

レヴィ過程による製造物賠償責任リスクの モデル推定

前 田 祐 治

要 旨

本稿では、企業における実際の製造物賠償責任損害のデータを用いて、その累積損害がレヴィ過程 (Lévy process) の一つである複合ポアソン過程に従うと仮定し、その製造物賠償責任リスクのモデル化を試みた。特に過去の研究から損害分布として適合度が高いと考えられている5つの分布 (逆ガウス, ガンマ, 対数正規, パレートとワイブル分布) に注目し、損害リスクのモデル化を行った。パラメータ推定法としては、古典的モーメント法によって解析的に求めたパラメータを初期値として用い、最尤法により数値解析的にパラメータ推定を行った。パラメータ推定後は、各モデルのデータとの適合度をコルモゴロフ・スミルノフ検定により検証、また、赤池情報量基準 (AIC) によりデータとの適合度が高いモデルを見つけ出した。本分析の結果、上記5つのモデルの中では対数正規型複合ポアソン過程がデータとの当てはまりが良く、適合度が最も良いとの結果を得た。

I 日本企業が直面する製造物責任リスク

トヨタ, ソニー, パナソニックなどの国際的に展開する日本企業は、その生産物を海外に輸出するために様々なカントリーリスクに直面する。これら国際企業が直面し脅威となるリスクの一つが製造物賠償責任 (PL: Product Liability) リスクである。ロイ L. リアドンとジョージ M. ニーカム (1997) によると、製造物賠償責任とは「あらゆる製品の製造, 組み立て, 設計, 検査, マーケティング, 梱包, またはラベリングから生じる人的損害, 死亡, または財産的損害に対する賠償責任である」と定義される。特に訴訟大国といわれる米国における製造者責任による賠償リスクは、日本企業にとっては喫緊の脅威であり、将来にわたって脅威であり続けよう。

日本においても1995年7月1日、製造物賠償責任法 (PL法) が施行された。それ以来、製造物賠償責任に関する意識が国内消費者の中に芽生え、製品に関する苦情は劇的に増加した。独立行政法人製品評価基盤機構のHP「平成19年度事故情報制度報告書」によると、

「製品に起因する事故」は施行以前の1993年は400件、1994年は552件であったが、1995年では1051件、1996年では1013件と施行前の2倍に増加している。その以降、事故件数は着実に増加し、2004年には2124件、2006年では3103件、2007年においては5245件もの製品に起因する事故が報告されているとある。この報告書が示す通り、日本の製造業は海外だけでなく国内市場においても賠償責任リスクを意識した対策を講じる必要性が高まっている。

本論文では、国内・海外の製造物賠償リスク管理を行うにあたって、日本企業がリスクを特定し、どのようにリスクを計量化するのかに焦点をあてて論じる。製造者である企業にとって脅威となるリスクをモデルにより計量化し推定できれば、本リスクへの対応策を作成し、リスクに対するファイナンス策も事前に決定できるからである。

II 損害保険リスクのモデル推定

Gerber (1979) は、「保険損害の累積を連続的な確率過程であると捉えると、それはレヴィ過程 (Lévy process) の一つである複合ポアソン過程 (compound Poisson process) であらわすことが適当である。」と論じた。レヴィ過程に関しては、伊藤 (1991)、佐藤 (1990)、宮原 (2003) などで詳細に説明している。レヴィ過程は、「確率連続な加法過程 (incremental process)」のことである。伊藤 (1991) によると、レヴィ過程の中でほとんど確実に連続なものを「ガウス型レヴィ過程」といい、また過程がほとんど確実に飛躍1で増加する階段関数の時は「ポアソン型レヴィ過程」という。Gerber (1979) は、保険損害の累積額を確率過程として捉え、ポアソン型レヴィ過程で表現できるとしている。

特に損害保険 (Non-life insurance) リスクの定式化に関して、レヴィ過程に多くの学者が注目する。Mikosch (2009) は、「保険数学の世界では、類似するリスクの集積である損害保険リスクポートフォリオを考える場合、ポアソン型レヴィ過程は、損害発生数と累積損害額を定式化する基本モデルとして100年以上も使用されてきた。」と述べるように、長年本モデルは理論だけでなく実務においても頻繁に使用されてきたのである。保険数理の世界では、将来損害を予想する際、ポアソン分布を発生頻度モデルに、そして対数正規、ガンマやパレート分布を発生規模モデルとして良く使う (海老崎 (2009))。

直近の研究の中で、例えば Perera (2010) にあるように、オプション投資や保険リスクに直面する者の戦略をマーチンゲール (Martingale) 手法を適用し、レヴィ過程から導かれるモデル分析を行っている。そこで Perera (2010) は、レヴィ過程から発展したモデルは、比較的大きな損害を伴うリスクに対して適用することができると論じている。彼の研究は、多くの学者がマーチンゲール手法により保険リスクをモデル化しようと試みている事実により啓発されたものである。

マーチンゲール (Martingale) 手法によるモデル化を提唱する Hogg と Klugman (1984) も同様に、典型的な右に裾野の長い分布、例えば、パレート分布 (Pareto)、ガンマ分布 (Γ : Gamma)、対数正規分布 (Lognormal)、ワイブル分布 (Weibull) などは賠償責任損害におけるリスク規模を表すモデルとして適切であると述べている。このように、リスクを伴うキャッシュフローをモデル化する際に、リスクをレヴィ過程または近似レヴィ過程に当てはめて行うことは過去の研究において多く行われることであった。

