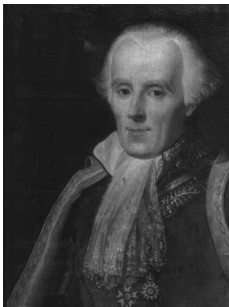


## Pierre-Simon de Laplace

FRANKA MIRIAM BRÜCKLER\*



U drugoj polovici 18. stoljeća razvoj matematičke analize sve je više omogućavao njene primjene na kretanje nebeskih tijela. U to je doba jedno od glavnih područja zanimanja pitanje stabilnosti putanja planeta. Osobito su francuski matematičari koristili analitičke metode u pokušajima opisa i objašnjenja putanja planeta. Jedan od najznačajnijih matematičara koji su se bavili tim problemima i ostvarili veliki napredak bio je Pierre-Simon Laplace, koji je dokazao da putanje planeta ne ometaju stabilnost Sunčeva sustava, nego je održavaju.

Drugo područje po kojem je znamenit ovaj matematičar je teorija vjerojatnosti, za koju je Laplace 1812. prvi dao preciznu definiciju i objavio prvi potpun pregled rezultata svojih prethodnika. Godine 1814. Laplace će, u skladu s racionalizmom svog doba, ustvrditi da vjerojatnost nije ništa drugo doli računski izražen zdrav razum. Laplace je bio primijenjeni matematičar, a matematičku analizu je smatrao prije svega sredstvom za rješavanje fizikalnih i astronomskih problema. Po potrebi je uspijevaio otkriti izvanredne nove metode, iako je istovremeno bio sklon ne objašnjavati odnosno dokazivati rezultate u čiju istinitost je bio uvjeren.

Kao osobna karakteristika Laplacea osobito je uočljiv njegov politički oportunizam, tako da je paralelno sa svojom znanstvenom karijerom uspio u burnim francuskim vremenima prijelaza 18. u 19. stoljeće održati se i na mnogim značajnim pozicijama. Nasuprot izvanrednim znanstvenim rezultatima, Laplace se nije istakao u međuljudskim odnosima. S vremenom, postajao je sve manje skroman oko svojih dostignuća i sve više je ignorirao druge ljude oko sebe. Tako je nakon posjeta Akademiji 1780. – 81. Lexell komentirao kako je Laplace dao do znanja da se smatra najboljim matematičarem u Francuskoj. Prema svojim dobročiniteljima iz mladosti i kasnijim političkim prijateljima ponašao se nezahvalno i s prezirom. Ipak, imao je nezavisan karakter i otvoreno iskazivao svoje mišljenje, a osobito potkraj života pokazao se i velikodušnim: u jednom je slučaju zadržao svoj rezultat od objavljivanja kako bi jedan njegov učenik mogao dobiti potpunu zaslugu za istraživanje. Bilo kako bilo, Laplace je sigurno jedan od najvećih matematičara i fizičara modernog doba.

Pierre-Simon Laplace rođen je 23. ožujka 1749. u gradiću Beaumont-en-Auge u Normandiji. O obiteljskom statusu njegovih roditelja ima više nagađanja, no najvjerojatnije je rođen u umjereno dobrostojećoj seljačkoj ili trgovačkoj obitelji

---

\*Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, Gajev trg 6, HR-31000 Osijek,  
e-mail: [bruckler@math.hr](mailto:bruckler@math.hr)

bez višeg obrazovanja. Namjera oca je bila da Laplace nađe zvanje u crkvi, te je u skladu s tim bilo njegovo početno školovanje i upis studija teologije na sveučilištu u Caenu kad je imao 16 godina. Tijekom dvije godine na sveučilištu otkrio je ljubav prema matematici te je napustio studij teologije i otišao u Pariz. Jedan od profesora iz Caena koji je u njemu otkrio matematički talent, Le Canu, dao mu je pismo preporuke za D'Alemberta<sup>1</sup>, koji je brzo uočio Laplaceove sposobnosti te mu je pomogao i u usmjeravanju svog matematičkog rada i u nalaženju radnog mjesta. Tako je ubrzo Laplace dobio mjesto profesora matematike na vojnoj školi, École Militaire.

