

Analysis of Shift and Deformation of Planar Surfaces Using the Least Squares Plane

Hrvoje MATIJEVIĆ, Miljenko LAPAINE, Zdravko KAPOVIĆ

*University of Zagreb, Faculty of Geodesy, Kačićeva 26, 10000 Zagreb, Croatia
e-mail: hmatijev@geof.hr*

26

Abstract: *Modern methods of measurement developed on the basis of advanced reflectorless distance measurement have paved the way for easier detection and analysis of shift and deformation. A large quantity of collected data points will often require a mathematical model of the surface that fits best into these. Although this can be a complex task, in the case of planar surfaces it is easily done, enabling further processing and analysis of measurement results. The paper describes the fitting of a plane to a set of collected points using the least squares distance, with previously excluded outliers via the RANSAC algorithm. Based on that, a method for analysis of the deformation and shift of planar surfaces is also described.*

Key words: *laser scanning, plane fitting, analysis of deformation, detection of shift*

1 Introduction

Modern methods of measurement developed on the basis of improved reflectorless distance measurement have paved the way for easier detection and analysis of shift and deformation. Robotized total stations and laser scanners are two kinds of geodetic instruments that are used for measurement of surface shifts and deformations. The significance of these technologies was noticed by the FIG, which formed a separate work group for testing the use of laser scanners in monitoring of structural deformations (URL1). Although the technology of terrestrial laser scanning increased interest among the scientists, which is exemplified by many papers on that topic at the 2005 symposium *Optical 3-D Measurement*

Techniques in Vienna, its application in the field of deformation analysis has not been researched enough. One of the papers in this field (Gordon et al. 2004) describes the measurement of deformation on natural and artificial objects under load in controlled laboratory conditions. A comparison of several different models of laser scanners in real world measuring conditions is given in (Böhler et al. 2003). Depending on the angular and linear precision of the measurement system, the results vary from few millimetres to few centimetres, which makes different instruments suitable for different uses. The use of laser scanner for detecting deformations on capital objects is described by (Schäfer et al. 2004), who conclude that it can be used if deformations are expected to be within the scope of a few centimetres. Similar conclusions, based on a somewhat different approach, are presented by researchers in (Lindenbergh and Pfeifer 2005).

A measuring procedure results in a large amount of data for processing and analysis. Usually, these data have to be fitted into some model that can be analysed later. Assuming that in the initial state (before shifting and without deformations), the observed surface is planar (within the predefined tolerance), it is possible from the measured set of points to find a mathematical model of the plane that fits into the set well. In our case, the best fit is defined by the requirement that the total of square Euclidean distances between the points and the plane is minimal. Using various software utilities, analyses of the collected data can be made, which then lead to conclusions about the state of the observed object. Some of the software possibilities are specialized programs for 3D modelling. Still, their primary function is visualization or simpler analyses without the definition of specific mathematical background, i.e. algorithm used for different fitting processes are not known to the user, or specific

Analiza pomaka i deformacija ravninskih ploha primjenom ravnine najmanjih kvadrata

Hrvoje MATIJEVIĆ, Miljenko LAPAINE, Zdravko KAPOVIĆ

Sveučilište u Zagrebu, Geodetski fakultet, Kačićeva 26, 10000 Zagreb
e-pošta: hmatijev@geof.hr

Sažetak: *Suvremene mjerne tehnike razvijene temeljem povećanja mogućnosti bezreflektornog mjerenja duljina omogućile su otvaranje novih područja otkrivanja i analize pomaka i deformacija. Prikupljanjem velikog broja točaka često će biti potrebno pronaći matematički model plohe koja se njima najbolje prilagođava. Iako je to za prostorne plohe složen postupak, za ravninske plohe lako se obavlja i omogućava dalju obradu i analizu podataka mjerenja. U radu je prikazano prilagođavanje ravnine skupu mjerenih točaka metodom najmanjih kvadrata udaljenosti, uz prethodno uklanjanje podataka koji znatno odstupaju od zadanoga skupa upotrebom algoritma RANSAC. Temeljem toga prikazana je metoda analize deformacija i pomaka ravninskih ploha.*

Ključne riječi: *lasersko skeniranje, prilagođavanje ravnine, analiza deformacija, otkrivanje pomaka*

Measurement Techniques održanom u Beču 2005. godine, njihova upotreba u području deformacijske analize još nije dovoljno obrađena. Jedan od radova s tog područja je (Gordon i dr. 2004), koji opisuje postupak mjerenja deformacija prirodnih i umjetnih objekata pod opterećenjem u laboratorijskim uvjetima. Usporedba nekoliko različitih modela laserskih skanera u stvarnim uvjetima mjerenja dana je u (Böhler i dr. 2003). Ovisno o ostvarenoj kutnoj i linearnoj preciznosti mjernog sustava rezultati su različiti i kreću se od nekoliko milimetara do nekoliko centimetara, što pojedine instrumente čini prikladnijima za drugačije upotrebe. Upotreba laserskog skanera za mjerenje deformacija na kapitalnim objektima opisuju (Schäfer i dr. 2004) i zaključuju kako ih se može koristiti kod očekivanih deformacija centimetarskog reda veličine. Do sličnih zaključaka uz nešto drugačiji pristup dolaze i autori istraživanja u (Lindenbergh i Pfeifer 2005).

Obavljanjem postupka mjerenja tek je prikupljena velika količina podataka za obradu i analizu. U pravilu je potrebno iz mjerenih podataka obaviti postupak njihova prilagođavanja u neki model koji je poslije moguće analizirati. Pod pretpostavkom da se u nultom stanju (prije pomaka odnosno bez deformacija) promatrana ploha nalazi u ravnini (u okviru dopuštenog odstupanja) moguće je iz mjerenog skupa točaka pronaći matematički model ravnine takav da se dobro prilagođava skupu točaka. U konkretnom slučaju dobro prilagođavanje definirano je zahtjevom da je zbroj kvadrata euklidskih udaljenosti točaka od ravnine minimalan. Upotrebom različitih softverskih alata potom se lako obavljaju analize prikupljenih podataka temeljem kojih se stvaraju zaključci o stanju promatranog objekta. Jedna od mogućnosti u pogledu izbora softvera jesu specijalizirani programi za 3D modeliranje. Ipak njihova prvenstvena namjena je okrenuta vizualizaciji ili jednostavnijim analizama bez postavljanja egzaktno matematičke pozadine, odnosno

1. Uvod

Suvremene mjerne tehnike razvijene temeljem poboljšanja mogućnosti bezreflektornog mjerenja duljina omogućile su otvaranje novih područja otkrivanja i analize pomaka i deformacija. Robotizirane mjerne stanice i laserski skaneri dvije su vrste geodetskih instrumenata koje se mogu koristiti prilikom mjerenja plošnih pomaka i deformacija. Značaj tih tehnologija uvidjelo je i vodstvo Međunarodnog udruženja geodeta (FIG), te je osnovalo posebnu radnu grupu za ispitivanje uporabe laserskih skanera za praćenje strukturalnih deformacija (URL1). Iako je tehnologija terestričkoga laserskog skeniranja pobudila veliko zanimanje znanstvene zajednice, što je vidljivo iz velikog broja radova na skupu *Optical 3-D*

settings of the algorithm cannot be changed. An exception here is Pointshop3D (URL2), which allows setting of all algorithm parameters that execute the fitting of different surfaces based on a point cloud (Weyrich et al. 2004).

This paper gives a short comparison of instruments used in laser scanning and the mathematical basis for finding the plane from which the total of square distances of all points is least. A method is explained, that can be used for analysis of shift and deformation of nearly planar surfaces without the usage of specialized software, i.e. using only the mathematical software package *Matlab*.

