

関西学院大学審査 博士学位論文

乱流現象の統計的解明

中 尾 肇

要 旨

積分法的方法論である実用ハミルトン法を用いて、Richardsonの4/3型法及びそれと
関連する具体的な数値を、解析的もしくは数値的に説明し、その上でRichardsonの4/3型法
の成立の機序を説明した。この結果、統計的乱流現象の実験的な問題に対する積分法
的方法論の有効性が示された。さらに、流体力学の基礎方程式であるNavier-Stokes方程
式と同等なHopfの汎関数方程式を導くことによる可能性のある方法論の一つとして、漸化式
を用いた汎関数積分の方法を用いた。この結果、乱流現象の統計的解明にこれを適用し、その有効性と可能性を示した。

乱流現象の統計的解明

関西学院大学理学部・実験助手

中尾 肇

摘 要

変分法的方法論である実効ハミルトニアン法を用いて, Richardsonの4/3乗則及びそれに関連する具体的な現象を, 解析的もしくは数値的に説明し, その上でRichardsonの4/3乗則の成立の機構を解明した. この結果, 統計的乱流現象の実際的な問題に対する変分法的方法論の有効性が示された. さらに, 流体力学の基礎方程式であるNavier-Stokes方程式と同等なHopfの汎関数方程式を解くに至る可能性のある方法論の一つとして, 漸化式を用いた汎関数積分の近似評価の新たな方法を開発し, 1次元調和振動子と3-mode modelにこれを適用, その有効性と可能性を示した.

1. 導言	1
2. 変分法的方法論	2
3. Richardsonの4/3乗則	3
4. Hopfの汎関数方程式	4
5. 漸化式を用いた汎関数積分の近似評価	5
6. 1次元調和振動子	6
7. 3-mode model	7
8. 結論	8
9. 謝辞	9
10. 参考文献	10
11. 索引	11
12. 補遺	12
13. 謝辞	13
14. 参考文献	14
15. 索引	15
16. 補遺	16
17. 謝辞	17
18. 参考文献	18
19. 索引	19
20. 補遺	20
21. 謝辞	21
22. 参考文献	22
23. 索引	23
24. 補遺	24
25. 謝辞	25
26. 参考文献	26
27. 索引	27
28. 補遺	28
29. 謝辞	29
30. 参考文献	30
31. 索引	31
32. 補遺	32
33. 謝辞	33
34. 参考文献	34
35. 索引	35
36. 補遺	36
37. 謝辞	37
38. 参考文献	38
39. 索引	39
40. 補遺	40
41. 謝辞	41
42. 参考文献	42
43. 索引	43
44. 補遺	44
45. 謝辞	45
46. 参考文献	46
47. 索引	47
48. 補遺	48
49. 謝辞	49
50. 参考文献	50
51. 索引	51
52. 補遺	52
53. 謝辞	53
54. 参考文献	54
55. 索引	55
56. 補遺	56
57. 謝辞	57
58. 参考文献	58
59. 索引	59
60. 補遺	60
61. 謝辞	61
62. 参考文献	62
63. 索引	63
64. 補遺	64
65. 謝辞	65
66. 参考文献	66
67. 索引	67
68. 補遺	68
69. 謝辞	69
70. 参考文献	70
71. 索引	71
72. 補遺	72
73. 謝辞	73
74. 参考文献	74
75. 索引	75
76. 補遺	76
77. 謝辞	77
78. 参考文献	78
79. 索引	79
80. 補遺	80
81. 謝辞	81
82. 参考文献	82
83. 索引	83
84. 補遺	84
85. 謝辞	85
86. 参考文献	86
87. 索引	87
88. 補遺	88
89. 謝辞	89
90. 参考文献	90
91. 索引	91
92. 補遺	92
93. 謝辞	93
94. 参考文献	94
95. 索引	95
96. 補遺	96
97. 謝辞	97
98. 参考文献	98
99. 索引	99
100. 補遺	100
101. 謝辞	101
102. 参考文献	102
103. 索引	103
104. 補遺	104
105. 謝辞	105
106. 参考文献	106
107. 索引	107
108. 補遺	108
109. 謝辞	109
110. 参考文献	110
111. 索引	111
112. 補遺	112
113. 謝辞	113
114. 参考文献	114
115. 索引	115
116. 補遺	116
117. 謝辞	117
118. 参考文献	118
119. 索引	119
120. 補遺	120
121. 謝辞	121
122. 参考文献	122
123. 索引	123
124. 補遺	124
125. 謝辞	125
126. 参考文献	126
127. 索引	127
128. 補遺	128
129. 謝辞	129
130. 参考文献	130
131. 索引	131
132. 補遺	132
133. 謝辞	133
134. 参考文献	134
135. 索引	135
136. 補遺	136
137. 謝辞	137
138. 参考文献	138
139. 索引	139
140. 補遺	140
141. 謝辞	141
142. 参考文献	142
143. 索引	143
144. 補遺	144
145. 謝辞	145
146. 参考文献	146
147. 索引	147
148. 補遺	148
149. 謝辞	149
150. 参考文献	150
151. 索引	151
152. 補遺	152
153. 謝辞	153
154. 参考文献	154
155. 索引	155
156. 補遺	156
157. 謝辞	157
158. 参考文献	158
159. 索引	159
160. 補遺	160
161. 謝辞	161
162. 参考文献	162
163. 索引	163
164. 補遺	164
165. 謝辞	165
166. 参考文献	166
167. 索引	167
168. 補遺	168
169. 謝辞	169
170. 参考文献	170
171. 索引	171
172. 補遺	172
173. 謝辞	173
174. 参考文献	174
175. 索引	175
176. 補遺	176
177. 謝辞	177
178. 参考文献	178
179. 索引	179
180. 補遺	180
181. 謝辞	181
182. 参考文献	182
183. 索引	183
184. 補遺	184
185. 謝辞	185
186. 参考文献	186
187. 索引	187
188. 補遺	188
189. 謝辞	189
190. 参考文献	190
191. 索引	191
192. 補遺	192
193. 謝辞	193
194. 参考文献	194
195. 索引	195
196. 補遺	196
197. 謝辞	197
198. 参考文献	198
199. 索引	199
200. 補遺	200
201. 謝辞	201
202. 参考文献	202
203. 索引	203
204. 補遺	204
205. 謝辞	205
206. 参考文献	206
207. 索引	207
208. 補遺	208
209. 謝辞	209
210. 参考文献	210
211. 索引	211
212. 補遺	212
213. 謝辞	213
214. 参考文献	214
215. 索引	215
216. 補遺	216
217. 謝辞	217
218. 参考文献	218
219. 索引	219
220. 補遺	220
221. 謝辞	221
222. 参考文献	222
223. 索引	223
224. 補遺	224
225. 謝辞	225
226. 参考文献	226
227. 索引	227
228. 補遺	228
229. 謝辞	229
230. 参考文献	230
231. 索引	231
232. 補遺	232
233. 謝辞	233
234. 参考文献	234
235. 索引	235
236. 補遺	236
237. 謝辞	237
238. 参考文献	238
239. 索引	239
240. 補遺	240
241. 謝辞	241
242. 参考文献	242
243. 索引	243
244. 補遺	244
245. 謝辞	245
246. 参考文献	246
247. 索引	247
248. 補遺	248
249. 謝辞	249
250. 参考文献	250
251. 索引	251
252. 補遺	252
253. 謝辞	253
254. 参考文献	254
255. 索引	255
256. 補遺	256
257. 謝辞	257
258. 参考文献	258
259. 索引	259
260. 補遺	260
261. 謝辞	261
262. 参考文献	262
263. 索引	263
264. 補遺	264
265. 謝辞	265
266. 参考文献	266
267. 索引	267
268. 補遺	268
269. 謝辞	269
270. 参考文献	270
271. 索引	271
272. 補遺	272
273. 謝辞	273
274. 参考文献	274
275. 索引	275
276. 補遺	276
277. 謝辞	277
278. 参考文献	278
279. 索引	279
280. 補遺	280
281. 謝辞	281
282. 参考文献	282
283. 索引	283
284. 補遺	284
285. 謝辞	285
286. 参考文献	286
287. 索引	287
288. 補遺	288
289. 謝辞	289
290. 参考文献	290
291. 索引	291
292. 補遺	292
293. 謝辞	293
294. 参考文献	294
295. 索引	295
296. 補遺	296
297. 謝辞	297
298. 参考文献	298
299. 索引	299
300. 補遺	300
301. 謝辞	301
302. 参考文献	302
303. 索引	303
304. 補遺	304
305. 謝辞	305
306. 参考文献	306
307. 索引	307
308. 補遺	308
309. 謝辞	309
310. 参考文献	310
311. 索引	311
312. 補遺	312
313. 謝辞	313
314. 参考文献	314
315. 索引	315
316. 補遺	316
317. 謝辞	317
318. 参考文献	318
319. 索引	319
320. 補遺	320
321. 謝辞	321
322. 参考文献	322
323. 索引	323
324. 補遺	324
325. 謝辞	325
326. 参考文献	326
327. 索引	327
328. 補遺	328
329. 謝辞	329
330. 参考文献	330
331. 索引	331
332. 補遺	332
333. 謝辞	333
334. 参考文献	334
335. 索引	335
336. 補遺	336
337. 謝辞	337
338. 参考文献	338
339. 索引	339
340. 補遺	340
341. 謝辞	341
342. 参考文献	342
343. 索引	343
344. 補遺	344
345. 謝辞	345
346. 参考文献	346
347. 索引	347
348. 補遺	348
349. 謝辞	349
350. 参考文献	350
351. 索引	351
352. 補遺	352
353. 謝辞	353
354. 参考文献	354
355. 索引	355
356. 補遺	356
357. 謝辞	357
358. 参考文献	358
359. 索引	359
360. 補遺	360
361. 謝辞	361
362. 参考文献	362
363. 索引	363
364. 補遺	364
365. 謝辞	365
366. 参考文献	366
367. 索引	367
368. 補遺	368
369. 謝辞	369
370. 参考文献	370
371. 索引	371
372. 補遺	372
373. 謝辞	373
374. 参考文献	374
375. 索引	375
376. 補遺	376
377. 謝辞	377
378. 参考文献	378
379. 索引	379
380. 補遺	380
381. 謝辞	381
382. 参考文献	382
383. 索引	383
384. 補遺	384
385. 謝辞	385
386. 参考文献	386
387. 索引	387
388. 補遺	388
389. 謝辞	389
390. 参考文献	390
391. 索引	391
392. 補遺	392
393. 謝辞	393
394. 参考文献	394
395. 索引	395
396. 補遺	396
397. 謝辞	397
398. 参考文献	398
399. 索引	399
400. 補遺	400
401. 謝辞	401
402. 参考文献	402
403. 索引	403
404. 補遺	404
405. 謝辞	405
406. 参考文献	406
407. 索引	407
408. 補遺	408
409. 謝辞	409
410. 参考文献	410
411. 索引	411
412. 補遺	412
413. 謝辞	413
414. 参考文献	414
415. 索引	415
416. 補遺	416
417. 謝辞	417
418. 参考文献	418
419. 索引	419
420. 補遺	420
421. 謝辞	421
422. 参考文献	422
423. 索引	423
424. 補遺	424
425. 謝辞	425
426. 参考文献	426
427. 索引	427
428. 補遺	428
429. 謝辞	429
430. 参考文献	430
431. 索引	431
432. 補遺	432
433. 謝辞	433
434. 参考文献	434
435. 索引	435
436. 補遺	436
437. 謝辞	437
438. 参考文献	438
439. 索引	439
440. 補遺	440
441. 謝辞	441
442. 参考文献	442
443. 索引	443
444. 補遺	444
445. 謝辞	445
446. 参考文献	446
447. 索引	447
448. 補遺	448
449. 謝辞	449
450. 参考文献	450
451. 索引	451
452. 補遺	452
453. 謝辞	453
454. 参考文献	454
455. 索引	455
456. 補遺	456
457. 謝辞	457
458. 参考文献	458
459. 索引	459
460. 補遺	460
461. 謝辞	461
462. 参考文献	462
463. 索引	463
464. 補遺	464
465. 謝辞	465
466. 参考文献	466
467. 索引	467
468. 補遺	468
469. 謝辞	469
470. 参考文献	470
471. 索引	471
472. 補遺	472
473. 謝辞	473
474. 参考文献	474
475. 索引	475
476. 補遺	476
477. 謝辞	477
478. 参考文献	478
479. 索引	479
480. 補遺	480
481. 謝辞	481
482. 参考文献	482
483. 索引	483
484. 補遺	484
485. 謝辞	485
486. 参考文献	486
487. 索引	487
488. 補遺	488
489. 謝辞	489
490. 参考文献	490
491. 索引	491
492. 補遺	492
493. 謝辞	493
494. 参考文献	494
495. 索引	495
496. 補遺	496
497. 謝辞	497
498. 参考文献	498
499. 索引	499
500. 補遺	500
501. 謝辞	501
502. 参考文献	502
503. 索引	503
504. 補遺	504
505. 謝辞	505
506. 参考文献	506
507. 索引	507
508. 補遺	508
509. 謝辞	509
510. 参考文献	510
511. 索引	511
512. 補遺	512
513. 謝辞	513
514. 参考文献	514
515. 索引	515
516. 補遺	516
517. 謝辞	517
518. 参考文献	518
519. 索引	519
520. 補遺	520
521. 謝辞	521
522. 参考文献	522
523. 索引	523
524.	

