

量と測定領域における速さと平均の指導に関する一考察

A study on the guidelines of speeds and means in the domain of Quantities and Measurements

中尾正広*

Abstract

In elementary schools numbers are taught from the view of the quantities in our daily lives. In this paper we study the guidelines of speeds and means in the domain of Quantities and Measurements. In the first section we prepare the importance to foster an attitude to willingly make use of mathematics in the daily lives as well as in the learning in the objectives of mathematics instructions. In the second section we explain three kinds of means, which are arithmetic means, geometric means, and harmonic means, generally called averages. We also show the typical example of the harmonic mean of speeds. In the third section we propose to study the mapping earlier than the function. In the fourth section we emphasize the importance not only of the statistics in the mathematics but also of the integrated learning with science.

キーワード：量と測定、平均、速さ

1. 準備

平成23年全面実施の現行の学習指導要領における算数科の目標として、次のようなことが謳われている。

算数科の教科の目標

「算数的活動を通して、数量や図形についての基礎的・基本的な知識及び技能を身に付け、日常の事象について見通しをもち筋道を立てて考え、表現する能力を育てるとともに、算数的活動の楽しさや数理的な処理のよさに気付き、進んで生活や学習に活用しようとする態度を育てる。」

その中の「進んで生活や学習に活用しようとする態度を育てる」というフレーズにおける学習には他教科の学習はもとより、これから先の算数や数学の学習にも活用していくことが重要であると示されている。本論文では、量と測定領域で学習する平均と速さの指導について考察していく。本論文が、ある意味での「研究ノート」として活用されれば幸いである。

2. 平均と速さについて

初等教育における数の概念は、日常生活で扱われるもの、即ち、量の概念を通して、指導されることが多い。量とは、大小の比較ができる対象を持っているもののことで、物の個数、長さ、重さ、時間、面積、体積、速さなどいろいろなものがある。それらについては、中等教育において物理量として扱われることがあり、高等学校以降では理科で扱うことも多い。「平均～」という用語に平均気温（啓林館）があり、これは何回か測定した気温の平均という意味である。その中で、「平均の速さ」という用語は、特に注意を要する。もちろん、速さについても和、差の概念は存在する。例えば、時速 x km で等速直線運動している物体から、進行方向と逆向きに時速 x km の速度で、物体を投げるとする。このとき、地上からは、物体は止まって見える。物理学では速さ (speed) と速度 (velocity) は厳密には区別するが、次の例は速さの意味である。

問題1 一定の距離を往復するのに、往路は時速 6 km、復路は時速 4 km ですすむと、平均すると

* Masahiro NAKAO 教授

時速何 km ですすんだことになるか。

という問題設定で、誤答として、6と4の平均として時速5 kmを解答することがある。平均にはいくつかの種類があるが、この場合の平均は、相加平均を意味し、算術平均ともいわれるものであるが、小学校での学習以降一番多く使われており、いろいろな場面で使われる。具体的には、 n 個の数値の和を個数 n で割った値で計算される。その他の平均として、相乗平均（幾何平均）は n 個の数値の積を個数 n としたときの n 乗根をとった値で計算される。また、調和平均は、逆数の相加平均の逆数である。問題1の正答は、一定の距離を x kmとした時に、往路にかかる時間は $x/6$ 時間、復路にかかる時間は $x/4$ 時間となる。即ち、往復 $2x$ kmの距離を $(x/6+x/4)$ 時間ですすむので、答えは時速4.8kmとなる。これは、6と4の調和平均である。

小学校の教科書に平均の定義があり、そこには各出版社により表現の違いはあるものの、概ね、いくつかの数、量をならして等しくしたときの大きさを平均とよんでいる。平均は合計を個数で割ったものとして計算されると表現されている。

- ・いくつかの数量をならして等しくしたときの大きさを、それらの数量の平均といいます。平均は、平均するものの数量の合計を、個数でわれば求められます。平均=合計÷個数（日本文教出版、5年下 86ページ）
- ・何個かの大きさの数や量を、同じ大きさになるようにならしたものを、もとの数や量の平均といいます。平均=合計÷個数（学校図書、5年上、17ページ）
- ・いくつかの数量を、等しい大きさになるようにならしたものを、平均といいます。平均は、次の式で求められます。平均=合計÷個数（東京図書、5年上、86ページ）
- ・いくつかの量や数を等しい大きさになるようにならしたものを、もとの量や数の平均といいます。平均=合計÷個数（教育出版、5年上、90ページ）
- ・いくつかの数量を、同じ大きさになるようにならしたものを、それらの数量の平均といいます。平均は、平均するものの数量の合計を、個数でわれば求められます。（啓林館、5年下、21ページ）
- ・いくつかの数や量をならして、同じにしたときの大きさを、それらの数や量の平均といいます。平

均は、次の式で求められます。平均=合計÷個数（大日本図書、5年下、52ページ）

ここでの合計はいくつかの数量の和であることは言うまでもない。また、速さはもちろん小学校で扱う量のひとつであることは明らかである。即ち、平均の速さを小学校で扱う数量の平均ではなく、別の概念として、扱うことが求められる。平均を初めて学習する小学生にとって理解しにくい内容であることは否定できない。児童を指導する教員にとってこれらの理論的背景を理解しておくことは、必須のものとする。

