

# 同値関係の視点による平行四辺形の高さに関する一考察

A study of the height of a parallelogram from the view of the equivalence relations

中尾正広\*

## Abstract

Realizing the definition of terminologies has been regarded as both fundamental and an important topic of study by many researchers in mathematics. In this paper we study the height of a parallelogram from the view of the equivalence relations. In the first section, we view the aim of arithmetic in the elementary school curriculum guideline. In the second section, we prepare the preliminaries of the equivalence relations and representatives of equivalence class. In the third section, we study how to teach the height of a parallelogram in elementary schools. In the fourth section, we conclude that it is important and necessary that teachers of elementary schools should understand the height of a parallelogram by using equivalence relations and representatives of equivalence class instead of equalities.

キーワード：小学校学習指導要領、平行四辺形、高さ、同値関係

## 1. 準備

小学校の授業において、公式を用いて数値を計算するときに、その公式の意味する内容を十分に理解することが、基本的事項であるといえる。そのとき十分に理解しているかを確認するために、見通しをもち筋道を立てて考え、表現する能力が求められる。小学校学習指導要領の算数科の目標は、次のように記載されている。

算数科の教科の目標

「算数的活動を通して、数量や図形についての基礎的・基本的な知識及び技能を身に付け、日常の事象について見通しをもち筋道を立てて考え、表現する能力を育てるとともに、算数的活動の楽しさや数理的な処理のよさに気付き、進んで生活や学習に活用しようとする態度を育てる。」

この中で、「見通しをもち筋道を立てて考え、表現する能力を育てる」という目標のために、実際に教科指導を行う教員が見通しをもち筋道を立てて考え、表現する能力を有することが必須であると考えられる。

本論文では、面積を求める公式を指導するとき

に、三角形の面積を求める公式と平行四辺形の面積を求める公式を対比させ、平行四辺形の面積の公式において、平行四辺形の高さに注目し、同値関係および同値類の代表元の考え方を活用して理解することにより、より本質的な理解に発展するように考察していく。本論文が、ある意味での「研究ノート」として活用されれば幸いである。

## 2. 同値関係について

まず、同値関係について概観する。同値関係は多く場合、集合論のカテゴリーで学習する。ある集合  $X$  の任意の2元  $x, y$  の間にある関係  $xRy$  が成り立つか否かが定まっていて、関係  $R$  について次の3つの条件が成立するとき、 $R$  を同値関係という。

- ①  $xRx$ 、②  $xRy$  なら  $yRx$ 、
- ③  $xRy$  かつ  $yRz$  なら  $xRz$ 、

①を反射法則、②対称法則、③推移法則といい、これらを合わせて同値法則という。1つの同値関係  $R$  が与えられるとき、 $xRy$  ならば  $x$  と  $y$  は同値であるという。このとき  $a$  に同値なものの全体の集合を  $a$  の同値類という。各同値類は空集合ではなく、 $a$  は  $a$  の同値類に属し、相異なる同値類には共通

\* Masahiro NAKAO 教育学部教授

の元がない。即ち、集合  $X$  は同値類の直和に分割される。この直和分解を  $X$  の  $R$  に関する類別という。  $X$  の同値関係  $R$  に関する同値類全体からなる集合を  $X/R$  で表し、  $X$  の  $R$  に関する商集合という。(岩波数学辞典より)

例えば、図形の合同、図形の相似などの関係は、同値関係であり、自然数を全体集合として、2で割って余る数が等しいという関係も同値関係である。

### 3. 平行四辺形の高さの指導について

まず、三角形の面積の公式として指導される

$$(\text{底辺}) \times (\text{高さ}) \div 2$$

についてであるが、この公式において、もちろん(底辺)は三角形の3つの辺のうちの一つを「底辺」としてとらえ、その長さを示している。また、「高さ」は、底辺を表す線分の両端となる2つの頂点ではない第3の頂点から、底辺に引いた直線(数学的には線分)の長さを示している。これまでの指導で、底辺を決定しなければ、高さが決定できないことは、指導上の注意として指摘されてきている。即ち、底辺を決定すれば高さが唯一に決まることを示している。ここで「高さ」が唯一に決定されるというのは、線分の長さが決まるという意味である。高さは長さを表して高さを表す線分を意味するものではない。ただし三角形の場合は底辺を決定すれば、高さを表す線分も一意的に決まり、したがって高さも一意的に決まる。新学習指導要領には、次のように記載されている。

「三角形、平行四辺形の底辺や高さの理解を確実にする必要もある。その際、底辺をどこにとるかで高さが決まること、底辺をどこにとっても面積は同じであることなどを指導する。さらに、この指導に当たっては、面積を求めるのに必要な部分の長さを常にすべて与えて公式を用いさせるだけでなく、求積のためにどの部分の長さを測る必要があるかを考える場面を与えることが、公式の理解を深めるために必要である。」

次に、平行四辺形について考える。平行四辺形の場合も、三角形と同様の面積の公式

$$(\text{底辺}) \times (\text{高さ})$$

が与えられるが、平行四辺形の場合、底辺を決定し

ても高さは決定されるが、高さを表す線分を一意的に決定することはできない。これについては、2本の平行線間の距離を高さとして定義しているためである。もちろんこれらの距離を表す線分は無数存在する。しかもそれらの長さはすべて等しく、これを高さとしている。児童が理解するときには、「高さ」を表す線分はたくさんあるがそれらの長さはどれも等しいので、その中のどれでもよい。」という理解で充分である。しかし、教員については、より一般性のある理解として、同値関係による理解が望ましいと考える。