目次

はじめに	1
第1章 乱流中の2粒子相対拡散の解明	2
1. 導入	2
2. Richardsonの4/3乗則の解析的証明	2
3. スペクトルについて	3
4. 計算結果	4
5. 単一領域のスペクトルに関する話題	4
6. 複数領域をもつスペクトルに関する話題	5
6. 1 Kelloggの観測データについて	6
6. 2 Okuboの観測データについて	6
7. Richardsonの法則の機構	7
8. 相対拡散に寄与する渦の大きさについて	8
9. その他の問題について	11
第2章 汎関数積分の近似評価	13
1. 導入	13
2. 1次元調和振動子	14
3. 3-mode model	18
結語	28
謝辞	29
図	30
補遺	63
文献	69

第1章 乱流中の2粒子相対拡散の解明

1. 導入

乱流の輸送現象の中での特徴的なものの一つにRichardsonの4/3乗則（以後RLと呼ぶ）があり、この法則を多くの人が色々な方法論を用いて扱っている。これらの中には、例えば、相似理論,³⁻⁵⁾ 直接相互作用近似,⁶⁾ スケーリング理論,⁷⁾ 渦伸長モデル,⁸⁾ そして、ここで用いた実効ハミルトニアン法⁹⁻¹¹⁾（以後EHMと呼ぶ）などがある。しかし、これらの中でのRLの扱われ方は、主にその方法論の正当性を主張する目的で用いられており、RLの成立の機構は明確にされてはいない。そこで、ここではEHMを用いてこの機構を明確にする。その手順としては、まず、EHMが乱流中の2粒子相対拡散をいかに良く表現し得るかを示し、⁹⁻¹¹⁾ その上で、RLの機構を明確にする。¹²⁾

2. Richardsonの4/3乗則の解析的証明

ここでは、EHMを用い解析的にRLを導く。速度場が結合Gauss分布をしている非圧縮の等方性一様乱流中の2粒子の相対距離の2乗平均 $\langle r^2 \rangle$ はEHMにより次式で与えられる。^{9),B)}

$$\langle r^2 \rangle = r_0^2 + 3\beta(t) \quad (1.2.1)$$

$$\beta(t) = \frac{32\pi}{3} \int_0^t d\tau (t-\tau) \int dk k^2 \hat{S}(k, \tau) \left\{ 1 - \frac{\sin kr_0}{kr_0} \exp[-\beta(t)k^2/2] \right\} \quad (1.2.2)$$

但し、 r_0 は初期($t=0$)における2粒子の相対距離； k は波数； $\hat{S}(k, \tau)$ は相関関数のスペクトルである。ここで $\hat{S}(k, \tau)$ は次の形をしていると仮定する：

$$\hat{S}(k, \tau) = Cg(k)f(k, \tau) \quad (1.2.3)$$

但し、 C は定数； $f(k, 0)=1$ とする。この場合 $g(k)$ はエネルギースペクトル $E(k)$ と $E(k)=4\pi Ck^2g(k)$ の関係にある。さらに、 $E(k)$ は図1のように慣性領域^{C)}においてKolmogorovの-5/3乗則^{1),C)}を満たすものとする； $f(k, \tau)$ は時間的な減衰因子で十分に速く減衰し、かつ、慣性領域においてスケーリング則に則した形、即ち $f(k^{2/3}\tau)$ の形をとるもの

とする。^D この $\hat{S}(k, \tau)$ を用いると(1.2.2)式は

$$\beta(t) = \frac{8}{3} \int dk E(k) \left\{ 1 - \frac{\text{sinkr}_0}{kr_0} \exp[-\beta(t)k^2/2] \right\} \int_0^t d\tau (t-\tau) f(k, \tau) \quad (1.2.4)$$

となる。ここで、因子 $\left\{ 1 - \frac{\text{sinkr}_0}{kr_0} \exp[-\beta(t)k^2/2] \right\}$ と $E(k)$ と $f(k, \tau)$ とを考慮すると、ある時間帯において実質的に(1.2.4)式の k 積分は $[k, \bar{k}]$ (k と \bar{k} は各々慣性領域の下限と上限) の範囲のみ考えれば良いことが判る。また、流れの代表的長さ L が r_0 に比べ充分大きいとすると、 k の領域 $k \leq \bar{k}$ において

$$\frac{\text{sinkr}_0}{kr_0} \cong 1 \quad (1.2.5)$$

と見なせる。さらに $\tau/t = \tau'$, $kt^{3/2} = k'$, $\beta(t)t^3 = a(t)$ と置換すると(1.2.4)式は

$$a(t) = \frac{32\pi C}{3} \int_{kt^{3/2}}^{\bar{k}t^{3/2}} dk' k'^{-5/3} \left\{ 1 - \exp[-a(t)k'^2/2] \right\} \int_0^1 d\tau' (1-\tau') f(k'^{2/3}\tau') \quad (1.2.6)$$

となる。ここで、(1.2.6)式の k' 積分に関する積分核は大体図2のような形をしていることと時間 t が陽に入っているのは k' 積分の上限と下限だけであることから、ある時間帯において $a(t)$ は定数となる。即ち R L が成立する。

3. スペクトルについて

E H M においては数値計算を行うには $\hat{S}(k, \tau)$ をなんらかの方法で与えなければならない。ここではモデルスペクトルとして

$$\hat{S}(k, \tau) = \frac{C}{k_0^{11/3} + k^{11/3}} \exp[-(k^\alpha \tau)^\gamma/2] \quad (1.3.1)$$

(但し、 C , α , γ は定数; $k_0 = 1/L$ で L は流れの代表的長さ) を用いることとする。この選択は厳密な意味では簡単の為ではあるが、以下の理由で(1.3.1)式を用いても問題は起こらない。

