Rudolf Cesarec znanstvenik i pedagog*

B. Pavković†

U povodu stote obljetnice rođenja profesora dr. Rudolfa Cesarca (02. 03. 1889 – 29. 12. 1972) dugogodišnjeg predstojnika Geometrijskog seminara, zaslužnog geometričara, vrsnog pedagoga i učitelja generacija naših matematičara, organizirali su Društvo matematičara i fizičara SRH i Matematički odjel svečani sastanak. Sastanak je održan 7. lipnja 1989. godine, a otvorio ga je dekan Matematičkog odjela profesor dr. Pavle Papić. O životu i radu profesora Cesarca govorio je prof. dr. Krešo Horvatić, a o njegovim znanstvenim radovima govorili su prof. dr. Dominik Palman, prof. dr. Boris Pavković i prof. dr. Vladimir Volenec.

Ovaj tekst je nastao na temelju spomenutih predavanja i članka K. Horvatić, S. Mardešić: Profesor dr. Rudolf Cesarec 2.III 1889 – 29.XII 1972, Glasnik matematički 8 (1973), No 2, str. 331–334.

Rudolf Cesarec rodio se 2.III 1889. u Zagrebu od oca Augusta i majke Kornelije rođ. Senk, kao drugo od sedmero djece. Otac mu je bio istaknuti starčevićanac, a brat August poznati književnik. Cesarec se školovao u Zagrebu, gdje je položio ispit zrelosti u Prvoj realnoj gimnaziji 1907. Zanimljivo je napomenuti da je 1924. ispit nadopunio polaganjem latinskog jezika, što je bio preduvjet za doktorat filozofije. Upisao se na ondašnji Mudroslovni fakultet kraljevskog Sveučilišta u Zagrebu u zimski semestar 1908/9, gdje je apsolvirao šk.god. 1911/12. Glavna mu je struka bila matematika i deskriptivna geometrija, koje su mu predavali profesori S. Bohniček, J. Majcen, D. Segen i V. Varićak. Slušao je i fiziku kod V. Dvořzaka i S. Hondla, te razne predmete iz područja filozofije (A. Bazala), psihologije (Đ. Arnold), povijest (V. Klaić), pa čak i književnost (D. Boranić). Diplomirao je kod Varićaka i Majcena u proljetnom ispitnom roku 1916. (profesorski ispit), čime mu je priznato "da može učiti matematiku i deskriptivnu geometriju u svim razredima srednjih škola".

Ujesen 1912. odmah nakon apsolutorija, postavljen je R. Cesarec za namjenskog učitelja u Privremenoj maloj realnoj gimnaziji u Krapini. Za pravog srednjoškolskog učitelja na toj školi imenovan je 1917, nakon položenog profesorskog ispita. Naslov profesora podijeljen mu je 1919. godine. Po potrebi službe premješten je početkom šk.god. 1919/20. u I. realnu gimnaziju u Zagrebu. No,

*Predavanje održano u okviru Matematičkog kolokvija, HMD – Podružnica Osijek, 15. prosinca 1995.

†PMF - Matematički odjel, Bijenička cesta 30, HR-10 000 Zagreb

već u prosincu 1919. na prijedlog profesorskog zbora Mudroslovnog fakulteta u Zagrebu dodijeljen je na službovanje Geometrijskoj stolici Mudroslovnog fakulteta. Međutim, nakon svega nekoliko mjeseci vraća se iz obiteljskih razloga, a na vlastitu molbu, natrag u Krapinu, u školu gdje je već ranije službovao. Početkom nove šk.god. 1920/21. premješten je na realnu gimnaziju u Koprivnicu, gdje ostaje do jeseni 1928. godine.