2 Measurement of surface shifts and deformations

The only way to measure the shifts and deformations of large surface objects is their approximation to the appropriate number of measured points. The traditional methods of measuring surface deformations most frequently include terrestrial photogrammetry and classic measuring methods, possibly with the use of reflectorless distance measurement techniques. Modern measuring technology provides the user with measuring instruments that make the traditional methods easier and faster. With instruments that can be used to measure surface shifts and deformations, there are two important factors that determine their application:

- Precision and
- Speed of measurement (number of measurements per time unit).

As expected, if one factor increases, the other decreases more or less. There are two types of instruments, the strong point of each being one of the other previously mentioned factors:

- Robotized total stations and
- Laser scanners (Fig. 1).

General functions of the two mentioned types of instruments, due to development of the robotized total

stations, have recently become more similar. Primarily due to the development of software solutions and built-in CCD cameras, robotized total stations make measurements in the same way as the laser scanners possible. Using visual specification of the measurement area and of the density of the raster of points, the instrument can perform scanning without the need of user interaction, which the laser scanner does. Robotized total stations are still cheaper and more accessible than laser scanners, and can be used for everyday surveying. Another advantage is a very simple procedure of measurement with long pauses between the series, due to a simple, precise and well-known system of absolute orientation. Furthermore, although some lasers can be used at longer distances from the measured object, robotized total stations are still better equipped for such cases, primarily due to better overall (positional) precision of measurement, generally caused by better precision in the measurements of angles.

A consequence of the way the laser scanners work (Matijević and Roić 2002) is to a degree more complex measurement of the absolute values of shift or deformation with longer time periods between the series. The reason for this is the absence of traditional subsystems for absolute orientation of the instrument. Although this does not mean that the absolute orientation of such instruments is not possible, since there are different indirect methods, this is nevertheless a partial limitation. Measurement of relative values, which is more frequent, presents no problem for these instruments. Although most manufacturers give information on the precision of linear measurement, information on the precision of angular measurement are rare, so it is not possible to know the final precision of the measurement of coordinates. For cases where great reliability is needed, for the purposes of right interpretation of the results, it is necessary to know in advance the standard measurement deviation, which is often not available. The main advantage of laser scanners in comparison with the robotized total stations is the number of measurements in a time unit, i.e. speed. In cases of dynamic observation of shifts and deformations on larger surfaces, as for example, with the locks and dams during the process of accumulation as described in (Schäfer et al. 2004), the laser scanners are, due to their speed of measurement, a more efficient solution.

3 Analysis of Measured Data

A large amount of data produced by laser scanning of surfaces (using any of the described instruments) calls for special methods of processing and analysis. Absence of explicitly defined points, the measurements of which could be compared in different series, is the reason to use a surface model that can be compared. Depending on the type of surface, it is necessary to know the theoretical mathematical models that can be compared to the results of measurement. If theoretical information is not available, the process of fitting into a mathematical model needs to be conducted.



Fig. 1. Robotized total station and laser scanner

Slika 1. Robotizirana mjerna stanica i laserski skaner

(korisniku) nisu poznati algoritmi upotrijebljeni za različite postupke prilagođavanja, ili nije moguće mijenjati pojedine postavke algoritama. Izuzetak ovdje je Pointshop3D (URL2), znanstveno usmjereni programski paket razvijen u okviru švicarskog saveznog instituta za tehnologiju (ETH), kod kojeg je moguće podesiti sve parametre algoritama koji obavljaju prilagođavanja različitih ploha skupu točaka (Weyrich i dr. 2004).

U članku je dana kratka usporedba instrumentarija koji se može koristiti za lasersko skaniranje, te matematička osnova za pronalaženje ravnine od koje su kvadrati udaljenosti svih točaka oblaka najmanji. Nadalje je prikazana metoda kojom se može obaviti analiza pomaka i deformacija približno ravninskih ploha bez upotrebe za to specijaliziranih programskih alata, već samo matematičkim programskim paketom *Matlab*.

2. Mjerenje plošnih pomaka i deformacija

Jedini način mjerenja pomaka odnosno deformacija velikih plošnih objekata njihovo je aproksimiranje dovoljnim brojem mjerenih točaka. Tradicijske metode mjerenja plošnih deformacija uključuju najčešće terestričku fotogrametriju i klasične metode izmjere uz eventualnu upotrebu daljinomjera koji ne trebaju reflektor na cilju. Suvremena mjerna tehnika stavlja stručnjaku na raspolaganje mjerne instrumente koji znatno olakšavaju i ubrzavaju tradicijske metode mjerenja. Kod instrumenata kojima se može obavljati mjerenje plošnih pomaka i deformacija važna su dva čimbenika koja određuju u koje se svrhe pojedini od njih mogu koristiti:

- preciznost i
- brzina mjerenja (broj mjerenja u jedinici vremena).

Očekivano, povećanjem jednog od dvaju čimbenika drugi će se više ili manje smanjivati, a dvije vrste instrumenata svaka s težištem na jednom od nabrojenog su:

- robotizirane mjerne stanice i
- laserski skaneri (sl. 1).

S razvojem robotiziranih mjernih stanica općenita funkcionalnost dviju spomenutih vrsta instrumenata postaje sve sličnijom. Ponajprije s razvojem programskih rješenja i dodavanjem ugrađenih CCD kamera omogućeno je robotiziranim stanicama obavljanje mjernog postupka na isti način kao s laserskim skanerima. Vizualnim zadavanjem mjernog područja i gustoće rastera točaka instrument obavlja skaniranje potpuno samostalno, dakle kao laserski skaner. Robotizirane mjerne stanice još uvijek su jeftinije i pristupačnije od laserskih skanera i stoga što se mogu koristiti i za svakidašnje geodetske poslove. Dodatna im je prednost vrlo jednostavno obavljanje mjerenja s dugim razmakom između epoha zbog jednostavnog, preciznog i dobro poznatog sustava za apsolutnu orijentaciju. Iako se i neki laserski skaneri mogu koristiti i na većim udaljenostima od mjernog objekta, ipak su robotizirane mjerne stanice bolje prilagođene takvim uvjetima, ponajprije zbog bolje

ukupne (položajne) preciznosti mjerenja, najčešće uzrokovane većom preciznošću mjerenja kutnih veličina.

Kao posljedica načina rada laserskih skanera (Matijević i Roić 2002), pokazuje se razmjerno složenije mjerenje apsolutnih veličina pomaka ili deformacija s dugim vremenskim razmacima između pojedinih epoha. To je u prvom redu uzrokovano nepostojanjem tradicijskih podsustava za apsolutnu orijentaciju instrumenta. Iako ne znači da je postupak apsolutne orijentacije takvih instrumenata nemoguće obaviti zato što za to postoje različite posredne metode, ipak je to barem djelomično ograničavajući čimbenik. Mjerenje relativnih veličina, što će češće biti slučaj, za te je instrumente "domaći teren". Iako većina proizvođača daje podatke o preciznosti linearnih mjerenja, rjeđe su dani podaci o preciznosti mjerenja kutova pa nije moguće znati i konačnu preciznost mjerenja koordinata. Za radove kod kojih je potrebna visoka pouzdanost važno je radi pravilne interpretacije rezultata unaprijed znati standardno odstupanje mjerenja, koje, nažalost, često nije raspoloživo. Glavne prednosti laserskih skanera u odnosu na robotizirane mjerne stanice jesu broj mjerenja u jedinici vremena odnosno brzina. U slučaju da je potrebno dinamički opažati vrijednosti pomaka ili deformacija na većim ploham, na primjer zatvarača i brana prilikom punjenja akumulacije kao što je opisano u (Schäfer i dr. 2004), laserski su skaneri zbog brzine mjerenja mnogo učinkovitije rješenje.

29

3. Analiza podataka mjerenja

Velika količina podataka dobivena laserskim skaniranjem ploha (bilo kojom opisanom vrstom instrumenata) zahtijeva posebne metode obrade i analize. Nepostojanje eksplicitno određenih mjernih točaka, mjerenja kojih bi se uspoređivala u različitim epohama, uzrok je potrebe za uvođenjem modela ploha koje se mogu uspoređivati. Ovisno o vrsti plohe potrebno je poznavati teorijske matematičke modele koji se uspoređuju s rezultatima mjerenja. Ako teorijski podaci nisu dostupni, obavlja se postupak prilagođavanja (engl. *fitting*) u neki matematički model.

