GLASNIK MATEMATIČKI
Vol. 39(59)(2004), 49 – 54

SUR UNE CONJECTURE DE TADIĆ

A.I. Badulescu and D.A. Renard
Universit de Poitiers, France

Abstract. Let F be a non-archimedian field of characteristic zero and D a central division algebra over F of finite dimension d^2. For all positive integer r, set $G'_r = GL(r, D)$. In [Ta2], Section 6, M. Tadić gives a conjectural classification of the unitary dual of the G'_r, and five statements denoted U0,..., U4, which imply the classification. In *loc.cit*, M. Tadić proves U3 and U4. Also, following [Ta1] and [Ta2], U0 and U1 imply U2. These statements, and the resulting classification are the natural generalization of the case $D = F$ completely solved by M. Tadić in [Ta1]. Here we prove U1. The proof uses some results from [Ba]. Thus, the classification of the unitary dual of the G'_r is now reduced to the conjecture U0, which states that a parabolically induced representation from an irreducible unitary representation is irreducible.

1. Introduction

Soient F un corps local non archimdien de caractristique nulle et D une algbre division centrale sur F. On suppose que D est de dimension finie d^2 sur F. Pour tout entier strictement positif r, on pose $G'_r = GL_r(D)$. Dans la section 6 de [Ta2], M. Tadić propose une classification conjecturale du spectre unitaire des G'_r, et donne cinq noncs, U0, U1, ..., U4 qui impliquent la classification. Il dmontre dans le mme article U3, U4. Les prop. 2.2, et lemme 2.5 de [Ta2], ensemble avec un argument standard ([Ta1], prop 2.9) montrent que U0 et U1 impliquent U2. Ces noncs et la classification qui en dcoule sont la gnralisation naturelle du cas $F = D$, compltement trait par M. Tadić dans [Ta1]. Nous montrons ici U1, qui stipule que certaines reprsentations, notes $u(\delta, k)$, sont unitaires. En utilisant des correspondances de type Jacquet-Langlands il est montr dans [Ba] que certaines reprsentations remarquables sont unitaires, et que ce rsultat tait prvu par les conjectures de

2000 *Mathematics Subject Classification.* 22E50, 20G05.
Key words and phrases. Representations of p-adic groups, unitary dual.

Tadić. Dans ce papier nous montrerons que le rsultat de [Ba] implique la conjecture U1 de Tadić. Ainsi, le seul problme qui reste rsoudre pour obtenir une classification du dual unitaire des G'_r analogue la classification dont on dispose pour les groupes linaires $G_r(F)$ est la conjecture U0, qui affirme que l'induite parabolique d'une reprsentation irrductible et unitaire est irrductible.

Les auteurs remercient Marko Tadić d'avoir simplifi leur preuve et pour la remarque 3.3.

2. noncs

Soient F un corps local non archimdien et D une algbre division centrale sur F. On suppose que D est de dimension finie d^2 sur F. Pour tous entiers strictement positifs n et r, on pose $G_n = GL_n(F)$ et $G'_r = GL_r(D)$. On note ν la valeur absolue de la norme rduite sur G'_r. Si $n = rd$ et si π est une reprsentation cuspidale de G'_r, π correspond par la correspondance de Jacquet-Langlands ([DKV]) une reprsentation essentiellement de carr intgrable π_0 de G_n. Le support cuspidal de π_0 est du type $\rho \otimes \nu\rho \otimes ... \otimes \nu^{m-1}\rho$ o m est un entier qui divise n et ρ est une reprsentation cuspidale de $G_{\frac{n}{m}}$. On pose alors $a(\pi) = m$ et $\nu_\pi = \nu^{a(\pi)} = \nu^m$ et l'on note $[\rho, \nu\rho, \ldots, \nu^{m-1}\rho]$ le segment de Zelevinskii ([Ze]) associ. Plus gnralement, si δ est une reprsentation essentiellement de carr intgrable de G'_r, son support cuspidal est du type $\rho \otimes \nu^x\rho \otimes ... \otimes \nu^{x(m-1)}\rho$, o m est un entier qui divise r et ρ est une reprsentation cuspidale de $G'_{\frac{r}{m}}$. Dans ce cas, on a $x = a(\rho)$. On pose $a(\delta) = x$ et $\nu_\delta = \nu^x$. On appelle $[\rho, \nu^x\rho, \ldots, \nu^{x(m-1)}\rho]$ *segment de Tadić* (de δ). Deux segments de Tadić $[\rho, \nu^{a(\rho)}\rho, \ldots, \nu^{a(\rho)(m-1)}\rho]$ et $[\rho', \nu^{a(\rho')}\rho, \ldots, \nu^{a(\rho')(m'-1)}\rho']$ sont dits *lis* si ou bien il existe un entier k, $1 \leq k \leq m$ tel que $k + m' > m$ et $\rho' = \nu^{k\,a(\rho)}\rho$, ou bien il existe un entier k, $1 \leq k \leq m'$ tel que $k + m > m'$ et $\rho = \nu^{k\,a(\rho')}\rho'$. Dans les deux cas, on a $a(\rho') = a(\rho)$. Ces dfinitions gnralisent celles de Zelevinskii. Deux reprsentations essentiellement de carr intgrable de G' sont dites *lies* si leur segment de Tadić sont lis.