Prvi Laplaceovi matematički radovi bili su iz područja diferencijalnih i diferencijalnih jednadžbi, te primjena u mehanici i fizikalnoj astronomiji. Kako mu je ugled rastao, tako su Laplaceu rasle i ambicije te je već 1771. pokušao biti izabran u Francusku akademiju znanosti. Te je godine prednost dana Vandermondeu, a iduće Cousinu kojeg je Laplace smatrao bitno slabijim matematičarem od sebe te ga je to prilično naljutilo. Godine 1773. Laplace je izabran je za pridruženog člana Akademije, punopravan član postaje 1785. Tijekom 1770-ih reputacija mu je stalno rasla, a Laplace je usavršavao svoje matematičke tehnike i sve više se usmjeravao dvama područjima na kojima će dati svoje najvažnije rezultate: teoriji vjerojatnosti i nebeskoj mehanici. Tako je 1780-ih Laplace postao jedan od najznačajnijih i najutjecajnijih znanstvenika svog doba. Kao član Akademije, sudjelovat će u mnogim bitnim odborima, npr. u odboru koji je trebao donijeti ocjenu rada najveće pariške bolnice. Tu je Laplace iskoristio svoje znanje vjerojatnosti da usporedi stopu smrtnosti u toj bolnici s drugim bolnicama u i izvan Francuske. Godine 1780., Laplace je počeo surađivati sa znamenitim kemičarem Antoine Lavoisierom, te se tako počeo baviti i teorijom topline. Zajedno su utvrdili kemijsku ekvivalenciju disanja i izgaranja drvenog ugljena.

U doba pred francusku revoluciju, Laplace je radio kao ispitivač pri Kraljevskom artiljerijskom odredu. Tu je godine 1785. ispitao i propustio šesnaestogodišnjeg Napoleona Bonaparta. Godine 1787. dovršio je dokaz stabilnosti Sunčeva sustava na osnovi pretpostavke da se radi o skupu krutih tijela koja se kreću u vakuumu. Za vrijeme Revolucije, Laplace je 1790. bio član komisije za standardizaciju mjera koja je radila na uvođenju metričkog i decimalnog sustava, jedine od komisija Akademije koje su smjele nastaviti rad i nakon što je strahovlada 1793. ukinula Akademiju. Ipak, ubrzo zatim su iz komisije izbačeni kako Laplace, tako i neki njeni drugi članovi (među inim Lavoisier i Coulomb). Naime, strahovlada je zahtijevala da članovi Komisije budu zaslužni po „svojim republikanskim vrlinama i mržnji na kraljeve”. Neposredno prije uvođenja strahovlade, Laplace je sa svojom dvadeset godina mladoom ženom (s kojom se oženio 1788.) te njihovo dvoje djece napustio Pariz. U Pariz su se vratili 1794. Kćer Sophie–Suzanne umrla je pri porodu 1813., no dijete je preživjelo i s te strane postoje Laplaceovi potomci. Laplaceov sin Charles–Emile postao je časnik i doživio 85 godina, ali nije imao djece.

Iako je uspio izbjeći sudbinu giljotine, za razliku od Lavoisiera i mnogih drugih kolega, ovo doba je bilo teško za Laplacea. Kad je skupa s Lagrangeom<sup>2</sup> tre-

<sup>1</sup> Jean Le Rond d'Alembert, 1717-1783, francuski matematičar, glavni rezultati su iz područja matematičke analize.

<sup>2</sup> Joseph Lagrange, 1736-1813, francuski matematičar, uz Eulera najznačajniji matematičar 18.

bao konstruirati kalendar po želji revolucionarne vlade, iako je znao da su njihove ideje suprotne astronomskim podacima, odlučio je ne suprotstavljati se političkoj dogmi. Slično se konformistički složio s podjelom kuta na sto dijelova. Tokom 1795. Laplace je predavao (ne samo) teoriju vjerojatnosti na novoosnovanoj *École Normale*, učiteljskoj školi. Ta je predavanja zapisao i objavio 1814. kao *Essai philosophique sur les probabilités*. U tom se djelu može naći tzv. **Laplaceov demon**, filozofsko polazište determinizma i mehanicističke slike svijeta. Laplaceov demon je ime za shvaćanje po kom je moguće izračunati svako prošlo ili buduće stanje ako se znadu svi prirodni zakoni. Prema Laplaceovom mišljenju, svijet je potpuno određen početnim uvjetima i zakonima kretanja. Laplaceov demon je inteligencija koja bi trebala postići da se sva pravila svijeta svedu na matematičku formulu, točnije sustav diferencijalnih jednadžbi, iz kog bi se mogli izračunati pozicija, smjer kretanja i brzina svakog atoma u svemiru. Prema suvremenoj fizici, glavna tri prigovora predožbi o Laplaceovom demonu su teorija relativnosti (nemogućost obuhvaćanja informacija o čitavom svemiru jer se one šire maksimalno brzinom svjetlosti pa postoji granica iza koje demon „ne vidi”), kvantnofizička saznanja (nije moguće dati točnu poziciju već samo vjerojatnost nalaženja na nekoj poziciji npr. za elektron), te ograničenost izračunavanja (posljedica teorije kaosa je da bi demon za svoje predskazivanje nekog stanja svemira trebao bar toliko vremena koliko svemiru treba da to stanje zauzme, pa bi svako predskazivanje kasnilo).