平行四辺形  $ABCD$  (図1)において、全体集合  $X$  を直線  $AD$  上と直線  $BC$  上に端点を持つ線分の集合とする。平行四辺形  $ABCD$  の1組の平行な2辺  $AD$  と  $BC$  に注目して、その1つ(例えば辺  $BC$ )を底辺と定める。直線  $AD$  上に点  $P$ 、直線  $BC$  上に点  $Q$  を取り、線分  $PQ$  を考える。また、直線  $AD$  上に点  $R$ 、直線  $BC$  上に点  $S$  を取り、線分  $RS$  を考える。線分  $PQ$  と線分  $RS$  が平行の時、 $PQ \sim RS$  と定める。この時、関係  $\sim$  は同値関係となる。(ただし線分  $PQ$  は線分  $PQ$  自身と平行であると考えよう。)  $X$  の関係  $\sim$  による商群を考える。その中で  $AD$  または  $BC$  に垂直な元が高さを表す線分である。

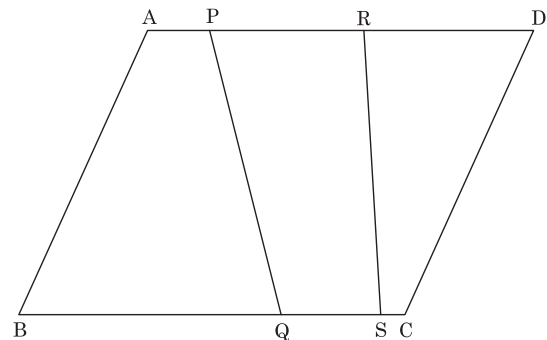


図1

小学校の授業で図形のグループ分けを行うときの基準が曖昧なことがある。これはどの様に定義するかといふことに起因している部分もある。例えば、[中尾]において、「正三角形は二等辺三角形か」ということを提示した。中学校学習指導要領では、図形の証明などでは、定義により、正三角形は二等辺三角形として取り扱う。しかし小学校の授業において、具体的な図形を対象として二等辺三角形を選ぶ問題において、正三角形を二等辺三角形として選ぶことはない。このような場合、同値関係及び同値類

を学習することで、より本質的な理解の助けになると考えられる。

同値関係および同値類の代表元を考える時、何を全体集合として考え、どのような同値関係を扱うかを決定しておくことで、教員の理解が本質的なものになり、児童への指導に役立つものと考えられる。

たとえば本来、等号の記号である $=$ は、同値関係であるはずである。しかしながら、小学校学習指導要領において、 $12 \div 5 = 2 \cdots 2$ 、 $8 \div 3 = 2 \cdots 2$ において、等号は同値関係になっていない。また、大学の初年次教育で行われる微分積分学において、ロピタルの定理を2回利用する場合なども、等号が同値関係になっていない。

例 (極限を求める時の式変形)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

上記の式変形において、第1項と第2項をつなぐ等式は、後半の等式が成り立つことが必要条件となっている。

#### 4. まとめ

小学校、中学校、高等学校の算数、数学の内容で、「等しい」ことをどのように理解するかは重要な事項の一つである。その中でも、「等しい」という理解ではなく、同値関係を利用した理解の方が自然であると考えられる事項もある。たとえば、等しい値の異分母分数などはその典型例であろう。その他にも、割合、歩合なども同値関係の理解の方が本質的な理解が得られると考えられる。また、図形の指導においても、グループ分けを行うことが多いが、基準を明確にすることが重要となるが、児童に十分な理解を求めるためにも教員が本質的な理解が必要となる。小学校の児童には、同値関係及び同値類の代表元の理解は必要ないが、教科指導を行う教員に

としては、このような理解が本質的な理解に発展していき、「見通しを持ち筋道を立てて考え、表現する能力を育てることに役立つこととなるであろうと考察される。たとえば、現行の学習指導要領では第5学年に担当されている「図形」領域の平行四辺形、ひし形、台形の定義は、平成23年4月1日から全面实施される新学習指導要領においては、第4学年に担当されており、より低学年から学習する「平行四辺形に関する教科内容」を指導するときには、教員が充分かつより本質的な理解を求められることは言うまでもない。

#### 参考文献

- 文部科学省 平成10年12月 小学校学習指導要領  
 文部科学省 平成11年5月 (平成19年7月 一部補訂)  
 小学校学習指導要領解説 算数編  
 文部科学省 平成20年6月 小学校学習指導要領解説  
 算数編  
 日本数学会編集 昭和60年12月 岩波数学辞典 第三版  
 岩波書店  
 中尾正広 2007年12月 数学教育を意識した小学校教育  
 課程における「三角形」の指導について 聖和大学  
 論集 第35号A  
 杉山吉茂、飯高 茂、伊藤説朗ほか39名 平成16年検定  
 新編 新しい算数 5上 東京書籍  
 ——— 平成16年検定 新編 新しい算数 5下 東  
 京書籍  
 中原忠男ほか25名平成16年検定小学算数 5上日本文教  
 出版  
 ——— 平成16年検定小学算数 5下日本文教出版  
 橋本吉彦ほか21名 平成16年検定 新版 たのしい算数  
 5上 大日本図書  
 ——— 平成16年検定 新版 たのしい算数 5下  
 大日本図書  
 一松 信ほか40名 平成16年検定 みんなと学ぶ 小学  
 校算数 5上 学校図書  
 ——— 平成16年検定 みんなと学ぶ 小学校算数  
 5下 学校図書  
 清水静海、船越俊介 ほか40名 平成16年検定 わくわ  
 く 算数 5上 啓林館  
 ——— 平成16年検定 わくわく 算数 5下 啓林  
 館