

## STUDENTSKA RUBRIKA

## Udaljenost točke do krivulje

IVANA KUZMANOVIĆ\*

**Sažetak.** U ovom članku razmatra se metoda računanja udaljenosti točke do eksplicitno, parametariski, te polarno zadane krivulje. U literaturi za ovaj problem postoji eksplicitno rješenje za slučaj afine funkcije, te za još neke specijalne slučajeve.

**Ključne riječi:** udaljenost, krivulja, minimizacija

**Abstract.** This article considers the method for calculating the distance of a point to the curve given explicitly, in parameter and polar form. In literature, there exists an explicit solution to this problem for the case of affine functions as well as for some other special cases.

**Key words:** distance, curve, minimization

## 1. Udaljenost točke do grafa eksplicitno zadane funkcije

Neka su dane točke ravnine  $T_1 = (x_1, y_1)$  i  $T_2 = (x_2, y_2)$ .  $L_1$  udaljenost točaka  $T_1$  i  $T_2$  definiramo kao

$$d_1(T_1, T_2) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|.$$

$L_2$  (euklidska) udaljenost dana je s

$$d_2(T_1, T_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Za udaljenost točke  $T_0 = (x_0, y_0)$  do krivulje uzima se najkraća udaljenost između točke  $T_0$  i točaka na krivulji. Preciznije:

Neka je dana točka  $T_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  i neprekidna funkcija  $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}$ . Želimo odrediti  $L_1$  i  $L_2$  udaljenost točke  $T_0$  do grafa funkcije  $f$ . Taj problem se svodi na određivanje točke  $T_p^* = (x_p^*, f(x_p^*)) \in \Gamma_f$  takve da je

$$d_p(T_0, T_p^*) = \min_{T \in \Gamma_f} d_p(T_0, T),$$

odnosno na rješavanje problema globalnog minimuma funkcije jedne varijable, tj. treba pronaći točku  $x_p^* \in \mathbb{D}$ , tako da bude

$$\min_{x \in \mathbb{D}} \phi_p(x) = \phi_p(x_p^*), \quad (1)$$

\*Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, Trg Ljudevita Gaja 6, HR-31000 Osijek, e-mail: [ikuzmano@mathos.hr](mailto:ikuzmano@mathos.hr)

gdje je

$$\phi_p(x) = \begin{cases} |x - x_0| + |f(x) - y_0| & , p = 1 \\ \sqrt{(x - x_0)^2 + (f(x) - y_0)^2} & , p = 2 \end{cases} .$$

Tada je  $d_p(T_0, \Gamma_f) = d(T_0, T_p^*)$ . Ovaj problem je već razmatran u [3].

Lako se može vidjeti da ako neprekidna funkcija  $\psi: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  postiže svoj minimum u točki  $x^*$ , da tada funkcija  $\phi(x) = \sqrt{\psi(x)}$  također postiže svoj minimum u točki  $x^*$ . Zato ćemo umjesto minimizacije funkcije  $\phi_p$  minimizirati jednostavniju funkciju

$$\psi_p(x) = \begin{cases} |x - x_0| + |f(x) - y_0| & , p = 1 \\ (x - x_0)^2 + (f(x) - y_0)^2 & , p = 2 \end{cases} . \quad (2)$$

### Primjer 1. Udaljenost točke do grafa logističke funkcije

Neka je  $f(x) = \frac{5}{1 + 5e^{-2x}}$ . Odredimo  $L_1$  i  $L_2$  udaljenost točke  $T_0 = (2, 3)$

do grafa funkcije  $f$ .

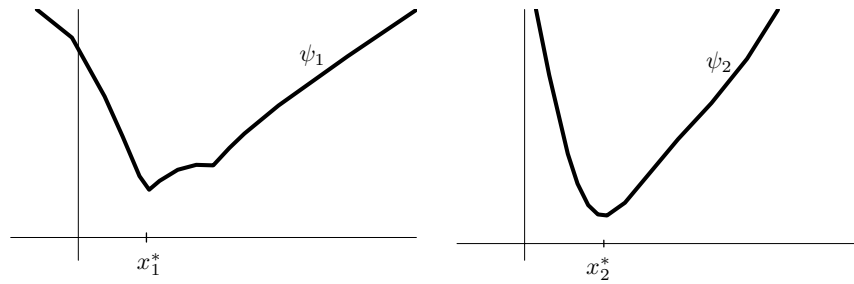
Treba pronaći točku  $x_p^* \in \mathbb{R}$  koja je rješenje problema

$$\min_{x \in \mathbb{R}} \psi_p(x) = \psi_p(x_p^*), \quad p = 1, 2$$

gdje je

$$\psi_p(x) = \begin{cases} |x - 2| + \left| \frac{5}{1 + 5e^{-2x}} - 3 \right| & , p = 1 \\ (x - 2)^2 + \left( \frac{5}{1 + 5e^{-2x}} - 3 \right)^2 & , p = 2 \end{cases} .$$