3.1. Teorijska osnova

U ovom dijelu rada bit će prikazan postupak određivanja ravnine za koju je zbroj kvadrata euklidskih udaljenosti do n zadanih točaka u prostoru minimalan. U nastavku ta će se ravnina zvati *ravninom najmanjih kvadrata*.

Neka je u prostornom pravokutnom koordinatnom sustavu zadano n točaka

$$T_1(x_1, y_1, z_1), T_2(x_2, y_2, z_2), \dots, T_n(x_n, y_n, z_n).$$

Jednadžba ravnine može se napisati u obliku

$$kx + ly + mz = p, \quad (1)$$

gdje je $k\vec{i} + l\vec{j} + m\vec{k}$ jedinični vektor normale na ravnine, pa prema tome vrijedi

$$k^2 + l^2 + m^2 = 1, \quad (2)$$

3.1 Theoretical Background

This section of the paper will present the procedure of determining the plane for which the total of square Euclidean distances from the n given points in space is minimal. That plane will from now on be called the *least squares plane*.

In a spatial rectangular coordinate system there are n points

$$T_1(x_1, y_1, z_1), T_2(x_2, y_2, z_2), \dots, T_n(x_n, y_n, z_n).$$

The equation of the plane can be written in the form

$$kx + ly + mz = p \tag{1}$$

where $k\vec{i} + l\vec{j} + m\vec{k}$ is a unit vector of the plane normal, so that

$$k^2 + l^2 + m^2 = 1, \tag{2}$$

and p is the distance between the plane and the origin of the coordinate system (Bronštejn et al. 2004). The (signed) distance between the point $T_i(x_i, y_i, z_i)$ and the plane is

$$d_i = kx_i + ly_i + mz_i - p. \tag{3}$$

Now, k, l, m, p need to be found so as to

$$S = \sum_{i=1}^n d_i^2 = \sum_{i=1}^n (kx_i + ly_i + mz_i - p)^2 = \min \tag{4}$$

under the condition

$$k^2 + l^2 + m^2 = 1. \tag{5}$$

Notice that we can write

$$S = np^2 - 2p \sum_{i=1}^n (kx_i + ly_i + mz_i) + \sum_{i=1}^n (kx_i + ly_i + mz_i)^2.$$

If k, l, m were known, then S would be a square function that has for its minimum

$$p = \frac{\sum_{i=1}^n (kx_i + ly_i + mz_i)}{n} = k \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} + l \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} + m \frac{\sum_{i=1}^n z_i}{n}.$$

If we introduce

$$E(x) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}, E(y) = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}, E(z) = \frac{\sum_{i=1}^n z_i}{n}$$

we can write

$$\begin{aligned} p &= kE(x) + lE(y) + mE(z) \\ d_i &= k(x_i - E(x)) + l(y_i - E(y)) + m(z_i - E(z)) \\ S &= \sum_{i=1}^n [k(x_i - E(x)) + l(y_i - E(y)) + m(z_i - E(z))]^2, \end{aligned}$$

that is,

$$S = S(k, l, m) = ak^2 + bl^2 + cm^2 + 2dkl + 2ekm + 2flm \tag{6}$$

where we used the expressions

$$a = \sum_{i=1}^n (x_i - E(x))^2$$

$$b = \sum_{i=1}^n (y_i - E(y))^2$$

$$c = \sum_{i=1}^n (z_i - E(z))^2$$

$$d = \sum_{i=1}^n (x_i - E(x))(y_i - E(y))$$

$$e = \sum_{i=1}^n (x_i - E(x))(z_i - E(z))$$

$$f = \sum_{i=1}^n (y_i - E(y))(z_i - E(z))$$

We look for k, l, m for which the S function (6) is minimum, and of course, provided that initial condition (5) be satisfied. The conditional extreme, as known, is found by forming a new function

$$R(k, l, m, \lambda) = S(k, l, m) - \lambda(k^2 + l^2 + m^2 - 1).$$

Deriving R against k, l, m and λ , we get the following equations

$$\begin{aligned} (a - \lambda)k + dl + em &= 0 \\ dk + (b - \lambda)l + fm &= 0 \\ ek + fl + (c - \lambda)m &= 0. \end{aligned} \tag{7}$$

$$k^2 + l^2 + m^2 = 1$$

As seen in (5), the trivial solution $k = l = m = 0$ is not acceptable. Now, (7) is considered to be a homogeneous system of linear equations with the unknowns k, l, m . For it not to have a trivial solution, the system determinant has to equal 0, i.e.

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & d & e \\ d & b - \lambda & f \\ e & f & c - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{8}$$

This is a cubic equation with one unknown, λ . A cubic equation can be solved (Bronštejn et al. 2004). It can be proved, and this is not included here, that all three results will be real and positive, and that the minimum of S equals the smallest of them. We have to calculate the smallest solution of the cubic equation, put it into (7), and using (5), calculate k, l, m .

It is interesting to compare the above-described deduction with the calculations for determining parameters of a line fitted to a set of points in space (Jovičić et al. 1982). The idea and the calculations are, in principle, the same. Drixler (1993) tackles the same problems in his dissertation, and the comparison of methods for appropriation of line and plane to a set of points in space was recently described by Kampmann and Renner (2004).

a p je udaljenost ravnine od ishodišta koordinatnog sustava (Bronštejn i dr. 2004). Udaljenost točke $T_i(x_i, y_i, z_i)$ od ravnine (do na predznak) je:

$$d_i = kx_i + ly_i + mz_i - p. \quad (3)$$

Traže se k, l, m, p tako da bude

$$S = \sum_{i=1}^n d_i^2 = \sum_{i=1}^n (kx_i + ly_i + mz_i - p)^2 = \min \quad (4)$$

uz uvjet

$$k^2 + l^2 + m^2 = 1. \quad (5)$$

Uočimo najprije da se može napisati

$$S = np^2 - 2p \sum_{i=1}^n (kx_i + ly_i + mz_i) + \sum_{i=1}^n (kx_i + ly_i + mz_i)^2.$$

Kada bi k, l, m bili poznati, tada bi S bila kvadratna funkcija koja ima minimum za

$$p = \frac{\sum_{i=1}^n (kx_i + ly_i + mz_i)}{n} = k \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} + l \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} + m \frac{\sum_{i=1}^n z_i}{n}.$$

Uz oznake

$$E(x) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}, E(y) = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}, E(z) = \frac{\sum_{i=1}^n z_i}{n}$$

možemo napisati

$$p = kE(x) + lE(y) + mE(z)$$

$$d_i = k(x_i - E(x)) + l(y_i - E(y)) + m(z_i - E(z))$$

$$S = \sum_{i=1}^n [k(x_i - E(x)) + l(y_i - E(y)) + m(z_i - E(z))]^2,$$

odnosno

$$S = S(k, l, m) = ak^2 + bl^2 + cm^2 + 2dkl + 2ekm + 2flm, \quad (6)$$

gdje smo uveli oznake

$$a = \sum_{i=1}^n (x_i - E(x))^2$$

$$b = \sum_{i=1}^n (y_i - E(y))^2$$

$$c = \sum_{i=1}^n (z_i - E(z))^2$$

$$d = \sum_{i=1}^n (x_i - E(x))(y_i - E(y))$$

$$e = \sum_{i=1}^n (x_i - E(x))(z_i - E(z))$$

$$f = \sum_{i=1}^n (y_i - E(y))(z_i - E(z))$$

Tražimo dakle one k, l, m za koje funkcija S (6) poprima minimum, s tim da, naravno, mora biti ispunjen

i uvjet (5) postavljen na početku. Uvjetni ekstrem, kao što je poznato, tražimo tako da formiramo novu funkciju

$$R(k, l, m, \lambda) = S(k, l, m) - \lambda(k^2 + l^2 + m^2 - 1).$$

Derivirajući R po k, l, m i λ , dobivamo redom jednadžbe

$$(a - \lambda)k + dl + em = 0$$

$$dk + (b - \lambda)l + fm = 0$$

$$ek + fl + (c - \lambda)m = 0. \quad (7)$$

$$k^2 + l^2 + m^2 = 1$$

Iz (5) vidimo da trivijalno rješenje $k = l = m = 0$ ne dolazi u obzir. Shvatimo (7) kao homogeni sustav linearnih jednadžbi s nepoznicama k, l, m . Da bi on imao netrivialno rješenje, determinanta sustava mora biti jednaka nuli, tj.