U tom periodu intenzivno radi na svom usavršavanju i doktorskoj disertaciji "Teorija Euklidovih, Riemannovih, Weylovih i Eddingtonnovih prostora". Na osnovu tog rada i položenog rigoroza iz matematike i fizike, te filozofije, stekao je u lipnju 1927. naslov doktora filozofskih nauka. Odmah ujesen 1927. Savjet filozofskog fakulteta u Zagrebu predložio je ondašnjem Ministarstvu prosvjete u Beogradu da odobri R. Cesarcu, tada još profesoru u Koprivnici, plaćeni dopust radi usavršavanja u geometriji, kako bi po povratku mogao preuzeti katedru za geometriju, upražnjenu smrću profesora Jurja Majcena. Taj je prijedlog prihvaćen, te Cesarec polazi najprije u Berlin, gdje provodi ljetni semestar 1927/28. kod profesora G. Scheffersa, tada najboljeg poznavaoca klasične diferencijalne geometrije i nacrtne geometrije. Čitavu narednu šk.god. 1928/29. provodi u Parizu kod profesora E. Cartana, gdje se upoznao s posve novim metodama i idejama moderne diferencijalne geometrije. Vrijeme provedeno u ova dva, tada vodeća matematička centra, bilo je od ogromnog značenja za daljnji razvoj profesora Cesarca kao budućeg sveučilišnog nastavnika i znanstvenog radnika.

Odmah po povratku sa specijalizacije izabran je i potvrđen za izvanrednog profesora na Filozofskom fakultetu Univerziteta u Zagrebu, gdje je šk.god. 1929/30. započeo s redovitim predavanjima. God. 1935. unaprijeđen je za redovnog profesora u kojem svojstvu djeluje sve do umirovljenja, lipnja 1946. Naime te godine osnovan je Prirodoslovno–matematički fakultet, pa prirodne znanosti i matematika sele sa Filozofskog na taj novi fakultet. Bila je to prilika da se ondašnje vlasti riješe iskrenih hrvatskih domoljuba, pa je profesor Cesarec umirovljen. Međutim, požrtvovnom zalaganju prof. dr. Stanka Bilinskog treba zahvaliti da već od šk.god. 1947/48. profesor Cesarec ponovno predaje geometrijske kolegije kao honorarni nastavnik na novoosnovanom Prirodoslovno–matematičkom fakultetu i ta njegova djelatnost traje bez prekida sve do ljetnog semestra 1964/65. kada se zbog bolesti i poodmaklih godina definitivno povlači od nastavničkih dužnosti. U školskim godinama 1936/37– 1944/45. bio je predstojnik Geometrijskog seminara.

U znanstvenom radu R. Cesarca razlikuju se tri faze. Prva u kojoj se bavi Riemannovom geometrijom, druga posvećena neeuklidskim geometrijama i treća posvećena istraživanjima u teoriji algebarskih krivulja.

Iz prve je faze samo njegova doktorska disertacija. Svakako valja istaći da je zadivljujuće da jedan srednjoškolski profesor koji radi u Krapini, daleko od velikih matematičkih centara može napisati doktorsku disertaciju iz područja koje se u to doba počinje intenzivno razvijati i to ne u nas, već u svijetu. Razumljivo bi bilo da je ta radnja nastala nakon njegovog boravka u Parizu. Međutim, upravo u to vrijeme u Riemannovoj geometriji počinje prevladavati nespretan i složen aparat koji je potiskivao čiste geometrijske sadržaje. Onima koji su poznavali interese profesora Cesarca prema zornom razotkrivanju geometrijskih sadržaja, jasno je zašto je on taj put napustio.

Osvrnimo se sada na razdoblje u kojemu se R. Cesarec bavio neeuklidskim geometrijama.

U prvom redu treba spomenuti njegov opsežni rad O neeuklidskoj geometriji, osnovanoj na apsolutnom jednoplošnom hiperboloidu, Rad JAZU 241 (1931), 81–124. Tu on uvodi i istražuje, prema Cayley–Kleinovoj metodi, neeuklidsku geometriju zasnovanu na jednoplohom hiperboloidu kao apsoluti. Ova "treća" neeuklidska geometrija razlikuje se bitno od hiperboličke i eliptičke geometrije zbog postojanja različitih tipova pravaca u odnosu na apsolutu. U analogiji s jednim postupkom E. Studya, autor je kao glavnu metodu istraživanja upotrijebio izvjesno preslikavanje na dvije Poincaréove poluravnine, što mu je posebno omogućilo da dođe do zanimljivih rezultata o pravčastom dijelu ove nove geometrije.

