POVIJESNA RUBRIKA

Pierre de Fermat

Franka Miriam Brückler*

Pierre de Fermat sigurno je, uz Viètea, najpoznatiji pravnik koji je zapamćen po svojim matematičkim rezultatima. Po njemu nazvani Veliki Fermatov teorem (postoji i Mali :-)) za koji je trebalo čak 350 godina da bude dokazan godine 1995., a pokušaji i dijelovi dokaza potakli su i stvorili potpuno nova područja matematike. A Fermat ga je samo zapisao, dopisao da nema mjesta zapisati dokaz - ali da ga zna!

Pierre Fermat rođen je 17. kolovoza 1601. u francuskom gradu Beaumont-de-Lomagne (blizu Toulousea). Umro je u Castresu (također nedaleko Toulousea) 12. siječnja 1665. Bio je hobi-matematičar, ali njegovi rezultati - osobito iz teorije brojeva - su iznimni. Neovisno o suvremeniku Descartesu otkrio je analitičku geometriju, a zajedno s drugim velikim suvremenikom Pascalom postavio je temelje teorije vjerojatnosti. Bavio se i optikom, a njegovi radovi vezani za tangente na krivulje i ekstreme funkcija bitni su prethodnici otkrića diferencijalnog računa. Svoje rezultate nije objavljivao, već ih je zapisivao na marginama knjiga ili u pismima prijateljima. Najpoznatija od njegovih bilješki na marginama je spomenuti Veliki Fermatov teorem. U jednoj Diofantovoj knjizi zapisao je da jednadžba

$$x^n + y^n = z^n$$

nema cjelobrojnih rješenja (x, y, z) ako je n prirodan broj veći od 2 i dopisao da zna dokaz te tvrdnje. Zapis je glasio ovako:

> Nemoguće je rastaviti kub na dva kuba, četvrtu potenciju ili općenito bilo koju potenciju na dvije potencije istog eksponenta, a ja sam zasigurno našao izvanredan dokaz toga, no margina je preuska da ga tu zapišem.

Ovakvi Fermatovi zapisi na marginama postali su poznati tek kad je njegov sin Samuel 1670. objavio izdanje Diofantove *Aritmetike* skupa s očevim bilješkama. Osim tih bilješki na rubovima knjiga, iza Fermatove smrti nađeno je i mnogo papira s nesređenim rezultatima.

*Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, Gajev trg 6, HR-31000 Osijek, e-mail: `bruckler@math.hr`

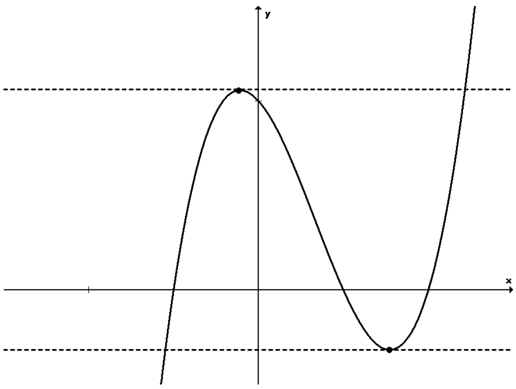
Fermat je rođen u uglednoj i bogatoj trgovačkoj obitelji. Nije pouzdano poznato gdje se školovao, ali je to vrlo vjerojatno bilo u lokalnom franjevačkom samostanu. Studij je počeo u Toulouseu, nastavio u Bordeauxu, a završio u Orléansu. Tu je diplomirao građansko pravo, te je 1631. postao član parlamenta u Toulouseu i time ostvario pravo na titulu *de* u imenu: mijenja ime u Pierre de Fermat. Bio je poznat kao točan i pouzdan u poslu, te uglađen i korektan u komunikaciji. Još u doba studija u Bordeauxu počeo se baviti matematičkim problemima i iz tog doba potječu njegovi prvi rezultati o minimumima i maksimumima funkcija. Svoj je život proveo uglavnom u Toulouseu, no povremeno je radio u rodnom gradu te u Castresu. Tijekom svog rada u parlamentu postepeno je napredovao do viših pozicija, te je 1652. dosegao najviši mogući položaj na kaznenom sudu. Ipak, ta napredovanja su manje posljedica posebne ambicioznosti ili zasluga, a više tada glavnog kriterija: senioriteta.

