Različiti načini množenja matrica

IVAN SOLDO*

Sažetak. *U članku se analiziraju različiti načini množenja matrica. Svaki od njih ilustriran je primjerom.*

Ključne riječi: *linearni operatori, matrice, množenje matrica*

Different kinds of matrix multiplication

Abstract. *The paper analyses different kinds of matrix multiplication. Each of them is illustrated by an example.*

Key words: *linear operators, matrices, matrix multiplication*

1. Uvod

U geometriji, fizici, ekonomiji i raznim tehničkim disciplinama potrebno je uz skalare, tj. realne i kompleksne brojeve, uvesti i **vektore**. Sile opisujemo veličinama koje imaju smjer u prostoru i broj koji daje jakost, što su osobine vektora u trodimenzionalnom geometrijskom prostoru. Najjednostavnije funkcije koje djeluju na vektorima su linearne. Za razliku od funkcija koje brojevima pridružuju brojeve, funkcije koje vektorima pridružuju vektore zovemo **operatorima**. Linearni operatori na vektorskim prostorima zadaju se shemama brojeva - to su **matrice**. Skup svih matrica istog tipa (m, n) označavamo s $\mathcal{M}_{mn}$.

S matricama se računa tako da one slijede linearne operatore. Kao što se dvije funkcije mogu zbrajati, tako se i dva linearna operatora mogu zbrajati. Operacija među matricama koja odgovara zbrajanju operatora je zbrajanje matrica.

Zbrajanje matrica definirano je na način

$$(A + B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij}.$$

Da bi zbroj matrica bio definiran, matrice A i B moraju biti istog tipa. Rezultat je opet matrica istog tipa (m, n).

Slično se može množiti linearni operator skalarom, a tome odgovara množenje matrica skalarom.

*Odjel za matematiku, Trg Ljudevita Gaja 6, Osijek

Umnožak matrice A i skalara λ je matrica λA definirana s

$$(\lambda A)_{ij} = \lambda (A)_{ij}.$$

Dakle, matrica se množi skalarom tako da se svaki njezin element pomnoži tim skalarom.
Međutim, glavna operacije među linearnim operatorima je **slaganje** ili **kompozicija** operatora. Tome odgovara množenje matrica koje je prilično složena operacija.

Važno je uočiti da vrijedi slijedeće:

• umnožak nije definiran za bilo koje dvije matrice, pa čak niti za matrice istog tipa (m, n), ako je $m \neq n$

• i kad je umnožak definiran, on ovisi o poretku matrica.

Nije odmah jasno zašto se množenje matrica definira baš na "onaj" nama poznati način. Moglo bi se npr. definirati množenje dvije matrice istog $m \times n$ tipa tako da se odgovarajući članovi pomnože! No tome ne odgovara nijedna prirodna operacija s operatorima, pa istraživati takvo množenje nema smisla. Naprotiv, pravljenje složene funkcije, kao npr. od sinusa i kvadriranja praviti $(\sin x)^2$, najobičnija je i nezaobilazna operacija među funkcijama, a takva složena operacija među matricama daje množenje koje poznamo i zovemo "redak puta stupac". To između ostalog znači da broj stupaca jedne matrice mora odgovarati broju redaka druge matrice. Međutim, postavlja se pitanje postoje li i drugi načini množenja matrica?! Postoje, ali oni se u praksi rijetko koriste. Ovim člankom ilustrirat ćemo neke od njih!

2. Umnožak vektor - retka i vektor - stupca

Neka je $\vec{a}$ vektor - redak i $\vec{b}$ vektor - stupac iste duljine:

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{bmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Njihov se umnožak definira na sljedeći način:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n.$$

Rezultat ovog množenja je skalar.

Primjer 1.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 6 \cdot 5 + 8 \cdot 7 = 2 + 12 + 30 + 56 = 100.$$

