'z'} \end{bmatrix} = \mathbf{D}' \begin{bmatrix} \varepsilon'_f \\ - \\ \varepsilon'_s \end{bmatrix} \tag{39}$$

gdje su  $\sigma'_f$  ( $\varepsilon'_f$ ) naprezanja (deformacije) u srednjoj ravnini, a  $\sigma'_s$  ( $\varepsilon'_s$ ) poprečna posmična naprezanja (deformacije) definirani u lokalnim koordinatama. Dalje je

$$\mathbf{D}' = \begin{bmatrix} \mathbf{D}'_f & \mathbf{0} \\ - & + - \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}'_s \end{bmatrix} \tag{40}$$

Za izotropan materijal jest

$$\mathbf{D}'_f = \begin{bmatrix} \bar{\lambda} + 2G & \bar{\lambda} & 0 \\ \bar{\lambda} & \bar{\lambda} + 2G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}'_s = \begin{bmatrix} KG & 0 \\ 0 & KG \end{bmatrix} \tag{41}$$

Za slučaj homogenoga poprečnog presjeka, uzima se da korekcijski faktor  $K$  iznosi  $\frac{5}{6}$ . Za heterogeni poprečni presjek korekcijski faktor  $K$  će se dati poslije.  $G$  je modul smika,  $E$  je modul elastičnosti,  $\nu$  je Poissonov koeficijent i  $\bar{\lambda}$  je Laméova konstanta  $\left[\bar{\lambda} = \nu E / (1 - \nu^2)\right]$ .

### 2.1.6 Krutosti

Za statičke se probleme ukupna potencijalna energija sustava može napisati kao

$$\pi = \sum_e \pi_e \quad (42)$$

gdje je  $\pi_e$  potencijalna energija pojedinog elementa.

Pri tome je

$$\begin{aligned} \pi_e &= \frac{1}{2} \mathbf{d}_e^T \left[ \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \right] \mathbf{d}_e - W \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{d}_e^T \left[ \int_{V_e} \mathbf{B}_f^T \mathbf{D}_f \mathbf{B}_f dV \right] \mathbf{d}_e \\ &\quad + \frac{1}{2} \mathbf{d}_e^T \left[ \int_{V_e} \mathbf{B}_s^T \mathbf{D}_s \mathbf{B}_s dV \right] \mathbf{d}_e - W \end{aligned} \quad (43)$$

gdje je matrica elastičnosti  $\mathbf{D}$  podijeljena u ravninski dio  $\mathbf{D}_f$  i poprečni posmični dio  $\mathbf{D}_s$ . Nakon diskretizacije konačnim elementima i traženja minimuma od  $\pi$  u odnosu prema čvornim varijablama  $\mathbf{d}$ , dobiju se sljedeće jednadžbe

$$\mathbf{K}_{ij} \mathbf{d}_j = \mathbf{f}_i \quad (44)$$

u kojima matrica krutosti  $\mathbf{K}_{ij}$  povezuje čvorove  $i$  i  $j$ , a sadrži doprinose ravninske i poprečne posmične energije deformacije

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{fij}^e &= \int_{V_e} \mathbf{B}_{fi}^T \mathbf{D}_f \mathbf{B}_{fj} dV \\ \mathbf{K}_{sij}^e &= \int_{V_e} \mathbf{B}_{si}^T \mathbf{D}_s \mathbf{B}_{sj} dV \end{aligned} \quad (45)$$

gdje se rabi integracijsko pravilo s dvije točke po debljini ljsuske te puna integracija u  $\xi$ - $\eta$  plohi. Zatim je

$$dV = dx' dy' dz' = |\mathbf{J}| d\xi d\eta d\zeta \quad (46)$$

gdje je  $|\mathbf{J}|$  determinanta Jacobijeve matrice.

Ako su osi lokalnoga koordinatnog sustava paralelne s osima globalnoga koordinatnog sustava u svim točkama srednje plohe ljsuske, tada su izrazi za element ljsuske isti kao i za Mindlinov element ploče.

### 2.1.7 Nedostaci elementa Mindlinove ploče i klasičnog elementa degenerirane ljsuske

Mindlinov element ploče i degenerirani element ljsuske dobro opisuju debele ploče i ljsuske. Međutim, za tanke ploče i ljsuske pri upotrebi pune integracije za izračunavanje matrice krutosti često dolazi do povećanja posmične i membranske krutosti, koja se nazivaju posmičnim i membranskim "lockingom". Naime, ako se usvoji da odnos debljina/raspon teži nuli, posmične deformacije ne mogu težiti nuli iako bi trebale prema teoriji tankih ploča. Slično tome, kod ljsusaka čija je debljina vrlo mala, membranska krutost dominira u odnosu prema ukupnoj krutosti. Ovo ima za posljedicu povećanje krutosti – ukrućenje ("locking") od posmičnih deformacija (posmični "locking"), odnosno membranskih deformacija (membranski "locking").

Primjenom reducirane ili selektivne integracije pokušalo se ispraviti ovaj nedostatak. Međutim, takve tehnike nisu uvijek uspješne u svladavanju "locking" problema, a dobiveni rezultati još uvijek mogu davati prevelike krutosti (osobito kod problema s upetim rubovima i grubom mrežom konačnih elemenata). Kod problema s pretežitom slobodnim rubovima, mogu se formirati mehanizmi ili nul-energetski modovi. Takvi se mehanizmi mogu širiti od elementa do elementa, uzrokujući nepostojanje rješenja ili još opasnije slučajeve dobivanja pogrešnih rješenja neposredno pred nastajanje mehanizama.

### 2.2 Formulacija usvojenog elementa degenerirane ljsuske

Budući da reducirana i selektivna integracija stvaraju nulte energetske modove, različiti su autori pokušali razviti različite alternativne pristupe izbjegavanja problema "locking-a" [4], [5], [9], [12], [13], [14], [25], [27]. U ovom je radu uporabljen pristup sa zamjenjujućim poljem posmika koji su izvorno uveli Bathe i Dvorkin [4], [9] te poslije poopćio Huang [21], [24].