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & d & e \\ d & b - \lambda & f \\ e & f & c - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (8)$$

To je kubna jednadžba s jednom nepoznicom λ . Kubnu jednadžbu znamo riješiti (Bronštejn i dr. 2004). Može se dokazati, što ovdje izostavljamo, da će sva tri dobivena rješenja biti realna i pozitivna, te da minimum funkcije S odgovara baš najmanjem od njih. Treba dakle izračunati najmanje rješenje kubne jednadžbe, uvrstiti ga u (7) i odatle s pomoću (5) izračunati tražene k, l, m .

Zanimljivo je usporediti gornji izvod s izvodom za određivanje parametara pravca prilagođenog skupu točaka prostora (Jovičić i dr. 1982). I ideja i izvod u načelu su isti. Sličnim problemima bavio se u svojoj disertaciji Drixler (1993), a o usporedbi metoda za prilagođavanje pravca i ravnine skupu točaka prostora pisali su nedavno Kampmann i Renner (2004).

Rješavanje homogenog sustava jednadžbi (7) može se interpretirati i kao traženje svojstvenih vrijednosti matrice

$$A = \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix}.$$

Opširnije o svojstvenim vrijednostima može se naći na primjer u (Drmač i dr. 2003). Općeniti značaj svojstvenih vrijednosti odnosno svojstvenih vektora u deformacijskoj je analizi vrlo velik. Tako je prema (Caspary 1988) najveća svojstvena vrijednost vrlo dobar pokazatelj kvalitete rješenja te je traženje rješenja sa što manjom najvećom svojstvenom vrijednosti opravdan postupak.

Međutim, dobro je uočiti da se određivanje svojstvenih vrijednosti može zamijeniti određivanjem singularnih vrijednosti. Označimo li

$$M = \begin{bmatrix} x_1 - E(x) & y_1 - E(y) & z_1 - E(z) \\ x_2 - E(x) & y_2 - E(y) & z_2 - E(z) \\ \dots & \dots & \dots \\ x_n - E(x) & y_n - E(y) & z_n - E(z) \end{bmatrix}, \quad (9)$$

Solving a homogeneous system of equations (7) can be interpreted as finding eigenvalues of the matrix

$$A = \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix}.$$

More about eigenvalues can be found in (Drmač et al. 2003). The eigenvalues and eigenvectors are very important in deformation analysis. According to (Caspary 1988), the largest eigenvalue is an indicator of the quality of solution, and finding solutions with minimal value of the largest eigenvalue is a justified procedure.

However, it is worth noting that determining eigenvalue can be replaced with determining singular values. If

$$M = \begin{bmatrix} x_1 - E(x) & y_1 - E(y) & z_1 - E(z) \\ x_2 - E(x) & y_2 - E(y) & z_2 - E(z) \\ \dots & \dots & \dots \\ x_n - E(x) & y_n - E(y) & z_n - E(z) \end{bmatrix}, \quad (9)$$

then, obviously,

$$A = M^T M. \quad (10)$$

On the other hand, each matrix M can be formulated as

$$M = USV^T, \quad (11)$$

where U and V are orthogonal, and S a diagonal matrix with non-negative diagonal elements. The diagonal elements of the S matrix are called singular values of the M matrix. Based on (10) and (11), we can write

$$A = M^T M = (USV^T)^T (USV^T) = VS^T U^T USV^T = VS^T SV^T = VS^2 V^T. \quad (12)$$

Decomposition (12) diagonalizes the A matrix, i.e. performs its decomposition according to the eigenvectors. This means that eigenvalues of the A matrix are square singular values of the M matrix, and eigenvectors of the A matrix are singular vectors of the M matrix.

In other words, the plane fitted to a set of points in space, applying the method of the least squares to the distances of points from the plane, passes through the centre of mass (centre of gravity) of the set of points, and its normal vector is the singular vector of M which corresponds to the smallest singular value.

The problems with plane fitting under the condition of the minimal total of square distances of all points are data (points) that significantly deviate from other data – the so-called *outliers*. These points can significantly influence the quality of approximation of a set of points that are (within the tolerance) on the plane, and they should be excluded from the process of fitting (Fig. 2).

One of the ways to exclude the outliers from the process of fitting is to use the RANSAC (RANDOM SAMPLE

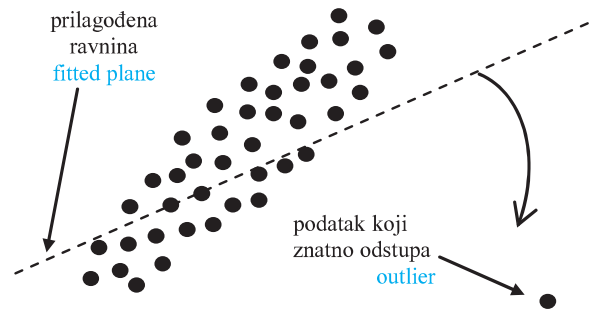


Fig. 2. Influence of an outlier on the quality of fitting
Slika 2. Utjecaj točke koja znatno odstupa na kvalitetu prilagođavanja

Consensus) algorithm. Application of this algorithm in a specific case is as follows:

- Choose three arbitrary points from the set and use them to form a plane,
- For each point in the set check whether its distance from the plane is within the tolerance, and count all cases where it is,
- Repeat until a plane for which the required number of points which are within the tolerance is found,
- For the set of data found in the previous step do the fitting of the least squares plane, which concludes the procedure.

This algorithm is only valid if the set of data represents one planar surface with possible deformations. In cases where the data set represents more than one surface (within different planes), and the surface in question is not represented by any significantly larger data subset in comparison to others, it is not possible to predict which surface the algorithm will choose. An algorithm that solves the cases where the data set contains several surfaces is given by Peternell and Steiner (2004).

3.2 Analysis

A trial analysis was done on part of the data collected by laser scanning during the student fieldwork *Faros 2003* in the area of Stari Grad on the island of Hvar (Fig. 3). For that purpose, the Cyrax 2500 laser scanner (today, this is Leica HDS 2500) was used.

The church of St. Nicholas was scanned, and for this experiment, a subset from an original data set on a smaller surface was taken (Fig. 4)

This area was chosen since it contains a hole (window), which in the process of data analysis should come up as a deformation. The basic data set for the chosen surface contains 2265 points, from which around 75 significantly deviate from the rest and represent the deformation. Additional preparation of the data included duplication of the prepared data and their transformation by rotating and moving so as to simulate the data set from the first series of measurement (the original data are from the zero series), which should show a shift. For data processing and visualization the *Matlab* r12 software package was used. Using this package, different



Fig. 3. Laser scanning during the student fieldwork Faros 2003

Slika 3. Lasersko skaniranje na studentskoj praksi Faros 2003

tada je očito

$$A = M^T M. \quad (10)$$

S druge strane, svaka se matrica M može napisati u obliku

$$M = USV^T, \quad (11)$$

gdje su U i V ortogonalne, a S dijagonalna matrica s nenegativnim dijagonalnim elementima. Dijagonalni elementi matrice S nazivaju se singularnim vrijednostima matrice M . Na temelju (10) i (11) može se napisati

$$A = M^T M = (USV^T)^T (USV^T) = VS^T U^T USV^T = VS^T SV^T = VS^2 V^T. \quad (12)$$

Dekompozicija (12) dijagonalizira matricu A , odnosno daje njezinu dekompoziciju po svojstvenim vektorima. To znači da su svojstvene vrijednosti matrice A kvadrati singularnih vrijednosti matrice M , a svojstveni vektori matrice A singularni su vektori matrice M .