Na Slici 1. prikazani su grafovi funkcija  $\psi_1$  i  $\psi_2$ .

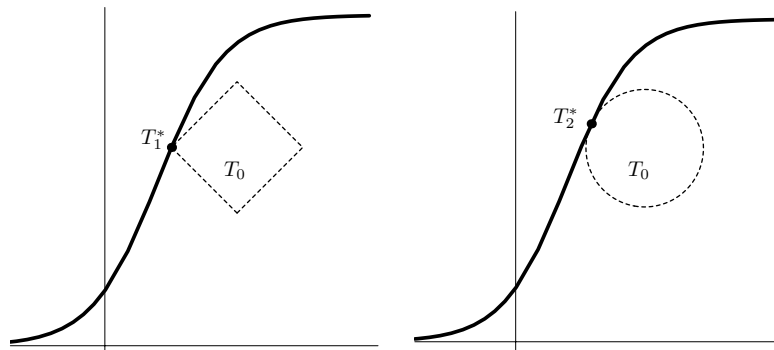


Slika 1. Grafovi funkcija  $\psi_1$  i  $\psi_2$

Udaljenost točke  $T_0$  do grafa  $\Gamma_f$  pri tome iznosi

$$d_p(T_0, \Gamma_f) = \begin{cases} \psi_1(x_1^*) & , p = 1 \\ \sqrt{\psi_2(x_2^*)} & , p = 2 \end{cases} .$$

Na Slici 2. prikazan je graf funkcije  $f$ , točka  $T_0$  i njezine  $L_1$  i  $L_2$  projekcije  $T_p^* = (x_p^*, f(x_p^*))$ ,  $p = 1, 2$ .<sup>1</sup>



Slika 2.  $L_1$  i  $L_2$  projekcije točke  $T_0$

**Napomena:** Točka  $T_p^*$  je diralište krivulje  $\Gamma_f$  i kugle u  $L_p$  metrici sa središtem u  $T_0$  polumjera  $d_p(T_0, \Gamma_f)$ . (Slika 2.)

## 2. Udaljenost točke do parametarski zadane krivulje

Neka je dana točka  $T_0 = (x_0, y_0)$  i krivulja  $\Gamma$  zadana u parametarskom obliku

$$\Gamma = \{(f_x(t), f_y(t)) : t \in [t_1, t_2]\}.$$

Da bi odredili  $L_1$  i  $L_2$  udaljenost točke  $T_0$  do krivulje  $\Gamma$ , slično kao u prethodnom slučaju, treba pronaći  $t_p^* \in [t_1, t_2]$  tako da bude

$$\min_{t \in [t_1, t_2]} \psi_p(t) = \psi_p(t_p^*), \quad (1)$$

gdje je

$$\psi_p(t) = \begin{cases} |f_x(t) - x_0| + |f_y(t) - y_0| & , p = 1 \\ (f_x(t) - x_0)^2 + (f_y(t) - y_0)^2 & , p = 2 \end{cases} . \quad (2)$$

Tada je

$$d_p(T_0, \Gamma) = \begin{cases} \psi_1(t_1^*) & , p = 1 \\ \sqrt{\psi_2(t_2^*)} & , p = 2 \end{cases} .$$

Pri tome je točka projekcije dana s  $T_p^* = (f_x(t_p^*), f_y(t_p^*))$ .