Mikosch (2009) によると、指数分布 (Exponential)、ガンマ分布、ワイブル分布、切断型正規分布 (Truncated Normal) などは“小さな損害”のモデル化に適しており、対数正規分布、パレート分布、ブアー (Burr) 分布、ワイブル分布、ベンクタンダー (Benktander) 分布、対数ガンマ (Log-gamma) 分布などは“大きな損害”モデル化に利用できることを述べている。また、Morales (2004) は、再保険価格決定における極値理論においてパレート分布が使用されていることから、レヴィ過程に基づいて、レヴィ測度 (Lévy measure) が一般的パレート分布に比例するとの前提でリスクのモデル化を行っている。Andersen (2009) もまたレヴィ過程を使用して損害率のモデル化を行っている研究者の一人である。彼は、レヴィ測度として対数正規分布、ベンクタンダー分布、heavy-tail (“fat tail”とも言われる裾が厚い分布のこと) なワイブル、パレート、ブアー分布などをレヴィ測度として使用している。

一方、宮原 (2003) は、レヴィ過程を適用し株価過程の定式化を試みている。宮原 (2003) の研究によると、株価の動き (株価過程) を幾何レヴィ過程 (geometric Lévy process) と仮定してモデル化を行っている。株価の動きをレヴィ過程で定式化する背景には、対数収益率が厳密には正規分布に従わず、保険リスクと同様な “heavy-tail” や “fat-tail” と呼ばれる裾が厚い分布に類似するという事実が出発点となっている。

本稿では、実際の日本企業の製造物賠償責任事故歴のデータを基に、レヴィ過程の一つである複合ポアソン型レヴィ過程を使ってリスクのモデル化を試みる。そして、複数の可能性の高いポアソン型レヴィ過程の中から、最も当てはまりの良いモデルを探求するためにデータ解析を試る。上記に挙げられている候補分布の中から、ガンマ分布、対数正規分布、パレート分布、ワイブル分布の分布に加え、新たな試みとして逆ガウス (Inverse Gaussian) 分布を検証に加えた5つの分布に注目し、モデル推定を行う。

III データとモデル推定法

1 データと損害過程

本研究に使用したデータは、米国に製品を輸出する某日本メーカー (匿名でA社とする)

が1980年から20年間に被った製造物賠償責任に関わる損害額をモデルの基礎データとして使用した。本企業A社は1970年後半に米国市場に輸出をはじめた製造メーカーで、1980年代に初めて製造物賠償責任に関わる損害を経験し、1990年代まで製造物賠償責任に関する被害のクレームが急激に多発、その後1990年代にはその年間累積損害額は高額ながらも平準化した。

リスクモデルを推定する基礎データとして使用したのは、利用可能なデータのうち、損害数が平準化した比較的新しい5年間である。従って、A社から入手したデータの1992年からの5年間の損害データを標本として採用した。92年から96年の損害標本データから、例えば96年を標本として、その日次の累積損害を損害過程として図式化したのが図1である。各事故の損害金額は、発生した時に見積もった予想支払金額に関連費用とIBNR (Incurred But Not Reported Losses, 発生しているが未報告の損害のこと)を含めた。各損害を累積し、1年間を通してその累積損害額がたどる過程を確率過程としてモデル化する。

インフレーションによる物価上昇を考慮したトレンド係数、リスク対象となる輸出高や売上高のエクスポージャ (Exposure, リスク対象のこと) の変化、支払が数年に亘って行われる場合の損害発展係数などは分析の簡素化のために無視した。つまり、対象期間においては、それらの変動要素は損害に大きな影響がないものと仮定する。表1では分析に使用した標本数353の記述統計値を示した。

図1 1996年のデータに基づく標本過程

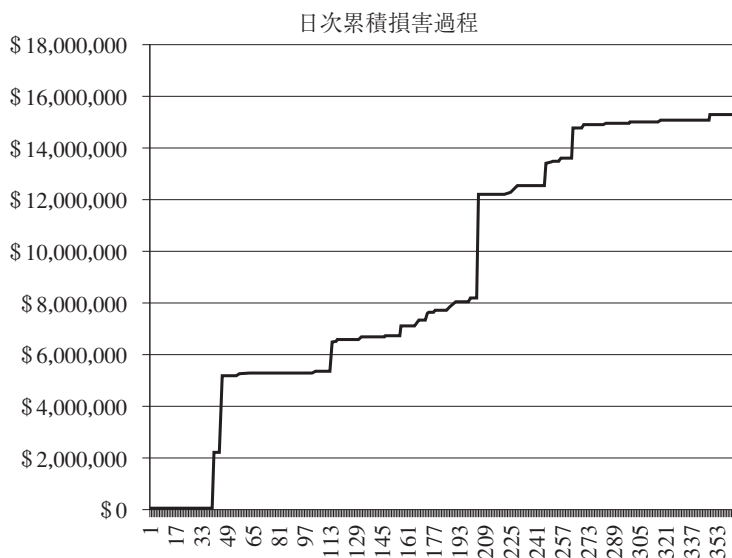


表 1：標本データの記述統計値

1992-1996年データの記述統計	
平均値	\$ 184,253
中央値	\$ 48,923
標準偏差値	\$ 420,611
分散	\$ 176,913,794,600
尖度	31
歪度	5
最小値	\$ 453
最大値	\$ 4,042,056
総額	\$ 65,041,454
標本数	353