Kažimo sada nešto više o samom tom radu. Cayley–Kleinovo projektivno zasnivanje neeuklidskih geometrija može teoretski imati kao apsolutnu tvorevinu (apsolutu) bilo koju plohu drugog stupnja, pa i degeneriranu. Sva istraživanja do Cesarčevog davala su prednost tek izvjesnim od tih ploha i to imaginarnoj (Riemannova eliptička geometrija) i realnoj konveksnoj (hiperbolička geometrija Lobačevskog). Gotovo svi radovi koji se bave zasnivanjem neeuklidskih geometrija u Cayley–Kleinovom smislu bazirani su na dva navedena tipa ploha, dok je treći još mogući slučaj realne pravčaste plohe drugog stupnja ostao tako reći posve netaknut, a da se o degeneriranim plohama niti ne govori. Razlozi za to su donekle razumljivi. Prva se dva tipa geometrija daju obraditi prilično jedinstveno, simetrično, pa i dualno, dok treći stoji sam za sebe i nije u sebi onako harmoničan, kao što su to prva dva. Svi autori koji u to doba, spominju taj treći tip brzo ga eliminiraju, pa na taj način ta treća geometrija ostaje bez ikakvog naziva (u današnjoj suvremenoj klasifikaciji to je geometrija tzv. prostora S_3^2) i bez ikakve obrade. Tako na primjer L. Heffter u svojoj monografiji "Lehrbuch der analytischen Geometrie III" (Nichteuklidische Geometrie der Ebene und das Raumes), Karlsruhe 1929, na str. 2 kaže: "U eliptičkoj i hiperboličkoj (i euklidskoj) geometriji sve se točke, svi pravci i sve ravnine dotičnih prostora vladaju posve jednako s obzirom na realnost svojih presječnih odnosno tangencijalnih elemenata s apsolutnom plohom, dok za jednoplošni hiperboloid kao apsolutu to ne vrijedi, budući da će u tom slučaju, kako god mi ograničili dotični prostor, uvijek biti pravaca, koji hiperboloid probadaju, kao i takvih koji ga ne probadaju". Ovaj citat daje jasnu sliku o odnosu ondašnjih geometričara prema trećem tipu neeuklidske geometrije trodimenzionalnog prostora. Ovakvo je bilo stanje stvari kada je profesor Cesarec odlučio odgovoriti na pitanje: Što zapravo ima u toj neeuklidskoj geometriji?

Pri tome R. Cesarec ne slijedi utabane putove koji vode kroz nepreglednu šumu algebarskih poteškoća.

Kao osnov svojih razmatranja on uzima jednoplošni hiperboloid. Njegova se jednadžba pomoću projektivnih transformacija da svesti na oblik

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1\,.$$

Operativni prostor "treće geometrije" je nutrina H tog hiperboloida. Sada se promatraju dva sustava izvodnica tog hiperboloida, oni su dani jednadžbama

$$\left\{\begin{array}{lcl} y+z &=& \lambda(1+x)\,, \\ y-z &=& \frac{1}{\lambda}(1-x)\,, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} y+z &=& \mu(1-x)\,, \\ y-z &=& \frac{1}{\mu}(1+x)\,. \end{array}\right.$$

Na taj način je svakom paru parametara (λ, μ) pridružena po jedna izvodnica svakog od tih sustava. Kako se te izvodnice sijeku u točki na hiperboloidu, to svakom paru (λ, μ) pripada točka na hiperboloidu. Ta je točka realna samo u slučaju realnih parametara. Dva para (λ_1, μ_1), (λ_2, μ_2) realnih parametara određuju realni pravac prostora H i to spojnicu promatranih točaka.

Ako su λ_j i μ_j kompleksni, tj. $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$, $\mu = \gamma_j + i\delta_j$, $\beta_j\delta_j \neq 0$, $(j = 1, 2)$, onda takva dva para općenito određuju kompleksni pravac. Ako je $\lambda_2 = \bar{\lambda_1}$ i $\mu_2 = \bar{\mu_1}$, onda je ta spojnica realna. Važan je obrat, tj. svaki se realan pravac da karakterizirati pomoću takva dva para.