Za sve vrijeme svoje pravničko-političke djelatnosti Fermat se u slobodno vrijeme bavio matematikom. Imao je niz matematičkih prijatelja, od kojih su neki također djelovali u politici. Jedan od njih, Carcavi, je 1636. ostvario kontakt sa znamenitim matematičarem Mersenneom, poznatim ponajviše jer je oko sebe okupio sve najbolje matematičare tog doba i puno doprinio komunikaciji matematičkih ideja. Carcavi je zainteresirao Mersennea za Fermata, te Mersenne uspostavlja pismenu komunikaciju s Fermatom oko Fermatovih rezultata o padajućim tijelima. Zanimljivo je da je ovo prvo sudjelovanje Fermata u matematičkim krugovima vezano za fizikalni problem, a sam Fermat nije imao mnogo interesa za fizikalne primjene matematike. Dalje se komunikacija proširila i na druge teme, osobito pitanja minimuma i maksimuma te tangenti na krivulje. U jednom od svojih pisama Mersenneu postavlja i hipotezu da su brojevi oblika $2^n + 1$ prosti kad god je n potencija od 2. To je provjerio za $n = 1, 2, 4, 8, 16$, a znao je i da takvi brojevi nisu prosti ako n nije potencija od 2. Ipak, stotinjak godina kasnije Euler je pokazao da Fermatova hipoteza nije točna: broj $2^{32} + 1 = 4294967297$ je djeljiv s 641, dakle nije prost. Danas se prosti brojevi koji su oblika $2^n + 1$ za n potenciju od 2 zovu Fermatovi prosti brojevi.

U pismenoj komunikaciji tipičan je Fermatov stil: u svojim pismima poziva druge da pokažu rezultate koje je on već dobio. Fermatova matematička reputacija brzo raste, no zbog nesklonosti prema sređivanju rezultata nije objavljivao svoje rezultate. Ipak, neki rezultati su objavljeni kao dodaci djelima drugih matematičara. S druge strane, rast Fermatova ugleda i kompliciranost problema koje je riješio počinju izazivati prigovore i ljutnju drugih matematičara. Među tim sukobima najpoznatiji je onaj s Descartesom. Na upit Mersennea, Fermat daje svoje mišljenje da je Descartesova optika *pipanje u mraku* te da Descartes nije pravilno izveo svoj zakon loma svjetlosti. Descartes se na to vrlo naljutio, a još više kad je saznao da Fermatovi rezultati o ekstremima i tangentama umanjuju važnost njegovih. Stoga Descartes napada Fermatove metode, u sukob se uključuju i drugi matematičari, a konačnu odluku da su Fermatovi rezultati točni donosi Desargues. Descartes se doduše ispričao, ali je i dalje nastavio potkopavati Fermatov ugled. Napomenimo koja je veza između ekstrema funkcije i tangenti, budući da je ta veza jedna od temeljnih u otkriću diferencijalnog računa. Zamislimo li neku funkciju $y = f(x)$, točnije njen graf u koordinatnoj ravnini, onda njene lokalne[1] minimume vidimo

[1] Lokalni minimum (maksimum) funkcije je njena najmanja (najveća) vrijednost na nekoj okolini

kao "dna udolina", a lokalne maksimume kao "vrhove brda" na grafu. Ako na tim mjestima možemo povući tangentu, ona mora biti paralelna x-osi pa zaključujemo: ako funkcija ima lokalni ekstrem u nekoj točki u kojoj se može povući tangenta, ta je tangenta paralelna osi apscisa; ekvivalentno tome jest: ako u nekoj točki na grafu možemo povući tangentu neparalelnu osi apscisa, u toj točki funkcija nema lokalni ekstrem.