Element degenerirane ljsuske razvijen je upotrebom:

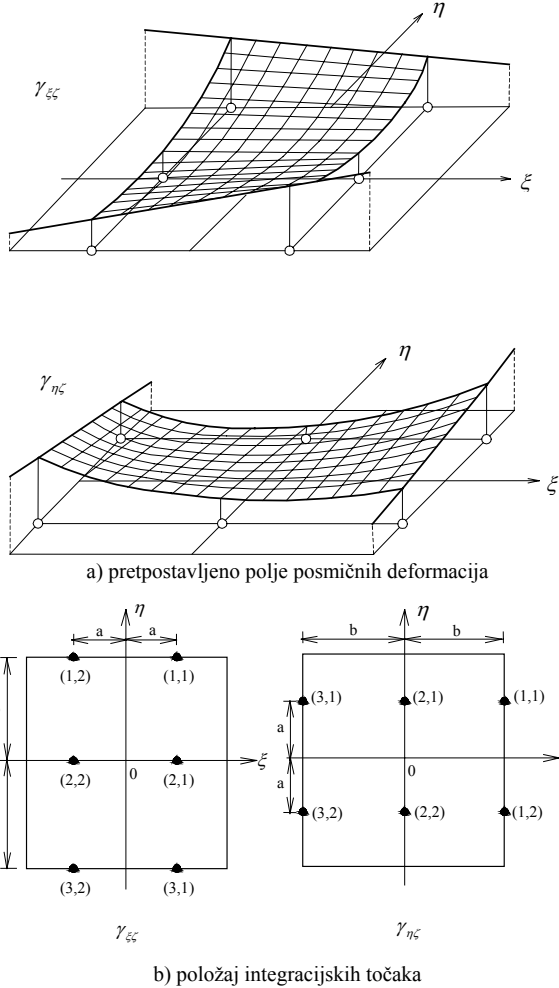
- pretpostavljenih poprečnih posmičnih deformacija izraženih u prirodnom koordinatnom sustavu [22]
- pretpostavljenih membranskih deformacija izraženih u ortogonalnom krivolinijskom koordinatnom sustavu [21].

Ovaj element nema problema "lockinga" i nastajanja mehanizama. Element je detaljno opisan u [24], a u nastavku je sažeti prikaz načina rješavanja problema "lockinga".

#### 2.2.1 Eliminacija posmičnog "lockinga"

Kao što je prethodno navedeno, komponente posmične deformacije  $\bar{\gamma}_{\xi\xi}$  i  $\bar{\gamma}_{\eta\xi}$  definirane su u prirodnom koordinatnom sustavu  $(\xi, \eta, \zeta)$ . Uvedene su odgovarajuće

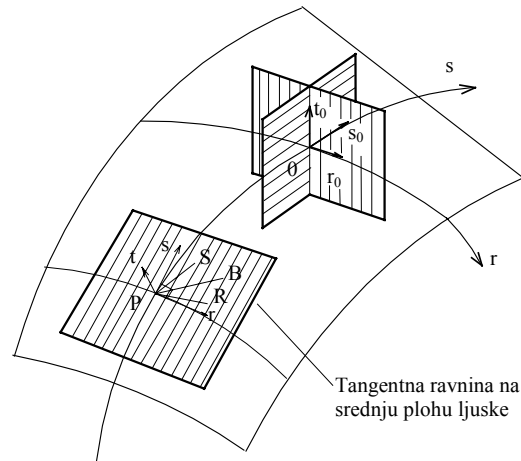
bazne funkcije i definiran položaj integracijskih točaka za opis pretpostavljenog polja posmičnih deformacija. Na slici 3. prikazano je polje pretpostavljenih posmičnih deformacija i pripadajući položaj integracijskih točaka za 9-čvorni Lagrangeov element.



Slika 3. Modificirani 9-čvorni Lagrangeov element za eliminiranje posmičnog "lockinga"

2.2.2 Eliminacija membranskog "lockinga"

Za eliminiranje membranskog "lockinga" uveden je ortogonalni koordinatni sustav  $(r, s, t)$  kod kojeg se  $(r, s, 0)$  ploha podudara sa srednjom plohom elementa ljsuske, a os  $t$  je okomita na tu plohu (slika 4.). Komponente membranske deformacije izražene su u ovom koordinatnom sustavu. Uvedene su bazne funkcije za definiranje pretpostavljenog polja komponenta membranskih deformacija  $\bar{e}_{m-ss}$  i  $\bar{e}_{m-rs}$ , koje su analogne onima za definiranje polja posmika. Osnovna je razlika u tome što su posmične deformacije definirane u  $(\xi, \eta, \zeta)$  sustavu, a membranske deformacije u  $(r, s, t)$  sustavu. Rabi se isti položaj integracijskih točaka za definiranje polja posmika i polja membranskih deformacija.



Slika 4. Definicija ortogonalnog krivolinijskog koordinatnog sustava  $(r, s, t)$

Tablica 1. Modifikacije deformacija elementa ljsuske za eliminiranje posmičnog i membranskog "lockinga"

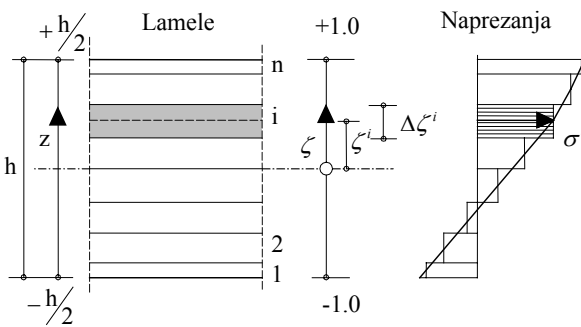
Deformacije		
U globalnom koordinatnom sustavu	$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) = \mathbf{Bd}$	
Transformacija u	$r-s-t(r_i)$ koordinatni sustav	$\xi-\eta-\zeta(\xi_i)$
	$e_{kl} = \frac{\partial x^i}{\partial r^k} \frac{\partial x^j}{\partial r^l} \epsilon_{ij}$	$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial \xi^\beta} \epsilon_{ij}$
	$\mathbf{e}_m$	$\mathbf{e}_b$
Interpolacija za	$\bar{e}_{m-tr}$	$\bar{\gamma}_{\xi\zeta}$
	$\frac{1}{2} \bar{e}_{m-rs}^{(a)}$	
	$\bar{e}_{m-ss}$	$\bar{\gamma}_{\eta\zeta}$
	$\frac{1}{2} \bar{e}_{m-rs}^{(b)}$	
Zamjenjujuće deformacije	$\bar{\mathbf{e}}_f = \bar{\mathbf{e}}_m + \bar{\mathbf{e}}_b$	$\bar{\gamma}_s$
Transformacija u sustav $x' - y' - z'$	$\bar{\epsilon}'_{fj'j'} = \frac{\partial r^k}{\partial x^{i'}} \frac{\partial r^l}{\partial x^{j'}} \bar{\epsilon}_{kl}$	$\bar{\epsilon}'_{st'j'} = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^{i'}} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^{j'}} \bar{\gamma}_{\alpha\beta}$
Puna integracija	$\bar{\boldsymbol{\epsilon}}' = \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\epsilon}}'_f \\ \bar{\boldsymbol{\epsilon}}'_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_f \\ \bar{\mathbf{B}}_s \end{bmatrix} \mathbf{d} = \bar{\mathbf{B}} \mathbf{d}$	
	$\bar{\mathbf{K}} = \int_V \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{D} \bar{\mathbf{B}} dV$	



U tablici 1. prikazana je modifikacija deformacija za 9-čvorni Lagrangeov element, pri čemu  $\epsilon_m$  označava membranske,  $\epsilon_b$  savojne a  $\gamma_s$  posmične deformacije.