(1.3.1)式を選択することにより問題となるのは減衰因子 $\exp[-(k^\alpha \tau)^\gamma/2]$ であるが、前節

で示したように減衰因子は条件として慣性領域においてスケーリング則に則した形をし、かつ、充分速く減衰するものであれば良く、その関数形にその他の制限は無い。例えば、 $f(k^{2/3}\tau) = \exp(-k^{4/3}\tau^2/2)$ としたものと $f(k^{2/3}\tau) = (1 + k^{2/3}\tau/\sqrt{2})^{-10}$ としたものの具体的な数値計算の結果を図3に示したが、この2つの減衰因子はその減衰の仕方に本質的な差があるが、 $\langle r^2 \rangle$ のグラフには本質的な差はないことが判る。さらに、減衰因子として指数関数形¹³⁾やGauss形¹⁴⁾の報告があることから、(1.3.1)式が現実のスペクトルと比べ極端に異なった時間的減衰を示すとは考え難いので、その与える計算結果も極端に現実から離れてはいないと思われる。

4. 計算結果

この節ではスペクトル(1.3.1)を用いて得られた数値計算の結果を報告する。図4は $L=1, 10, 10^2, 10^3$ の場合の $\langle r^2 \rangle$ の時間依存性をプロットしたものである。但し、 $\alpha=2/3$, $\gamma=2$, $r_0=0.1$, そして、 C は速度の1成分のゆらぎの2乗平均 $\langle u^2 \rangle$ が1になるようにとっている。図5は $\gamma=1$ 以外は図4と同じ条件のものである。これらの図を見るとRLが成立していることが判る(特に、 L が大きい程明確に成立している)。さらに、 $L=10^3$ の場合にはRLの区間が数百秒も続いているが、このような長時間に亘るRLの成立は実際の観測においても報告されており、それを説明したことになる。図6は $L=1, 10, 10^2$ の場合の $\langle r^2 \rangle$ の時間依存性をプロットしたものである。但し、 $\alpha=1$, $\gamma=2$, $r_0=0.1$, $\langle u^2 \rangle=1$ としている。図7は $\gamma=1$ 以外は図6と同じ条件にしたものである。これらの図を見ると明かにRLは成立してはいない。この結果は第1節で示したRLが成立する条件である $\hat{S}(k, \tau)$ がスケーリング則に則した形をしている必要があることを数値的にも示したことになる。

5. 単一領域のスペクトルに関する話題

この節では数値計算の結果見つかった興味深い現象について述べる。図8がその現象を具体的に示した図で、ここでは $\alpha=2/3$, $\gamma=2$, $L=10^4$, $r_0=0.1$, $\langle u^2 \rangle=1$, そして、(1.2.4)式における k 積分の積分範囲を $[0, 10]$ としている。この図を見るとRLの区間の手前の部分で $\langle r^2 \rangle$ が t^3 よりも速く増加していることが判る。この原因を調べるために図9と10を作った。図9は k 積分の積分範囲を $[0, 10^2]$ としたこと以外は図8と同じ条件であ

る。この図を見ると問題となる現象は起こっていない。このことからスペクトルの上端の部分に原因があることが判る。図10は $\hat{S}(k, \tau)$ として

$$\hat{S}(k, \tau) = \frac{C}{k_0^{1/3} + k^{11/3}} k^\delta \exp[-(k^{2/3}\tau)^2/2] \quad (1.5.1)$$

をとり、 $\delta = -1, 0, 1$ の場合の $\langle r^2 \rangle$ の時間依存性をプロットしたものである。この図から $\hat{S}(k, \tau)$ の k に対する減少の仕方が速くなれば $\langle r^2 \rangle$ の増加の仕方が速くなることが判る。相対拡散に対する寄与は比較的狭い波数範囲からなされていることと以上の2つの図から問題の現象は図11の円で示した $E(k)$ が $k^{-5/3}$ より速く減衰している散逸領域^cの影響で出現していることが判る。但し、実際の計算ではスペクトルを \bar{k} で打ち切っているが、これは散逸領域の傾きを $\rightarrow -\infty$ としたものに对应している。

R L の区間の手前で $\langle r^2 \rangle$ が t^3 よりも速く増加している観測データが時折見受けられるが（次節で扱う Kellogg の観測データもその1つ）、その現象は観測の誤差とか乱流場のゆらぎというものではなく、上述のごとく統計的な機構によって出現していることが明かになった。また、この現象を現実的な観点から述べると、最初流れの代表的長さ L に比べ相対距離 $\langle r^2 \rangle^{1/2}$ が非常に小さいときは、その時間発展に対する渦構造の影響は殆どないが、相対距離が L に比べてある程度の大きさをもつようになると急激に渦構造の影響を受け始めるという現象であるといえる。

6. 複数領域をもつスペクトルに関する話題

1956年に Ozmidov は海洋のエネルギースペクトルに対して図12のような複数の領域において別々に Kolmogorov の $-5/3$ 乗則を満足するようなスペクトル構造（以後マルチスペクトル構造と呼ぶ）を提唱した³⁾。実際、マルチスペクトル構造をもつ流れのものであると考えられる観測データが存在する。この節では EHM の立場から、それらの観測データのいくつかに対し定性的な再現を試みる。具体的には $\hat{S}(k, \tau)$ として以下のものを用いる：

$$\hat{S}(k, \tau) = \sum_{i=1}^2 \frac{C_i}{L_i^{11/3} + k^{11/3}} \exp[-(k^{2/3}\tau)^2/2] \quad (1.6.1)$$

但し、 L_i はスケール i における流れの代表的長さ； C_i はスケール i における速度の 1 成分のゆらぎの 2 乗平均 $\langle u_i^2 \rangle$ を決める定数である。

6. 1 Kelloggの観測データについて

図 1 3 は Kellogg(1956)の観測データである。^{3),15)} この図には次の 2 つの特徴がある。第 1 はスペクトル(1.3.1)で表されるような単一領域のスペクトルの流れにおける $\langle r^2 \rangle$ の時間依存性とは明かに異なった時間依存性を示していることで、これはマルチスペクトル構造が原因と思われる。第 2 は $R L$ の区間の手前で $\langle r^2 \rangle$ が t^3 より速く増加していることで、これは第 4 節で述べた現象と同じものであると思われる。図 1 4 はスペクトル(1.6.1)を用いて Kellogg の観測データを定性的に再現したものである。但し、 $L_1=10, L_2=10^4, \langle u_1^2 \rangle=0.1, \langle u_2^2 \rangle=5, r_0=1$ 、そして、大きい方のスケールにおけるスペクトルの k に関する範囲を $[0, 0.1]$ としている。図 1 3 と 1 4 とを比較すると、 $R L$ の区間につながる付近の部分の曲線の様子が定性的に非常に良く似ている。

ここで、 $\langle r^2 \rangle$ が t^3 より速く増加していることが第 4 節で述べた現象と同じものであることを示すために、図 1 5 を作った。図 1 5 は大きい方のスケールにおけるスペクトルの範囲を $[0, 1]$ としたこと以外は図 1 4 と同じ条件である。この図を見ると問題の現象が起こっておらず、図 1 4 における現象は第 4 節で述べた現象と同じものであることが判る。以上のことから考えると Kellogg が観測した流れはマルチスペクトル構造をもつ流れで、かつ、 r_0 が大きい方のスケールの代表的長さに比べ充分小さかったと思われる。

6. 2 Okuboの観測データについて

図 1 6 は Okubo の観測データを Okubo と Ozmidov が整理し直したもので、拡散係数のデータである。^{3),16)} この図を見ると、同一観測データの中 2 つの別々の領域で $R L$ が各々成立していることが判る。この原因を、Okubo と Ozmidov は Ozmidov が提唱したマルチスペクトル構造であるとしている。そこで、この現象をスペクトル(1.6.1)を用いて定性的に再現したものが図 1 7 である。但し、 $L_1=10, L_2=10^4, \langle u_1^2 \rangle=0.5, \langle u_2^2 \rangle=5, r_0=0.1$ 、そして大きい方のスケールにおけるスペクトルの k に関する範囲を $[10^{-5}, 10^{-2}]$ としている。この図を見ると、明確に 2 つの別々の領域で $R L$ が成立していることが判る。さて、図 1 8 は

大きい方のスケールにおけるスペクトルの k に関する範囲を $[10^{-5}, 10^{-1}]$ とした以外は図 17 と同じ条件にしたものである。図 17 と 18 とを比較すると図 17 の方が図 18 より明確に R L が 2 つの別々の領域で成立していることが判る。このことから、2 つの別々の領域で R L が明確に成立するには、スペクトルが各スケール間で明確に分離している必要があると判る。このことを現実的な観点から述べると、小さい方のスケール構造が大きい方のスケール構造の中で「1 粒子」として振舞う必要があるといえる。

さて、今までみてきたように E H M はかなり良く 2 粒子の相対拡散を表現している。また、この他にも E H M にはその与える結果に、エネルギー保有領域からの相対拡散に対する寄与を抑制する機構が含まれていたり、初期において $\langle r^2 \rangle \sim r_0^2 \alpha t^2$ 、中間で $\langle r^2 \rangle \propto t^3$ 、最終的に $\langle r^2 \rangle \propto t$ と特別に場合分けをしなくとも出てくるなどがあり、乱流中の 2 粒子相対拡散の重要な特徴を殆ど全てとって良い程表現している。このことを踏まえて次節以下で R L の成立の機構を解明する。

7. Richardson の法則の機構

この節では E H M を用い Richardson の法則の機構を明確にする。¹²⁾ 拡散係数 K は (1.2.1) 式と (1.2.2) 式より

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{1}{6} \frac{d}{dt} \langle r^2 \rangle \\
 &= \frac{16\pi}{3} \int_0^t d\tau \int dk k^2 \hat{S}(k, \tau) \left\{ 1 - \frac{\sin kr_0}{kr_0} \exp[-\beta(t)k^2/2] \right\} \\
 &= \frac{1 - \frac{16\pi}{3} \int_0^t d\tau (t-\tau) \int dk k^4 \hat{S}(k, \tau) \frac{\sin kr_0}{kr_0} \exp[-\beta(t)k^2/2]}{1}
 \end{aligned} \tag{1.7.1}$$