2 リスクモデルの設定

株価モデルでは株価の推移をある確率過程に従うと想定し、その過程上での株価の上下（ジャンプ）が正であり負でもある。一方、本分析で注目する累積損害過程は、ジャンプが正であるのみの加法過程（additive process）であり、さらに表 1 の記述統計値の歪度 5 (>0) が示すように右裾が厚い分布に注目する。右に裾野が長い分布は様々あるが、その中から損害分布として使用される代表的な逆ガウス分布、対数正規分布、ガンマ分布、パレート分布、そしてワイブル分布の 5 つに注目する。これらの分布は Hogg と Klugman (1984) が損害分布として適切であるとする主な分布群である。本稿では上記の標本損害過程から次の 5 つのモデルのパラメータを導き出し、その当てはまりの良さを含めて検証した。

- (1) レヴィ測度が逆ガウス分布発生パターンを示す逆ガウス型複合ポアソン過程
- (2) レヴィ測度がガンマ分布発生パターンを示すガンマ型複合ポアソン過程
- (3) レヴィ測度が対数正規分布発生パターンを示す対数正規型複合ポアソン過程
- (4) レヴィ測度がパレート分布の発生パターンを示すパレート型複合ポアソン過程
- (5) レヴィ測度がワイブル分布の発生パターンを示すワイブル型複合ポアソン過程

ここでレヴィ過程 $\{Z_t\}$ が複合ポアソン過程であるとは、 $(0, \nu(dx), b_0)$, $\nu(dx) = c\rho(dx)$ なる生成要素を持つ場合をいう。ただし、 c は正の定数であり、 $\rho(dx)$ は過程 \mathfrak{R} 上の確率測度で、 $\rho(\{0\})=0$ であるとする。さらに、 c は確率過程におけるジャンプ（本分析の場合は損害が発生したときに過程上でジャンプが起こると考える）の起こる頻

度を示すパラメータである。 $\rho(dx)$ はジャンプが起こった場合の「ジャンプ幅（損害規模）」の確率分布である。

以下、これらのモデルについて簡単な説明を行う。

(1) 逆ガウス型複合ポアソン過程

逆ガウス (Inverse Gaussian) 型複合ポアソン過程とは、過程 \mathfrak{R} 上の確率分布 ρ が逆ガウス分布に従うことをいう。この時、

$$\rho(B) = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}} \exp(\alpha\beta) \int_B x^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\alpha^2 x^{-1} + \beta^2 x)\right) 1_{(x>0)} dx$$

である。ただし、 $\alpha, \beta > 0$ である。また、逆ガウス分布の特性関数 $\hat{\rho}(u)$ は以下で示される。

$$\hat{\rho}(u) = \exp[-\alpha(\sqrt{-2iu + \beta^2} - \beta)]$$

従って、レヴィ過程 $\{Z_t\}$ が逆ガウス型の複合ポアソン過程であるとき、レヴィ測度は、

$$\nu(dx) = c \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}} \exp(\alpha\beta) x^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\alpha^2 x^{-1} + \beta^2 x)\right) 1_{(x>0)} dx$$

なる生成要素を持つ。

(2) ガンマ型複合ポアソン過程

ガンマ型複合ポアソン過程とは、過程 \mathfrak{R} 上の確率分布 ρ が Γ (ガンマ) 分布に従うことをいう。この時、

$$\rho(B) = \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} \int_B x^{\beta-1} \exp(-x\alpha) 1_{(x>0)} dx$$

である。ただし、 $\alpha, \beta > 0$ 。

また、ガンマ (Γ) 分布の特性関数 $\hat{\rho}(u)$ は、以下のようになる。

$$\hat{\rho}(u) = (1 - i\alpha^{-1}u)^{-\beta}$$

従って、 $\{Z_t\}$ がガンマ分布型の複合ポアソン過程であるとき、レヴィ測度は、

$$\nu(dx) = \frac{c\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} x^{\beta-1} \exp(-x\alpha) 1_{(x>0)} dx$$

なる生成要素を持つ。

(3) 対数正規型複合ポアソン過程

対数正規型複合ポアソン過程とは、過程 \mathfrak{R} 上の確率分布 ρ が対数正規分布に従うことをいう。この時、

$$\rho(B) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \int_B \frac{\exp[-(\log x - m)^2/2v]}{x} 1_{\{x>0\}} dx \quad , \quad v > 0$$

である場合である場合をいう。このとき、 $\log(X) \sim N(m, v)$ である。

レヴィ過程が対数正規分布型の複合ポアソンであるとき、レヴィ測度は、

$$\nu(dx) = \frac{c}{\sqrt{2\pi v} x} \exp\left[-\frac{(\log x - m)^2}{2v}\right] 1_{\{x>0\}} dx$$