### 2.3 Uslojeni model po debljini ljsuske

Da bi se moglo pratiti nelinearno ponašanje materijala po debljini ljsuske, obično se rabi tzv. uslojeni model. Naime, ljsuska je po debljini podijeljena u više slojeva (lamela), koji mogu biti različite debljine (slika 5.). Prirodna koordinata, koja se mijenja od  $-1$  do  $1$ , smještena je u sredini svake lamele. Komponente deformacija i naprezanja, te doprinosi krutosti, računaju se u sredini svake lamele.



Slika 5. Uslojeni model po debljini ljsuske

Integral volumena može se rastaviti preko površine srednje plohe ljsuske i preko debljine ( $h$ ). Dakle, krutost se može napisati kao

$$\mathbf{K} = \int_{\nu} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\nu = \int_S \left( \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dz \right) dS \quad (47)$$

Koristeći se izoparametrijskim preslikavanjem, slijedi

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \left( \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} |J(\xi, \eta, \zeta)| d\zeta \right) d\xi d\eta \\ &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \left( \sum_{j=1}^L \mathbf{B}_j^T \mathbf{D}_j \mathbf{B}_j |J(\xi, \eta, \zeta_j)| \frac{2\Delta h_j}{h} \right) d\xi d\eta \end{aligned} \quad (48)$$

gdje je  $|J(\xi, \eta, \zeta_j)|$  determinanta Jacobijeve matrice za lamelu  $j$ ,  $\Delta h_j$  je debljina  $j$ -te lamele i  $L$  ukupni broj lamela.

Prema usvojenoj formulaciji konačnog elementa,  $\mathbf{B}$  matrica se interpolira nakon što se izračuna matrica krutosti  $\mathbf{K}$ . Kako su posmične deformacije uzete konstante po debljini ljsuske, nije potrebno interpolirati matricu veze posmična deformacija-pomak,  $\mathbf{B}_s$ , u svakoj lameli. Stoga je  $\mathbf{B}_s$  usvojena konstantnom po debljini.

Kako je usvojena pretpostavka konstantnih posmičnih deformacija po debljini ljsuske, a ne stvarna parabolična raspodjela, potrebno je uvesti koeficijente  $K_1$  i  $K_2$  koji kompenziraju pogreške nastale zbog nepostojanja kontinuiteta posmičnog naprezanja. Određivanje ovih koeficijenata može se, primjerice naći u [10]. Za izotropne materijale vrijedi  $K_1 = K_2 = \frac{5}{6}$ .

## 3 Model materijala

### 3.1 Model betona

Još uvijek ne postoje općeprihvaćene konstitutivne jednadžbe koje bi opisivale svu složenost ponašanja betona u različitim stanjima naprezanja, pri čemu se one dominantno odnose na uvjete statičkog opterećenja i samo manjim dijelom na uvjete dinamičkog opterećenja. Predloženi su razni modeli za opisivanje veze naprezanje-deformacija pod višeosnim naprezanjem i različitim uvjetima opterećenja. Svaki od njih ima određene prednosti i nedostatke, ovisno o razmatranom problemu. Primjena pojednostavljenih modela, koji još uvijek dobro opisuju najvažnija svojstva materijala za promatrana stanja, svakako je poželjna s proračunskog stajališta jer omogućava opsežniji proračun. Pojednostavljeni modeli, koji se temelje na manjem broju uobičajenih parametara betona, svakako su prioritetni u širim praktičnim aplikacijama (gdje nije moguće koristiti se složenim modelima temeljenim na većem broju laboratorijski utvrđenih parametara).

Ovdje je primijenjen u osnovi vrlo jednostavan model betona, namijenjen svakodnevnim praktičnim potrebama, koji se temelji na osnovnim parametrima betona (jednoosna tlačna i vlačna čvrstoća, modul elastičnosti i Poissonov koeficijent), koje je ionako potrebno poznavati za druge potrebe.

Za uključivanje utjecaja dinamičkog opterećenja na mehaničke karakteristike betona, uvedena je ovisnost klasične jednoosne tlačne čvrstoće  $f'_c$ , vlačne čvrstoće  $f'_t$  i modula elastičnosti betona  $E_c$  o brzini deformacije  $\dot{\epsilon}$ . Usvojena je ovisnost dinamičkih i statičkih parametara sukladno [38], odnosno prema

$$f'_{cd} = f'_c [1 + 0.08 \log_{10}(1 + 10^5 \dot{\epsilon})]; \quad f'_{cd} \geq f'_c \quad (49)$$

$$f'_{td} = f'_t [1 + 0.08 \log_{10}(1 + 10^5 \dot{\epsilon})]; \quad f'_{td} \geq f'_t \quad (50)$$

$$E_{cd} = E_c [1 + 0.05 \log_{10}^2(1 + 10^5 \dot{\epsilon})]; \quad E_{cd} \geq E_c \quad (51)$$

U navedenim izrazima, koji su jedinstveni za sve betone,  $f'_{cd}$  označuje jednoosnu dinamičku tlačnu čvrstoću,  $f'_{td}$  jednoosnu dinamičku vlačnu čvrstoću i  $E_{cd}$  dinamički