Godine 1795. ponovno je otvorena i Akademija, sad pod imenom Nacionalnog instituta znanosti i umjetnosti. Iste je godine osnovan i *Bureau des Longitudes*, kojem je Laplace postao predstojnikom, kao i pariškoj zvjezdarnici. Iako stručan, dobio je dosta kritika na svoje vođenje zbog prevelike teoretičnosti. Svoju znamenitu hipotezu da je Sunčev sustav nastao hlađenjem i kontrakcijom velikog, spljoštenog i sporo rotirajućeg oblaka užarenog plina predstavio je 1796. u djelu *Exposition du systeme du monde*.

Niz svojih astronomskih rezultata objavio je 1799. u znamenitom djelu *Traité de Mécanique Céleste*. Zapravo, te su godine izdana prva dva dijela tog rada, a kasnije (1802., 1805. i 1825.) su izdana još tri dijela. Radi se u biti o upotpunjenu Newtonovog djela *Philosophiae naturalis principia mathematica*. U *Mécanique Céleste* Laplace obrađuje opća pravila ravnoteže i kretanja krutih tijela i tekućina i plinova, zakon univerzalne gravitacije, kretanja centara gravitacije pojedinih tijela Sunčeva sustava, nebesku mehaniku, nastanak plime i oseke, ... Od matematike, bitno koristi diferencijalne jednadžbe. Tu se pojavljuje i parcijalna diferencijalna jednadžba poznata kao **Laplaceova jednadžba** za razne vrste potencijala  $U$ :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

Iako ta jednadžba nosi ime po Laplaceu, bila je poznata i prije njega. U matematici u *Mécanique Céleste* vidi se i jak utjecaj dva velika Laplaceova suvremenika: Lagrangea i Legendrea<sup>3</sup>. Iako jako značajno djelo, *Mécanique Céleste* je teška za

---

stoljeća, imao je bitne rezultate u matematičkoj analizi, algebri, teoriji brojeva, matematičkoj fizici.

<sup>3</sup>Adrien-Marie Legendre, 1752-1833, francuski matematičar, bavio se matematičkom analizom, teorijom brojeva i geometrijom.

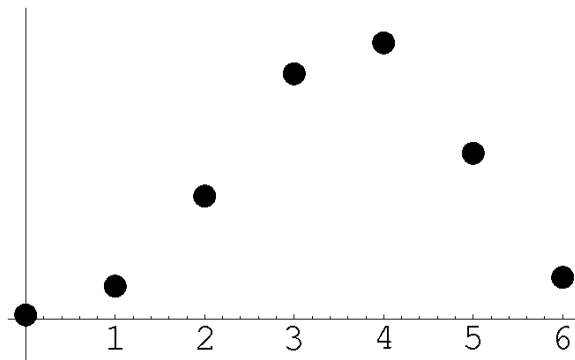
čitanje, a mnogi detalji su neobjašnjeni. Tu se prvi put pojavljuje formulacija, koja je kasnije postala popularna u matematičkim tekstovima, „Lako se vidi”. Laplace ju je koristio na više mjesta gdje je bio uvjeren u točnost svojih rezultata, ali ih nije znao – ili htio – obrazložiti.

