POVIJESNA RUBRIKA

Niels Henrik Abel

Franka Miriam Brückler*

Niels Henrik Abel rođen je 5. kolovoza 1802. u gradu Frindoe, kraj Stavangera u Norveškoj. Umro je 6. travnja 1829. u Frolandu te sa suvremenikom Galoisom dijeli dvije zajedničke crte: ranu smrt i dokaz nerješivosti jednadžbi petog stupnja u radikalima. Iako najpoznatiji po tom rezultatu, iznimno je važan i po rezultatima u području matematičke analize, osobito eliptičkih funkcija.

 

Abelov život je bio obilježen siromaštvom. Krajem 18. stoljeća Norveška, u to doba u sastavu Danske, pokušava ostati neutralna u napoleonskim ratovima, no Engleska to smatra agresijom te napada Dansku. Godine 1807. Englezi uništavaju čitavu dansku flotu kako bi spriječili da ju Francuzi iskoriste za invaziju. Nakon toga Danska ulazi u anti-engleski savez, što za posljedicu ima englesku blokadu Norveške. Za Norvešku je to ekonomska katastrofa jer im je Engleska bila glavni uvoznik drva. Slijedi ekonomska kriza i veliko siromaštvo u Norveškoj. Nakon napada Švedske na Dansku, 1814. Danci predaju Norvešku Švedskoj. Usprkos norveškom pokušaju borbe za neovisnost, Šveđani uspostavljaju kontrolu nad Norveškom. U to teško doba odrastao je Niels Abel.

Otac mu je bio teolog i filolog, norveški nacionalist i aktivan u borbi za norvešku nezavisnost. Majka mu je bila kćer trgovca i vlasnika brodova. Obitelj je imala sedmero djece, od kojih je Niels bio drugo. Kad je Niels imao godinu dana, otac nakon smrti svog oca nasljeđuje mjesto protestantskog svećenika u Gjerstadu. Do trinaeste godine Nielsa podučava otac, no žive u siromaštvu doba ekonomske krize. Problemi obitelji ipak nisu bili samo ekonomski i politički. Prema raznim izvorima,

*PMF – Matematički odjel, Sveučilište u Zagrebu, Bijenička 30, HR-10000 Zagreb, e-mail: bruckler@math.hr

Nielsov otac je bio alkoholičar, a majka optužena za slab moral.

Godine 1815. Niels i njegov stariji brat poslani su u katedralnu školu u Christianii (danas Oslo). Ta je škola prije bila jako ugledna, no nakon otvaranja univerziteta u Christianii (1813) gotovo svi dobri učitelji su s katedralne škole prešli na univerzitet. Neinspiriran osrednjom školom, Niels je prosječan učenik koji pokazuje nešto talenta za matematiku i fiziku. Kad je učitelj matematike otpušten jer je nasmrt pretukao dječaka, stvari se bitno mijenjaju dolaskom novog učitelja matematike Bernta Holmboea. Potican od Holmboea, u roku od godinu dana Abel je sposoban čitati djela univerzitetske razine. Holmboe je osobito potakao Abelov interes za Lagrangeova i Laplaceova djela. Sa 16 godina Abel je dokazao binomni teorem za sve realne eksponente n

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k, \quad \text{za } |x| < 1$$

i tako proširio Eulerov rezultat koji je vrijedio samo za racionalne n.

Nakon što je politički pao u nemilost zbog krivih optužbi na račun kolega te zbog pretjeranog konzumiranja alkohola, godine 1820. Abelov otac umire. Obitelj ostaje u jako teškim financijskim uvjetima i nema mogućnosti financiranja nastavka Abelova školovanja. Holmboe ipak uspijeva izboriti stipendiju kojom Abel završava školu. U to doba Abel počinje raditi na pitanju rješivosti opće jednadžbe petog stupnja $ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$ u radikalima. Pod rješenjem jednadžbe u radikalima misli se na nalaženje formule koja rješenja prikazuje pomoću konačno mnogo primjena operacija $+, -, \cdot, :, \sqrt[n]{\ }$ na koeficijente jednadžbe, kao npr. formula za rješenje opće kvadratne jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$ koja je poznatog oblika $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Prve rezultate o jednadžbi petog stupnja, iz 1821., u kojima je naizgled dokazao rješivost Abel je predao na objavljivanje Kraljevskom društvu u Copenhagenu, no kad su ga zamolili za konkretan primjer, otkrio je grešku.

Godine 1821. upisuje sveučilište u Christianii, a diplomira 1822. Na tom je sveučilištu imao jaku podršku profesora astronomije Christophera Hansteena, čija se žena počela brinuti za Abela kao da je njeno dijete. U novom časopisu kojeg je pokrenuo Hansteen, Abel 1823. objavljuje članke o funkcionalnim jednadžbama i integralima, među inim prva rješenja u povijesti nekih integralnih jednadžbi.