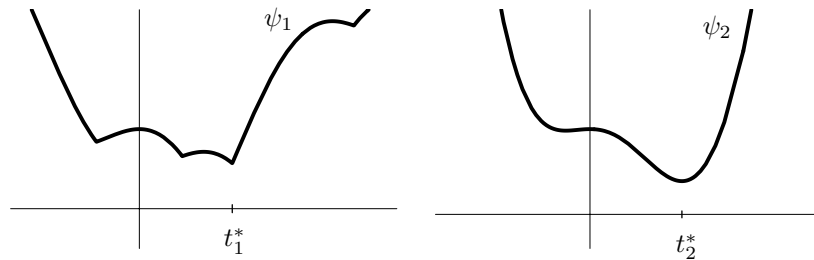
<sup>1</sup>Svi grafovi su izrađeni u programskom paketu *Mathematica*. Za minimizaciju funkcija korištena je *Mathematica* funkcija `FindMinimum` (vidjeti [4]).

**Primjer 2.** Zadana je točka  $T_0 = (1.5, 0.5)$  i cikloida  $\Gamma = \{(t - \sin t, 1 - \cos t) : t \in [0, 2\pi]\}$ . Da bismo odredili  $L_1$  i  $L_2$  udaljenosti točke  $T_0$  do krivulje  $\Gamma$ , najprije trebamo odrediti točke  $t_1^*$  i  $t_2^*$  u kojima funkcije

$$\psi_1(t) = |t - \sin t - 1.5| + |1 - \cos t - 0.5|$$

$$\psi_2(t) = (t - \sin t - 1.5)^2 + (1 - \cos t - 0.5)^2$$

postiču minimum. Na Slici 3. prikazani su grafovi funkcija  $\psi_1(t)$  i  $\psi_2(t)$ .

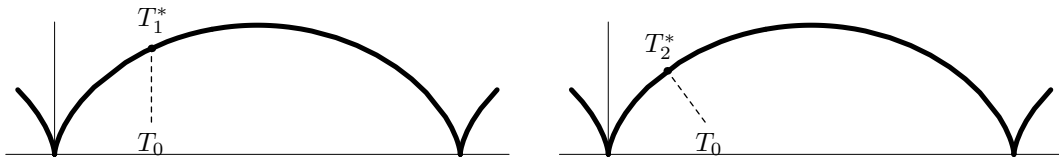


Slika 3. Grafovi funkcija  $\psi_1(t)$  i  $\psi_2(t)$ .

Na Slici 4. prikazane su  $L_1$  i  $L_2$  projekcije  $T_1^* = (t_1^* - \sin t_1^*, 1 - \cos t_1^*)$  i  $T_2^* = (t_2^* - \sin t_2^*, 1 - \cos t_2^*)$  točke  $T_0$  na krivulju  $\Gamma$

a)  $L_1$  udaljenost

b)  $L_2$  udaljenost



Slika 4.  $L_1$  i  $L_2$  projekcije točke  $T_0$  na krivulju  $\Gamma$

### 3. Udaljenost točke do polarno zadane krivulje

Polarno zadana krivulja je zadana jednačbom oblika

$$r = f(\varphi), \quad \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2].$$

Kako je veza između polarnih i Kartezijevih koordinata dana s (vidjeti [1])

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, \\ y &= r \sin \varphi, \end{aligned}$$

onda se problem udaljenosti točke do polarno zadane krivulje može svesti na računanje udaljenosti do parametarski zadane krivulje.

**Primjer 3.** Neka je  $r = \frac{3}{\varphi}$ ,  $\varphi \in [0, 3\pi]$  polarno zadana krivulja i  $T_0 = (1, 1)$ . Tada je u parametarskom obliku ta krivulja dana s  $\Gamma_\varphi = \{(\frac{3}{\varphi} \cos \varphi, \frac{3}{\varphi} \sin \varphi) : \varphi \in [0, 3\pi]\}$ . Da bi odredili  $L_1$  i  $L_2$  udaljenosti točke  $T_0$  do krivulje  $\Gamma_\varphi$ , najprije trebamo odrediti točke  $\varphi_1^*$  i  $\varphi_2^*$  u kojima funkcije

$$\psi_1(\varphi) = \left| \frac{3}{\varphi} \cos \varphi - 1 \right| + \left| \frac{3}{\varphi} \sin \varphi - 1 \right|,$$

$$\psi_2(\varphi) = \left( \frac{3}{\varphi} \cos \varphi - 1 \right)^2 + \left( \frac{3}{\varphi} \sin \varphi - 1 \right)^2$$