Drugim riječima, ravnina prilagođena skupu točaka u prostoru u smislu metode najmanjih kvadrata primijenjene na udaljenosti točaka od ravnine prolazi težištem skupa točaka, a njezin vektor normale singularni je vektor od M kojem odgovara najmanja singularna vrijednost.

Problem s prilagođavanjem ravnine uz uvjet minimalnosti sume kvadrata udaljenosti svih točaka podaci su (točke) koji znatno odstupaju od ostalog skupa podataka (engl. *outliers*). Te točke mogu znatno utjecati na kvalitetu aproksimacije skupa točaka koji se (u okviru dopuštenog odstupanja) stvarno nalaze u ravnini i treba ih isključiti iz postupka prilagođavanja (sl. 2).

Jedan od načina kojim se iz postupka prilagođavanja ravnine najmanjih kvadrata mogu ukloniti točke koje znatno odstupaju je upotreba algoritma RANSAC (od engl. *RANdom SAmple Consensus*). Primjena tog algoritma u konkretnom je slučaju sljedeće:

- izaberi slučajnim postupkom tri točke iz skupa i odredi ravninu koja prolazi kroz njih,

- za svaku točku iz skupa provjeri je li njezina udaljenost od te ravnine u okviru dozvoljenog odstupanja i broji sve koje jesu,
- ponavljaj dok ne nađeš ravninu kod koje se dovoljan broj točaka nalazi u okviru zadanoga dopuštenog odstupanja,
- za skup podataka pronađen u prethodnom koraku obavi prilagođavanje ravnine najmanjih kvadrata, čime je postupak završen.

Taj je algoritam dobar samo u slučaju da skup podataka predstavlja jednu ravninsku plohu s eventualnim deformacijama. U slučaju da skup podataka predstavlja više ploha (u različitim ravninama), a traženu plohu ne predstavlja znatno veći podskup podataka u odnosu na ostale, nije moguće predvidjeti koju će od njih algoritam izabrati. Jedan algoritam kojim se rješavaju slučajevi kada skup podataka sadrži više ploha daju Peterzell i Steiner (2004).

3.2. Analiza rezultata

Za pokusnu analizu uzet je dio podataka prikupljenih laserskim skaniranjem tijekom studentske prakse Faros 2003 na području Staroga Grada na otoku Hvaru (sl. 3). Tom je prilikom upotrijebljen laserski skaner Cyrax 2500 (danas Leica HDS 2500).

Skansirana je crkva sv. Nikole, a za taj je pokus uzet podskup izvornog skupa podataka za jednu manju plohu (sl. 4).

Taj je dio izabran jer sadrži udubljenje (prozor) koje bi se tijekom analize podataka trebalo pokazati kao deformacija. Osnovni skup podataka za izabranu plohu sastoji se od 2265 točaka, od kojih oko 75 znatno odstupa od ostalih i čini deformaciju. Daljnja priprema podataka uključila je dupliciranje pripremljenih podataka te njihovo transformiranje okretanjem i pomicanjem kako bi se simulirao skup podataka prve epohe mjerenja (izvorni podaci su nulta) u kojoj bi se trebao prepoznati pomak. Za obradu i vizualizaciju podataka upotrijebljen je programski paket *Matlab* r12. Upotrebom toga programskog paketa jednostavno se mogu obavljati različite operacije na matricama (uključujući računanje svojstvenih vrijednosti) što je ovdje vrlo važno. Programe za sva računanja obavljena u tijeku ispitivanja moguće je preuzeti s (URL3).

Kako bi se iz skupa točaka za koji se očekuje da se približno nalazi u jednoj ravnini mogle izdvojiti deformacije, potrebno je znati parametre te ravnine. Kako u konkretnom slučaju, što se i inače može očekivati, nema teoretskih parametara, potrebno je teoretsku ravninu modelirati prilagođavanjem (engl. *fitting*) u skup mjerenja. Konkretno, skup mjerenja modeliran je ravninom najmanjih kvadrata, a sva mjerenja koja prelaze dozvoljeno odstupanje udaljenosti od modelirane ravnine smatraju se deformacijom.

Postupak analize svodi se dakle na određivanje ravnine najmanjih kvadrata, računanje udaljenosti mjerenih točaka do te ravnine i, konačno, na grafički

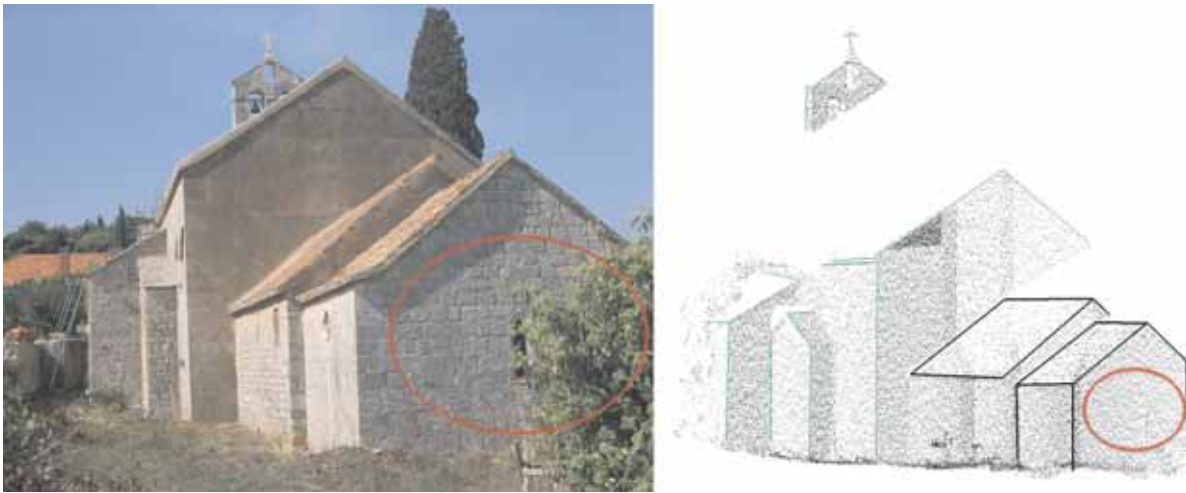


Fig. 4. St. Nicholas Church and the point cloud with the test area marked
Slika 4. Crkva sv. Nikole i oblak točaka s obilježenim testnim područjem

34

operations with the matrices are easily done (including the calculation of eigenvalues), which was very important. The programs for all calculations performed during the research can be downloaded from (URL3).

To be able to extract deformations from the set of points expected to lie in a plane, the plane parameters must be known. Since in our case, as usual, there are no theoretical parameters, the plane should be modelled by fitting into the measurement set. That means, the measurement set is modelled with the least squares plane, and all measurements exceeding the required tolerance of the distance from the modelled plane are considered deformations.

The analysis procedure consists of determining the least squares plane, calculating the distance of the measured points from the plane, and presenting the results graphically. Both data sets (original and shifted) are processed separately and in the same way, i.e. for each set a separate least squares plane is determined,

and, as expected, the displays are identical. Each plane adapted to its data set and the differences are identical, although the least squares planes are not parallel (Fig. 5).

Processing of the other (shifted) data set was done in this phase only to show the irrelevance of position and orientation of the data set in space when using this way of processing and analysing planar deformations. Visualization of the analysed data can be done via a 3D view or 'from aside', which better illustrates the shape and amount of deformation (Fig. 6).