である。ここでは第 1 節と同様に $\hat{S}(k, \tau)$ として (1.2.3) 式を用いる。

さて既に第 1 節で R L の解析的導出はなされているが、R L の機構を明確にする為に拡散係数 K を対象として、もう一度 R L の成立の様子をみていく。まず、R L が成立している時間帯に話を限定する。第 1 節で得られた R L の成立条件 $r_0 \ll L$ より出てくる $\frac{\sin kr_0}{kr_0} \approx 1$ と慣性領域で $E(k) \propto k^{-5/3}$ であることを考慮し、さらに $\tau/t = \tau'$, $kt^{3/2} = k'$, $\beta(t) = a\tau^3$ ($a = \text{const}$) の置換を行うと (1.7.1) 式の分子は

$$\frac{16\pi C t^2}{3} \int_{k t^{3/2}}^{\bar{k} t^{3/2}} dk' k'^{-5/3} [1 - \exp(-ak'^2/2)] \int_0^1 d\tau' f(k'^{2/3} \tau') \quad (1.7.2)$$

となる。ここで、 t が陽に入っているのは k' 積分の上限と下限のみであり、かつ、 k' 積分に対する積分核が図2のような形をしていることから、上式は t^2 に比例する。同様に (1.7.1) 式の分母は

$$1 - \frac{16\pi C}{3} \int_{k t^{3/2}}^{\bar{k} t^{3/2}} dk' k'^{1/3} \exp(-ak'^2/2) \int_0^1 d\tau' (1-\tau') f(k'^{2/3} \tau') \quad (1.7.3)$$

となり、これは R L が成立する時間帯には定数となる。

さて、ここで $k' = k((r^2)/3a)^{1/2}$ であることと (1.7.2) 式の k' 積分に対する積分核が図2のような形をしており、かつ、R L が成立している間はその形は不変とみなせること、さらに (1.7.2) 式の t^2 の因子は直接的に $E(k) \propto k^{-5/3}$ から出てきていることから、R L は以下の2つの条件により成立していることが判る。

1. エネルギースペクトルが慣性領域において Kolmogorov の $-5/3$ 乗則を満足する。
2. (1.7.1) 式の分母は R L の成立時間帯には定数であるのでそれを除いて考えると、相対拡散に対する主要な寄与は慣性領域中の $k_r (= (r^2)^{-1/2})$ に対して一定の比をもった比較的狭い領域のみからきている。

以上のことを現実的な観点から述べると、ある相対距離に対して一定かつ限られた範囲の比の大きさをもつ渦のみが相対拡散に寄与しており、それらの各渦が Kolmogorov のエネルギースペクトルに対応するエネルギーでもって2粒子を拡散するという機構により R L は成立しているといえる。

さて、ここで指摘しておく必要があることは、従来相対拡散に寄与する渦の大きさは相対距離と同程度、もしくは、それより小さいと述べられてきたが、²⁾ ここで得られた結論からいうと、必ずしもその必要はなく、相対距離に対して一定の比をもっていれば良いということである。

8. 相対拡散に寄与する渦の大きさについて

現在まで相対拡散に寄与する渦の大きさは相対距離と同程度かそれ以下である、と定性的に扱われてきただけである。そこで、EHMを用いて寄与の波数分布を数値的に求めてみることにする。前節より拡散係数 K は RL が成立している時間帯において次の関係式を満たす：

$$K \propto \int_0^t dt \int dk k^2 \hat{S}(k, \tau) \left\{ 1 - \frac{\sin k r_0}{k r_0} \exp[-\beta(t)k^2/2] \right\}. \quad (1.8.1)$$

ここで具体的な計算を行なうためには $\hat{S}(k, \tau)$ を与えてやらねばならないので、スペクトル(1.3.1)を用いる。図19は $L=10^3$, $t=50$, $\alpha=2/3$, $\gamma=2$, $\langle u^2 \rangle=1$ の場合の(1.8.1)式の k 積分の積分核の形をプロットしたものである。図20は $L=10^3$, $t=15$, $\alpha=2/3$, $\gamma=1$, $\langle u^2 \rangle=1$ とした場合のものである。これら2つの図を見るとピークはかなり $k_r (=r^2)^{1/2}$ より小さいところにあり、相対距離よりもかなり大きな渦も相対拡散に寄与していることが判る。寄与の割合を明確にするために

$$G(k) = \frac{\int_0^t dt \int_{\underline{k}}^{\bar{k}} dk' k'^2 \hat{S}(k', \tau) \left\{ 1 - \frac{\sin k' r_0}{k' r_0} \exp[-\beta(t)k'^2/2] \right\}}{\int_0^t dt \int_{\underline{k}}^{\bar{k}} dk' k'^2 \hat{S}(k', \tau) \left\{ 1 - \frac{\sin k' r_0}{k' r_0} \exp[-\beta(t)k'^2/2] \right\}} \quad (1.8.2)$$

で定義される関数 $G(k)$ を考える。但し、 \bar{k} と \underline{k} は各々慣性領域の上限と下限を表す。この $G(k)$ をプロットしたものが図21と22で、各々図19と20に対応している。これらの図から k_r までの積分値が全積分値の40%近くにもなることが判り、従来述べられてきたように相対距離より大きい渦は無視して良い、とはいえないことが判る。そこで、この原因を以下で調べる。

まず、相対拡散に寄与する渦の大きさを決定する要因について考えるが、それらとしては以下の3つがあげられる。

1. 幾何学的要因
2. 各渦のエネルギー密度の要因

3. 各渦の運動の持続性の要因

要因1は、相対距離に対して非常に小さな渦や大きな渦は幾何学的にいて相対拡散に寄与しないということを意味する。要因2は、渦の大きさが大きくなる程粒子を動かす速さが速くなることを意味する。これら2つは従来からも考えられてきたもので、ある瞬間における2粒子の相対速度で表現されるといえる。ここで、これを見ても、簡単のために、ここでは相対速度の1成分の2乗平均 $\langle [u(r, 0) - u(0, 0)]^2 \rangle$ で考えることにする。 $\langle [u(r, 0) - u(0, 0)]^2 \rangle$ は厳密に次式で与えられる。⁹⁾

$$\langle [u(r, 0) - u(0, 0)]^2 \rangle = \frac{16\pi}{3} \int dk \hat{S}(k, 0) \left[k^2 - \frac{3}{r^2} \left(\frac{\sin kr}{kr} - \cos kr \right) \right] \quad (1.8.3)$$

ここでスペクトル(1.3.1)を用い、さらに $k_0/k_r = \xi$, $k/k_r = x$ と置換すると(1.8.3)式は

$$\langle [u(r, 0) - u(0, 0)]^2 \rangle = \frac{16\pi C}{3} k_r^{5/3} \int_x^{\bar{x}} dx \frac{1}{\xi^{11/3} + x^{11/3}} \left[x^2 - 3 \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x \right) \right] \quad (1.8.4)$$

(但し、 \bar{x} と x は各々積分の上限と下限を表す) となる。図23は $\xi=0.1$ の場合の(1.8.4)式の積分核をプロットしたものであるが、 $x=2.1$ にピークがあり相対距離より小さな渦が主に寄与していることが判る。その寄与の割合を明確にするために、先程と同様に

$$H(x) = \frac{\int_x^x dx' \frac{1}{\xi^{11/3} + x'^{11/3}} \left[x'^2 - 3 \left(\frac{\sin x'}{x'} - \cos x' \right) \right]}{\int_x^{\bar{x}} dx' \frac{1}{\xi^{11/3} + x'^{11/3}} \left[x'^2 - 3 \left(\frac{\sin x'}{x'} - \cos x' \right) \right]} \quad (1.8.5)$$

で定義される関数 $H(x)$ を考える。これをプロットしたものが図24で、これは図23に対応している。この図から $x=1$ までの(即ち、相対距離よりも大きい渦の)積分値は全積分値の約7%にすぎないことが判り、要因1と2だけを考えると、従来述べられてきたことは正しいといえる。

さて、要因3は、渦は大きさが大きくなる程その平均寿命も長くなるので、一度相対距離を広げ始めるとその運動の持続性のために、小さい渦よりもかなり長時間2粒子を

引き離し続けるということの意味する。この要因のために、統計的に大きな渦が相対拡散に寄与する割合が増すことになる訳であるが、(1.2.4)式における因子

$$\int_0^t dt(t-\tau)f(k, \tau) \quad (1.8.6)$$

から考えて、これがE H Mの与える結果の原因となっていることが判る。

確かにスペクトルの減衰因子の性質により寄与のピークが移動することや、E H M自体が近似理論であることを考えると、ここで得られたように相対距離より大きな渦が全体の40%もの寄与をしていることが確実であるとはいえないかもしれないが、第2節で述べたように、ここで用いたスペクトルの減衰因子が現実のものと大きく離れているとは考えにくいこと、さらに図23でピークが、渦の大きさという点からみて、相対距離の約50%のところであり、かつ、相対距離より大きい渦に対応する波数領域においても、ピーク値と比較して十分な大きさの値をもっており、要因3により相対距離より大きな渦が相対拡散に対してなす寄与の大きさが7%から40%に充分になり得ることなどから考えて、ここで得られた結果は十分に現実を表している可能性があると考えられるし、少なくとも、要因3からいって従来考えられていたよりもかなり大きい渦まで相対拡散に寄与していることは確かである。そして、このこと以上に重要なことは、従来の相対拡散に寄与する渦の大きさに対する考察の中に、渦の運動の持続性の要因が欠けていたということである。