Pri jednom boravku u Copenhagenu radi matematičkih kontakata, upoznaje Christine Kemp s kojom se ubrzo zaručuje. Po povratku u Christianiu, pokušava izboriti financiranje puta u Evropu da upozna velike matematičare Njemačke i Francuske. Kako nije znao ni njemački ni francuski, financiranje je odgođeno za dvije godine, dok ne nauči te jezike. Abel se ponovno vraća radu na jednadžbama petog stupnja i 1824. dokazuje da se ne mogu riješiti u radikalima. Taj je rad objavio na vlastiti račun i na francuskom jeziku, kako bi imao impresivni rezultat za prezentiranje na svom putovanju. Odabrao je oblik pamfleta, a radi smanjenja troškova skratio dokaz na šest strana. Dokaz koristi elemente tada još nepoznate teorije grupa, koja će nastati iz Galoisovih i Cauchyjevih rezultata i radova. Ovaj svoj rad je poslao Gaussu, no Gauss taj rad nije ni pogledao.

Godine 1825. Abel dobiva novce za studijski posjet Francuskoj i Njemačkoj. Abel posjećuje Berlin, gdje se sprijateljuje s Augustom Crelleom, matematičarem amaterom koji je osnovao jedan od najznamenitijih matematičkih časopisa u povijesti: *Journal für die reine und angewandte Mathematik.* U tom će časopisu Abel objaviti nekoliko radova, među inim i jasniju verziju svog dokaza o nerješivosti jednadžbe petog stupnja (1827). Za vrijeme boravka u Berlinu, saznaje da je mjesto profesora matematike na sveučilištu u Christianii (jedinom u Norveškoj) dobio Holmboe, koji bi mjesto bio odbio radi Abela, da mu nisu zaprijetili da ako on odbije, mjesto dobiva stranac. S druge strane, u Berlinu nema mogućnosti za stalno mjesto u iduće četiri godine. Tako se Abel nalazi u ozbiljnim egzistencijalnim problemima. Ostaje u Berlinu i dalje se bavi tad još nedovoljno rigorozno postavljenim osnovama matematičke analize. Nakon što je čuo da Gauss nije bio zadovoljan njegovim radom koji mu je dostavljen o jednadžbama petog stupnja, Abel odustaje od ideje puta u Göttingen. Nije poznato zašto je Gauss imao takav stav prema Abelovom radu, jer je sigurno da ga nije pročitao - članak je nađen neotvoren nakon Gaussove smrti. Mogući su razlozi da je sam to dokazao ili pak da je takav dokaz smatrao nebitnim, što je vjerojatnije.

Nakon Berlina, Abel posjećuje Pariz, gdje je nezainteresirano primljen. Prema njegovim riječima *Francuzi su mnogo rezerviraniji prema strancima nego Nijemci.* U Parizu piše važno djelo o eliptičkim integralima, kojim poopćava Eulerove rezultate i koje sadrži danas vrlo poznati Abelov teorem. Taj teorem pojednostavljeno kaže kako izračunati zbroj nekoliko određenih integrala[1] iste funkcije, ali u različitim granicama, koje su rješenja neke algebarske jednadžbe. Kao recenzenti imenovani su Cauchy i Legendre. Legendre tvrdi da je prestar i ne vidi čitati rukopis, te posao prepušta Cauchyju. Abel ostaje u Parizu, zlovoljan, zabrinut - i gladan: mogao si je priuštiti samo jedan obrok dnevno. Zdravlje mu slabi i u lošem stanju vraća se u Berlin 1826. Tu posuđuje novce i nastavlja raditi na eliptičkim funkcijama i pretvara teoriju eliptičkih integrala u teoriju eliptičkih funkcija. Abelovi rezultati o eliptičkim funkcijama postat će temelj svih budućih istraživanja u tom području.

O čemu se radi u toj teoriji? Eliptički integrali su integrali algebarskih funkcija oblika

$$\int \frac{A(x) + B(x)\sqrt{S(x)}}{C(x) + D(x)\sqrt{S(x)}} \mathrm{d}x$$

gdje su A, B, C, D, S polinomi (B i C mogu biti nulpolinomi) i S je stupnja 3 ili 4. Eliptički integrali generaliziraju arkus-funkcije (inverzne funkcije trigonometrijskih funkcija). Npr. pozicija njihala je dana kao sinusna funkcija vremena ako se radi o malim oscilacijama, no puno rješenje za proizvoljno velike oscilacije zahtijeva korištenje eliptičkih integrala. Kako eliptički integrali generaliziraju arkus-funkcije, tako njihovi inverzi, eliptičke funkcije, generaliziraju trigonometrijske funkcije. Npr. spomenuti Abelov teorem primijenjen na integriranje funkcije $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (koji se izražava preko arkus-sinusa) daje adicioni teorem za sinus. Do Abela, matematičari su stotinjak godina, dosta neuspješno, pokušavali proučiti eliptičke integrale. Abel ih invertira u eliptičke funkcije, kojima se mnogo lakše manipulira (slično kao što je lakše baratati sinusom, nego arkus-sinusom) i time otvara prostor novim istraživanjima.

[1] Određeni integral $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ funkcije zadane formulom $f(x)$ pojednostavljeno možemo definirati kao površinu ispod grafa te funkcije, u granicama od $x = a$ do $x = b$.