To show the importance of excluding the data that deviate significantly in the process of plane fitting, from the trial data set an even smaller one was taken, which contains the previously processed deformation, and consists of 1602 points. Since now the ratio between the points in the plane and those which deviate is even more unfavourable (approximately 5 % of the points deviate), if the deviations are not excluded, or the tolerance is set

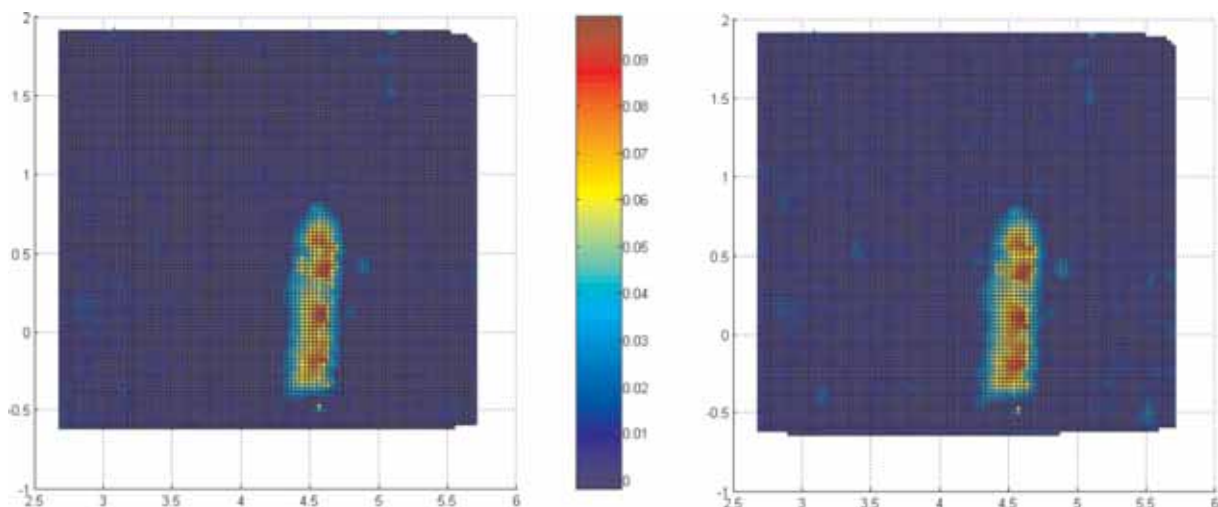


Fig. 5. 2D display of the analysed data (both original and shifted)

Slika 5. 2D prikaz analiziranih podataka za izvorni (lijevo) i pomaknuti skup (desno)

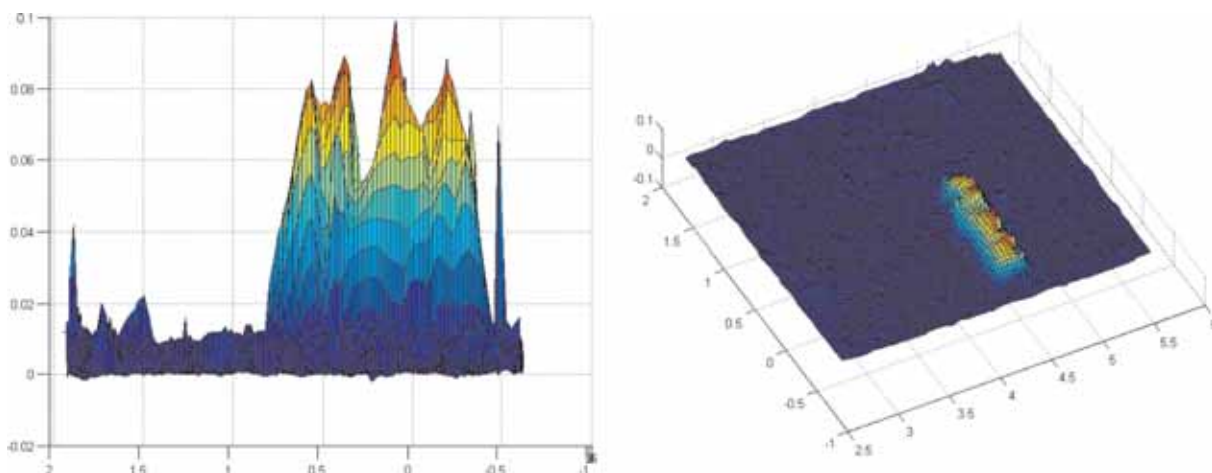


Fig. 6. Visualization of deformations 'from aside' (left) and 3D view (right)

Slika 6. Prikaza deformacija "sa strane" (lijevo) i 3D pogled (desno)

prikaz rezultata. Oba skupa podataka (izvorni i pomaknuti) obrađena su pojedinačno i na isti način, dakle za svaki je skup određena zasebna ravnina najmanjih kvadrata i prema očekivanju prikazi su jednaki. Svaka se ravnina prilagodila svojem skupu podataka i razlike su jednake iako njihove ravnine najmanjih kvadrata nisu paralelne (sl. 5).

Obrada drugog (pomaknutog) skupa podataka obavljena je u ovoj fazi samo zato kako bi bolje prikazala neovisnost položaja i orijentacije skupa podataka u prostoru upotrebom tog načina obrade i analize ravninskih deformacija. Vizualizacija podataka analize može se obaviti i 3D prikazom ili pogledom "sa strane", na kojem se bolje vide iznos i oblik deformacije (sl. 6).

U svrhu što boljeg prikazivanja važnosti uklanjanja podataka koji znatno odstupaju u postupku prilagođavanja ravnine, iz pokusnog je skupa podataka izveden još manji, koji sadrži i prethodno obrađenu deformaciju, a sastoji se od ukupno 1602 točke. Kako je ovdje odnos između točaka u ravnini i onih koje odstupaju još

nepovoljniji (oko 5% točaka odstupa) ako nema uklanjanja podataka koji znatno odstupaju odnosno ako je dopušteno odstupanje pogrešno određeno, ravnina će se prilagoditi i točkama koje predstavljaju deformaciju, pa će i kasnija analiza dati rezultate koji dobro ne odražavaju stvarno stanje. Radi provjere djelovanja RANSAC algoritma i analize promjene svojstvenih vrijednosti obavljena je serija pokusa. Određeni su parametri ravnine najmanjih kvadrata s dopuštenim odstupanjem od 10 cm, 1 cm i 0.5 cm. Radi provjere ponovljivosti, računanja s istim ulaznim podacima (u RANSAC algoritam) obavljena su u tri uzastopna ponavljanja, a rezultati su dani u tablici 1.

Kako upotrebom algoritma RANSAC nije moguće predvidjeti koje će trojke točaka biti uzimane za pokusne ravnine, očekivano je dobivanje različitih rezultata iz uzastopnih računanja s istim ulaznim vrijednostima (skup točaka i dopušteno odstupanje). Iz rezultata je vidljivo da se uzastopnim ponavljanjem rezultati znatno ne mijenjaju. Zbog neravne je površine ostvarena kvaliteta

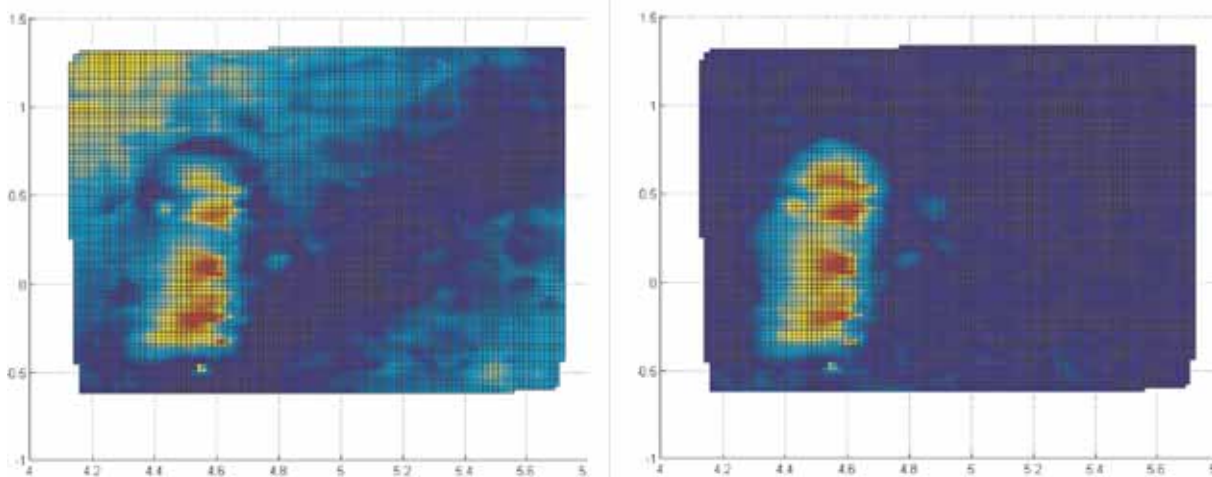


Fig. 7. Analysis of deformations depending on tolerance (left 10 cm, right 1 cm)