なる生成要素を持つ。

(4) パレート型複合ポアソン過程

パレート型複合ポアソン過程とは、過程 \mathfrak{R} 上の確率分布 ρ がパレート分布に従うことをいう。この時、

$$\rho(B) = \int_B \frac{\alpha \beta^\alpha}{x^{\alpha+1}} 1_{\{x>\beta\}} dx \quad , \quad \alpha, \beta > 0$$

である場合をいう。

レヴィ過程 $\{Z_t\}$ がパレート型の複合ポアソン過程であるとき、レヴィ測度は、

$$\nu(dx) = c \frac{\alpha \beta^\alpha}{x^{\alpha+1}} 1_{\{x>0\}} dx$$

なる生成要素を持つ。

(5) ワイブル型複合ポアソン過程

ワイブル型複合ポアソン過程とは、過程 \mathfrak{R} 上の確率分布 ρ がワイブル分布に従うことをいう。この時、

$$\rho(B) = \int_B \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\beta^\alpha} \exp\left(-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha\right) 1_{\{x>0\}} dx \quad , \quad \alpha, \beta > 0$$

である場合をいう。

レヴィ過程 $\{Z_t\}$ がワイブル分布型の複合ポアソン過程であるとき、レヴィ測度は、

$$\nu(dx) = c \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\beta^\alpha} \exp\left(-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha\right) 1_{\{x>0\}} dx$$

なる生成要素を持つ。

IV パラメータ推定法

分布のパラメータ推定法として最も代表的なものに最尤法 (Maximum Likelihood Estimation) がある。しかし、宮原 (2003) によると、他の推定法としてモーメント法 (積率法) を適用することが考えられると論じている。モーメント法には古典的モーメント法と一般的モーメント法があるが、分布がモーメントを持たない場合には古典的モーメント法は使えない。古典的モーメント法の詳細については宮原 (2003) を参照されたい。

我々が注目する分布は古典的モーメント法を使用できる分布群であるので、初めに古典的モーメント法を使って、標本データから標本モーメント値を入手し、理論的なモーメント値が一致するパラメータを推測する手法をとる。つまり、古典的モーメント法によりパラメータ α, β, c または m, v, c の推定を行う。この手法で得たパラメータを初期値として使用し、計算ソフト (Mathworks 社の MATLAB を使用) により数値解析的に最尤法を使ってモデルの最適パラメータの推定を以下の手順で行う。

1. 古典的モーメント法により Z のパラメータ値を推定する。
2. そこで得られた強度 c の推定値が 1 よりも十分に小さければ、ジャンプ幅 (損害規模) の分布とジャンプが起こるまでの時間 (発生頻度) の分布を分けて推定する。ただし、初期値は古典的モーメント法により得られた値を使うこととする。
3. 強度 c の推定値が 1 よりも大きいのであれば、古典的モーメント法により推定されたパラメータの値を推定値として採用する。

また、損害規模 (ジャンプ幅) 分布と次の損害が起こるまでの時間 (発生タイミング) の分布のパラメータの推定は、それぞれ最尤法 (MLE) に基づいて数値解析的に行う。すなわち、分布の密度関数 $f(x)$ に対して、

$$\max_{\theta} \sum \log f(x_i; \theta)$$

を満たす分布のパラメータ θ を数値解析的に求めることで推定を行った。

1 古典的モーメント法によるパラメータ推定

ここでは古典的モーメント法を用いた確率変数 Z の分布のパラメータ推定法を説明する。 Z_1 の特性関数 $\phi(u)$ は以下で示される。

$$\phi(u) = \exp[\psi(u)]$$

$$\psi(u) = ib_0 u + c(\hat{\rho}(u) - 1)$$

$$\hat{\rho}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} \rho(dx)$$

$$i = \sqrt{-1}$$

Z は任意の次数のモーメントを持っているとする。分布の k 次モーメントを m_k 、ただし $k=1, 2, 3, \dots$ とおく。 $m_k = E(Z^k)$ とおくと、 m_k は分布パラメータの関数である。確率変数に対応する n 個の標本データ ξ_1, \dots, ξ_n が得られたとき、 k 次標本モーメントを \hat{m}_k とし、

$$\hat{m}_k = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \xi_j^k$$

である。

本分析で推定すべきパラメータは、 c, α, β の3つである。これらのパラメータを古典的モーメント法で考えるとき、例えば逆ガウス分布の場合、以下の古典的モーメント方程式を得る。

$$\psi^{(1)}(0) = \frac{\alpha}{\beta} ic = i\hat{h}_1$$

$$\psi^{(2)}(0) = -\frac{\alpha}{\beta} \left(\alpha + \frac{1}{\beta} \right) c = -\hat{h}_2$$

$$\psi^{(3)}(0) = -\frac{\alpha}{\beta} \left(\alpha^2 + 3\frac{\alpha}{\beta} + \frac{3}{\beta^2} \right) ic = -i\hat{h}_3$$