Crelle ga nagovara da ostane u Berlinu dok mu ne nađe mjesto na sveučilištu i čak mu nudi mjesto urednika Crelle's Journala. No, Abel, sad već jako zadužen, želi ići kući. U svibnju 1827. stiže u Christianiu i dobiva mali kredit od sveučilišta koji mu se odbija od svih budućih plaća. Da bi zaradio malo novca, Abel podučava djecu, a zaručnica se zapošljava kao guvernanta u Frolandu. Situacija se malo popravlja kad Abel dobiva Hansteenovo mjesto na sveučilištu i vojnoj akademiji, jer Hansteen dobiva velike novce da istraži Zemljino magnetsko polje u Sibiru. Godine 1828. Abel saznaje za Jacobijeve rezultate o transformacijama eliptičkih integrala i pokazuje da se ti rezultati mogu dobiti kao posljedica njegovih. Ubrzo objavljuje i nekoliko novih rezultata na tu temu, te on i Jacobi postaju znameniti: Legendre ih naziva najvećim analitičarima tog doba. U to doba se Abel počinje baviti i pitanjem koje će nekoliko godina kasnije riješiti Galois: koje algebarske jednadžbe su rješive u radikalima?

Zdravlje mu je ipak previše narušeno siromašnim životom i sve više slabi. Saznaje da je njegovo pariško djelo o eliptičkim funkcijama zagubljeno (zanimljivo je da je Cauchy zagubio i Galoisove radove) i ponovno piše glavne rezultate: rad od dvije strane nazvan *Jedan teorem*. Za Božić putuje zaručnici u Froland te se ozbiljno razbolijeva nakon jedne vožnje sanjkama. Za to saznaje Crelle, koji opet pojačava trud da mu nađe mjesto. Crelle uspijeva, nalazi mjesto profesora u Berlinu. Pismo s dobrom vijesti stiže 8. travnja 1829. - dva dana nakon Abelove smrti od tuberkuloze. Zadnje dane proveo je iznimno slab, pričajući o prošlosti i dobroti gospođe Hansteen.

Nakon njegove smrti, Cauchy traži zagubljeni članak i nalazi ga 1830. Štampan je 1841, no ponovno nestaje - i ponovno je pronađen tek 1952. u Firenzi! Godine 1830. pariška Akademija znanosti dodjeljuje Grand Prix Abelu i Jacobiju za izvanredna dostignuća. Na natječaj za tu je nagradu bio svoj rad poslao i Galois, no taj je rad izgubljen i nije ušao u izbor. Nakon Abelove smrti nađeni su i još neki rezultati o algebarskim jednadžbama, među inim i teorem u pismu Crelleu iz jeseni 1828. koji je u biti jednak Galoisovom rezultatu iz 1830: ako ireducibilna jednadžba trećeg stupnja ima takvu vezu među tri svoja korijena da se jedan od njih može izraziti kao racionalna funkcija druga dva, onda je jednadžba rješiva u radikalima.

Iznimno je značajan i u prethodnom nespomenut Abelov doprinos. Kako je uočio da su mnogi rezultati analize nedokazani i neprecizni, tako se trudio popuniti prijašnje "rupe" i bitno doprinijeo postavljanju matematičke analize na čvrste temelje, a najznačajniji rezultat na tom polju je spomenuti dokaz općeg binomnog teorema. Sam je rekao: *Ako se izuzme geometrijski red*[2]*, ne postoji u cijeloj matematici red čiji zbroj je rigorozno određen.* Abel kritizira upotrebu divergentnih redova: *Divergentni redovi su izum vraga i sramota je na njima temeljiti bilo kakav dokaz. Koristeći ih moguće je dobiti kakav god zaključak želimo i zbog toga su ti redovi proizveli toliko krivih zaključaka i paradoksa ...* . Našao je jedan kriterij za provjeru konvergencije reda, danas poznat kao Abelov: ako imamo jedan niz koji pada prema nuli, a drugi niz takav da je niz njegovih parcijalnih suma (suma od prvih n članova) ograničen, onda red čiji su članovi produkti odgovarajućih članova ta dva

[2]Pod redom se u matematici podrazumijeva suma beskonačnog niza, koja može biti konačna u slučaju konvergencije, odnosno beskonačna ili nedefinirana, kad govorimo o divergentnom redu.

niza konvergira. Tako npr. red $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$ možemo shvatiti kao red čiji n-ti član je produkt od $(-1)^{n+1}$ i $\frac{1}{n}$. Kako niz $\frac{1}{n}$ pada prema nuli (što je n veći, $\frac{1}{n}$ je manji i bliži nuli), a zbroj $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^{n+1}$ je jednak nuli ili jedan, ovisno o tom je li n neparan ili paran, slijedi da su parcijalne sume niza $(-1)^{n+1}$ ograničene i Abelov kriterij daje konvergenciju reda $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$

Literatura

[1] W. W. Rouse Ball, *A Short Account of the History of Mathematics*, Dover, 1960

[2] `http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/~history/Mathematicians/Abel.html`

[3] `http://pirate.shu.edu/projects/reals/history/abel.html`

[4] `http://scienceworld.wolfram.com/biography/Abel.html`