Slika 7. Analiza deformacija s obzirom na dopušteno odstupanje (lijevo 10 cm, desno 1 cm)

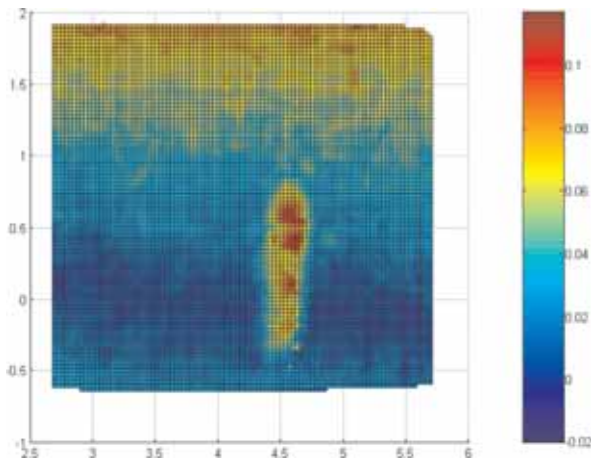


Fig. 8. Visualization of the shift, a view parallel to the normal of the plane

Slika 8. Prikaz pomaka, pogled u smjeru normale na ravninu

incorrectly, the plane will also adapt to the deviations, and further analysis will not show the true conditions. To check the efficiency of the RANSAC algorithm and to analyse the changes of eigenvalues, a series of tests was performed. The parameters of the least squares plane were determined, with the tolerance of 10 cm, 1 cm and 0.5 cm. To check the repeatability, calculations with the same input data (to the RANSAC algorithm) were repeated successively three times, and the results are shown in (Table 1).

It is not possible to predict which three points will be taken for trial planes, since when using the RANSAC algorithm it is expected to get different results in successive calculations with the same input values (set of points and tolerance). The results show that they do not change significantly in successive repetitions. Due to rough finishing of the surface, the quality of the fit is somewhat below 1 cm, but with smoother surfaces better fitting can be expected (the influence of noise was disregarded here). The criterion of the largest eigenvalue λ_{max} could be incorrectly interpreted here as the most appropriate solution. This criterion is acceptable if the input data are identical, but the RANSAC algorithm each time chooses only the data within tolerance. It is therefore only natural that the quality of the fit is higher for a smaller tolerance, which is also evident from the decrease of eigenvalues and the number of points included in calculation (inliers). The visual analysis also shows the

importance of correctly determining the parameters of plane by fitting. (Fig 7)

A different approach is required when a shift is to be determined. To be able to determine the amount of shift from the measured data, it is necessary to first establish the initial (zero) state in comparison to which the shift will be determined. For this purpose, from the original data set the least squares plane was first determined. The data from the simulated second measurement, i.e. the transformed set of points, were used to calculate the distance from the original surface. The result of this operation i.e. a visualization of the shift is presented in Fig. 8.

It is obvious that the shift was created by rotating around the axis parallel to the horizontal side of the surface, where the amount of shift approximately equals zero. In calculations of the distances of points from the surface, the sign was disregarded. Therefore the part of the set which was after the transformation positioned below the least squares plane is displayed as shift only in quantity, and not by the sign. (Fig. 9)

Besides the amount of shift, such visualization can indicate the slant of the shifted surface. The deformation is not correctly displayed here because the surface in relation to which the distances were calculated is not parallel to the shifted one. This approach can be used when, apart from shifting, deformation of the shape of the surface is expected, i.e. when after the deformation it can no longer be considered a plane. Of course, it is important that in the zero state (prior to deformation), the surface can be counted as planar. If this is not the case, and the complex mathematical determination of the theoretical model will not be done, it is possible, using the Delaunay triangulation or a similar interpolation procedure, to determine the appropriate grid of points within the surface, redo this after the shift or deformation, and then analyse the differences between corresponding points. A similar procedure was performed in (Schäfer et al. 2004).

4 Conclusion

Modern measuring instruments enable fast collection of a large amount of data about objects on which deformations or shifts need to be monitored. Robotized total stations are more accessible and their measuring procedure today is similar to laser scanning, with a somewhat

	Tolerance / Dopušteno odstupanje [cm]								
	10			1			0.5		
λ_{max}	531.17	531.17	530.84	444.16	481.71	456.64	382.89	395.00	383.57
λ_{min}	0.058	0.058	0.057	0.011	0.013	0.012	0.006	0.007	0.006
Inliers / Podaci koji "ne bježe"	1602	1602	1600	1118	1314	1182	830	882	830

Table 1. Results of the trial calculation of plane parameters

Tablica 1. Rezultati pokusnih računanja parametara ravnine

uklopa očito nešto manja od 1 cm, no kod ravne površine može se očekivati njezino povećavanje (utjecaj šuma nije ovdje modeliran). Kriterijem najveće svojstvene vrijednosti λ_{max} moglo bi se ovdje pogrešno izabrati najpovoljnije rješenje. Taj bi kriterij bio opravdan u slučaju da su ulazni podaci isti, no algoritam RANSAC ovdje svaki put bira samo podatke koji ulaze u okvire dopuštenog odstupanja. Prirodno je zato dobivena kvaliteta prilagođavanja veća za manje dopušteno odstupanje što je vidljivo iz smanjivanja svojstvenih vrijednosti, ali i manji broj točaka uzetih u računanje (engl. *inliers*). I kod vizualne analize vidljiva je važnost pravilnog određivanja parametara ravnine prilagođavanja (sl. 7).

Određivanju pomaka potrebno je pristupiti na drugačiji način. Kako bi bilo moguće odrediti iznos pomaka temeljem mjerenih podataka potrebno je prvo odrediti "nultu" epohu, odnosno epohu u odnosu na koju će se određivati pomak. U tu je svrhu iz izvornog skupa podataka određena ravnina najmanjih kvadrata. Podaci simuliranoga drugog mjerenja, odnosno transformiranog skupa točaka, upotrijebljeni su za računanje udaljenosti od izvorne plohe. Rezultat te operacije, odnosno vizualizacija pomaka vidi se na sl. 8.

Vidljivo je da je pomak obavljen rotacijom oko osi paralelne s horizontalnom stranom plohe, gdje je iznos pomaka približno jednak nuli. Kako pri računanju udaljenosti točaka od ravnine nije uzet u obzir predznak, dio skupa koji se nakon transformacije našao ispod ravnine najmanjih kvadrata prikazan je kao pomak samo iznosom, a ne i predznakom (sl. 9).

Takvim prikazom može se osim iznosa pomaka prepoznati i nagib pomaknute plohe. Deformacija ovdje nije pravilno prikazana jer ravnina u odnosu na koju su računane udaljenosti nije paralelna s pomaknutom. Taj se pristup može koristiti i onda kada se uz pomicanje očekuje i deformiranje oblika plohe, odnosno kada se ona nakon deformacije više ne može aproksimirati ravninom. Dakako, važno je da se u nultom stanju (prije deformacije) ploha može smatrati ravninom. Ako to nije slučaj, a ne želi se obaviti složeno matematičko modeliranje teoretskog modela, moguće je Delaunay triangulacijom, odnosno nekim postupkom interpolacije, odrediti pravilnu mrežu točaka na plohi, na isti način postupiti i nakon pomaka ili deformacije, i onda analizirati razlike između odgovarajućih točaka. Slično je pristupljeno u (Schäfer i dr. 2004).