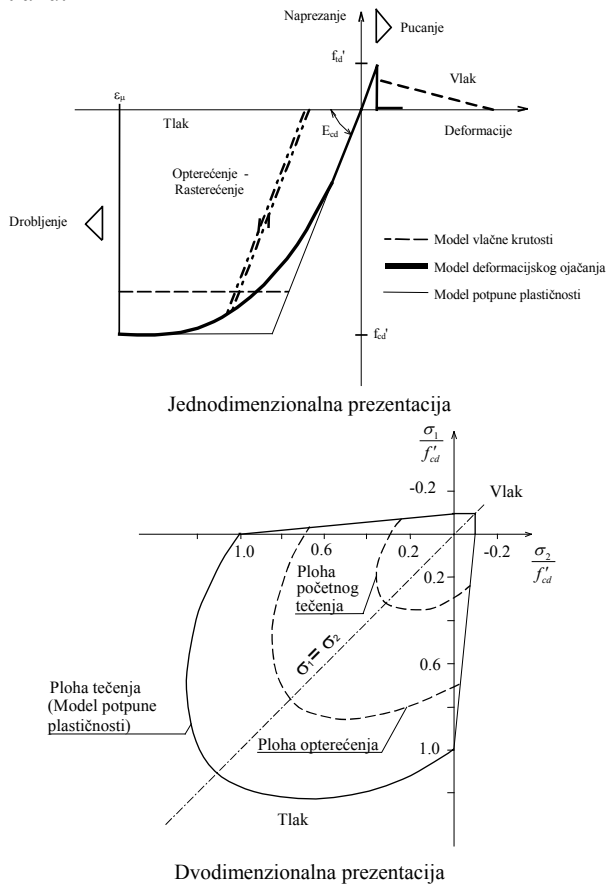
modul elastičnosti betona;  $f'_c$ ,  $f'_t$  i  $E_c$  označavaju odgovarajuće vrijednosti parametara za jednoosno statičko opterećenje, dok je  $\&$  brzina ekvivalentne deformacije definirana sa

$$\& = \left\{ \frac{2(\&_{xx}^2 + \&_{yy}^2) + \&_{xy}^2 + \&_{xz}^2 + \&_{yz}^2}{3} \right\}^{1/2} \quad (52)$$

U numeričkom postupku u svakoj iteraciji svakoga vremenskog inkrementa, izračunava se brzina ekvivalentne deformacije u svakoj integracijskoj točki svake lamele betona i utvrđuju tekući dinamički parametri betona. Za izračunane tekuće vrijednosti parametara betona, uvodi se konstitutivni model betona kao za statičko opterećenje [32], [40].

Granična (slomna) deformacija betona i Poissonov koeficijent uzeti su fiksni, odnosno neovisni o brzini deformacije. Nije računano sa smanjenjem čvrstoće betona pri ponovljenom (cikličkom) opterećenju.

Grafička prezentacija usvojenog modela betona prikazana je na slici 6. Pritom treba imati na umu da  $f'_{cd}$ ,  $f'_{td}$ ,  $E_{cd}$ , odnosno veze  $\sigma - \varepsilon$  (plohe tečenja) nisu fiksne, već se permanentno mijenjaju ovisno o tekućoj brzini ekvivalentne deformacije  $\&$ . U nastavku ćemo se odvojeno opisati modeliranje betona u vlaku te odvojeno u tlaku.

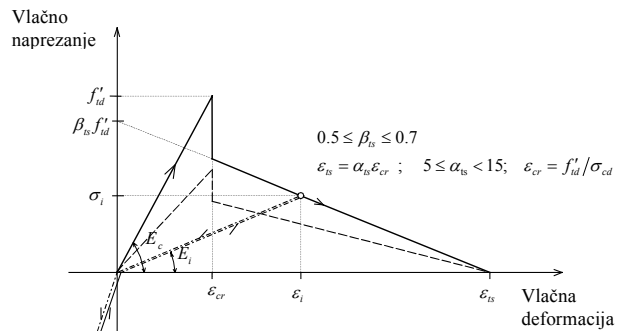


Slika 6. Grafički prikaz modela betona

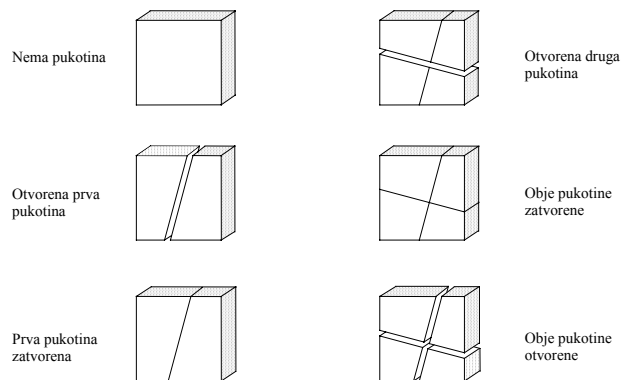
### 3.1.1 Modeliranje betona u vlaku

Grafička interpretacija modela betona u vlaku pobliže je prikazana na slici 7. Pretpostavljeno je linearno-elastično ponašanje betona sve dok se ne dosegne njegova tekuća dinamička vlačna čvrstoća  $f'_{td}$ . Uzima se da pukotine u betonu nastaju samo u ravninama okomitim na srednju ravninu ljsuske. Zapravo, računa se da se svaka lamela betona po visini ljsuske nalazi u stanju ravninskog naprezanja i razvoj pukotina prati se za to stanje [32]. Pretpostavlja se da i nakon pucanja beton ostaje kontinuum. Naime, uporabljen je model tzv. distribuiranih pukotina. Računano je da se nakon prve pojave pukotina njezin položaj i smjer više ne mijenjaju za ostale promjene opterećenja. Primijenjen je, dakle, model tzv. fiksnih ortogonalnih pukotina.

Nakon pojave pukotina beton postaje anizotropan, a smjer pukotine određuje glavne smjerove anizotropije. Modelirano je djelomično i potpuno zatvaranje pukotina u rasterećenju i ponovno otvaranje prije nastalih pukotina pri ponovnom opterećenju. Moguće stanje pukotina prikazano je na slici 8.



Slika 7. Model betona u vlaku



Slika 8. Shematski prikaz mogućih slučajeva otvaranja i zatvaranja pukotina (pukotine su okomite na ravninu ljsuske)

Doprinosi krutosti neispucanog betona između pukotina simuliran je postupnim smanjenjem komponente vlačnog naprezanja okomito na ravninu pukotine, a sukladno slici 7. Na slici je također ilustrirano ponašanje pri optere-

ćenju i rasterećenju. Pretpostavljeno je da opterećenje, rasterećenje i ponovno opterećenje slijede linearno ponašanje s fiktivnim modulima elastičnosti  $E_i$ , koji su definirani s

$$E_i = \beta_{ts} f'_{td} (1 - \varepsilon_i / \varepsilon_{ts}) / \varepsilon_i; \quad \varepsilon_{cr} \leq \varepsilon_i \leq \varepsilon_{ts} \quad (53)$$

gdje su  $\beta_{ts}$  i  $\varepsilon_{ts}$  parametri vlačne krutosti betona, a  $\varepsilon_i$  najveća registrirana vrijednost vlačne deformacije okomite na ravninu pukotine u promatranoj točki. Ukoliko  $\varepsilon_i$  premaši vrijednost  $\varepsilon_{ts}$ , usvojeno je  $\sigma = 0$ . Ako je pukotina zatvorena, tj. kad je deformacija okomita na ravninu pukotine negativna, tlačna naprezanja preko ravnine pukotine mogu se prenositi kao i u slučaju homogenog betona. Nakon ponovnog otvaranja prethodno zatvorene pukotine uzima se u obzir prethodno smanjena vlačna krutost, odnosno pri ponovnom opterećenju  $E_{cd}$  se uzima prema slici 7.