Kako je Napoleonova moć rasla, Laplace se sve više odricao ranijih republikanskih načela. Kad je Napoleon 1799. postao prvi konzul, Laplace je postao ministar unutarnjih poslova, no za to se pokazao neprikladnim te je smijenjen već nakon šest tjedana. Napoleon je kasnije ironično komentirao, aludirajući na Laplaceove uspjehe u infinitezimalnom računu, da je Laplace „unio duh beskonačno malog u državnu upravu”. Postoji i zapis njegova razgovora s Napoleonom, kad mu je Laplace otišao ponuditi kopiju svoje *Mécanique Céleste*. Prema tome zapisu, netko je Napoleonu rekao da se u tom djelu ne spominje Bog, te je Napoleon komentirao Laplaceu da mu je rečeno da je napisao tu veliku knjigu o svemirskom sustavu bez da spomene tko ga je stvorio. Laplace je na to odgovorio „Nemam potrebe za tom hipotezom.” Usprkos neuspjehu na mjestu ministra unutarnjih poslova, Laplace je dobio mjesto u Senatu. U predgovoru trećem dijelu *Méchanique céleste* Laplace piše da je od svih u tom djelu iznesenih istina, autoru tj. njemu najvrednija njegova predanost mirotvorcu Europe. Tu je posvetu u kasnijim izdanjima, nakon što je Napoleon izgubio vlast, uklonio. 1805. dobiva orden Legije časti a 1806. postaje plemić s titulom *Compte de l'Empire*. Kao senator, 1814. je glasovao za smjenu Napoleona i povratak dinastije Bourbona. Kako su na to slijedili znamenitih sto dana Napoleona, Laplace se našao u neugodnoj poziciji te je napustio Pariz do konačnog Napoleonova poraza. Nakon tog ostao je vjeran dinastiji Bourbona, ali nepopularan u političkim krugovima. Godine 1817. kralj Luj XVIII iz dinastije Bourbona imenovao ga je markizom. Svoje je zadnje političke prijatelje izgubio 1826., kad je odbio potpisati Akademijin dokument podrške slobodi novina. Laplace je umro u Parizu 5. ožujka 1827.

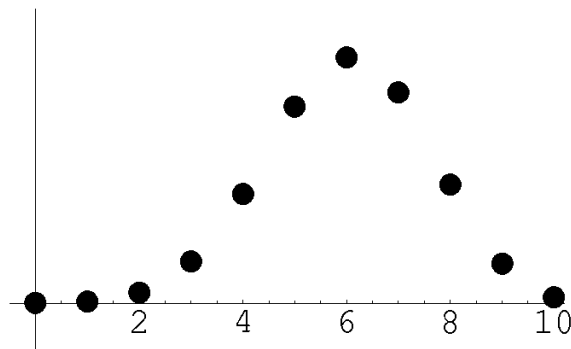
Za matematiku, Laplace je najznačajniji po svojim rezultatima u teoriji vjerojatnosti. Prvo izdanje njegove *Théorie Analytique des Probabilités* objavljeno je 1812., a drugo izdanje objavljeno je 1814. Drugo je izdanje bitno obimnije, a za razliku od prvog, nije posvećeno Napoleonu. U ovom se djelu može naći definicija vjerojatnosti: ukoliko u nekom pokusu imamo konačno mnogo mogućih ishoda od kojih je jedan nazvan događajem  $A$ , vjerojatnost događaja  $A$  jednaka je broju povoljnih slučajeva za  $A$  podijeljenom s brojem svih mogućih ishoda pokusa. Tu se koristi pretpostavka da su svi ishodi jednako mogući tj. jednako vjerojatni<sup>4</sup>. Nadalje, tu su i pravila za račun s vjerojatnosti, zatim Bayesovo pravilo (koje je ime dobilo mnogo kasnije), metode nalaženja vjerojatnosti složenih događaja, opis i dokaz metode najmanjih kvadrata (koju su empirijski oko 1800. dobili Gauss i Legendre), primjene na smrtnost, pravo i očekivano trajanje života i braka, kao i napomene o moralu i matematičkom očekivanju. U kasnijim se izdanjima u dodacima nalaze i druge primjene vjerojatnosti, npr. na određivanje masa Jupitera, Saturna i Urana. Tako je Laplace na osnovi raspoloživih rezultata astronomskih mjerenja putanje Saturna dobio procjenu njegove mase, te je izjavio da se kladi „11000 naprema 1 da greška u ovom rezultatu nije veća od stotine njegova iznosa”. Laplace bi bio