9. その他の問題について

MoninとYaglomはその著書³⁾の中で「観測データの中には、理論的に正当化される範囲 $\langle r^2 \rangle^{1/2} < L$ を大きく越える領域までR Lの成立を示すものが存在する。」と述べているが、この節ではこの問題について考える。まず、MoninとYaglomがどの程度「大きく越える」と考えているのかが、その著書を見る限りでは明確ではないが、図16を見てみると、2粒子の相対距離が流れの代表的長さと同程度もしくは少し大きいところまでR Lが成立しているようにもみえる。よって、この線に沿って以下で議論を進めることにする。

まず、図5を見ると、特に $L=10, 10^2$ の場合には良く判るが、実質的に $\langle r^2 \rangle^{1/2} \approx L$ の領域までR Lが成立している。殆どの観測データはこれで説明できると考えられるが、領域

$\langle r^2 \rangle^{1/2} \geq L$ での成立は説明できない。この解決策の1つとして、第5節で扱ったマルチスペクトル構造の流れの場合を考えてみた。それが図25で、ここではスペクトル(1.6.1)を用い、 $L_1=10^2, L_2=10^4, \langle u_1^2 \rangle=0.5, \langle u_2^2 \rangle=5, r_0=0.1$ としている。実線がマルチスペクトルの場合で、破線が上記の L_1 と L_2 を各々流れの代表的長さとして単一領域のスペクトル(1.3.1)を用いた場合のものである。この図を見ると、大きい方のスケールの渦構造の存在により小さい方のスケールにおける R_L の成立区間が伸び、小さい方のスケールにおける流れの代表的長さを越えていることが判る。

この方法の適用性のために、ある次数のモーメントやチャムラントに対する方程式の中に、必ずその次数より上の次数のものが入って来て閉鎖性のある方程式系にできてしまわないようにしなければならない。よって、この場合でも再帰的方程式を解いてどこかでこの閉鎖性を打ち切らなければならない。実際、閉鎖の問題が生じる。この問題を免った方法としては、White-Hamilton 展開、0-1 次元モデル、変換相互作用近似、表起は 10^4 程度、その他に数論的な方法など色々ある。しかし、実際に得られているのは、たかだか数回の繰返のものだけであり、打ち切った次数より上の次数のモーメントやチャムラントが完全に本質的に不要とはいえず、また、その次数も高い。したがって、上述の方法論の適用性にはかなりの制限が存在していると考えられる。それでは、特性汎関数を直接計算したいのだが、これは汎関数積分であり、現在のところ実行できる汎関数積分は ϕ 汎関数積分や Gibbs 平均のものだけであり、殆どの場合特性汎関数を具体的に算することは出来ない。そこで、汎関数積分を近似評価する必要性が出てくるのである。よって、ここでは新たに漸化式を用いた近似評価の方法を考える。その方法の概略は以下の通りである。

1. 適当にパラメータとその成分を導入し、算出する汎関数積分を、実行できる汎関数積分に汎関数積分が表基する形に変換する。
2. 汎関数積分は無限重積分としても定義されるが、その無限重積分を充分な多量体の多量積分で近似し、実行できる多量積分と行なう。
3. その結果得られた積分形式のなかで、漸化式の形となるべき n を適当に選り、それを更新して

第2章 汎関数積分の近似評価

1. 導入

流体力学の基礎方程式であるNavier-Stokes方程式は、その非線形のため、一般的には解析的に厳密解を得ることは出来ない。また、これと同等なものに、特性汎関数に対するHopfの汎関数方程式があるが、特性汎関数をモーメントやキュムラント²⁾に展開し、これらに対する方程式を作った場合でも、Navier-Stokes方程式の非線形性のために、ある次数のモーメントやキュムラントに対する方程式の中に、必ずその次数より上の次数のものが入ってきて無限階層の方程式系になってしまい閉じたものとならない。よって、この場合でも何らかの仮定を設けてどこかでこの階層構造を打ち切らねばならない、所謂、切断の問題が生じる。この問題を扱った方法論には、Wiener-Hermite展開、0-4次キュムラント近似、直接相互作用近似、渦粘性Markov近似、その他半実験的な方法など色々ある。しかし、実際に得られているのは、たかだか数個の低次のものだけであり、打ち切った次数より上の次数のモーメントやキュムラントが常に本質的に不要とはいええず、また、その保証もない。¹⁾ 故に、上述の方法論の有効性にはかなりの制限が存在していると考えられる。それでは、特性汎関数を直接扱えば良いのだが、これは汎関数積分であり、現在のところ実行できる汎関数積分は δ 汎関数形やGauss形のものだけであり、殆どの場合特性汎関数を具体的に得ることは出来ない。¹⁸⁾ そこで、汎関数積分を近似評価する必要性が出てくる訳である。よって、ここでは新たに漸化式を用いた近似評価の方法を考えた。その方法の概略は以下の通りである：

1. 適当にパラメータとその微分を導入し、目的とする汎関数積分を、実行できる汎関数積分に汎関数微分が演算する形に変換する。
2. 汎関数積分は無限重積分としても定義されるが、その無限重積分を十分な多重度の多重積分で近似し、実行できる多重積分を行なう。
3. その結果得られた微分形式のなかで、漸化式の核となるべき A_n を適当に選び、それを变形して

$$A_n = \Delta_n A_{n-1}$$

の形にする。但し、 Δ_n はパラメータとその微分を含む。

4. A_n を導入したパラメータの試行関数で近似し、それを上式に代入して、パラメータにかかっている係数に関する漸化式を得る。
5. 得られた係数に関する漸化式を、コンピュータの数式処理システム（ここでは、REDUCEを用いた）を用いて解く。

現状では、まだ解決しなければならない問題があり、Hopfの汎関数方程式を解くには至っていないが、その可能性のある方法論の一つとして報告する。

さて、具体的には、この方法論の実際と有効性を示す目的で、厳密解の判っている1次元調和振動子のFeynman核を、Hopfの汎関数方程式へつながるものとして、3-mode modelを各々扱う。

2. 1次元調和振動子

1次元調和振動子のFeynman核 $K(r, t, r_0, 0)$ は経路積分表示で

$$K(r, t, r_0, 0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \left(\prod_{j=1}^{N-1} dq_j \right) \left(\prod_{j=0}^{N-1} \frac{dp_j}{2\pi} \right) e^{i \sum_{j=0}^{N-1} p_j (q_{j+1} - q_j) - \frac{i\epsilon}{2} \sum_{j=0}^{N-1} (p_j^2 + \omega^2 q_j^2)} \quad (2.2.1)$$

と与えられる。^{17)F} 但し、 r, r_0 は各々時刻 $t, 0$ での位置、 q_j, p_j は各々区間 j での位置と運動量、 ω は振動数、 N は区間数、 $\epsilon = t/N$ である。また、簡単の為、粒子の質量は1としている。(2.2.1)式は $N \rightarrow \infty$ の極限で汎関数積分であるが、漸化式を用いこれを具体的に求めるために、パラメータ $S_j (j=0, 1, \dots, N-1)$ を導入し、関係

$$f\left(\frac{\partial}{\partial S_j}\right) e^{aS_j} = e^{aS_j} f\left(a + \frac{\partial}{\partial S_j}\right) \quad (2.2.2)$$

(但し、 f は任意関数； a は S_j を含まない) を用いると

$$K(r, t, r_0, 0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \left(\prod_{j=1}^{N-1} dq_j \right) \left(\prod_{j=0}^{N-1} \frac{dp_j}{2\pi} \right) e^{i \sum_{j=0}^{N-1} p_j (q_{j+1} - q_j) - \frac{i\epsilon}{2} \sum_{j=0}^{N-1} \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial S_j} \right)^2}$$

$$\times e^{-\frac{i\epsilon\omega^2}{2} \sum_{j=0}^{N-1} q_j^2 + i \sum_{j=0}^{N-1} p_j S_j} \Big|_{S_j=0} \quad (2.2.3)$$

となる。ここで、 $N \rightarrow \infty$ の極限操作を充分大きな N で置き換え、かつ、 S_j に関する微分と p_j に関する積分の順序を入れ替えることが出来ると仮定すると、(2.2.3)式は

$$K(r, t, r_0, 0) = \int \left(\prod_{j=1}^{N-1} dq_j \right) e^{\frac{i\epsilon}{2} \sum_{j=0}^{N-1} \partial_j^2 - \frac{i\epsilon\omega^2}{2} \sum_{j=0}^{N-1} q_j^2} \prod_{j=0}^{N-1} \delta(q_{j+1} - q_j + S_j) \Big|_{S_j=0} \quad (2.2.4)$$

(但し、 $\partial_j \equiv \partial / \partial S_j$) となる。この形を見ると元々 $N \rightarrow \infty$ であったのだから、実行できる汎関数積分に汎関数微分が演算する形になっていることが判る。¹⁸⁾ これを、 q_j について積分すると $\delta\left(r - r_0 + \sum_{u=0}^{N-1} S_u\right)$ が残るので(2.2.4)式は

$$K(r, t, r_0, 0) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{ik(r-r_0) - it\omega^2 r_0^2 / 2} e^{\frac{i\epsilon}{2} \sum_{j=0}^{N-1} \partial_j^2} e^{ik \sum_{u=0}^{N-1} S_u} \times e^{i\epsilon\omega^2 r_0 \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{u=0}^{j-1} S_u - \frac{i\epsilon\omega^2}{2} \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{u=0}^{j-1} \sum_{v=0}^{j-1} S_u S_v} \Big|_{S_j=0} \quad (2.2.5)$$