Metoda nalaženja tangente na krivulju u nekoj njenoj točki sastojala se u povlačenju pravaca (tzv. sekanti) kroz tu točku i druge točke na krivulji s time da su te točke sve bliže onoj u kojoj tražimo tangentu.

Osim ovakvih rezultata koji su prethodnici deriviranja, Fermat je dobio i neke rezultate koji su prethodnici integriranja: izračunao je površine odsječaka parabola i hiperbola, težište rotacionog paraboloida.

U razdoblju 1643.-1654. Fermat nije komunicirao s ostalim znanstvenicima zbog prevelike količine posla u parlamentu, no u to se doba ipak bavio matematikom, konkretnije: teorijom brojeva. U to doba izbio je i jedan građanski rat u kojem je Toulouse bio jako pogođen, a i epidemija kuge 1651. pogodila je i samog Fermata te se 1653. tvrdilo da je Fermat umro od kuge, no ta se vijest morala opozvati. Komunikaciju sa znanstvenim krugovima Fermat je obnovio 1654. U to doba komunicirao je s Blaiseom Pascalom te su zajedno postavili osnove teorije vjerojatnosti. Najpoznatiji je zadatak na kojem su postavljeni ti principi sljedeći: dva igrača igraju neku igru u kojoj pobjednik u svakom krugu dobiva 1 bod (nema neodlučenih ishoda), a ugovoren je broj bodova tako da onaj koji ga prvi ostvari dobiva sav ulog. U nekom trenutku prvom igraču nedostaju 2 boda do pobjede, a drugom nedostaju 3 boda. Ako bi se igra morala prekinuti u tom trenutku, kako treba rasporediti ulog među igračima? Kao prvo, zamislimo da se igra mogla nastaviti. Tada je jasno da bismo nakon najviše 4 kruga imali pobjednika. Ispišemo li sve kombinacije koje se mogu dogoditi u ta 4 kruga (a neka označava pobjedu prvog, a b pobjedu drugog igrača) imamo 16 mogućih kombinacija: $aaaa$, $aaab$, $aaba$, $aabb$, $abaa$, $abab$, $abba$, $abbb$, $baaa$, $baab$, $baba$, $babb$, $bbaa$, $bbab$, $bbba$, $bbbb$. Sve kombinacije s 2 ili više a-ova znače pobjedu prvog igrača, a one s 3 ili više b-ova znače pobjedu drugog. Vidimo da u 11 slučajeva pobjeđuje prvi, a u ostalih 5 pobjeđuje drugi igrač. Stoga ulog treba rasporediti u omjeru 11 : 5. Uz ovaj zadatak, čiju metodu rješavanja

točke u kojoj se taj minimum (maksimum) postiže.

je razvio Fermat, poznat je još samo jedan problem iz teorije vjerojatnosti kojeg je Fermat rješavao (a kojeg mu je isto poslao Pascal): ako se netko kladio baciti šesticu na kocki bar jednom u npr. osam bacanja, a u prva tri nije uspio, koji dio uloga bi trebao dobiti ako odustane od daljnih bacanja? Fermat argumentira ovako: budući je vjerojatnost uspjeha u svakom bacanju $\frac{1}{6} = 0,16666\ldots$, igrač bi smio u slučaju odustanka od bilo kojeg bacanja uzeti šestinu svog uloga natrag, no time nije uzeta u obzir trenutna situacija u igri. Ako dodjelu dijela uloga želimo napraviti na osnovi procjene rezultata četvrtog bacanja prije nego se ono izvrši, onda razmišljamo ovako: prvo bacanje vrijedi $\frac{1}{6}$ uloga, drugo bacanje vrijedi $\frac{1}{6}$ ostatka tj. $\frac{1}{6} \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right) = \frac{5}{36}$ od ukupnog uloga, treće bacanje opet vrijedi $\frac{1}{6}$ ostatka tj. $\frac{1}{6} \cdot \left(1 - \frac{1}{6} - \frac{5}{36}\right) = \frac{25}{216}$ od ukupnog uloga. Na kraju, četvrto bacanje vrijedi $\frac{1}{6}$ ostatka nakon trećeg bacanja tj. $\frac{1}{6} \cdot \left(1 - \frac{1}{6} - \frac{5}{36} - \frac{25}{216}\right) = \frac{125}{1296}$ od ukupnog uloga tj. igrač u slučaju odustanka nakon trećeg bacanja treba dobiti $\frac{125}{1296} = 0,09645\ldots$ od ukupnog uloga.

