

Školsko natjecanje iz matematike 2002.

V. GIMNAZIJA, 18. veljače 2002.

I ove godine održano je školsko natjecanje iz matematike koje je organizirao aktiv matematike. Natjecanje je trajalo 3 sata, navodimo zadatke. Najviše rangirani učenici uspješno su se plasirali na daljnja natjecanja.

Zadaci za prvi razred

1. Izračunaj:

$$(2y^2 + 2y) : \left[\frac{x^2 - 1}{(1 + xy)^2 - (x + y)^2} + \frac{4}{(1 - y)^2} - \frac{3}{1 - y^2} \right].$$

2. Dokaži da je broj $(a - 1)(a - 3)(a - 4)(a - 6) + 10$ pozitivan za svaki realan broj a .

3. Ovisno o parametru $a \in \mathbb{R}$ diskutiraj rješenje nejednadžbe:

$$ax + 4 > 1 - 2x.$$

4. Ako umnošku triju uzastopnih parnih prirodnih brojeva pribrojimo njihov udvostručen zbroj i oduzmemo kub srednjeg broja, dobit ćemo 20. Koji su to brojevi?

5. Komad papira razrežemo na četiri dijela. Neke od dobivenih dijelova ponovo razrežemo na četiri dijela i tako nastavimo. Možemo li na ovaj način dobiti 999 papirića?

Zadaci za drugi razred

1. Ako su u trokutu zadane veličine b, c i $\alpha = 120^\circ$, dokaži da je duljina simetrale kuta s_α jednaka $s_\alpha = \frac{b \cdot c}{b + c}$.

2. Ako je $z \in \mathbb{C}$ takav da je $z + z^{-1} = 1$, izračunaj $z^{2000} + z^{2001} + z^{2002} + z^{2003} + z^{2004}$.

3. Riješi jednadžbu

$$(x^2 + x - 1)(x^2 + x - 2)(x^2 + x - 3)(x^2 + x - 4) = 24$$

u skupu \mathbb{R} .

4. Za koje realne brojeve a jednadžba $(1 - x)(2x - a) = 2$ ima samo negativne brojeve za rješenja?

5. Izračunaj sumu svih neparnih četveroznamenastih brojeva sa znamenkama iz skupa $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (znamenke se mogu ponavljati).

Zadaci za treći razred

1. Riješi jednadžbu $3^{\sin 2x + 2 \cos^2 x} + 3^{1 - \sin 2x + 2 \sin^2 x} = 28$.

2. Nađi sva realna rješenja nejednadžbe $5x^2 + 2x + 3 < 2 \sin x$.

3. Neka su \overline{AB} i \overline{CD} dva okomita promjera kružnice polumjera 1 sa središtem u O . Oko A opisana je kružnica kroz C i ona siječe \overline{AB} u točki E . Oko B opisan je luk kružnice kroz O i neka on siječe luk CE u točki F . Dokaži da je

$$|EF| = \sqrt{\frac{8 - 5\sqrt{2}}{2}}.$$

4. U pravilnu uspravnu četverostranu piramidu upisana je kugla. Udaljenost središta kugle od vrha piramide iznosi a , a pobočke piramide zatvaraju kut α s ravninom osnovke. Izračunaj oplošje piramide.
5. Pretpostavimo da se puž giba pravocrtno po ravnoj površini konstantnom brzinom i neka se svakih 15 minuta okrene za 90° . Dokaži da se na početnu točku može vratiti samo nakon cijelog broja sati.

Zadaci za četvrti razred

1. Za koju vrijednost od x je šesti član razvoja binoma

$$\left(\sqrt{2^{\log(10-3^x)}} + \sqrt[5]{2^{|x-2|\log 3}} \right)^m$$

jednak 21, ako znamo da binomni koeficijenti drugog, trećeg i četvrtog člana predstavljaju redom prvi, treći i peti član aritmetičkog niza. (Pri tome uzmimo da je $\left(\sqrt{2^{\log(10-3^x)}}\right)^m$ prvi član u binomnom razvoju).

2. Riješi jednačbu $(x+i)^7 - (x-i)^7 = 0$.
3. Ako su elipsa i hiperbola konfokalne (tj. imaju zajedničke fokuse), one se sijeku pod pravim kutem. Dokaži!
4. Dokaži nejednakost:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}, \quad \text{za } n \geq 1.$$

5. Odredi najveći član niza $\frac{(2n)!}{2002^n}$ ili dokaži da ne postoji. Isto za najmanji član.

ODABRANA RJEŠENJA NA STRANICI 36.