On adopte les conventions suivantes concernant l'induction parabolique. Soit $n_1, \ldots, n_k$ une suite de nombre entiers strictement positifs dont la somme est r. La notation $\prod_{i=1}^k G'_{n_i}$ dsignera le sous-groupe de Levi G'_r form des matrices diagonales par blocs de taille respective $n_1, n_2, \ldots, n_k$ en descendant sur la diagonale. Si, pour tout $i \in \{1, 2...k\}$, on se donne une reprsentation admissible π_i de G'_{n_i}, la notation $\mathrm{ind}_{\prod_{i=1}^k G'_{n_i}}^{G'_r} \left(\otimes_{i=1}^k \pi_i\right)$ dsignera la reprsentation induite partir du sous-groupe parabolique de G'_r de facteur de Levi $\prod_{i=1}^k G'_{n_i}$ contenant le groupe des matrices triangulaires suprieures.

Pour tout $i \in \{1, 2...k\}$, soit δ_i une reprsentation de carr intgrable de G'_{n_i}. Soit $a_1, a_2, ..., a_k$ une suite dcroissante de nombres entiers. D'aprs la classification de Langlands, la reprsentation $\mathrm{ind}_{\prod_{i=1}^k G'_{n_i}}^{G'_r} \left(\otimes_{i=1}^k \nu^{a_i}\delta_i\right)$ a un unique quotient irrductible $L(\otimes_{i=1}^k \nu^{a_i}\delta_i)$. Comme l'induite d'une reprsentation de carr intgrable est irrductible ([DKV]) il est montr dans [Ta2] que toute reprsentation lisse irrductible π de G'_r est de la forme $\pi = L(\otimes_{i=1}^k \nu^{a_i}\delta_i)$ avec k, n_i et a_i comme ci-dessus. Les reprsentations essentiellement de carr intgrable $\nu^{a_i}\delta_i$ avec leur multiplicits respectives sont uniquement dtermines par π permutation prs. On les appelle ici les *composantes* de π. Le rsultat suivant (prop. 2.2, [Ta2]) gnralise un rsultat de Zelevinskii :

Proposition 2.1. *Soit $m_1, m_2, ..., m_l$ une suite de nombres entiers strictement positifs telle que $\sum_{i=1}^l m_i = r$. Pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, l\}$ on se donne une reprsentation π_i de G'_{m_i}. Si, pour tout $i_1 \neq i_2$, aucune composante de π_{i_1} n'est lie une composante de π_{i_2}, alors la reprsentation induite G'_r de la reprsentation $\otimes_{i=1}^l \pi_i$ est irrductible. L'ensemble de ses composantes, comptes avec multiplicits, est la runion des ensembles des composantes des π_i, comptes avec multiplicits.*

Donnons les noncs des conjectures U0, U1 et U2 de Tadić ([Ta2], sect. 6).

Conjecture U0. *Soit P un sous-groupe parabolique de G' et M le facteur de Levi de P. Si π est une reprsentation lisse irrductible unitaire de M, alors $\mathrm{ind}_P^{G'} = \pi$ est irrductible.*

Dans le cas $D = F$, cette conjecture a t montre dans [Be].

Soient k et q deux entiers et δ une reprsentation de carr intgrable de G'_q. Posons $r = kq$. La reprsentation $\mathrm{ind}_{(G'_q)^k}^{G'_r}(\nu_\delta^{\frac{k-1}{2}}\delta \otimes \nu_\delta^{\frac{k-3}{2}}\delta \otimes ... \otimes \nu_\delta^{-\frac{k-1}{2}}\delta)$ a un unique quotient irrductible, $L(\nu_\delta^{\frac{k-1}{2}}\delta \otimes \nu_\delta^{\frac{k-3}{2}}\delta \otimes ... \otimes \nu_\delta^{-\frac{k-1}{2}}\delta)$, que nous noterons $u(\delta, k)$.