3. 理論的背景の重要性について

理論的背景の理解に関する重要性を示すものとして次のようなものがある。小学校学習指導要領の数量関係において、この領域で「関数の考え」、「式の表現と読み」、「資料の整理と読み」が主な内容となっている。特に、低学年では、現行の学習指導要領の1つ前の学習指導要領では、D数量関係の内容が存在しなかった。このことは、この領域の難しさを物語っているともいえる。本来関数の考え方としては、必ずしも数や量の対応だけではない。対応としては、数や量の前にももの対応がより基本的なものと考えられる。例えば、対応を考える時に、定義域の集合、値域の集合としてどのようなものを想定するかが重要となる。大学の教科に関する科目「算数」（1年春学期開講）において、関数の数学概念を伝えることは、難しいと感じる。その中でも小学校で学習する比例、反比例についてはまだ理解できるようである。数量を扱う関数概念より対応を扱う関数概念（写像）を扱う方を先に学習すべきではないだろうか。例えば全射、単射という用語は関数の比例、反比例より本来は、理解しやすい概念だと考えるが、学習していなかった概念という理由なのか、大学生に対する実際の授業では理解が難しいようである。

例えば、以下説明が実際の授業で学生に示したものであるが、定義および例を示す方法では、より抽象的という理由で理解が困難と感じる学生が多いようである。

[全射]

$f: S \rightarrow T$ が全射 (surjection, epimorphism) であるとは、 $f(S) = T$ が成立すること。つまり、 T の任意の元 t 対し、 S のある元 s がとれて、 $t = f(s)$ とい

う形にかけること。

例 S、T が R (R は実数全体の集合) のとき、
 $f: R \rightarrow R, f(x) = x^2$ は全射でない。(∵ 例えば、
 T の元 -1 に対応する S の元が存在しないの
 で、全射でない。)

[単射]

$f: S \rightarrow T$ が単射 (injection, monomorphism) であるとは、S の異なる元の f による像は、T の異なる元であるということ。つまり、S の任意の元 s_1, s_2 に対して、 $s_1 \neq s_2 \Rightarrow f(s_1) \neq f(s_2)$ である。言い換えると、S の任意の元 s_1, s_2 に対して、 $f(s_1) = f(s_2) \Rightarrow s_1 = s_2$ である。

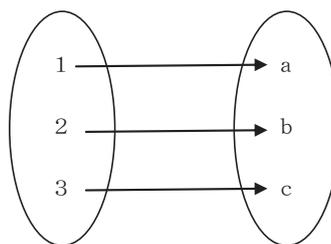
例 S、T が R (R は実数全体の集合) のとき、
 $f: R \rightarrow R, f(x) = x^2$ は単射でない。(∵ 例えば、
 T の元 1 に対して S の二つの元 $1, -1$ が存在して、
 $f(1) = 1, f(-1) = 1$ となるので、単射でない。)

それに対して、「単射であり、全射である例」、「単射であり、全射でない例」、「単射でなく、全射である例」、「単射でなく、全射でない例」を集合およびその元の対応の図 (図 1) を示すことにより、より多くの学生がその意味を理解しているようである。

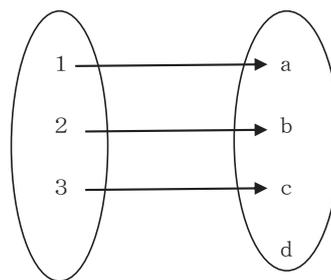
4. まとめ

平成24年度先行実施の現行指導要領においては、高等学校を中心に前回の平成15年度実施の前回の学習指導要領と比して、統計的内容の重視が見受けられる。また、現在検討中の次期学習指導要領では、SSH における取組み事例等も参考にしつつ、数学と理科の知識や技能を総合的に活用して主体的な探究活動を行う新たな選択科目として、数理探究 (仮称) が検討されている。このことは、平均の指導を含む統計的内容の重要性および速さの指導を含む理科との総合学習の重要性を示唆するものである。小学校学習指導においては、将来学習する教育課程の内容を指導することはないが、中等教育以降の学習時に扱う教育内容を担当教員が理解しつつ、そのような背景があることを指導者が想定して指導することは必須のものであり、そのために、教員が小学校学習指導要領だけでなく、より高等教育の学習内容を系統的に理解することが求められると考える。本論文で考察された内容がより本質的な理解の助けとなり、本論文が、実際に児童を指導する現場の教員に少しでも役立つものとして活用されれば幸いです。

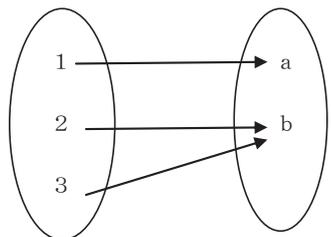
★全射である&単射である



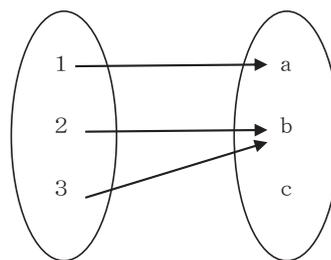
★全射でない&単射である



★全射である&単射でない



★全射でない&単射でない



(図 1)

ある。

参考文献

文部科学省 平成10年12月 小学校学習指導要領
 文部科学省 平成11年 5月 (平成19年 7月 一部補訂)
 小学校学習指導要領解説 算数編
 文部科学省 平成20年 6月 小学校学習指導要領解説
 算数編
 文部科学省 中教審教育課程企画特別部会 平成27年 8
 月20日資料

藤井齊亮、飯高 茂ほか40名 平成22年検定 新しい算
数 5上 東京書籍
小山正孝、中原忠男ほか 平成22年検定 小学算数 6
下 日本文教出版
橋本吉彦ほか18名 平成22年検定 平成22年検定 たの
しい算数 5下 大日本図書
一松信ほか45名 平成22年検定 みんなとまなぶ 小学
校算数 5上 学校図書
清水 静海、船越 俊介ほか50名 平成22年検定 わく
わく 算数 5下 啓林館
澤田利夫ほか27名 平成22年検定 小学算数 5上 教
育出版