ただし、古典的モーメント推定法における計算はすべて以下を満たすとした。

$$\hat{h}_1 = \hat{m}_1$$

$$\hat{h}_2 = \hat{m}_2 - \hat{m}_1^2$$

$$\hat{h}_3 = \hat{m}_3 - 3\hat{m}_2\hat{m}_1 + 2\hat{m}_1^3$$

$$\hat{m}_k = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \xi_j^k, \quad k=1, 2, 3$$

$$\xi_j = Z_j - Z_{j-1}, \quad j=1, 2, 3, \dots, n$$

従って、ジャンプ幅が逆ガウス分布に従うとした場合、

$$\phi(u) = \exp(\psi(u))$$

$$\psi(u) = c \{ \exp[-\alpha(\sqrt{-2iu + \beta^2} - \beta)] - 1 \}$$

である。よって、古典的モーメント法により推定される α, β, c は以下の式により求められる。

$$\alpha = \hat{h}_1 \frac{\beta}{\alpha}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{2}{-\hat{h}_2/\hat{h}_1 \pm \sqrt{-3(\hat{h}_2/\hat{h}_1)^2 + 4\hat{h}_3/\hat{h}_1}}}$$

$$c = \frac{\hat{h}_1^2}{\hat{h}_2 - \hat{h}_1/\beta}$$

ただし, $\alpha, \beta, c > 0$.

ジャンプ幅がガンマ分布に従うとした場合,

$$\phi(u) = c \left\{ \left(1 - \frac{i u}{\alpha} \right)^{-\beta} - 1 \right\}$$

よって, 古典的モーメント法により α, β, c は以下の式により推定される。

$$\alpha = \frac{-\hat{h}_1 \hat{h}_2}{\hat{h}_2^2 - \hat{h}_1 \hat{h}_3}$$

$$\beta = \frac{-\hat{h}_2^2}{\hat{h}_2^2 - \hat{h}_1 \hat{h}_3} - 1$$

$$c = \frac{\hat{h}_1^2 \hat{h}_2}{2\hat{h}_2^2 - \hat{h}_1 \hat{h}_3}$$

ただし, $\alpha, \beta, c > 0$.

ジャンプ幅が対数正規分布に従うとした場合, 対数正規分布の k 次モーメントは以下の式を満たす。

$$m_k = \exp\left(km + \frac{1}{2}k^2v\right)$$

また,

$$\phi^{(1)}(0) = c\rho^{(1)}(0) = icm_1$$

$$\phi^{(2)}(0) = c\rho^{(2)}(0) = -cm_2$$

$$\phi^{(3)}(0) = c\rho^{(3)}(0) = -icm_3$$

であるので, 対数正規分布の場合のパラメータ m, v, c は以下の式から導き出される。

$$m = \log(\hat{h}_2/\hat{h}_1) - \frac{3}{2}\hat{v}$$

$$v = \log \frac{\hat{h}_1 \hat{h}_3}{\hat{h}_2^2}$$

$$c = \exp\left[\log(\hat{h}_1) \left(\hat{m} + \frac{1}{2}\hat{v}\right)\right]$$

ジャンプ幅がパレート分布に従うとした場合, パレート分布の k 次モーメントは以下の式を満たす。

$$m = \frac{\alpha\beta^k}{\alpha - k}$$

$$k < \alpha$$

従って、パレート分布の場合のパラメータ α , β , c は以下の式から導き出される。

$$\alpha = 2 \pm \frac{\sqrt{A^2 - A}}{A - 1}, \quad A = \frac{\hat{h}_1 \hat{h}_3}{\hat{h}_2^2}$$

$$\beta = \frac{\hat{h}_2}{\hat{h}_1} \frac{\alpha - 2}{\alpha - 1}$$

$$c = \hat{h}_1 \frac{\alpha - 1}{\alpha\beta}$$

ジャンプ幅がワイブル分布に従うとした場合、ワイブル分布の k 次モーメントは以下の式を満たす。

$$m_k = \beta^k \Gamma\left(1 + \frac{k}{\alpha}\right)$$

ワイブル分布の場合のパラメータ α , β , c は以下の式から推定される。

$$\alpha \in \left\{ \alpha \in \Re^+ \mid \frac{\hat{h}_3}{\hat{h}_1} \frac{\Gamma(1+1/\alpha)}{\Gamma(1+3/\alpha)} - \left(\frac{\hat{h}_2}{\hat{h}_1}\right)^2 \left(\frac{\Gamma(1+1/\alpha)}{\Gamma(1+2/\alpha)}\right)^2 = 0 \right\}$$

$$\beta = \pm \sqrt{\frac{\hat{h}_3}{\hat{h}_1} \frac{\Gamma(1+1/\alpha)}{\Gamma(1+3/\alpha)}}$$

$$c = \frac{\hat{h}_1}{\beta \Gamma(1+1/\alpha)}$$

上記 α は解析的に推定するのは複雑であるので、数値解析的に推定を行うこととする。

2 損害発生と規模の独立性検証（カイ二乗検定）

通常、累積損害過程を複合ポアソン過程モデルで捉えた場合、「損害規模（ジャンプ幅）の分布」と「損害発生のタイミング（次のジャンプが起こるまでの待ち時間）」は互いに独立の事象であることを前提条件している。しかし、本稿ではこれらの事象の独立性をデータに基づいて検証することで、複合ポアソン過程でモデル化して問題ないことを確認した。通常、損害保険に関連したリスクは、損害頻度と損害規模の間には相関関係がない、つまり「互いに独立である」と仮定することに問題はないかと考えられる。あえて本仮説が標本データにより棄却されないことを検証するため、カイ二乗仮説検定を行った。この仮説検定では、帰無仮説として「これらの事象は独立である」とし、対立仮説として「これらの事象は独立でなく、何らかの関係性がある。」とした。