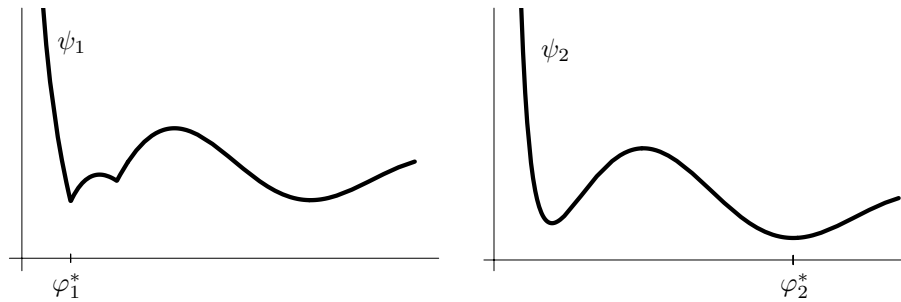
postiću globalni minimum.  $L_1$  i  $L_2$  udaljenosti točke  $T_0$  do krivulje  $\Gamma_\varphi$  tada iznose

$$d_1(T_0, \Gamma_f) = \psi_1(\varphi_1^*),$$

odnosno

$$d_2(T_0, \Gamma_f) = \sqrt{\psi_2(\varphi_2^*)}.$$

Na Slici 5. prikazani su grafovi funkcija  $\psi_1(\varphi)$  i  $\psi_2(\varphi)$ .

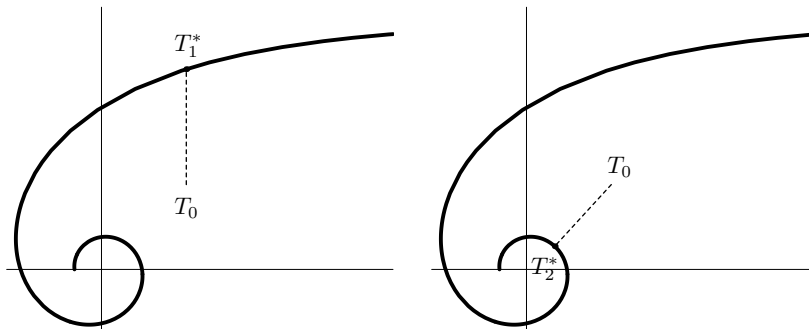


Slika 5. Grafovi funkcija  $\psi_1(\varphi)$  i  $\psi_2(\varphi)$ .

Na Slici 6. prikazane su  $L_1$  i  $L_2$  projekcije  $T_1^* = (\frac{3}{\varphi_1^*} \cos \varphi_1^*, \frac{3}{\varphi_1^*} \sin \varphi_1^*)$  i  $T_2^* = (\frac{3}{\varphi_2^*} \cos \varphi_2^*, \frac{3}{\varphi_2^*} \sin \varphi_2^*)$  točke  $T_0$  na krivulju  $\Gamma_f$ .

a)  $L_1$  udaljenost

b)  $L_2$  udaljenost



Slika 6.  $L_1$  i  $L_2$  projekcije točke  $T_0$  na krivulju  $\Gamma_f$

**Zadatak 1.** *Odredite  $L_1$  i  $L_2$  udaljenosti točke  $T_0 = (2, 1)$  do pravca danog jednačbom  $y = x + 1$ . (Rješenje:  $d_1 = 2$ ,  $d_2 = \sqrt{2}$ )*

**Zadatak 2.** *Odredite  $L_1$  i  $L_2$  udaljenosti točke  $T_0 = (1, 4)$  do grafa funkcije  $f(x) = x^2 + 1$ . (Rješenje:  $d_1 = 0.732$ ,  $d_2 = 0.702$ )*

**Zadatak 3.**  $L_\infty$  udaljenost točaka  $T_1 = (x_1, y_1)$  i  $T_2 = (x_2, y_2)$  definira se kao

$$d_\infty(T_1, T_2) = \max\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\}.$$

Odredite  $L_\infty$  udaljenosti točaka  $T_0$  do krivulja iz zadataka 1 i 2.

## Literatura

- [1] S. KUREPA, *Matematička analiza*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1987.
- [2] K. SABO, *Minimizacija realne funkcije jedne varijable*, Osječka matematička škola **2**(2001)
- [3] I. SOLDI, K. SABO, *Računanje udaljenosti točke do krivulje*, PrimMath[2003], 2003.
- [4] S. WOLFRAM, *The Mathematica Book*, Wolfram Media, Champaign, 1999.