となる。次に、演算子 A, B の交換関係

$$e^{At} e^{Bt} = e^{Bt} e^{at^3} e^{bt^2} e^{ct^3} e^{dt^4} e^{ft^5} e^{At} e^{O(t^6)}$$

$$\begin{cases} a = -[B, [A, B]]/2, & b = [A, B], & c = [A, [A, B]]/2 \\ d = [A, [A, [A, B]]]/6 - [A, [B, [A, B]]]/4 + [B, [B, [A, B]]]/6 \\ f = [A, [A, [A, [A, B]]]]/24 - [A, [A, [B, [A, B]]]]/4 + [B, [A, [A, [A, B]]]]/6 \\ \quad - [A, [B, [B, [A, B]]]]/6 + [B, [B, [A, [A, B]]]]/4 - [B, [B, [B, [A, B]]]]/24 \end{cases} \quad (2.2.6)$$

(但し、 t は A, B を含まない) を用いると(2.2.5)式は

$$K(r, t, r_0, 0) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{ik(r-r_0) - it\omega^2 r_0^2 / 2 - i\epsilon k^2 (N-1)/2 + \epsilon^2 \omega^2 (N-2)(N+1)/4} A_{N-2} \Big|_{S_j=0} \quad (2.2.7)$$

$$A_n = e^{\frac{i\epsilon k^2 n}{2} - \frac{\epsilon^2 \omega^2 n(n+3)}{4}} e^{\frac{i\epsilon}{2} \sum_{j=0}^n \partial_j^2} e^{ik \sum_{u=0}^n S_u} e^{i\epsilon\omega^2 r_0 \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{u=0}^{j-1} S_u} e^{-\frac{i\epsilon\omega^2}{2} \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{u=0}^{j-1} \sum_{v=0}^{j-1} S_u S_v} \quad (2.2.8)$$

となる。ここで、(2.2.8)式の右辺を添字 n を含んだ部分と含まない部分に分けて整理す

ると

$$A_n = e^{ikS_n + i\varepsilon\omega^2 r_0 \sum_{u=0}^n S_u} e^{-\frac{i\varepsilon\omega^2}{2} \sum_{u=0}^n \sum_{v=0}^n S_u S_v} e^{\varepsilon^2 \omega^2 \sum_{u=0}^n \sum_{v=0}^n S_u \partial_v} \times e^{\frac{i\varepsilon^3 \omega^2}{2} \sum_{u=0}^n \sum_{v=0}^n \partial_u \partial_v} e^{-\varepsilon^2 \omega^2 r_0 \sum_{u=0}^n \partial_u} A_{n-1} \quad (2.2.9)$$

となる。以下(2.2.9)式を変形していくが、その途中で ε について2次の項が出てきた場合、これを省く。但し、 $\varepsilon \sum$ のように ε と $O(n)$ の個数の項の和との積の項の場合 $O(1)$ とみなす。こうすると(2.2.6)式を用いた場合に出てくる $O(\varepsilon^6)$ の項は省けることが判る。

さて、ここで A_n を

$$A_n = e^{\psi(n) + \sum_{u=0}^n \alpha_u(n) S_u + \sum_{u=0}^n \sum_{v=0}^n \beta_{uv}(n) S_u S_v} \quad (2.2.10)$$

と導入したパラメータ S_j の試行関数で近似し、その係数 $\psi(n)$, $\alpha_u(n)$, $\beta_{uv}(n)$ に関する漸化式を求めることを考える。(2.2.9)式と(2.2.10)式より

$$e^{\psi(n+1) + \sum_{u=0}^{n+1} \alpha_u(n+1) S_u + \sum_{u=0}^{n+1} \sum_{v=0}^{n+1} \beta_{uv}(n+1) S_u S_v} = e^{ikS_{n+1} + i\varepsilon\omega^2 r_0 \sum_{u=0}^{n+1} S_u} e^{-\frac{i\varepsilon\omega^2}{2} \sum_{u=0}^{n+1} \sum_{v=0}^{n+1} S_u S_v} e^{\varepsilon^2 \omega^2 \sum_{u=0}^{n+1} \sum_{v=0}^{n+1} S_u \partial_v} e^{\frac{i\varepsilon^3 \omega^2}{2} \sum_{u=0}^{n+1} \sum_{v=0}^{n+1} \partial_u \partial_v} \times e^{-\varepsilon^2 \omega^2 r_0 \sum_{u=0}^{n+1} \partial_u} e^{\psi(n) + \sum_{u=0}^n \alpha_u(n) S_u + \sum_{u=0}^n \sum_{v=0}^n \beta_{uv}(n) S_u S_v} \quad (2.2.11)$$

となる。ここで、(2.2.6)式を用いるなどして(2.2.11)式の右辺において ∂_j が S_j の右にくるように変形すると係数 $\psi(n)$, $\alpha_u(n)$, $\beta_{uv}(n)$ に関する次の漸化式が得られる：

$$\psi(n+1) = \psi(n) + f \sum_{j=0}^n \alpha_j(n) + d \left\{ \sum_{j=0}^n \left[\alpha_j(n) + f \sum_{m=0}^n (\beta_{jm}(n) + \beta_{mj}(n)) \right] \right\}^2$$

$$\alpha_u(n+1) = ik\delta_{u, n+1} + a$$

$$+ \left\{ \alpha_u(n) + f \sum_{j=0}^n (\beta_{ju}(n) + \beta_{uj}(n)) \right.$$

$$+ 2d \sum_{s=0}^n \sum_{t=0}^n \left[\alpha_t(n) + f \sum_{j=0}^n (\beta_{jt}(n) + \beta_{tj}(n)) \right] (\beta_{us}(n) + \beta_{su}(n))$$

$$+ c \sum_{m=0}^n \left[\alpha_m(n) + f \sum_{j=0}^n (\beta_{jm}(n) + \beta_{mj}(n)) \right.$$

$$\left. + 2d \sum_{s=0}^n \sum_{t=0}^n \left[\alpha_t(n) + f \sum_{j=0}^n (\beta_{jt}(n) + \beta_{tj}(n)) \right] (\beta_{ms}(n) + \beta_{sm}(n)) \right] \left. \right\} (1 - \delta_{u, n+1})$$

$$\begin{aligned}
\beta_{uv}(n+1) = & b + \left\{ \beta_{uv}(n) + d \sum_{j=0}^n \sum_{m=0}^n (\beta_{ju}(n) + \beta_{uj}(n)) (\beta_{mv}(n) + \beta_{vm}(n)) \right. \\
& + c \sum_{j=0}^n [\beta_{uj}(n) + \beta_{jv}(n) + d \sum_{s=0}^n \sum_{t=0}^n (\beta_{js}(n) + \beta_{sj}(n)) (\beta_{ut}(n) + \beta_{tu}(n) + \beta_{vt}(n) + \beta_{tv}(n))] \\
& + \frac{c^2}{2} \sum_{j=0}^n \sum_{m=0}^n [\beta_{uj}(n) + \beta_{jv}(n) + 2\beta_{jm}(n) \\
& + d \sum_{s=0}^n \sum_{t=0}^n (\beta_{ut}(n) + \beta_{tu}(n) + \beta_{vt}(n) + \beta_{tv}(n) + 2\beta_{mt}(n) + 2\beta_{tm}(n)) (\beta_{js}(n) + \beta_{sj}(n))] \left. \right\} \\
& \times (1 - \delta_{u, n+1})(1 - \delta_{v, n+1}) \\
(\psi(0) = & 0, \alpha_0(0) = ik + a, \beta_{00}(0) = b \\
(a = & i\epsilon\omega^2 r_0, b = -i\epsilon\omega^2/2, c = \epsilon^2\omega^2, d = i\epsilon^3\omega^2/2, f = -\epsilon^2\omega^2 r_0)
\end{aligned} \tag{2.2.12}$$

この漸化式を数式処理システム REDUCE を用いて解き A_{N-2} を求め(2.2.7)式の積分をすれば $K(r, t, r_0, 0)$ が求められる。具体的に $t=1, r_0=1, \omega=1$ の場合に求めると、厳密解、 A_n を S_j の 1 次までで近似し $N=10, 20, 30, 100$ とした場合、 A_n を S_j の 2 次式で近似し $N=10$ とした場合の各々の $K(r, t, r_0, 0)$ 絶対値は

厳密解	...	0.435
S_j 1 次	$N=10$...	0.462
	$N=20$...	0.441
	$N=30$...	0.433
	$N=100$...	0.422
S_j 2 次	$N=10$...	0.461

となる。但し、いずれの場合も絶対値は距離によらず一定である。図 2.6 は上記の中で $N=10$ の場合で S_j を 1 次までにしたものと 2 次までにしたもの、そして、厳密解の位相の距離依存性を示したものである。この図から、 S_j を 2 次までにした方が近似が良いことが判る。図 2.7 は上記の中で S_j を 1 次までにした $N=10, 20, 30, 100$ の場合と厳密解との位相の距離依存性を示したものである。この図を見ると N を大きくしていくと厳密解に近付いていく様子が良く判る。問題は絶対値で、 $N=100$ より $N=30$ の方が近似が良いが、はっきりしたことは S_j の 2 次までで近似した場合をしてみなければ判らない。

この例の場合、前述の ϵ の 2 次を無視する近似では S_j の 2 次までで話が閉じている。この意味で e の肩を S_j の 2 次式にすればの関数形としては近似をしていない。しかし、現実の問題では関数形について大幅な制限が必要であることが多いと考えられる。その