Dakle, u toj "trećoj" geometriji, imamo dva tipa realnih pravaca, već prema tome da li oni probadaju apsolutu imaginarno ili realno. Prve zove Cesarec **pravcima 1. vrste**, a druge **pravcima 2. vrste**.

Sada slijedi zahvat koji pokazuje dubinu Cesarčeve geometrijske misli. On uzima pravac 2. vrste, taj je određen sa dva para (λ_1, μ_1), (λ_2, μ_2) realnih parametara i promatra dva egzemplara Poincaréove poluravnine. Brojevima λ_1, λ_2 određene su u prvoj od tih poluravnina dvije točke $A(\lambda_1, 0)$, $A(\lambda_2, 0)$, a njima je određena polukružnica (pravac hiperboličke ravnine) kojoj je dužina $\overline{AB}$ dijametar. Na slični je način pravcu 2. vrste pridružen par točaka druge poluravnine. Hiperbolička gibanja u tim poluravninama dana su sa

$$\lambda' = \frac{p_1\lambda + q_1}{r_1\lambda + s_1}\,,\ \mu' = \frac{p_2\mu + q_2}{r_2\mu + s_2}\,,\ \begin{vmatrix} p_i & q_i \\ r_i & s_i \end{vmatrix} \neq 0\,,\ i = 1, 2\,.$$

Svako od ovih gibanja inducira transformaciju polukružnica (pravaca u Poincaréovom modelu), a potonja pak transformaciju izvodnica apsolutnog hiperboloida. To inducirano preslikavanje preslikava izvodnice jednog sustava opet u izvodnice tog sustava. Dakle na spomenuti način profesor Cesarec dobiva preslikavanje skupa pravaca prostora H u samog sebe, a sva ta preslikavanja tvore grupu s obzirom na kompoziciju kao grupovnu operaciju (**grupa gibanja u pravčastoj geometriji prostora** H).

Sada on koristeći tu grupu detaljno razvija pravčastu geometriju prostora H, a pomoću nje i točkovnu geometriju, te izvodi metričke odnose u geometriji prostora H. U ovom radu on uvodi i jednu novu vrstu četverokuta koje je nazvao vitoperim paralelogramima. To su četverokuti kojima sva četiri vrha ne leže u istoj ravnini, a suprotne im stranice leže na t.zv. Cliffordovim paralelama ili t.zv. parataktičkim pravcima. Izvedena su i mnoga svojstva takvih četverokuta. Na primjer sva su četiri kuta tih četverokuta jednaka itd.

Nadalje, prof. Cesarec klasificira gibanja u toj "trećoj" geometriji i skicira kako se ona može razviti koristeći umjesto Poincaréove poluravnine Kleinov model hiperboličke geometrije.

Valja naglasiti da je za ono doba to bio vrlo suvremen rad. Tekst rada je pažljivo pisan i vrlo se pedantno i detaljno razmatraju svi mogući slučajevi koji se kod pojedinih problema pojavljuju. Izlaganje je u većem dijelu radnje analitičko, ali mjesta na kojima se do rezultata brže i elegantnije dolazi sintetičkim putem Cesarec ne propušta, pa nam se tako predstavlja i kao moderni geometričar i kao svestrano obrazovani znanstveni radnik.

Važan je i rad: Über die Berechnung von Orthogonen der hyperbolischen Ebene, Sitzungsberichte d. Heidelberger Akad. d. Wissensch., Math.–Naturwiss. Kl. 1932,4 Abh., 1–12, u kojem je Cesarec istraživao u hiperboličkoj ravnini mnogokute u kojima su svi kutevi pravi, tzv. potpune ortogone, odnosno mnogokute kojima su gotovo svi kutevi pravi, tzv. djelomične ortogone. U radu je opisan niz postupaka kao što su ortogonalizacija i antiortogonalizacija. Dane su i analitičke formule za izračunavanje pojedinih elemenata ortogona.