Conjecture U1. *$u(\delta, k)$ est unitaire.*

Soit α un nombre rel dans l'intervalle $]0, 1/2[$. On pose

$$\pi(u(\delta, k), \alpha) = \mathrm{ind}_{G'_r \times G'_r}^{G'_{2r}} \left(\nu_\delta^{\alpha} u(\delta, k) \otimes \nu_\delta^{-\alpha} u(\delta, k)\right).$$

Conjecture U2. *La reprsentation $\pi(u(\delta, k), \alpha)$ est unitaire.*

Remarquons que $\pi(u(\delta, k), \alpha)$ est toujours irrductible, grâce à la prop. 2.1. Dans [Ta2], sect. 6, Tadić montre deux autres rsultats, U3 et U4 que nous ne rappelons pas ici. Les noncs U0 U4 impliquent une classification du spectre unitaire de G'_r analogue la classification pour $GL_n(F)$. Tadić montre galement que U0 et U1 impliquent U2. Nous montrons ici la conjecture U1, rduisant ainsi la classification de Tadić la preuve de U0.

3. Preuve de la conjecture U1

Rappelons un rsultat de [Ba]. Avec les notations prcdentes la reprsentation $\mathrm{ind}_{(G'_q)^k}^{G'_r}(\nu^{\frac{k-1}{2}}\delta \otimes \nu^{\frac{k-3}{2}}\delta \otimes ... \otimes \nu^{-\frac{k-1}{2}}\delta)$ admet un unique quotient irrductible, $L(\nu^{\frac{k-1}{2}}\delta \otimes \nu^{\frac{k-3}{2}}\delta \otimes ... \otimes \nu^{-\frac{k-1}{2}}\delta)$, que nous noterons $\bar{u}(\delta,k)$ (remarquons que si $D=F$, on a $u(\delta,k)=\bar{u}(\delta,k)$; de mme si $a(\delta)=1$). On a ([Ba], corollaire 4.10) :

Proposition 3.1. *$\bar{u}(\delta,k)$ est unitaire.*

Montrons comment la prop. 3.1 implique la conjecture U1. Rappelons que δ est une reprsentation de G'_q, o $r=kq$. Si $k=1$, $u(\delta,k)=\delta$ est unitaire. Soit $k\geq 2$.

Lemme 3.2. *L'induite de $G'_r \times (G'_{(k-1)q})^{a(\delta)-1}$ $G'_{((a(\delta)-1)(k-1)+k)q}$ de*

$$u(\delta,k)\otimes\nu^{\frac{a(\delta)-2}{2}}u(\delta,k-1)\otimes\nu^{\frac{a(\delta)-4}{2}}u(\delta,k-1)\otimes\ldots\otimes\nu^{\frac{-a(\delta)+2}{2}}u(\delta,k-1)$$

est irrductible, gale $\bar{u}(\delta,(a(\delta)-1)(k-1)+k)$.

Dmonstration. Nous allons montrer que les composantes des reprsentations diffrentes intervenant dans le produit tensoriel ne sont pas lies et appliquer la prop. 2.1 pour obtenir l'irrductibilit. Les composantes de $u(\delta,k)$ sont $\{\nu^{a(\delta)(\frac{k-1}{2}-p)}\delta\}_{0\leq p\leq k-1}$. Les composantes de la reprsentation $\nu^{\frac{a(\delta)-2}{2}-q}u(\delta,k-1)$, o $0\leq q\leq a(\delta)-2$ sont $\{\nu^{\frac{a(\delta)-2}{2}-q+a(\delta)(\frac{k-2}{2}-t)}\delta\}_{0\leq t\leq k-2}$. Il est clair qu'il n'existe pas de triplets (p,q,t), avec $0\leq p\leq k-1$ et $0\leq q\leq a(\delta)-2$ et $0\leq t\leq k-2$ tels que la diffrence de $a(\delta)(\frac{k-1}{2}-p)$ et de $\frac{a(\delta)-2}{2}-q+a(\delta)(\frac{k-2}{2}-t)$ soit un multiple de $a(\delta)$, puisque $a(\delta)$ ne peut diviser $q+1$. De mme, il n'existe pas de quadruplets (q,q',t,t'), avec $0\leq q<q'\leq a(\delta)-2$ et $0\leq t,t'\leq k-2$ tels que la diffrence de $\frac{a(\delta)-2}{2}-q+a(\delta)(\frac{k-2}{2}-t)$ et de $\frac{a(\delta)-2}{2}-q'+a(\delta)(\frac{k-2}{2}-t')$ soit un multiple de $a(\delta)$.