意味から S_j の 1 次式まででとめた関数形を用いてもある程度の近似が得られていることは望ましい状況であるといえる。

3. 3-mode model

3-mode model の基礎方程式は

$$\frac{d}{dt} x^\alpha = A^\alpha x^\beta x^\gamma \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3: \text{cyclic}) \quad (2.3.1)$$

$$\sum_{\alpha=1}^3 A^\alpha = 0 \quad (2.3.2)$$

で与えられる。¹⁹⁾ このモデルに対する特性関数 $\phi(\mathbf{z}, t)$ は

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{z}, t) &= \int e^{i \sum_{\alpha} z^\alpha x^\alpha} P(x^\alpha, t) dx^\alpha \\ &= \int e^{i \sum_{\alpha} z^\alpha x^\alpha(t)} P(x_0^\alpha, 0) dx_0^\alpha \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

(但し, $P(x^\alpha, t)$ は時刻 t における確率密度関数; \sum_{α} は $\sum_{\alpha=1}^3$ を意味する) と書ける。
(2.3.1) 式と (2.3.3) 式より

$$i \frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{z}, t) = - \sum_{\alpha} A^\alpha z^\alpha \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial z^\beta} \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial z^\gamma} \phi(\mathbf{z}, t) \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3: \text{cyclic}) \quad (2.3.4)$$

となるが, この式を量子力学の表現にすると

$$\left\langle \mathbf{z} \left| i \frac{\partial}{\partial t} \right| \phi(t) \right\rangle = \left\langle \mathbf{z} \left| \hat{H} \right| \phi(t) \right\rangle \quad (2.3.5)$$

$$\hat{H} = - \sum_{\alpha} A^\alpha \hat{z}^\alpha \hat{x}^\beta \hat{x}^\gamma \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3: \text{cyclic}) \quad (2.3.6)$$

$$[\hat{z}^\alpha, \hat{x}^\beta] = \begin{cases} i \cdots \alpha = \beta \\ 0 \cdots \alpha \neq \beta \end{cases} \quad (2.3.7)$$

$$\langle \mathbf{z} | \hat{x}^\alpha = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial z^\alpha} \langle \mathbf{z} | \quad (2.3.8)$$

$$\langle \mathbf{x} | \hat{z}^\alpha = - \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \langle \mathbf{x} | \quad (2.3.9)$$

$$\langle \mathbf{z} | \mathbf{x} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i \sum_{\alpha} z^{\alpha} x^{\alpha}} \quad (2.3.10)$$

(但し, (2.3.10)式の係数 $(2\pi)^{3/2}$ は規格化条件により決まる) となる. (2.3.5)式の形式解は

$$\langle \mathbf{z} | \phi(t) \rangle = \langle \mathbf{z} | e^{-it\hat{H}} | \phi(0) \rangle \quad (2.3.11)$$

であるが, 時間 t を N 等分して各区間に

$$|\mathbf{x}_k\rangle\langle\mathbf{x}_k|z_k\rangle\langle z_k| \quad (k=0, 1, \dots, N-1) \quad (2.3.12)$$

を挿入すると

$$\langle \mathbf{z} | \phi(t) \rangle = \langle \mathbf{z} | e^{-i\varepsilon\hat{H}} | \mathbf{x}_{N-1}\rangle\langle\mathbf{x}_{N-1}|z_{N-1}\rangle\langle z_{N-1}| e^{-i\varepsilon\hat{H}} \dots | \mathbf{x}_0\rangle\langle\mathbf{x}_0|z_0\rangle\langle z_0 | \phi(0) \rangle \quad (2.3.13)$$

(但し, $\varepsilon=t/N$) となる. ここで, ε が充分小さいとすると

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{z}_{k+1} | e^{-i\varepsilon\hat{H}} | \mathbf{x}_k \rangle &\sim \langle \mathbf{z}_{k+1} | 1 - i\varepsilon\hat{H} | \mathbf{x}_k \rangle \\ &= \left(1 + i\varepsilon \sum_{\alpha} A^{\alpha} z_{k+1}^{\alpha} x_k^{\beta} x_k^{\gamma} \right) \langle \mathbf{z}_{k+1} | \mathbf{x}_k \rangle \quad (\alpha, \beta, \gamma=1, 2, 3: \text{cyclic}) \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

であるから, (2.3.13)式は, 量子力学の表現から元の表現に戻して

$$\phi(\mathbf{z}, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \left[\prod_{k=0}^{N-1} \frac{d\mathbf{x}_k d\mathbf{z}_k}{(2\pi)^3} e^{i\varepsilon \sum_{\alpha} A^{\alpha} z_{k+1}^{\alpha} x_k^{\beta} x_k^{\gamma}} e^{i \sum_{\alpha} (z_{k+1}^{\alpha} - z_k^{\alpha}) x_k^{\alpha}} \right] \phi(\mathbf{z}_0, 0) \quad (2.3.15)$$

(但し, $\alpha, \beta, \gamma=1, 2, 3: \text{cyclic}$) となる. また, この形を見ると汎関数積分になっていることが判る.¹⁸⁾ ここで, パラメータ $B_k^{\alpha}, Y_k^{\alpha}$ ($\alpha=1, 2, 3; k=0, 1, \dots, N-1$) を導入し, (2.2.2)式を用い, かつ, $N \rightarrow \infty$ の極限操作を充分大きな N で置き換えると, (2.3.15)式は

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{z}, t) &= \int \left[\prod_{k=0}^{N-1} \frac{d\mathbf{x}_k d\mathbf{z}_k}{(2\pi)^3} e^{-\varepsilon \sum_{\alpha} A^{\alpha} \partial_{Y_k^{\alpha}} \partial_{B_k^{\beta}} \partial_{B_k^{\gamma}}} e^{i \sum_{\alpha} (z_{k+1}^{\alpha} - z_k^{\alpha} + B_k^{\alpha}) x_k^{\alpha}} e^{i \sum_{\alpha} z_{k+1}^{\alpha} Y_k^{\alpha}} \right] \phi(\mathbf{z}_0, 0) \Big|_{B_k^{\alpha} = Y_k^{\alpha} = 0} \\ &= e^{-\varepsilon \sum_{\alpha} \sum_{k=0}^{N-1} A^{\alpha} \partial_{Y_k^{\alpha}} \partial_{B_k^{\beta}} \partial_{B_k^{\gamma}}} e^{i \sum_{\alpha} \sum_{k=0}^{N-1} \left(z^{\alpha} + \sum_{m=k+1}^{N-1} B_m^{\alpha} \right) Y_k^{\alpha}} \phi \left(z^{\alpha} + \sum_{k=0}^{N-1} B_k^{\alpha}, 0 \right) \Big|_{B_k^{\alpha} = Y_k^{\alpha} = 0} \end{aligned} \quad (2.3.16)$$

(但し, $\partial_{B_k^{\alpha}} \equiv \partial / \partial B_k^{\alpha}$; $\partial_{Y_k^{\alpha}} \equiv \partial / \partial Y_k^{\alpha}$) となる. ここで, 初期の特性関数の形を

$$\phi(\mathbf{z}, 0) = e^{-\sum_{\alpha} C^{\alpha} (z^{\alpha})^2 - i D z^1 z^2 z^3} \quad (2.3.17)$$

(但し, $C^{\alpha} > 0$; $\alpha = 1, 2, 3$; $D^2 \ll 1$) と仮定し, (2.3.16)式に代入し, さらに, 関係

$$\sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=k+1}^{N-1} B_m^{\alpha} Y_k^{\alpha} = \sum_{m=1}^{N-1} \sum_{k=0}^{m-1} B_m^{\alpha} Y_k^{\alpha} \quad (2.3.18)$$

を用い整理すると, (2.3.16)式は

$$\phi(\mathbf{z}, t) = e^{-\sum_{\alpha} C^{\alpha} (z^{\alpha})^2 - i D z^1 z^2 z^3} I_{N-1} \Big|_{B_k^{\alpha} = Y_k^{\alpha} = 0} \quad (2.3.19)$$

$$\begin{aligned} I_{N-1} &= e^{-\varepsilon \sum_{\alpha} \sum_{k=0}^{N-1} A^{\alpha} \partial_{Y_k^{\alpha}} \partial_{B_k^{\beta}} \partial_{B_k^{\gamma}}} e^{i \sum_{\alpha} \sum_{k=0}^{N-1} z^{\alpha} Y_k^{\alpha}} e^{i \sum_{\alpha} \sum_{m=1}^{N-1} \sum_{k=0}^{m-1} B_m^{\alpha} Y_k^{\alpha}} \\ &\quad \times e^{-\sum_{\alpha} \sum_{k=0}^{N-1} 2C^{\alpha} z^{\alpha} B_k^{\alpha}} e^{-\sum_{\alpha} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} C^{\alpha} B_k^{\alpha} B_m^{\alpha}} e^{-i D \sum_{\alpha} \sum_{k=0}^{N-1} B_k^{\alpha} z^{\beta} z^{\gamma}} \\ &\quad \times e^{-i D \sum_{\alpha} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} z^{\alpha} B_k^{\beta} B_m^{\gamma}} e^{-i D \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} B_k^1 B_l^2 B_m^3} \end{aligned} \quad (2.3.20)$$