Nadalje, daje se klasifikacija ortogona u hiperboličkoj ravnini. Kako je zbroj kutova n–terokuta manji od $(n-2)\pi$, to je tek za $n > 4$ moguće da n–terokut ima sve kutove prave, tj. da je taj n–terokut tzv. potpuni ortogon G_n^n. Ako n–terokut ima r pravih kutova $(r < n)$, tada je to t.zv. djelomični ortogon G_n^r. On je određen sa $s = 2n - r - 3$ odredbena elementa. S obzirom na brojeve s, n, r imamo klasifikaciju:

s	G_n^r					
2	G_3^1	G_4^3	G_5^5			
3	G_3^0	G_4^2	G_5^4	G_6^6		
4		G_4^1	G_5^3	G_6^5	G_7^7	
5		G_4^0	G_5^2	G_6^4	G_7^6	G_8^8

U pojedinim stupcima su ortogoni s istim brojem stranica. Ako neki kut, koji nije nužno pravi, postaje pravi, tada je to ortogonalizacija 1. vrste, koja u prethodnoj shemi znači pomicanje prema gore, a ako neki vrh poligona postaje idealan, tada iz G_n^r nastaje G_{n+1}^{r+2} i imamo ortogonalizaciju 2. vrste, koja u shemi znači pomicanje na desno. Pokazuje se kako se transformiraju trigonometrijske formule ortogona pri ortogonalizaciji 2. vrste (za ortogonalizaciju 1. vrste to je jednostavno uvrštavanje).

U radu: Konstrukcija pravilnih ortogona, Rad JAZU 246 (1933), 216–223, daje se efektivna konstrukcija (u Kleinovom modelu) pravilnog potpunog ortogona G_n^n s duljinom stranice a, polazeći od formule

$$\operatorname{ch}\frac{a}{2} = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{n}\,,$$

koja za njih vrijedi.

Od radova iz treće faze posvećenih algebarskim krivuljama u projektivnoj geometriji ističemo rad O cirkularnim racionalnim krivuljama 4. reda, izvedenim iz izvjesnih konoida, Rad JAZU 276 (1949), 39–82. U tom se radu u okvirima projektivne geometrije analitičkom metodom istražuju cirkularne krivulje 4. reda izvedene iz izvjesnih konoida.

Uspravni eliptički konoid 4. reda dobiva se na ovaj način: uzme se elipsa e i dva mimosmjerna pravca p_1 i p_2 koja ne sijeku elipsu, pri čemu je p_2 beskonačni daleki pravac ravnine koja je okomita na p_1, pa svi pravci koji sijeku e, p_1 i p_2 tvore taj konoid. Presjek tog konoida nekom općom ravninom daje krivulju 4. reda s tri dvostruke točke, dakle racionalnu krivulju 4. reda, koja se na direkcionu ravninu konoida ortogonalno projicira u cirkularnu racionalnu krivulju 4. reda. Cesarec je sintetički naslutio da za tu krivulju postoji još jedan konoid sa tim svojstvom. Svoju slutnju je egzaktno dokazao analitičkom metodom i pri tome je na jednostavan način otkrio s obzirom na spomenute konoide i krivulje još neke druge geometrijske pojave i odnose, koji bi u sintetičkoj obradi ostali skriveni.

Posebno se valja osvrnuti na rad Dvodijelne krivulje 3. reda kao proizvod involucije s obzirom na potpuni četverovrh, Rad JAZU 292 (1953), 133–169. Tu R. Cesarec polazi od jedne aforističke rečenice J. Steinera da prava bit mnogih svojstava krivulja 3. reda počiva na involuciji i želi do kraja istražiti tu tvrdnju. U tu svrhu on koristi Desarguesov teorem o involuciji prema kojemu svaki pravac u ravnini potpunog četverovrha siječe stranice ovoga u tri para korespondentnih točaka neke involucije, pa postavlja pitanje što čine dvostruke točke takvih involucija na svim onim pravcima ravnine, koji pripadaju istom pramenu. Dokazano je da je geometrijsko mjesto tih dvostrukih točaka upravo dvodijelna krivulja 3. reda. Značajno je da vrijedi i obrnuto, tj. svaka se dvodijelna krivulja 3. reda da izvesti na upravo opisani način, tj. kao geometrijsko mjesto dvostrukih točaka involucija, što ih na pravcima nekog pramena inducira zadani potpuni četverovrh. Taj pristup omogućio je R. Cesarcu da dokaže mnoga svojstva takvih krivulja od kojih su neka do tada bila posve nepoznata.