Maintenant, puisque la reprsentation induite est irrductible et que les composantes (voir dfinition dans la section prcdente) de $\bar{u}(\delta,(a(\delta)-1)(k-1)+k)$ et de la reprsentation induisante sont les mmes, par la prop. 2.3 de [Ta2], l'induite n'est autre que $\bar{u}(\delta,(a(\delta)-1)(k-1)+k)$. $\square$

Si $a(\delta)$ est pair, posons

$$T_0=\bigotimes_{s=1}^{\frac{a(\delta)}{2}-1}\pi(u(\delta,k-1),\frac{a(\delta)}{2}-s))$$

et, si $a(\delta)$ est impair, posons

$$T_1=\bigotimes_{s=1}^{\frac{a(\delta)-1}{2}}\pi(u(\delta,k-1),\frac{a(\delta)}{2}-s)).$$

T_0 est une reprsentation de $(G'_{2(k-1)q})^{\frac{a(\delta)}{2}-1}$ et T_1 est une reprsentation de $(G'_{2(k-1)q})^{\frac{a(\delta)-1}{2}}$. A partir du lemme 3.2 nous pouvons maintenant crire, si $a(\delta)$ est pair,

$$\bar{u}(\delta,(a(\delta)-1)(k-1)+k) = \mathrm{ind}\,(u(\delta,k)\otimes u(\delta,k-1)\otimes T_0)$$

et, si $a(\delta)$ est impair,

$$\bar{u}(\delta,(a(\delta)-1)(k-1)+k) = \mathrm{ind}\,(u(\delta,k)\otimes T_1).$$

La reprsentation $u(\delta,k-1)$ est hermitienne et donc les $\pi(u(\delta,k-1),\frac{a(\delta)}{2}-s)$ qui sont des facteurs dans T_0 ou T_1 sont hermitiennes; $u(\delta,k)$ l'est aussi, et comme nous sommes devant un produit tensoriel de reprsentations hermitiennes telles que la reprsentation induite est irrductible et unitaire (prop. 3.1), nous en dduisons qu'elles sont toutes unitaires par [Ta3], p. 234 d) par exemple. En particulier, $u(\delta,k)$ est unitaire. $\square$

La remarque suivante est due Marko Tadić:

Remarque 3.3. *Si* $a(\delta)\geq 3$, *on obtient par la preuve ci-dessus que, si* $a(\delta)$ *est pair, alors* $\pi(u(\delta,k-1),\frac{a(\delta)}{2}-1)$ *est unitaire, et, si* $a(\delta)$ *est impair, alors* $\pi(u(\delta,k-1),\frac{a(\delta)-1}{2})$ *est unitaire. Comme ces demi-entiers sont compris chaque fois strictement entre* 0 *et* $\frac{a(\delta)}{2}$, *cela donne une preuve directe de* U2 *dans ce cas, indpendante de* U0 *et* U1. *L'argument est expliqu dans* [Ta1], *prop. 2.9.*

References

[Ba] A.I. Badulescu, *Correspondance de Jacquet-Langlands tendue toutes les reprsentations*, prpublication, 2002, consultable l'adresse http://arxiv.org.

[Be] J.N. Bernstein, P-invariant distributions on $GL(N)$ and the classification of unitary representations of $GL(N)$ (non-archimedian case), in: Lie Groups and Representations II, Lecture Notes in Mathematics 1041, Springer-Verlag, 1983.

[DKV] P. Deligne, D. Kazhdan and M.-F. Vignéras, Représentations des algèbres centrales simples p-adiques, in: Représentations des groupes réductifs sur un corps local, Hermann, Paris, 1984.

[Ta1] M. Tadić, *Classification of unitary representations in irreducible representations of general representations of general linear groups (non-archimedian case)*, Ann. Sci. ENS **19** (1986), 335-382.

[Ta2] M. Tadić, *Induced representations of $GL(n;A)$ for a p-adic division algebra A*, J. Reine angew. Math. **405** (1990), 48-77.

[Ta3] M. Tadić, *An external approach to unitary representation*, Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.) **28** (1993), 215-152.

[Ze] A. Zelevinskii, *Induced representations of reductive p-adic groups II*, Ann. Sci. ENS **13** (1980), 165-210.

Dpartement de mathmatiques
Universit de Poitiers
Tlport 2, boulevard Marie et Pierre Curie
BP 30179 86962 Futuroscope Cedex
France
E-mail, A.I. Badulescu: badulesc@mathlabo.univ-poitiers.fr
E-mail, D.A. Renard: renard@mathlabo.univ-poitiers.fr

Received: 04.06.2003