Dakle, naprezanje okomito na ravninu pukotine  $\sigma_1^*$  (i/ili  $\sigma_2^*$ ) dobiva se prema navedenoj slici s

$$\begin{aligned} \sigma_1^* &= \beta_{ts} f'_{td} (1 - \varepsilon_{it} / \varepsilon_{ts}) \text{ za } \varepsilon_i \leq \varepsilon_{it} \leq \varepsilon_{ts} \\ \sigma_1^* &= \sigma_i \varepsilon_{it} / \varepsilon_i \text{ za } \varepsilon_{it} \leq \varepsilon_i \end{aligned} \quad (54)$$

gdje je  $\varepsilon_{it}$  tekuća vlačna deformacija u promatranoj točki okomito na ravninu pukotine.

Granična vlačna deformacija okomita na ravninu pukotine iznad koje nema doprinosa vlačne krutosti betona može se izraziti s

$$\varepsilon_{ts} = \alpha_{ts} \varepsilon_{cr} \quad (55)$$

gdje je  $\varepsilon_{cr} = f'_{td} / E_{cd}$  deformacija kod prve računске pojave pukotine,  $\alpha_{ts}$  odabrani koeficijent, a  $E_{cd}$  početni dinamički modul elastičnosti betona u vlak. Kako nema načina njegova točnog određivanja, ostaje jedina mogućnost da se  $\alpha_{ts}$  odredi na temelju iskustva. Može se svrsishodno primijeniti da je:  $5 \leq \alpha_{ts} \leq 20$ , odnosno da  $\varepsilon_{ts}$  bude između 0,5‰ i 2‰ [11].

Vrijednost koeficijenta  $\beta_{ts}$  treba uzeti u granicama  $0.5 \leq \beta_{ts} \leq 0.7$ , ovisno o postotku armiranja presjeka. U praktičnim slučajevima može se općenito računati s  $\beta_{ts} = 0.6$  [11].

Posmična krutost ispučanog betona simulirana je sukladno slici 9. Naime, usvojen je takav model pri kojem se modul smika puknutog betona uzima u funkciji deformacije okomito na ravninu pukotine.

Za beton koji ima jednu pukotinu u lokalnom smjeru 1 vrijedi:

$$\begin{aligned} G_{12} &= G(1 - \varepsilon_1 / \varepsilon_{sh}); \quad G_{12} = 0 \text{ za } \varepsilon_1 \geq \varepsilon_{sh} \\ G_{13} &= G_{12} \\ G_{23} &= \frac{5}{6} G \end{aligned} \quad (56)$$

gdje je  $G$  modul smika homogenog betona [ $G = E_{cd} / 2(1 + \nu)$ ].

Za beton koji ima jednu pukotinu u smjeru 2 vrijedi

$$\begin{aligned} G_{12} &= G(1 - \varepsilon_2 / \varepsilon_{sh}); \quad G_{12} = 0 \text{ za } \varepsilon_2 \geq \varepsilon_{sh} \\ G_{23} &= G_{12} \\ G_{13} &= \frac{5}{6} G \end{aligned} \quad (57)$$

Za beton koji ima pukotinu u oba smjera jest

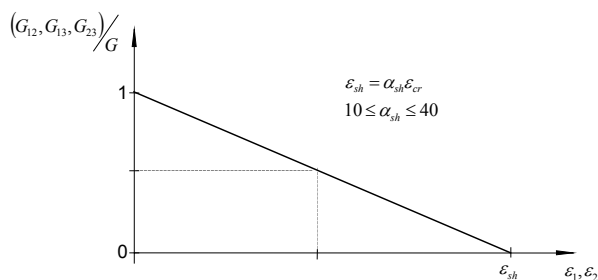
$$\begin{aligned} G_{12} &= G(1 - \varepsilon_{max} / \varepsilon_{sh}); \quad G_{12} = 0 \text{ za } \varepsilon_{max} \geq \varepsilon_{sh} \\ G_{13} &= G(1 - \varepsilon_1 / \varepsilon_{sh}); \quad G_{13} = 0 \text{ za } \varepsilon_2 \geq \varepsilon_{sh} \\ G_{23} &= G(1 - \varepsilon_2 / \varepsilon_{sh}); \quad G_{23} = 0 \text{ za } \varepsilon_1 \geq \varepsilon_{sh} \end{aligned} \quad (58)$$

Ako je pukotina zatvorena, modul smika u tom smjeru uzima se kao kod neispucanog betona.

Granična deformacija okomito na ravninu pukotine iznad koje nema računskog prijenosa posmika može se izraziti kao

$$\varepsilon_{sh} = \alpha_{sh} \varepsilon_{cr} \quad (59)$$

gdje je  $\alpha_{sh}$  traženi koeficijent. Ova fiktivna deformacija odgovara širini pukotine kod koje nema zahvaćanja agregata u posmiku i trenja između ravnina pukotina, te utjecaja zaklinjenja armature. Budući da nema načina točnog određivanja koeficijenta  $\alpha_{sh}$ , i ovdje ostaje samo mogućnost da se on odredi na temelju iskustva. Za vrijednost koeficijenta  $\alpha_{sh}$  može se usvojiti  $10 \leq \alpha_{sh} \leq 40$  [37] odnosno da vrijednost  $\varepsilon_{sh}$  bude od oko 1‰ i 4‰.



Slika 9. Model redukcije modula smika puknutog betona

### 3.1.2 Modeliranje betona u tlaku

Modeliranje betona u tlaku grafički je prikazano na slici 6. Za opis tlačnog ponašanja betona korištena je teorija plastičnosti, za koju je potrebno definirati: uvjet tečenja, pravilo ojačanja i pravilo tečenja, te uvjet drobljenja.