Kao i rad o neeuklidskoj geometriji tako i ovaj rad daje široke mogućnosti daljnjih istraživanja, naime u njemu je ukazano kako bi se sličnim postupkom mogle istražiti i jednodijelne krivulje 3. reda koje nisu racionalne, samo umjesto običnog potpunog četverovrha treba uzeti t.zv. potpuni četverovrh 3. vrste, tj. takav kojemu su dva vrha realna, a dva konjugirana imaginarna. Neobjašnjivo je zašto se tim pitanjem nitko nije pozabavio.

Širenje novih saznanja i pristupa u geometriji posebno je ležalo na srcu profesora Cesarca, te je ovim temama posvetio više svojih stručnih radova pisanih na zavidnom znanstvenom nivou, čime je znatno doprinio razvoju i metodici te struke u nas. Na primjer njegov članak O rješavanju geometrijskih zadataka, Matem. list za srednju školu 1 (1932), 97–103, 119–122 je i danas vrlo aktualan i trebao bi ga proučiti svaki onaj koji predaje matematiku u srednjoj školi. Autor ovih redaka koristio ih je na predavanjima iz Metodike matematike.

Od stručnih radova ne može se zaobići njegov članak E. Cartan i njegovo najnovije djelo o Riemannovim prostorima, Nastavni Vjesnik 37 (1928/29), 312–323. U njemu je dana analiza i prikaz knjige E. Cartan, Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann, Paris, 1928, što je zapravo 2. svezak zbirke Cahiers scientifiques. Taj tekst pokazuje da je R. Cesarec duboko proniknuo u ideje i metode suvremene geometrije.

R. Cesarec je iza sebe ostavio i dva udžbenika i to Analitička geometrija linearnog i kvadratnog područja, Školska knjiga, Zagreb, 1957 (str. 527) i nedovršen rukopis udžbenika Projektivna geometrija. Njegova Analitička geometrija i danas predstavlja štivo koje na vrlo sistematičan način uvodi čitaoca ne samo u metode analitičke geometrije ravnine već daje i vrlo jednostavan pristup ne samo u projektivnu geometriju ravnine, već i u suštinu geometrije. Valja istaknuti ljepotu i čistoću hrvatskog jezika kojom je djelo pisano. Uostalom R. Cesarec bio je poznat kao majstor lijepog izražavanja. Nažalost nastavak ovog djela nikada nije ugledao svjetlo dana.

Profesor Cesarec je posebno zadužio zagrebačko Sveučilište svojim dugogodišnjim nastavnim radom. Na matičnom Filozofskom, kasnije Prirodoslovno–matematičkom fakultetu, predavao je niz osnovnih geometrijskih kolegija: Analitička geometrija, Neeuklidska geometrija, Projektivna geometrija, Teorija krivulja i ploha 2. stupnja, Diferencijalna geometrija, Deskriptivna geometrija itd. Osim toga realizirao je i više specijalnih kolegija kao što su: Elementarna geometrija sa stajališta teorije grupa, Grafička geometrija, Aksonometrija, Zavojite plohe. Mnogo se angažirao i na kompletiranju zbirke geometrijskih modela. Bavio se mišlju o osnivanju laboratorija za izradu modela, pa je u tu svrhu nabavio i dosta alata.

R. Cesarec je bio suradnik Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti i član Instituta za matematiku Sveučilišta u Zagrebu. Osim toga je bio član Društva matematičara i fizičara SR Hrvatske, a neko vrijeme bio je i član Francuskog matematičkog društva. U Hrvatskoj enciklopediji uređivao je struku Matematika.