4. Zaključak

Suvremeni mjerni instrumenti omogućavaju brzo prikupljanje velike količine podataka o objektima na kojima je potrebno otkriti deformacije ili pratiti pomake. Robotizirane mjerne stanice dostupnije su, a danas već omogućavaju mjerni postupak identičan laserskom skeniranju, uz nešto veću preciznost i nešto manju brzinu

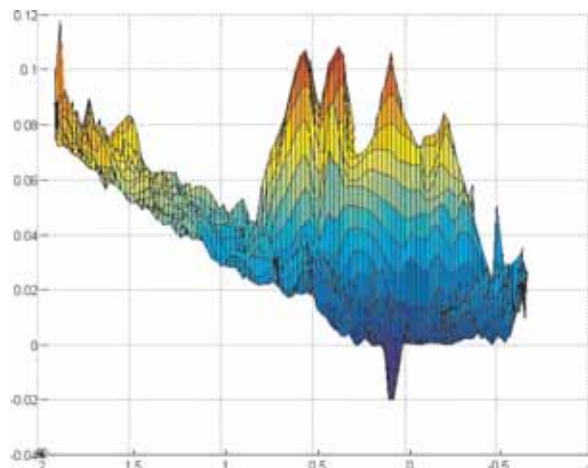


Fig. 9. Display of the shift, 'from aside' view
Slika 9. Prikaz pomaka, pogled "sa strane"

mjerenja. Laserski skaneri, još uvijek skuplja opcija nenadmašivi su u slučaju potrebe za vrlo velikom gustoćom ili velikom brzinom mjerenja. U svakom slučaju, i jedna i druga grupa naći će svoju primjenu u praćenju pomaka i deformacija.

Obrada i analiza podataka mjerenja krajnji su proizvod nadgledanja kapitalnih građevnih i drugih objekata. Velika količina podataka prikupljena opisanim mjernim tehnikama zahtijeva i posebne načine obrade, a često nepostojanje teoretskih podataka o njihovu položaju i obliku postavlja potrebu za prilagođavanje mjerenim podacima. Dok će pri prilagođavanju podataka u druge prostorne plohe taj postupak biti složeniji, za modeliranje inicijalno ravninskih ploha i njihovu daljnju analizu moguće ga je relativno jednostavno obaviti. Rješenje za plohe koje se ni u početnom stanju ne nalaze u ravnini treba tražiti u njihovu matematičkom modelu ili u njihovu prilagođavanju u pravilnu mrežu 3D točaka metodama interpolacije.

Opisanim postupkom moguće je obaviti analizu pomaka odnosno deformacija ravninskih ploha bez upotrebe specijalnih programskih paketa, već samo nekim matematičkim paketom (ovdje je upotrijebljen Matlab r12). Daljnja istraživanja mogu se usmjeriti na upotrebu spomenutoga programskog paketa (Pointshop3D), ponajprije zbog dobro dokumentirane matematičke pozadine implementiranih algoritama ali i zbog potpune otvorenosti za istraživačku upotrebu.

Zahvala

Autori zahvaljuju mr. sc. Željki Tutek, koja je im pomogla u objašnjenju funkcije FITPLANE napisane u *Matlabu* autora Petera Kovesija iz School of Computer Science & Software Engineering, The University of Western Australia.

greater precision and significantly smaller measuring speed. Laser scanners, still a more expensive option, are incomparable when it comes to a high density or quick measuring. Both options will certainly have applications in monitoring the shifts and deformations.

Processing and analysis of the measured data is the final product of monitoring capital buildings and other objects. The large amount of data gathered using the described measuring techniques calls for special methods of processing, and frequent lack of theoretical information on their position and form leads to the need for fitting the measured data to a theoretical surface. Fitting data into the spatial surfaces is a rather complex procedure, while modelling of initially planar surfaces and their further analysis is relatively simple. The solution for surfaces that are initially not planar should be looked for in their mathematical model or in their fitting into a regular grid of 3D points by interpolation.

Using the described procedure, it is possible to analyse the shifts and deformations of planar surfaces with no need for specialized software packages, but only using a mathematical software package (Matlab r12 was used here). Further research can be directed towards usage of the mentioned program package (Pointshop3D), due to, primarily, a well-documented mathematical background of the implemented algorithms, but also due to its openness for research.

Acknowledgments

The authors wish to thank Željka Tutek, MSc who helped them to explain the FITPLANE function written in *Matlab* by Peter Kovesi, School of Computer Science & Software Engineering, University of Western Australia.

References / Literatura

- Böhler, W., Bordas Vicent, M., Marbs, A. (2003): Investigating Laser Scanner Accuracy – The International Archives of Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences, Vol. XXXIV, Part 5/C15, 696–701.
- Bronštejn, I. N., Semendjajev, K. A., Musiol, G., Mühlig, H. (2004): Matematički priručnik, Golden marketing – Tehnička knjiga, Zagreb.
- Caspary, W. F. (1988): Concepts of Network and Deformation Analysis, School of Surveying The University of New South Wales, Australia.
- Drixler, E. (1993): Analyse der Form und Lage von Objekten im Raum. Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Reihe C, Heft Nr. 409.
- Drmač, Z., Hari, V., Marušić, M., Rogina, M., Singer, S., Singer, S. (2003): Numerička analiza – predavanja i vježbe, Ministarstvo znanosti i tehnologije RH, Zagreb.
- Gordon, S., Lichti, D., Stewart, M., Franke, J. (2004): Measurement of Structural Deformation using Terrestrial Laser Scanners, 1st FIG International Symposium on Engineering Surveys for Construction Works and Structural Engineering, Nottingham.
- Jovičić, D., Lapaine, M., Petrović, S. (1982): Prilagođavanje pravca skupu točaka prostora, Geodetski list, br. 10–12, 260–266.
- Kampmann, G., Renner, B. (2004): Vergleich verschiedener Methoden zur Bestimmung ausgleichender Ebenen und Geraden, Allgemeine Vermessungs-Nachrichten, 2, 56–67.
- Lindenbergh, R., Pfeifer, N. (2005): A Statistical Deformation Analysis Of Two epoch of Terrestrial Laser Data of a Lock, 7th Conference on Optical 3-D Measurement Techniques, Vienna.
- Matijević, H., Roič M. (2002): Terestrički laserski skaneri, Geodetski list, br. 3, 171-187.
- Peternell, M., Steiner, T. (2004): Reconstruction of piecewise planar objects from point clouds, Computer Aided Design 36, 333-342.
- Schäfer, T., Weber, T., Kyrinovič, P., Zámečniková, M. (2004): Deformation Measurement Using Terrestrial Laser Scanning at the Hydropower Station of Gabčíkovo, Proceedings of INGENEO 2004 and FIG Regional Central and Eastern European Conference on Engineering Surveying / Kopačik, A. (ed.).
- Weyrich, T., Pauly, M., Keiser, R., Heinzle, S., Scandella, S., Gross, M. (2004): Post-processing of Scanned 3D Surface Data, Eurographics Symposium on Point-based Graphics
- URL1: Task Force 6.1.5 Terrestrial Laser Scanning for Deformation Monitoring
<http://users.ntua.gr/mtsakiri/>, 20. 3. 2005.
- URL2: Pointshop3D
<http://graphics.ethz.ch/pointshop3D/index2.html>, 20. 3. 2005.
- URL3: MATLAB Functions for Computer Vision and Image Analysis-Peter Kovesi
<http://www.csse.uwa.edu.au/~pk/Research/MatlabFns/>, 30.03.2005.