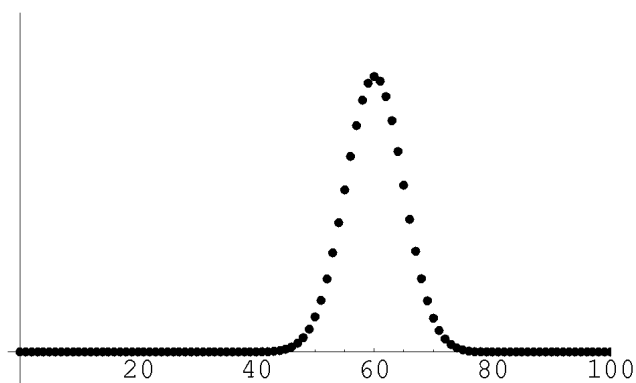
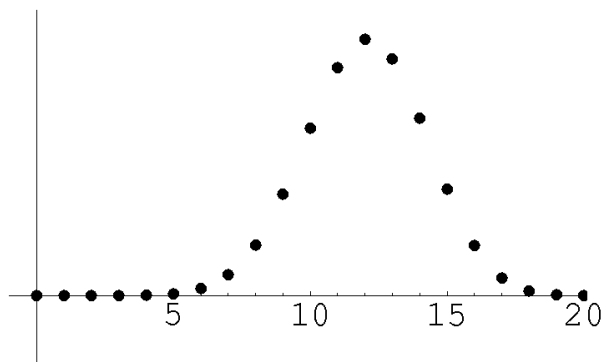
<sup>4</sup>Vidi se da je Laplaceova, tzv. klasična, definicija vjerojatnosti cirkularna: vjerojatnos događaja definira se uz poznavanje jednake vjerojatnosti ishoda pokusa. Ta je cirkularnost uklonjena uvođenjem aksioma vjerojatnosti (A. N. Kolmogorov, 1933.)

dobio okladu, jer se 150 godina kasnije na osnovi novih mjerenja rezultat morao ispraviti za samo 0,63%! Zanimljiv je i Laplaceov komentar u *Théorie Analytique des Probabilités*: „Vrijedno je primijetiti da je znanost, koja je počela iz promatranja igara na sreću postala najvažniji predmet ljudskog znanja ... Najvažnija pitanja života su stvarno većinom problemi vjerojatnosti.” Najpoznatiji Laplaceov rezultat iz teorije vjerojatnosti je **Laplaceov centralni granični teorem**, koji kaže da ako isti pokus s dva moguća ishoda ponavljamo jako mnogo puta i pritom ishod svakog idućeg puta ne ovisi o ishodima prethodnih pokusa, onda se zbroj (ili: prosjek) rezultata tih pokusa približava normalnoj distribuciji. Objasnimo pojam normalne distribucije i centralni granični teorem na primjeru: Iz kutije u kojoj je ukupno 10 kuglica, od čega 6 plavih i 4 žute, vadimo po jednu kuglicu, pogledamo je i vratimo natrag u kutiju. Prvi mogući događaj je vađenje plave kuglice i ima vjerojatnost  $p = \frac{6}{10} = 0,6$ , a drugi događaj je vađenje žute kuglice i on ima vjerojatnost  $q = \frac{4}{10} = 0,4 = 1 - p$ . Binomna distribucija opisuje vjerojatnost da je točno  $k$  puta u ukupno  $n$  izvlačenja izvučena plava kuglica: ta je vjerojatnost jednaka  $\binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \binom{n}{k} 0,6^k \cdot 0,4^{n-k} = 0,4^n \cdot \binom{n}{k} 1,5^k$ . Graf te funkcije za npr.  $n = 6$  izgleda ovako:

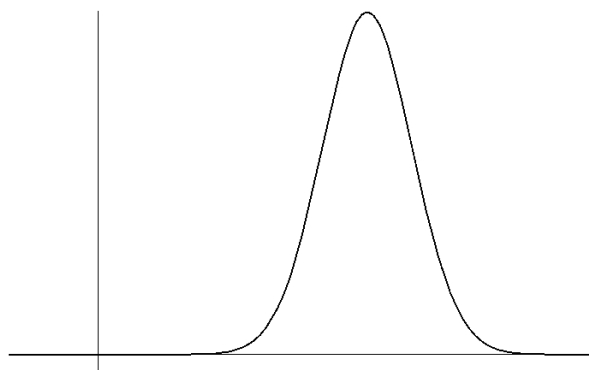


Centralni granični teorem kaže da se s rastućim  $n$  gornji graf približava grafu normalne funkcije gustoće (na slikama su grafovi za  $n = 10$ ,  $n = 20$ ,  $n = 100$  i graf normalne gustoće koji odgovara beskonačno velikom  $n$ ):





Funkcija gustoće normalne razdiobe, kao npr. ona prikazana na zadnjoj slici, ima formulu  $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ . Pritom je  $\mu$  prosječni rezultat (ako uzmemo da je izvlačenje plave kuglice označeno s 1, a žute s 0), a  $\sigma^2$  je varijanca (prosjeak kvadrata razlike između stvarnog i prosječnog rezultata). Dok je  $n$  konačan vrijedi  $\mu = np$  i  $\sigma^2 = npq$ .