R. Cesarec bio je vrstan predavač. Njegova predavanja odlikovala su se jasnoćom, rigoroznošću i sistematičnošću, i bila su uvijek pomno pripremljena. Pedantno je pazio i na dosljedan izbor oznaka i terminologiju. Govorio je vrlo tiho, pa su se slušatelji nagurali u prve dvije klupe oko katedre i upijali svaku riječ. Kada se našao pred pločom za njega je nestajao sav vanjski svijet, postojala je samo materija o kojoj je govorio. Za njega nije postojala spužva sav zanesen brisao je ploču čime god je stigao, obično rukavima i laktovima svog crnog kaputa. Poslije predavanja tadašnji njegovi asistenti dugo bi ga četkali i čistili jer nisu htjeli da takav izađe iz zgrade. Njegova su predavanja obilovala zgodnim usporedbama i romantičnim načinom izražavanja. Na primjer kada je jednom prilikom predavajući "Osnove geometrije" izveo formulu o vezi kuta i distance paralelnosti želeći istaknuti važnost te formule rekao je "ova formula predstavlja ključić od sefa u kojemu se kriju najljepše tajne hiperboličke geometrije". Nakon toga slijedilo je obrazloženje te izreke u kojem je on tu formulu oživio i pokazao nam kako formule nisu samo simboli već one govore i izvor su mnogih informacija. Bila su to predavanja koja se ne zaboravljaju. Studenti su ga toliko rado slušali da ga je jednom prilikom grupa studenata zamolila da svoj jednogodišnji kolegij pretvori privatno u dvogodišnji, što je on i učinio. Neki od slušatelja koji su prije susreta s njegovim predavanjima bili već drugačije znanstveno orijentirani oduševljeni njegovim predavanjima okušali su svoje snage i u znanstvenom radu iz hiperboličke geometrije. Studentima je poklanjao mnogo vremena i pažnje. Ispiti su u pravilu trajali dugo, ali su se odvijali u ugodnoj atmosferi. Bio je to nastavnik od kojeg su studenti mnogo naučili, kako u stručnom tako i u metodičkom pogledu.

Pored djelovanja na Matematičkom odjelu Prirodoslovno–matematičkog fakulteta bila je dragocjena njegova pomoć u izvođenju nastave matematike na Poljoprivredno–šumarskom fakultetu u Zagrebu, gdje je u dva navrata od 1938. – 1945. i 1949. – 1952. godine predavao predmet Viša matematika.

Rudolf Cesarec živio je u sretnom i skladnom braku s Idom rođ. Seissel, koja ga je vjerno i požrtvovno pratila i podržavala na njegovom životnom putu. Imali su dvoje djece, sina Zdravka i kćer Boženu. Sin Zdravko je kao student 1. godine unovačen 1945. godine uoči svršetka rata. Iako se nije micao iz Zagreba i nije sudjelovao u ratnim operacijama, zarobljen je i od tada mu se gubi svaki trag. Kći Božena bila je akademska slikarica, godine 1954. obolila je i umrla. Ta teška tragedija bacila je trajnu sjenu na njihov daljnji život. Od nestanka sina profesor Cesarec i supruga mu nisu skidali crninu. Relativno rano profesor Cesarec počeo je poboljevati, a najteže ga je pogađalo slabljenje vida koje je pod kraj života preraslo u potpunu sljepoću. Njegova vedra narav pomogla mu je da izdrži i najveća iskušenja. Nikada nije prestajao s radom, pa ni kada ga je vid potpuno napustio.

Bio je vrlo društven i aristokratskog ponašanja, a posebno je volio mladež, svoje đake i studente. Nakon što nije mogao dolaziti na fakultet redovito ga je posjećivala grupa nekolicine asistenata. Postalo je tradicijom da njega i tetu Idu (kako je ona željela da je zovemo) posjećujemo na Staru Godinu ujutro i da im tom prilikom čestitamo Božić i Novu godinu. Bili su to trenuci ugodnog druženja. Razgovaralo se osim o matematici, dakako i o politici i tu smo profesora Cesarca upoznali kao iskrenog i osvjedočenog domoljuba.