(i) Uvjet tečenja

U izloženom modelu ploča i ljsusaka uključen je utjecaj poprečnog posmika, pa je nužno koristiti se troosnim uvjetom tečenja oblika

$$f(I_1, J_2) = [\alpha I_1 + \beta(3J_2)]^{1/2} = \sigma_0 \quad (60)$$

gdje su  $I_1, J_2$  prve dvije invarijante naprezanja,  $\alpha$  i  $\beta$  parametri materijala, a  $\sigma_0$  ekvivalentno efektivno naprezanje (uzeto kao tlačno naprezanje dobiveno jednoosnim testom). Ako se svede na glavna naprezanja, (60) se može napisati u obliku

$$\alpha(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + \beta[(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)] = \sigma_0^2 \quad (61)$$

Kako stanje naprezanja u debelim pločama i ljsuskama odgovara približno dvoosnom stanju (jer je naprezanje okomito na srednju plohu  $\sigma_z$ , zanemarivo), logična je upotreba dvoosnog testa za definiranje konstanti  $\alpha$  i  $\beta$ . Ovdje je primijenjen jednoosni tlačni test i dvoosni tlačni test pod jednakim tlačnim naprezanjima ( $\sigma_1 = \sigma_2$ ) za definiranje ovih parametara. Za praktične se potrebe može uzeti da je odnos između dvoosne granice tečenja (čvrstoće)  $f_{cb}$  i jednoosne granice tečenja (statičke čvrstoće)  $f'_c$

$$f_{cb} = 1,16 \text{ (do 1,20)} f'_c \quad (62)$$

Ako se primijeni Kupferov rezultat [30],  $f_{cb} = 1,16 f'_c$ , tada se iz (61) dobiva

$$\alpha = 0,355\sigma_0 \quad (63)$$

$$\beta = 1,355$$

Izraz (60) napisan preko komponenata naprezanja tada ima oblik

$$f(\sigma) = \left\{ 0,355\sigma_0(\sigma_x + \sigma_y) + 1,355[(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y) + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)] \right\}^{1/2} = \sigma_0 \quad (64)$$

Za model s potpuno plastičnim ponašanjem,  $\sigma_0$  je uzet kao granično naprezanje  $f'_c$  iz jednoosnoga statičkog tlačnog testa. Elastično ponašanje se obično uzima do oko 30% naprezanja  $f'_c$ . Iduće plohe opterećenja  $f(\sigma) = \sigma_0(\chi)$  funkcije su parametra ojačanja  $\chi$  definiranog s pomoću pravila ojačanja. Kada efektivno naprezanje, definirano funkcijom tečenja, dosegne granično naprezanje  $f'_c$ , pretpostavlja se potpuno plastično ponašanje sve dok se ne dosegne ploha sloma (dok se ne za-

dovolji uvjet drobljenja). U rasterećenju je primijenjeno linearno ponašanje s početnim modulom elastičnosti betona.

Radi uključivanja utjecaja brzine deformacije pri dinamičkom opterećenju,  $f'_c$  treba zamijeniti sa  $f'_{cd}$ .

(ii) Pravilo tečenja

Primijenjeno je tzv. pridruženo pravilo tečenja, odnosno usvojena je okomitost vektora plastične deformacije na plohu tečenja. Inkrement plastične deformacije tada je određen s

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f(\sigma)}{\partial \sigma_{ij}} \quad (65)$$

gdje je  $d\lambda$  konstanta proporcionalnosti koja određuje veličinu inkrementa plastične deformacije, a gradijent  $\partial f(\sigma) = \partial \sigma_{ij}$  definira smjer koji je okomit na plohu tečenja. Funkcija naprezanja  $f(\sigma)$  jest uvjet tečenja ili funkcija idućeg opterećenja u modelu s deformacijskim ojačanjem. Formulacija elasto-plastične konstitutivne matrice  $\mathbf{D}_{ep}$  može se primjerice naći u [32].

(iii) Pravilo ojačanja

Pravilo ojačanja definira kretanje uzastopnih ploha tečenja (ploha opterećenja) za plastičnog deformiranja. Koncept efektivnog naprezanja i efektivne plastične deformacije omogućuje ekstrapolaciju jednostavnoga jednoosnog testa u višeosno stanje, što je učinjeno s pomoću "Madriidske parabole" [11]

$$\sigma = E_0\varepsilon - \frac{1}{2} \frac{E_0}{\varepsilon_0} \varepsilon^2 \quad (66)$$

gdje je  $E_0$  početni modul elastičnosti,  $\varepsilon$  ukupna deformacija, a  $\varepsilon_0$  deformacija pri maksimalnom naprezanju  $f'_c$ . Ako se elastična deformacija izrazi s  $\varepsilon_e = \sigma / E_0$ , te ovo uvrsti u (66), dobiva se

$$\sigma = -E_0\varepsilon_p + \sqrt{2E_0^2\varepsilon_0\varepsilon_p}; \quad 0,3f'_c < \sigma \leq f'_c \quad (67)$$

gdje je  $\varepsilon_p$  komponenta plastične deformacije, a  $\varepsilon_0 = 2f'_c / E_0$  za uobičajene betone. Za uvjete dinamičkog opterećenja,  $f'_c$  treba zamijeniti s  $f'_{cd}$ .

(iv) Uvjet drobljenja

Uvjet drobljenja u tlaku definiran je preko invarijanta deformacija, i to analogno izrazu (59) s

$$\alpha I_1' + \beta(3J_2') = \varepsilon_u^2 \quad (68)$$

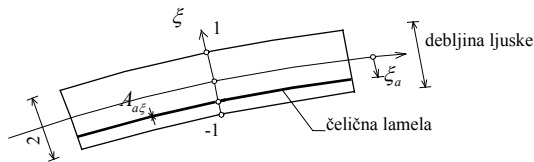
gdje su  $I'_1$  i  $J'_2$  invarijante deformacija, a  $\epsilon_u$  je granična ukupna deformacija dobivena ekstrapolacijom rezultata jednoosnog testa. Ako se parametri  $\alpha$  i  $\beta$  odrede na isti način kao i kod uvjeta tečenja, uvjet drobljenja izražen preko komponenata deformacija ima oblik

$$0.355\epsilon_u(\epsilon_x + \epsilon_y) + 1.355\left[\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 - \epsilon_x\epsilon_y\right] + 0.75\left(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2\right) = \epsilon_u^2 \quad (69)$$

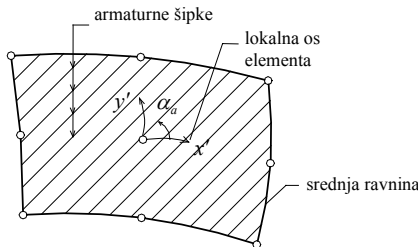
Kada  $\epsilon_u$  dosegne vrijednost granične deformacije, uzima se da beton više nema nikakve čvrstoće ni krutosti u promatranoj točki.