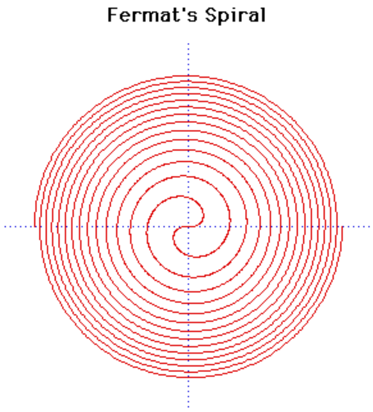
Fermat je nastavio s postavljanjem teških problema drugim matematičarima, ponajviše iz teorije brojeva, no kako to područje mnogi nisu smatrali bitnim, nije bilo velikog odaziva. Navedimo neke od Fermatovih zadataka:

- nalaženje svih cjelobrojnih rješenja (x, y) jednadžbe $Nx^2 + 1 = y^2$ ako N nije potpun kvadrat; to su riješili Wallis i Brouncker i pritom uveli verižne razlomke;
- specijalni slučaj velikog Fermatovog teorema za $n = 3$;
- dokaz da postoji samo jedno cjelobrojno rješenje jednadžbe $x^2 + 2 = y^3$.

Na molbu jednog Descartesovog studenta koji je skupljao Descartesovu korespondenciju, Fermat ponovno pregledava svoja pisma iz doba sukoba s Descartesom te se ponovno vraća geometrijskim pitanjima vezanim za optiku. Tada je razvio zakon, poznat kao Fermatov, koji je jedan od temeljnih zakona optike: svjetlost uvijek ide najkraćim putem. Godine 1656. Fermat započinje korespondenciju s Huygensom vezanu za teoriju vjerojatnosti. Fermat je temu skrenuo na za Huygensa nezanimljivu teoriju brojeva, te je u svojim pokušajima da ga zainteresira naveo mnogo više svojih argumenata nego ikome prije. Tako je opisao svoju metodu neprekidnog silaska i njenu primjenu na dokaz da se svaki prost broj koji pri dijeljenju s 4 daje ostatak 1 može zapisati kao zbroj dva kvadrata prirodnih brojeva (npr. $5 = 2^2 + 1^2$). Metoda neprekidnog silaska koristi svojstvo *dobrog uređaja prirodnih brojeva*: svaki podskup od $\mathbf{N}$ ako nije prazan ima najmanji element. Drugim riječima: ne postoji beskonačan niz prirodnih brojeva koji je padajući (svaki idući broj je manji od prethodnog). U Fermatovim dokazima ipak nedostaju poneki koraci, koje je kasnije upotpunio Euler. Svoju metodu neprekidnog silaska Fermat je iskoristio i u dokazu slučaja $n = 4$ u Velikom Fermatovom teoremu.

Osim već spomenutih matematičkih pojmova i teorema danas Fermatovo ime nose i:

- *Mali Fermatov teorem*: ako je p prost broj i n prirodan broj koji nije djeljiv s p, onda je $n^{p-1} - 1$ djeljiv s p; prvi poznati dokaz ovog teorema dao je Euler;
- *Fermatova spirala*: krivulja s polarnom jednadžbom $r^2 = a^2\varphi$ koju je Fermat analizirao 1636. godine.