Više matematičkih pojmova nosi ime po Laplaceu. Poznat je postupak za

izračunavanje determinante<sup>5</sup> **Laplaceov razvoj determinante**, kojeg je otkrio vezano za rješavanje sustava diferencijalnih jednažbi. Za kvadratne matrice reda 2 i 3, to pravilo (Laplaceov razvoj po prvom retku) izgleda ovako:

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

$$\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = a \cdot \det \begin{bmatrix} e & f \\ h & i \end{bmatrix} - b \cdot \det \begin{bmatrix} d & f \\ g & i \end{bmatrix} + c \cdot \det \begin{bmatrix} d & e \\ g & h \end{bmatrix}$$

Opisno: idemo po prvom retku matrice i svaki element tog retka množimo s determinantom matrice koja ostane kad izbrišemo redak i stupac odabranog elementa iz polazne matrice; ti se produkti naizmjenično zbrajaju i oduzimaju.

Operator vezan za Laplaceovu jednažbu, koji funkciji  $U$  od više varijabli pridružuje funkciju s lijeve strane Laplaceove jednažbe, zove se **Laplaceov operator**. On se među inim primjenjuje za određivanje zakrivljenosti ploha, pri istraživanju minimalnih ploha (to su npr. plohe sapunice koje nastaju nakon umakanja neke žičane konstrukcije u sapunicu), za „izvlačenje” kontura pri elektroničkoj obradi slika, u oceanografiji za proračune strujanja, u medicini za vizualizaciju npr. aneurizma u aorti ili tomografiju. Laplaceov operator mjeri „nepravilnosti” funkcije („pravilna” je ona funkcija kojoj Laplaceov operator pridružuje nulu, npr. funkcija potencijala). Laplaceova se jednažba pojavljuje i pri istraživanju pitanja gravitacije ili pak širenja topline ili valova.

**Laplaceova transformacija** je vrsta transformacije funkcija koja se koristi u rješavanju diferencijalnih jednažbi. Za danu funkciju  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  njezin Laplaceov transformat je funkcija  $g$  koja se dobiva kao integral po pozitivnim brojevima (tj. površina ispod dijela grafa koji se nalazi desno od  $y$ -osi) od funkcije  $f$  pomnožene s  $e^{-tx}$ . Za različite  $t$ , dobivamo različite vrijednosti  $g(t)$ . Ova se transformacija koristi npr. u geologiji za simulaciju zagađenja temeljnih voda ili pak u avijaciji za izračunavanje lateralnog pomaka aviona (opis te metode možete naći u idućem prikazu od NASA-e iz 1950.: <http://naca.larc.nasa.gov/reports/1950/naca-tn-2129/naca-tn-2129.pdf>).

## Literatura

- [1] MacTutor History of Mathematics,  
<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Laplace.html>
- [2] Richard Mankiewicz *Zeitreise Mathematik – Vom Ursprung der zahlen bis zur Chaostheorie*, vgs Verlagsgesellschaft, Köln 2000.
- [3] P. BASIEUX, *Abenteuer Mathematik*, Rowohlt Verlag, Reinbek bei Hamburg, 1999.

---

<sup>5</sup>Kvadratna matrica je pravokutna tablica brojeva koja ima isti broj redaka i stupaca. Njena determinanta je po određenim pravilima njoj pridružen broj. Sama definicija determinante je pravilo za njeno izračunavanje, ali je u praksi nespretno za korištenje. Za matricu  $A$  njena determinanta se označava s  $\det(A)$  ili  $|A|$ .

- [4] E. J. BOROWSKI, J. M. BORWEIN, *Dictionary of Mathematics*, Harper Collins Publishers, Glasgow, 2002.
- [5] PIERRE-SIMON LAPLACE, <http://www.math.unicaen.fr/~reysat/laplace/> (stranica na francuskom jeziku)
- [6] A Short Account of the History of Mathematics by W.W.Rouse Ball (4th Edition, 1908) - <http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Fermat/RouseBall/RBFermat.html>
- [7] Wikipedia <http://de.wikipedia.org/wiki/Pierre-SimonLaplace> (stranica na njemačkom jeziku)