### 3.2 Model armature

Način modeliranja armature grafički je prikazan na slici 10., a usvojena veza naprezanje-deformacija za čelik na slici 11.



(b) Ekvivalentna lamela armature



(a) Pružanje armaturnih šipki

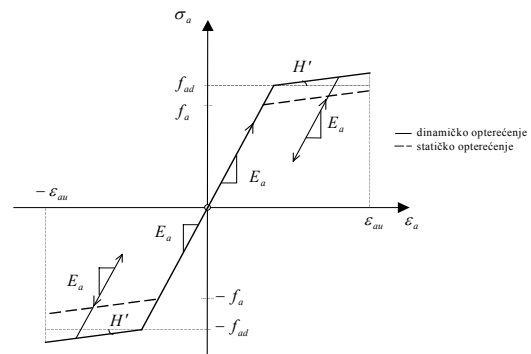
Slika 10. Modeliranje armature

Armaturne su šipke modelirane kao zasebne čelične lamele ekvivalentne (normalizirane) debljine ( $A_{a\xi}$ ) i na odgovarajućoj (normaliziranoj) udaljenosti ( $\xi_a$ ) od srednje ravnine ljsuske. Naprezanja se mogu javljati samo u smjeru pružanja šipki. Računano je s punom kompatibilnošću pomaka betona i armature.

Ponašanje čelika (slika 10.) opisano je s bilinearnom vezom naprezanje-deformacija i to jednako u tlaku i vlašku. U uvjetima dinamičkog opterećenja, tekuća dinamička čvrstoća čelika  $f_{ad}$  uzeta je oblika

$$f_{ad} = f_a \left[ 1 + 0.006 \log_{10}^3 \left( 1 + 10^4 \epsilon \right) \right]; f_{ad} \geq f_a \quad (70)$$

gdje  $f_{ad}$  označava tekuću dinamičku, a  $f_a$  statičku računsku čvrstoću čelika. Nije uzeta ovisnost modula elastičnosti i granične deformacije čelika o brzini deformacije. U rasterećenju je uzeto linearno ponašanje s početnim modulom elastičnosti. Lom šipki nastaje kada deformacija u pravcu njihova pružanja prekorači graničnu vrijednost  $\epsilon_{au}$ .



Slika 11. Veza naprezanje-deformacija za betonski čelik

### 4 Model geometrije

Osim materijalne nelinearnosti, u model proračuna betonskih ljsusaka uključena je i geometrijska nelinearnost. Konkretno, uključen je utjecaj pomaka konstrukcije kao jedan od značajnijih čimbenika geometrijske nelinearnosti (drugi čimbenik su velike deformacije koje ovdje nisu razmatrane).

Utjecaj promjene geometrije osobito je izražen kod tankih ljsusaka. Čak i pri relativno malim pomacima, uključivanje geometrijske nelinearnosti može biti presudno za točnost dobivenih rezultata. Neuključivanje utjecaja pomaka konstrukcije može rezultirati u neopravdano ukrućenje ili omekšanje sustava, ovisno o problemu, odnosno voditi krivim zaključcima glede granične nosivosti i sigurnosti konstrukcije.

Za uključivanje utjecaja velikih pomaka i velikih rotacija obično se rabi tzv. ukupna Lagrangeova formulacija, ili pak tzv. ažurirana Lagrangeova formulacija. Ukupna Lagrangeova formulacija temelji se na pojednostavljenim Von Karaman-ovim izrazima za deformacije. Ovaj pristup, uz usvojeni element ljsuske, nije prikladan za proračun jer se ukupne posmične deformacije trebaju interpolirati u svakoj iteraciji [7], [29]. Stoga je ovdje uporabljena ažurirana Lagrangeova formulacija ili tzv. korotirajuće koordinate.

Prema usvojenom pristupu, jednadžbe ravnoteže stalno se postavljaju i rješavaju na deformiranom sustavu. Naime, u svakoj se iteraciji traženja rješenja računaju nove koordinate čvorova sustava, tako da se koordinatama čvorova iz prethodne iteracije dodaju

izračunani tekući prirasti pomaka čvorova. Ovim se indirektno uključuje i promjena oblika elemenata, što

može rezultirati u numeričke nestabilnosti pri jako velikim pomacima konstrukcije.