3 最適モデルの選択と適合度検証

これまで述べたように、古典的モーメント法で解析的に得られたパラメータを初期値として使用し、計算ソフト（*Mathworks* 社の *MATLAB* を使用）により数値解析的に最尤法を使ってモデルの最適なパラメータの推定を行う。本手法により定式化された5つのモデルが、実際のデータ値と適合するかどうかの検定を行う。この検定では、損害規模（過程におけるジャンプ幅）が実際の損害規模データと適合しているかについて、コルモゴロフ・スミルノフ検定（Kolmogorov-Smirnov test）によりモデルとデータの相違を有意水準 $\alpha = 5\%$ で検証した。ここでの対立仮説は、「導かれたモデルの確率分布が実際のデータ分布と違う」とし、 $\alpha = 5\%$ 有意水準において検定結果を検証した。

次に、定式化された5つのモデルから最適なモデルを選択する検証を行う。このモデル選択の基準としたのは、赤池（1973）の赤池情報量基準「AIC（Akaike Information Criterion）」である。最尤法であてはめられたモデルが複数ある時にその中で最適な一つを選択する基準としてよく使用されるのが、赤池情報量基準（AIC）である。

つまり、

$$AIC = -2 \times (\text{モデルの最大対数尤度}) + 2 \times (\text{モデルの自由パラメータ数})$$

がモデル選択の基準となる。この AIC 値を最少とするモデルが最適なモデルと考えられるとする（坂元・石黒・北川（1982））。

最後に、AIC 以外の他のモデル間の比較検証として、*Palidade* 社の分析ソフトウェア *@Risk* の「分布適合度機能（distribution fitting）」を使って検証を行った。本機能は、複数の分布の中から、実際のデータ分布との適合が良い分布を、カイ二乗検定やその他の検定法でランク付けする機能である。今回はこの機能を利用し、実際のデータから適切なモデルとみなされるモデルのカイ二乗値からランク付けを行い、上記 AIC を使った最適モデルとの整合性も行った。

V モデル推定と検定結果

1 損害頻度と規模の独立性（カイ二乗）検定

表2では縦軸に損害規模の分類を行い、その発生頻度（この場合ジャンプが発生する待ち時間）との分割表を表示したものである。

ここでは、独立性の検証としてカイ二乗検定を行い実際のデータに基づき問題ないかを確認した。標本データによると5年分の日次データを用いたが、そのうち観測された損害件数は304日であり、1年間で約60日、およそ6日に1回の割合で損害が発生していたことになる。そこで損害が発生するまでの待ち時間の階級幅として6日を基準として選択し

表 2：損害規模と発生頻度（待ち時間）の分割表

損害規模 X (単位: \$100,000)	2 日以下	2~4 日	4~6 日	6 日以上
$0.00 < X < or = 0.2$	26.29	15.58	10.47	21.66
$0.2 < X < or = 0.6$	28.07	16.63	11.17	23.13
$0.6 < X < or = 1.0$	14.57	8.63	5.80	12.00
$1.0 < X$	39.08	23.16	15.56	32.20

た。この場合期待度数が 5 を下回る観測が多く見られた。

さて、上記検定の結果、カイ二乗統計量は 3.79 となり、有意度 5% における棄却値は 16.92 であった。3.79 < 16.92 であるので、統計的に対立仮説は棄却（帰無仮説は採択）される。よって、「損害規模の分布と発生頻度の分布は独立である」という帰無仮説は棄却されなかった。この結果をうけて、対象とするデータのモデル化において、損害頻度と規模が独立と仮定した複合ポアソン過程とすることが統計的データから妥当であると結論づけられた。

2 パラメータ推定結果

第 IV 節の方法論で述べたとおり以下のプロセスでパラメータ推定を行った結果が表 3 である。表 3 では 5 つの各モデルの古典的モーメント法（CMM: Classical Method of Moment）によるパラメータ推定値、そしてその CMM 推定量を初期値として数値解析的

表 3：古典的モーメント法と最尤法によるパラメータ推定結果

IG 型複合ポアソン過程	α	β	c	損害規模分布の AIC	P-値
CMM	3.4574	0.3931	0.0405		
MLE	0.3868	0.1808	0.2005	930.982	0.4167
ガンマ型複合ポアソン過程	α	β	c		
CMM	0.0984	0.1157	0.3027		
MLE	0.2256	0.4826	0.2005	926.564	0.0221
対数正規型複合ポアソン過程	m	v	c		
CMM	1.4683	0.6400	0.0595		
MLE	(0.5627)	2.9082	0.2006	849.093	0.5588
バレート型複合ポアソン過程	α	β	c		
CMM	3.4574	6.7188	0.0376		
MLE	0.2502	0.0104	0.2005	1586.940	0.0184
ワイブル型複合ポアソン過程	α	β	c		
CMM	NA	NA	NA		
MLE	0.6086	1.3321	0.2006	886.124	0.1766