Vratimo se na kraju Velikom Fermatovom teoremu, kojem je posvećeno i nekoliko više ili manje popularno pisanih knjiga. Ako malo bolje pogledamo, taj teorem je oblik generalizacije Pitagorina teorema, točnije problema nalaženja pitagorejskih trojki prirodnih brojeva (x, y, z) takvih da je $x^2+y^2 = z^2$. Najpoznatija pitagorejska trojka je $(3, 4, 5)$. Još su antički Grci znali da se može konstruirati beskonačno mnogo pitagorejskih trojki. Veliki Fermatov teorem tvrdi da za eksponente n veće od 2 uopće nema trojki prirodnih brojeva koje zadovoljavaju jednadžbu $x^n + y^n = z^n$.

Danas se smatra da Fermat nije znao dokaz svog teorema, odnosno da je pogrešno mislio da ga zna. Slučajeve $n = 3$ i $n = 4$ je Fermat znao dokazati (dokaz za $n = 3$ je izgubljen, a najstariji sačuvani dokaz tog slučaja je Eulerov iz 18. stoljeća). U 19. stoljeću dokazani su razni drugi specijalni slučajevi: Legendre, Dirichlet, Lamé, Lebesgue, Kummer i drugi su do 1849. dokazali da tvrdnja vrijedi za sve $n < 100$ i još mnoge druge. Ti su dokazi već dali mnoge nove ideje iz područja teorije brojeva. Napomenimo i da je u to doba također već poznato da je uz $n = 4$ dovoljno tvrdnju provjeriti samo za proste $n \neq 2$. Početkom 20. stoljeća razvoj teorije brojeva sve je više odmicao od Fermatova problema jer se sve manje vidi i važnost i šansa njegova dokaza. Do početka 80-ih godina napredak se sastojao uglavnom u profinjenju Kummerovih rezultata i kompjuterskim provjerama (npr. 1976. S. S. Wagstaff je tako dobio rezultat da je Fermatova hipoteza točna za proste brojeve $n < 125000$). Sredinom 80-ih godina Frey je uočio je da se ovaj problem može povezati s nekim, naizgled s njim potpuno nepovezanim, novijim rezultatima teorije brojeva, algebre i topologije, konkretno s rezultatima o eliptičkim krivuljama (to su krivulje zadane jednadžbom $y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$ s cijelim a, b, c takve da su korijeni kubnog polinoma na desnoj strani različiti) i kompleksnim modularnim krivuljama (njih možemo zamisliti kao sfere s određenim brojem ručki; npr. za jednu ručku imamo torus tj. nešto poput automobilske zračnice). Veze između tih rezultata uspostavili su Frey, Taylor i Wiles. Andrew Wiles je 1995. konačno dokazao i zadnji potrebni korak kojim je utvrđena istinitost Velikog Fermatovog teorema.

Na kraju dajmo jedan Fermatov zadatak: ako se prost broj različit od 2 može zapisati kao razlika kvadrata dva prirodna broja, onda je taj zapis jedinstven. Dokažite ovu tvrdnju!

Literatura

[1] *MacTutor History of Mathematics*, http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/∼history/Mathematicians/Fermat.html

[2] W. W. ROUSE BALL, *A Short Account of the History of Mathematics*, 4th Edition, 1908, http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Fermat/RouseBall/RB_Fermat.html

[3] *Wikipedia*, http://en.wikipedia.org/wiki/Pierre_de_Fermat

[4] E. W. WEISSTEIN, *Fermat's Last Theorem*, From MathWorld–A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/FermatsLastTheorem.html

[5] *ALLES MATHEMATIK Von Pythagoras zum CD-Player*, Ed. M. Aigner, E. Behrends; Vieweg 2000.