## LITERATURA

- [1] ACI-ACSE Committee 334: *Reinforced concrete cooling tower shell - practice and commentary*, ACI Journal. (1984.), Vol. 81, pp. 623-631
- [2] Ahmad, S.: *Curved finite elements in the analysis of solid, shell and plate*, Ph.D. Thesis, University College of Swansea, C/PH/7/69, 1969.
- [3] Ahmad, S.; Iron, B.M.; Zienkiewicz, O.C.: *Analysis of thick and shell structures by curved finite elements*, Intl. J. Numer. Meth. Engng. (1970) 2, 419-451.
- [4] Bathe, K.J.; Dvorkin, E.N.: *A four-node plate bending element based on Mindlin/Reissner plate theory and a mixed interpolation*, Intl. J. Numer. Meth. Engng. (1985) 21, 367-383.
- [5] Belytschko, T.; Ong, J.S.J.; Liu, W.K.: *A consistent control of spurious single modes in the 9-node Lagrange element for the Laplace and Mindlin plate equations*, Comp. Meth. App. Mech. Engng. (1984) 44, 269-295.
- [6] Bergan, P. G.; Holand, I.: *Nonlinear finite element analysis of concrete structures*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 17/18, (1979), 443-467.
- [7] Cedolin, L.; Crutzen, Y.R.J.; Deipoli, S.: *Triaxial stress-strain relationship for concrete*, ASCE J. of the Eng. Mech. Div. Vol. 103, No. EM3, (1977), 423-439.
- [8] Duddeck, H.; Griebenow, G.; Shaper, G.: *Material And Time Dependent Nonlinear Behaviour Of Cracked Reinforced Concrete Slabs; In Nonlinear Behaviour Of Reinforced Concrete Spatial Structures*, Vol.1., Preliminary Report IASS Symposium held in Darmstadt, Eds. Mehlhorn, G.; Ruhle H.; Zerna, W., Werner-Verlag Dusseldorf, (1978), 101-113.
- [9] Dvorkin, E.N.; Bathe, K.J.: *A continuum mechanics based four-node shell element for general non-linear analysis*, Engng. Comp. (1984) 1:77-88.
- [10] Figueiras, J.A.: *Ultimate load analysis of anisotropic and reinforced concrete plates and shells*, Ph.D. Thesis, University College of Swansea, C/Ph/72/83, 1983.
- [11] Figueiras, J.A.; Owen, D.R.J.: *Analysis Of Elasto-Plastic And Geometrically Non-Linear Anisotropic Plates And Shell In Finite Element Software For Plates And Shells*, Hinton, E.; Owen, D.R.J. (Eds.), Pineridge Press, 1984.
- [12] Fried, I.: *Residual energy balancing technique in the generation of plate bending element*. Comp. Struct. (1974) 4, 771-778.
- [13] Fried, I.: *Shear in C(0) and C(1) bending finite elements*, J. Solids Struct. (1973) 9, 449-460.
- [14] Fried, I.: *Triangular nine-degrees-of-freedom, C(0) plate bending element of quadratic accuracy*, Q. Appl. Mech. (1973) 31, 303-312.
- [15] Gilbert, R.I.; Warner, R.F.: *Tension stiffening in reinforced concrete slabs*, ASCE Journal of the Structural Division, Vol. 104, No.ST12, (1978), 1885-1900.
- [16] Hand, F.R.; Pecknold, D.A.; Schnobrich, W.C.: *Nonlinear layered analysis of RC plates and shells*, ASCE Journal of the Structural Division Vol.99, No.ST7, (1973), 1491-1505.
- [17] Hara T.; Kato S.; Nakamura H.: *Reinforced Concrete Cooling Tower Shells - practice and commentary*, ACI Journal (1994.), Vol. 81, pp. 623-631
- [18] Hara T.; Kato S.; Ohya M.: *Nonlinear behavior of R/C cooling tower shells*, Struct. Engin. and Mech. (1997.), Vol. 5, No. 5, pp. 541-552
- [19] Harapin A.: *Numerička simulacija dinamičkog međudjelovanja tekućine i konstrukcije* Disertacija, Građevinski fakultet Sveučilišta u Splitu, Split, 2000.
- [20] Hedgren, A.W.; Billington, D.P.: *Mortar model test on a cylindrical shell of varying curvature and thickness*, ACI Journal, 1967.
- [21] Huang, H.C.; Hinton, E.: *A New Nine Node Degenerated Shell Element With Enhanced Membrane And Shear Interpolation*, Int. J. Num. Meth. Eng. (1986) 22, 73-92.
- [22] Huang, H.C.; Hinton, E.: *A nine node Lagrangian Mindlin plate element with enhanced shear interpolation*, Engng Comp (1984) 1, 369-379.
- [23] Huang, H.C.; Hinton, E.: *Elasto-Plastic And Geometrically Nonlinear Analysis Of Plates And Shells Using A New Nine Node Element*, In: Proceedings of symposium finite element methods for nonlinear problems, vol. 1, pp 3-1-3-15, Trondheim, Norway, 1985
- [24] Huang, H. C.: *Static and Dynamic Analysis of Plates and Shells*, Springer-Verlag, 1989.
- [25] Hughes, T.J.R.; Liu, W.K.: *Nonlinear finite element analysis of shells: Parts I and II: three dimensional and two dimensional shells*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng. 26, 331-362, 1981 27, 167-181.
- [26] Hughes T.J.R.; Liu W.K.: *Implicit-explicit finite elements in transient analysis: stability theory*, Jour. of Apl. Mech. (1978.), Vol. 45, pp. 371-374
- [27] Hughes, T.J.R.; Tezduyar, T.E.: *Finite elements based upon Mindlin plate theory with particular reference to the four-node bilinear isoparametric element*, Trans. ASME E.: J. Appl. Mech. (1981) 48, 587-596.
- [28] Hughes T.J.R.; Pister K.S.; Taylor R.L.: *Implicit-explicit finite elements in nonlinear transient analysis*, Comp. Meth. Apl. Mech. Engng. (1979.), Vol. 17/18, pp. 159-182
- [29] Lin, C.S.; Scordelis, A.C.: *Nonlinear analysis of RC shells of general form*, ASCE Journal of the Structural Division, Vol. 101, No.ST3, (1975), 523-538.
- [30] Kupfer, H.B.; Gerstle, K.H.: *Behaviour of concrete under biaxial stresses*, ASCE Journal of the Eng. Mech. Div., Vol. 99, No. EM4, (1973), 853-866
- [31] Mang H.A.; Flöegl H.: *Wind-load reinforced concrete cooling towers: buckling or ultimate load?*, Eng. Struct. (1983.), Vol. 5, pp. 163-180
- [32] Matešan, D.: *Nelinearna analiza betonskih ljustki*, Magistarski rad, Građevinski fakultet Sveučilišta u Splitu, Split, 2000.

- [33] Mihanović A.: *Dinamika konstrukcija*, Građevinski fakultet Sveučilišta u Splitu, Split, 1995.
- [34] Milford R.V.: *Nonlinear behavior of reinforced concrete cooling towers*, Ph. D. Thesis, University of Illinois, USA, 1984.
- [35] Min C.S.; Gupta A.K.: *A study of inelastic behavior of reinforced concrete shell using supercomputers*, Reinforced Concrete Shell Research Report (1984.), North Carolina State University, USA
- [36] Mindlin, R.D.: *Influence of rotatory inertia and shear in flexural motion of isotropic, elastic plates*, J. Appl. Mech. (1951) 18, 1031-1036.
- [37] Radnić, J.: *Statičke i dinamičke analize betonskih gravitacijskih brana*, Građevinar 45 (1993), 2.
- [38] Radnić J.: *Modelling of strain rate effects in dynamic analysis of R/C structures*, Engineering Mod. (1990.), Vol. 3, No. 1-2, pp. 13-20
- [39] Radnić, J.; Damjanić, F.: *Numerički model za statičku i dinamičku analizu armiranobetonskih konstrukcija*, Izgradnja (1989) 10, 5-14.
- [40] Radnić, J.; Matešan, D.; Harapin, A.: *Model for Static Analyses of Concrete Shell*, Engineering Modelling (2000) (u tisku)
- [41] Reissner, E.: *The effect of transverse shear deformation on bending of elastic plate*, J. Appl. Mech. (1945) 12, 69-76.
- [42] Timoshenko, S.P.; Woinowsky-Krieger S.: *Theory of plates and shells*, 2<sup>nd</sup> edn., McGraw-Hill, New York, 1961.
- [43] Yuan M.; Chen P.; Xiong S.; Li Y.; Wilson E.L.: *The WYD method in large eigenvalue problems*, Eng. Comp. (1989.), Vol. 6, pp. 49-57