注：CMM は「古典的モーメント法」による推定値、MLE は「最尤法」による推定値。

に最尤法 (MLE: Maximum Likelihood Estimation) で求めたパラメータ推定値を示した。さらに、規模分布に関する AIC , コルモゴロフ・スミルノフ検定の P 値も示した。

ワイブル型複合ポアソン過程においては、古典的モーメント法 (CMM: Classical Method of Moment) によるパラメータを推定することが困難であったので、他のモデル推定で得た値を初期値として使用し、最尤法 (MLE: Maximum Likelihood Estimation) により数値解析的に求めた。

ワイブル型モデル以外での古典的モーメント法により得られた発生頻度を示すパラメータ、強度 c , の推定値は0.037から0.059と1よりもかなり低い値を得た。独立検証でも頻度と規模が独立であると想定できる結果を得たので、規模 (ジャンプ幅) の分布と頻度 (ジャンプが起こるまでの時間) の分布を分けての推定を再度行った。頻度の分布を規模の分布とは分けて推定し直すことで強度 c はより精密な推定値を得ることが可能になる。再推定により、最尤法 (MLE) で数値解析的に推定された強度 c は0.2005となった。

本分析においては、モデル選択の基準として、損害規模 (ジャンプ幅) の分布に対する AIC を用いることとしたのであるが、実際、対象としている損害発生モデルは、損害規模 (ジャンプ幅) の分布と損害発生 (ジャンプの起こるまでの時間) 頻度に関する分布を独立事象であることとした。従って、ジャンプが起こるまでの時間の分布はモデル間に共通のものと考え、モデルの当てはまりの良し悪しの違いは、損害規模 (ジャンプ幅) の分布に対する当てはまりの良し悪しに現れてくると考えた。

表3でパラメータ推定値とともに示したのは、損害規模分布の AIC 値である。赤池情報量基準 AIC によると、 AIC 値が低い方がモデルとして当てはまりが良いことになる。ジャンプ幅つまり損害規模モデルの AIC によって判断すると、対数正規型がその AIC 値 (AIC =約849) が最も低く、従って最も適合度が高いと判断され、次にワイブル型 (AIC =約886), ガンマ型 (AIC =約926) と続く結果が得られた。

3 コルモゴロフ・スミルノフ検定 (K-S 検定)

各モデルの適合度を検証するために、コルモゴロフ・スミルノフ検定を行なった。ただし、 Z の分布関数から理論度数を計算するのは容易ではないので、ここでは標本データを基にした1万個の乱数を生成させ、その結果から理論度数を推計することで行った。

検定を行なった結果、対数正規分布型の複合ポアソン過程が一番良く。その P 値は0.5588 (>0.05) であった。対数正規型のモデルは、有意水準5%においては、「モデル分布と実際のデータ分布は異なった分布である」との対立仮説は棄却される。また、5%の有意水準でみると逆ガウス (IG) 型 (P 値=0.4167 >0.05) とワイブル型 (P 値=0.1766 >0.05) も上記対立仮説は棄却される。従って、対数正規型、逆ガウス型、ワイブル型は

モデルとして使用可能であると判断される。

それら以外のモデルの P 値をみると、ガンマ型 (P 値=0.0221<0.05) とパレート型 (P 値=0.0184<0.05) となり、対立仮説「モデル分布と実際のデータ分布は異なった分布である」との仮説が棄却されない。よって、モデルとして使用することが適切でないと判断される。

AIC 基準による対数正規型とワイブル型の次に当てはまり良く、逆ガウス型よりも良いと判断されるガンマ型はこの $K-S$ 検定結果から「モデルとして適切でない」と判断された。

上述の分析結果から判断されることは、損害規模の分布の形状が、変数 x が 0 に近くなるほど密度関数の値が大きくなる分布であるガンマ分布、パレート分布の場合には損害規模（ジャンプ幅）の分布の当てはまりがたとえ良くても、損害発生モデルとしては適切ではない可能性が高いと考えられる。逆に、 x が 0 に近いところでは密度関数の値が小さくなっている分布の場合、例えば逆ガウス型、対数正規型のような分布は損害発生モデルの候補として適合度が高いとの結論が導き出された。

AIC の基準と $K-S$ 検定を総合して考えると、今回入手した製造物賠償責任データでは対数正規タイプ複合ポアソン過程がリスクモデルとして最適であるとの結論が導かれた。

4 @Risk による分布適合度機能によるモデル比較

パリセード (Palisade) 社の分析ソフト @Risk はマイクロソフト社のエクセルのアドインソフトで、その機能の一つに分布適合度機能 (Distribution Fitting Function) がある。それは標本データに対して適合度が高い分布を候補として挙げ、例えばカイ二乗統計量などの基準となる統計量に基づいて分布適合度をランクづけする機能がある。今回、この分布適合度機能を用いても検証を行い、損害規模データの分布適合度機能を行った。

カイ二乗統計量を基準として行った結果、適合度のランクでは、対数正規分布が一番にランク付けされ、そのカイ二乗統計量は19.30であった。次に上位にランク付けされたのは、逆ガウス分布で、そのカイ二乗統計量は26.19であった。そしてワイブル分布のカイ二乗統計量=188.95が逆ガウス分布に続くとの結果が得られた。従って、本機能による適合度検証においても対数正規型が最も当てはまりが良いとの結果が得られた。