Velika je bila naša žalost kada nam je teta Ida 20.12.1972., baš uoči našeg sljedećeg sastanka, javila "Rudi je umro". Smrt je došla tiho i bezbolno u noći od 28. na 29.12. i prekinula njegov bogati život pri punoj svježini duha. Sahranjen je 2.1.1973. na Mirogoju u Zagrebu uz prisustvo velikog broja prijatelja.

I danas kada god prolazim kraj njegovog posljednjeg počivališta nerijetko vidim kako gore svijeće, što pokazuje da je mnogo onih koji su ga voljeli i nisu ga zaboravili.

Na kraju dozvolite da se zahvalim organizatorima ovog skupa, koji su omogućili da se za sve ono što nam je pružio profesor Cesarec odužim barem ovim predavanjem pokušavši otrgnuti njegov lik i djelo od zaborava.

Znanstveni i stručni radovi Rudolfa Cesarca

Upute za izvođenje geometrijskih crteža, Nastavni Vjesnik **27** (1918/19), 301–306.

Sur les triples spirales logarithmiques dans l'espace, Bull. Soc. Math. de France **57** (1929), 104–110.

E. Cartan i njegovo djelo o Riemannovim prostorima, Nastavni Vjesnik **37** (1928/29), 312–232.

Nikolaj Ivanovič Lobačevski, O stogodišnjici neeuklidske geometrije, Novosti, Zagreb, br. **275** od 5.X 1930, 25–26.

O neeuklidskoj geometriji, osnovanoj na apsolutnom jednoplošnom hiperboloidu, Rad JAZU **241** (1931), 81–124.

Sur la geométrie non euclidienne basée sur l'hyperboloide a une nappe comme l'absolue, Bull. Internat. Acad. Sci. Yougoslave **25** (1931), 25–37.

O rješavanju geometrijskih zadataka, Matem. list za srednju školu **1** (1932), 97–103, 119–122.

Über die Berechnung von Orthogonen der hypebolischen Ebene, Sitzungsberichte d. Heidelberger Akad. d. Wissensch., Math.–Naturwiss. Kl. 1932, 4 Abh., 1–12.

Konstrukcija pravilnih ortogona, Rad JAZU **246** (1933), 216–223.

Über die Konstruktion der regulären Orthogone, Bull. Internat. Acad. Sci. Yougoslave **27** (1933), 90–92.

Nekoja domaća amaterska rješenja klasičnih problema geometrije, Nastavni Vjesnik **49** (1940/41), 324–334.

Dr. Vladimir Varićak, Nastavni Vjesnik **50** (1941/1942), 405–408.

O cirkularnim racionalnim krivuljama 4. reda, izvedenim iz izvjesnih konoida, Rad JAZU **276** (1949), 39–82.

Sur les quartiques planes unicursales circulaires, dérivées des certains conoides, Bull. Internat. Acad. Yougoslave Sci. Math. Phys. Techn. (N.S.) **5** (1952), 9–23.

Određivanje asimptota u projektivnim koordinatama, Glasnik Mat.–fiz. astron. **4** (1949), 49–69.

O 75–godišnjici rođenja dra Jurja Majcena, Glasnik Mat.–fiz. astron. **4** (1950), 204–213.

Dvodijelne krivulje 3. reda kao proizvod involucije s obzirom na potpuni četverovrh, Rad JAZU **292** (1953), 133–169.

Die zweiteiligen Kurven dritter Ordnung, erzeugt durch Involution inbezug auf das volständige Viereck, Bull. Acad. Internat. Acad. Yougoslav. Sci. Math. Phys. Techn. (N.S.) **13** (1955), 59–74.

O jednadžbi incidencije točke i pravca u projektivnim nezdruženim koordinatama, Glasnik Mat.–fiz. astron. **8**
(1953), 168–174.

Udžbenici

Analitička geometrija linearnog i kvadratnog područja, Školska knjiga, Zagreb, 1957.

Projektivna geometrija, nedovršeno, rukopis.