3. Množenje matrica pravilom "redak puta stupac"

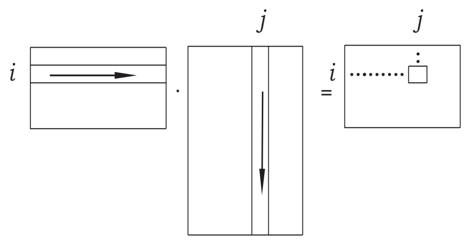
Da bi postojao umnožak dvije matrica, one moraju biti ulančane, tj. broj stupaca prve matrice mora biti jednak broju redaka druge matrice. Tako, ako je A matrica tipa $(m,\, n)$, da bi umnožak AB postojao, matrica B mora biti tipa $(n,\, p)$. Pri tome m i p mogu biti bilo kakvi. Rezultat množenja će biti matrica tipa $(m,\, p)$. Opišimo sada postupak množenja matrica:
Neka je $A = (a_{ij})$ matrica tipa $(m,\, n)$, a $B = (b_{ij})$ matrica tipa $(n,\, p)$. Opći element umnoška AB definiran je formulom

$$\begin{aligned} (AB)_{ij} &= a_{i1}\, b_{1j} + a_{i2}\, b_{2j} + \cdots + a_{in}\, b_{nj} = \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}. \end{aligned}$$

To je umnožak i - tog retka matrice A i j - tog stupca matrice B, tj.

$$(AB)_{ij} = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix}.$$

Na *Slici 1* prikazano je množenje matrica pravilom "redak puta stupca". Rezultat je matrica koja ima jednak broj redaka kao prva i jednak broj stupaca kao druga. Element umnoška na mjestu $(i,\, j)$ jednak je skalarnom umnošku
i - tog retka prve i j - tog stupca druge matrice.



Slika 1

Primjer 2. a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 & 11 \\ 15 & 22 & 25 \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 & 11 \\ 15 & 22 & 25 \\ 4 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

4. Matrični umnožak vektora

Neka su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ vektor - stupci istog tipa. Shvatimo li ih kao matrice, onda su definirana oba produkta $\vec{a}^T\,\vec{b}$ i $\vec{a}\,\vec{b}^T$. Pri tome vrijedi:

- $\vec{a}^T\,\vec{b}$ je matrica tipa $(1,1)$ s elementom

$$\vec{a}^T\,\vec{b} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = [a_1\,b_1 + a_2\,b_2 + \cdots + a_n\,b_n].$$

Takvu matricu s jednim elementom poistovjećujemo sa skalarom i pišemo bez uglatih zagrada.

- $\vec{a}\,\vec{b}^T$ je matrica tipa $(n,\,n)$ jer

$$\vec{a}\,\vec{b}^T = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \dots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \dots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \dots & a_nb_n \end{bmatrix}$$

Primjer 3.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 1\cdot 2 + 2\cdot 2 + 1\cdot 1 = 7$$

ali

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Uočavamo da su ova dva umnoška različita, što ilustrira činjenicu da množenje matrica nije komutativno!

Koristeći ovaj primjer i shvatimo li retke odnosno stupce matrica kao zasebne vektore, matrično množenje možemo opisati na slijedeći način:

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{b}^1 & \vec{b}^2 & \dots & \vec{b}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{a}_1\vec{b}^1 & \vec{a}_1\vec{b}^2 & \dots & \vec{a}_1\vec{b}^p \\ \vec{a}_2\vec{b}^1 & \vec{a}_2\vec{b}^2 & \dots & \vec{a}_2\vec{b}^p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{a}_m\vec{b}^1 & \vec{a}_m\vec{b}^2 & \dots & \vec{a}_m\vec{b}^p \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Vidimo da je opći element matrice AB upravo

$$
(AB)_{ij} = \vec{a}_i\,\vec{b}^j = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}.
$$

5. Množenje matrica "stupac puta stupac"

Neka je matrica A tipa $(m,\, n)$, a B tipa $(p,\, m)$. Definiran je umnožak $C = BA$. Uočimo da se množenje matrica može shvatiti u određenom smislu kao generalizacija djelovanja matrice na vektor stupac, shvaćenog kao linearna kombinacija stupaca. To nam daje još jedan način množenja matrica:

$$
\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{p1} \end{matrix}} & \cdots & \boxed{\begin{matrix} b_{1m} \\ \vdots \\ b_{pm} \end{matrix}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{matrix}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} c_{1k} \\ \vdots \\ c_{pk} \end{matrix}} \end{bmatrix}
$$

Zanimaju nas članovi k - stupca matrice C.

$$
\vec{c}^k = \begin{bmatrix} b_{11}a_{1k} + \dots + b_{1m}a_{mk} \\ b_{21}a_{1k} + \dots + b_{2m}a_{mk} \\ \vdots \\ b_{p1}a_{1k} + \dots + b_{pm}a_{mk} \end{bmatrix} = a_{1k} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{p1} \end{bmatrix} + \dots + a_{mk} \begin{bmatrix} b_{1m} \\ b_{2m} \\ \vdots \\ b_{pm} \end{bmatrix}
$$

Svaki k - stupac produkta C je linearna kombinacija uvijek istih stupaca matrice B s koeficijentima koje daje k - stupac matrice A. Produkt matrica može se računati tako da se po redu prave linearne kombinacije B - stupaca s koeficijentima iz prvog A - stupca, pa iz drugog A - stupca, itd. Time je definirano množenje "stupac puta stupac" matrica A i B.