VI 結 論

本稿では、A社の製造物賠償責任損害のデータを用い、その累積損害がレヴィ過程 (Lévy process) の一つである複合ポアソン過程に従うとして、製造物賠償責任リスクの

モデル化を試みた。特に我々は損害分布として適合度が高いと考えられている5つの分布に注目しそのモデル化を行った。

本研究で注目したのは次の5つのレヴィ過程，複合ポアソン過程モデルである。その5つのモデルとは，(1) レヴィ測度が逆ガウス分布発生パターンを示す逆ガウス型複合ポアソン過程，(2) レヴィ測度がガンマ分布発生パターンを示すガンマ型複合ポアソン過程，(3) レヴィ測度が対数正規分布発生パターンを示す対数正規型複合ポアソン過程，(4) レヴィ測度がパレート分布の発生パターンを示すパレート型複合ポアソン過程，(5) レヴィ測度がワイブル分布の発生パターンを示すワイブル型複合ポアソン過程モデルの5つである。

パラメータ推定法としては，古典的モーメント法によって解析的に求めたパラメータを初期値として用い，最尤法により数値解析的にパラメータ推定を行った。パラメータ推定後には，各モデルのデータとの適合度をコルモゴロフ・スミルノフ検定により検証し，AIC (赤池情報量基準) によりデータとの適合度が高いモデルを見つけ出そうと試みた。また，モデル分析ソフト *@Risk* の機能の一つである分布適合度機能 (Distribution Fitting Function) により損害規模分布について再度検証を行った。

本研究の分析結果として，上記5つのモデルの中では対数正規型複合ポアソン過程がデータとの当てはまりが良く，適合度が最も良いとの結果を得た。

時系列のデータが開示され豊富に存在する株価モデルの実証分析とは違って，企業が抱える損害リスクに関するデータはほとんど公的に存在しないのが実情である。また，企業内でデータが存在したとしても外部に開示されることはごく稀である。さらに，企業の損害リスクは企業間で異なり，このような実証モデルの一般化が難しい。今回は研究目的ということで匿名でのデータの提供を受け，モデル分析に限定して現実のデータを基に分析した。A社のデータで得たモデル分析結果が，他社も同じ結果になるといった汎用性に乏しいという厳しい指摘もあろう。しかし，学術論文やリスク分析に関する書籍で推奨されている損害モデルの現実への応用という点，さらに理論モデルが現実在即して利用できるかを検証したとの点で，実際のデータを使ってモデル検証した本研究は学术界に一抹の貢献ができたのではないかと考える。

謝 辞

本稿は，平成23年度採用のJSPS 科研費基盤研究 (C) 24530510より受けた助成金の研究成果の一部である。

参 考 文 献

Akaike, H. (1973), "Information Theory and Extension of the Maximum Likelihood Principle," 2nd

- International Symposium on Information Theory*, Akademiai Kiado, Budapest, pp. 267-281.
- Andersen, L. N. (2009), "Subexponential Loss Rate Asymptotics for Lévy Process," *Mathematical Methodology Operation Research*, 73, pp. 91-108.
- 海老崎美由紀 (2009) 『保険データの読み方と考え方』 保険毎日新聞.
- Gerber, H. U. (1979), *An Introduction to Mathematical Risk Theory*, S. S. Huebner Foundation for Insurance Education, University of Pennsylvania.
- Hogg R. V. and S. A. Klugman, (1984), *Loss Distributions*, Wiley.
- 伊藤清 (1991) 『確率論』 岩波基礎数学選書, 岩波書店.
- Maeda, Y., N. Moriwaki and Y. Miyahara (2005), "On Modeling U.S. Product Liability Risk - An Empirical Analysis-," Working Paper No. B-5, Center for Risk Research, Shiga University, pp. 1-20.
- Mikosch T. (2009), *Non-Life Insurance Mathematics: An Introduction with the Poisson Process, Second Edition*, Springer.
- 宮原孝夫 (2003) 『株価モデルとレヴィ過程』 朝倉書店.
- Morales, M. (2004), "On an Approximation for the Surplus Process Using Extreme Value Theory: Application in Ruin Theory and Reinsurance Pricing," *North American Actuarial Journal*, pp. 46-66.
- Perera, R. S. (2010), "Optimal Consumption, Investment and Insurance with Insurable Risk for an Investor in a Lévy Market," *Insurance: Mathematics and Economics* 46.3, pp. 479-484.
- ロイ L. リアドン, ジョージ M. ニーカム原著, 平野晋監修 (1997) 『アメリカの PL 法—日本企業のための実務指針』 財団法人商事法務研究会.
- 坂元慶行・石黒真木夫・北川源四郎 (1982) 『情報量統計学』 共立出版株式会社.
- 佐藤健一 (1990) 『加法過程』 紀伊国屋書店.
- Sato, K. (1999), *Lévy Processes and Infinitely Distributions*, Cambridge University Press.
- Schoutens, Wim. (2003), *Lévy process in finance: Pricing Financial Derivatives*, Wiley.