Primjer 4. Primjenom pravila "stupac puta stupac" izračunajmo umnožak matrica A i B ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} & 1\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+0+3 & 1+0+3 \\ 4+1+2 & 2+0+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

6. Blok matrice i množenje matrica "stupac puta redak"

Elementi matrica ne moraju biti samo skalari. To mogu biti i same matrice. Takve matrice nazivamo blok matricama. Blok matrica je svaka matrica (A_{ij}), pri čemu su A_{ij} matrice sa skalarnim elementima. Matrice A_{ij} nazivamo submatricama. Pri rastavu matrica na blokove imamo potpunu slobodu. Jedini je uvjet da submatrice moraju biti načinjene tako da su među njima definirane operacije koje kanimo provesti. To se najbolje vidi na primjeru:

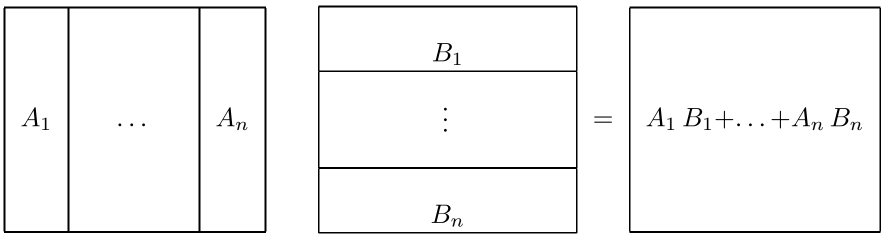
$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 8 & -3 & 4 & 1 \\ 9 & -6 & 6 & -3 \\ \hline 0 & 0 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{array}\right]$$

Gornje množenje provedeno je primjenom pravila "redak puta stupac", gdje je svaki faktor jedna submatrica, a množenje među njima je doista definirano.

Rastav matrica na blok matrice i primjena množenja po blokovima daje nam još jedan algoritam množenja matrica. To je algoritam "stupac puta redak". On se, istina, rjeđe primjenjuje, ali može biti jako koristan. Opišimo ga:
Neka su dane dvije matrice A i B. Rastavimo ih na blokove tako da su stupci od A blokovi $A_1, \ldots, A_n$, a retci od B su blokovi $B_1, \ldots, B_n$. Tada je umnožak

$$AB = A_1 B_1 + A_2 B_2 + \cdots + A_n B_n$$

Slikovito to izgleda ovako:



Primjer 5. Rastavom na blok matrice i primjenom pravila "stupac puta redak" odredimo umnožak slijedećih matrica:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 & 8 \\ 3 & 4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \left[\begin{array}{r|r} 4 & 1 \\ 2 & -2 \\ -3 & 3 \end{array}\right] \left[\begin{array}{rrrr} 2 & -1 & -2 & 8 \\ \hline 3 & 4 & 3 & -1 \end{array}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & -4 & -8 & 32 \\ 4 & -2 & -4 & 16 \\ -6 & 3 & 6 & -24 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 & -1 \\ -6 & -8 & -6 & 2 \\ 9 & 12 & 9 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 11 & 0 & -5 & 31 \\ -2 & -10 & -10 & 18 \\ 3 & 15 & 15 & -27 \end{bmatrix}$$

Literatura

[1] N. ELEZOVIĆ, *Linearna algebra*, Element, Zagreb, 2003.

[2] N. ELEZOVIĆ, *Linearna algebra: Zbirka zadataka*, Element, Zagreb, 2003.

[3] S. KUREPA, *Uvod u linearnu algebru*, Školska knjiga, Zagreb, 1987.

[4] GILBERT STRANG, *Introduction To Linear Algebra*, Third Edition, Wellesley - Cambridge Press, Wellesley, 2003.