となる. 調和振動子の場合と同様にして, (2.3.20)式より I_n は次の漸化式を満足することが判る:

$$I_{n+1} = \Delta_n I_n \quad (0 \leq n \leq N-2; I_0 = 1) \quad (2.3.21)$$

$$\begin{aligned} \Delta_n &= e^{-\varepsilon \sum_{\alpha} A^{\alpha} \partial_{Y_{n+1}^{\alpha}} \partial_{B_{n+1}^{\beta}} \partial_{B_{n+1}^{\gamma}}} e^{i \sum_{\alpha} z^{\alpha} Y_{n+1}^{\alpha}} e^{-\sum_{\alpha} 2C^{\alpha} z^{\alpha} B_{n+1}^{\alpha}} e^{-\sum_{\alpha} C^{\alpha} B_{n+1}^{\alpha} B_{n+1}^{\alpha}} \\ &\quad \times e^{-i D \sum_{\alpha} B_{n+1}^{\alpha} z^{\beta} z^{\gamma}} e^{-i D \sum_{\alpha} z^{\alpha} B_{n+1}^{\beta} B_{n+1}^{\gamma}} e^{-i D B_{n+1}^1 B_{n+1}^2 B_{n+1}^3} \\ &\quad \times e^{-\varepsilon \sum_{\alpha} \sum_{k=0}^n A^{\alpha} \partial_{Y_k^{\alpha}} \partial_{B_k^{\beta}} \partial_{B_k^{\gamma}}} e^{i \sum_{\alpha} \sum_{k=0}^n B_{n+1}^{\alpha} Y_k^{\alpha}} e^{-\sum_{\alpha} \sum_{k=0}^n 2C^{\alpha} B_{n+1}^{\alpha} B_k^{\alpha}} \\ &\quad \times e^{-i D \sum_{\alpha} \sum_{k=0}^n z^{\alpha} (B_{n+1}^{\beta} B_k^{\gamma} + B_{n+1}^{\gamma} B_k^{\beta})} e^{-i D \sum_{\alpha} \sum_{k=0}^n B_k^{\alpha} B_{n+1}^{\beta} B_{n+1}^{\gamma}} \\ &\quad \times e^{-i D \sum_{\alpha} \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^n B_{n+1}^{\alpha} B_k^{\beta} B_m^{\gamma}} e^{\varepsilon \sum_{\alpha} \sum_{k=0}^n A^{\alpha} \partial_{Y_k^{\alpha}} \partial_{B_k^{\beta}} \partial_{B_k^{\gamma}}} \end{aligned} \quad (2.3.22)$$

ここで, I_n を導入したパラメータ B_k^α, Y_k^α で

$$I_n = e^{\psi(n) + \sum_{\alpha} \sum_{k=0}^n \phi_k^\alpha(n) B_k^\alpha + \sum_{\alpha} \sum_{k=0}^n \Gamma_k^\alpha(n) Y_k^\alpha} \quad (2.3.23)$$

と近似し, これを(2.3.21)式に代入し, 係数 $\psi(n), \phi_k^\alpha(n), \Gamma_k^\alpha(n)$ に対する漸化式を求める訳だが, (2.2.2)式と(2.2.6)式と下の関係式

$$e^{a\partial/\partial x} f(x) = f(x+a) e^{a\partial/\partial x} \quad (2.3.24)$$

(但し, f : 任意関数; a は x を含まない) さらに, 一般の微分に対してのみ成立する式

$$e^{a\partial^2/\partial x\partial y} e^{bxy} = e^{b\kappa xy + \ln|\kappa|} \quad (\kappa = (1-ab)^{-1}) \quad (2.3.25)$$

を使うなどして, パラメータに関する微分が, パラメータの右にくるようにすれば良い. この際, ε に関する扱いは調和振動子の場合と同様にする. 但し, $O(D^2)$ は $O(\varepsilon)$ とみなす. このようにして, 以下の漸化式が得られる:

$$\begin{aligned} \psi(n+1) = & \psi(n) - \varepsilon D \sum_{\alpha} A^{\alpha} Z^{\alpha} Z^{\alpha} \\ & - i\varepsilon \sum_{\alpha} A^{\alpha} Z^{\alpha} [M^{\beta} M^{\gamma} + D(M^{\beta} N^{\gamma} + M^{\gamma} N^{\beta})] \\ & + i\varepsilon^2 \sum_{\alpha} \sum_{m=0}^n A^{\alpha} Z^{\alpha} [4A^{\alpha} C^{\beta} C^{\gamma} \Gamma_m^{\alpha}(n) - 2i\phi_m^{\alpha}(n)(A^{\beta} C^{\gamma} + A^{\gamma} C^{\beta})] \\ & + i\varepsilon^2 D \sum_{\alpha} \sum_{m=0}^n A^{\alpha} Z^{\alpha} [A^{\gamma} Z^{\gamma} \phi_m^{\beta}(n) + A^{\beta} Z^{\beta} \phi_m^{\gamma}(n) + 2i(A^{\beta} C^{\gamma} Z^{\gamma} \Gamma_m^{\beta}(n) + A^{\gamma} C^{\beta} Z^{\beta} \Gamma_m^{\gamma}(n)) \\ & \quad - i(A^{\gamma} \Gamma_m^{\gamma}(n) \phi_m^{\beta}(n) + A^{\beta} \Gamma_m^{\beta}(n) \phi_m^{\gamma}(n))] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_k^{\alpha}(n+1) = & (1 - \delta_{k,n+1}) \\ & \times \left\{ \phi_k^{\alpha}(n) - \varepsilon D A^{\alpha} Z^{\alpha} \right. \\ & + i\varepsilon^2 D [A^{\alpha} (A^{\gamma} Z^{\gamma} \phi_k^{\beta}(n) + A^{\beta} Z^{\beta} \phi_k^{\gamma}(n)) + 2iC^{\alpha} (A^{\beta} A^{\gamma} Z^{\gamma} \Gamma_k^{\beta}(n) + A^{\gamma} A^{\beta} Z^{\beta} \Gamma_k^{\gamma}(n))] \\ & + i\varepsilon^2 D (A^{\gamma} Z^{\gamma} M^{\alpha} + A^{\alpha} Z^{\alpha} M^{\gamma}) (A^{\alpha} Z^{\alpha} M^{\beta} + A^{\beta} Z^{\beta} M^{\alpha}) \\ & + 2i\varepsilon [A^{\beta} Z^{\beta} (M^{\gamma} + DN^{\gamma} + \varepsilon DG^{\gamma}) + A^{\gamma} Z^{\gamma} (M^{\beta} + DN^{\beta} + \varepsilon DG^{\beta})] \\ & - \varepsilon D A^{\alpha} Z^{\alpha} [Z^{\beta} (M^{\beta} + DN^{\beta}) + Z^{\gamma} (M^{\gamma} + DN^{\gamma})] \\ & \left. - \varepsilon D (A^{\beta} Z^{\beta} Z^{\beta} + A^{\gamma} Z^{\gamma} Z^{\gamma}) (M^{\alpha} + DN^{\alpha}) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \varepsilon^2 D \left[(A^{\alpha Z^{\alpha} M^{\beta} + A^{\beta Z^{\beta} M^{\alpha}}) (A^{\gamma} \phi_k^{\alpha}(n) \Gamma_k^{\gamma}(n) + A^{\alpha} \phi_k^{\gamma}(n) \Gamma_k^{\alpha}(n)) \right. \\
& \quad \left. + (A^{\alpha Z^{\alpha} M^{\gamma} + A^{\gamma Z^{\gamma} M^{\alpha}}) (A^{\beta} \phi_k^{\alpha}(n) \Gamma_k^{\beta}(n) + A^{\alpha} \phi_k^{\beta}(n) \Gamma_k^{\alpha}(n)) \right] \\
& + \delta_{k, n+1} \\
& \times \left\{ -\varepsilon D A^{\alpha Z^{\alpha}} - 4\varepsilon^2 A^{\alpha Z^{\alpha}} \sum_{\alpha} \sum_{m=0}^n A^{\alpha'} C^{\beta'} C^{\gamma'} \right. \\
& \quad + 2i\varepsilon^2 D \sum_{m=0}^n A^{\gamma Z^{\gamma}} (A^{\alpha} \phi_m^{\beta}(n) + 2iA^{\beta} C^{\alpha} \Gamma_m^{\beta}(n) - 2A^{\alpha} C^{\beta} z^{\beta} - 2A^{\beta} C^{\alpha} z^{\beta}) \\
& \quad + 2i\varepsilon^2 D \sum_{m=0}^n A^{\beta Z^{\beta}} (A^{\alpha} \phi_m^{\gamma}(n) + 2iA^{\gamma} C^{\alpha} \Gamma_m^{\gamma}(n) - 2A^{\alpha} C^{\gamma} z^{\gamma} - 2A^{\gamma} C^{\alpha} z^{\gamma}) \\
& \quad + 2i\varepsilon C^{\alpha} [A^{\gamma Z^{\gamma}} (M^{\beta} + DN^{\beta}) + A^{\beta Z^{\beta}} (M^{\gamma} + DN^{\gamma})] \\
& \quad - 2i\varepsilon D (A^{\gamma Z^{\gamma} M^{\beta} + A^{\beta Z^{\beta} M^{\gamma}}) F^{\alpha} + M^{\alpha} + DN^{\alpha} \\
& \quad - i\varepsilon^2 D \sum_{m=0}^n (A^{\gamma} \phi_m^{\alpha}(n) \Gamma_m^{\gamma}(n) + A^{\alpha} \phi_m^{\gamma}(n) \Gamma_m^{\alpha}(n)) (A^{\alpha} \phi_m^{\beta}(n) \Gamma_m^{\alpha}(n) + A^{\beta} \phi_m^{\alpha}(n) \Gamma_m^{\beta}(n)) \\
& \quad + i\varepsilon^2 \sum_{m=0}^n [A^{\alpha Z^{\alpha}} (M^{\beta} + DN^{\beta}) + A^{\beta Z^{\beta}} (M^{\alpha} + DN^{\alpha})] \\
& \quad \quad \times [4A^{\beta} C^{\gamma} C^{\alpha} \Gamma_m^{\beta}(n) - 2i\phi_m^{\beta}(n) (A^{\gamma} C^{\alpha} + A^{\alpha} C^{\gamma})] \\
& \quad + i\varepsilon^2 \sum_{m=0}^n [A^{\alpha Z^{\alpha}} (M^{\gamma} + DN^{\gamma}) + A^{\gamma Z^{\gamma}} (M^{\alpha} + DN^{\alpha})] \\
& \quad \quad \times [4A^{\gamma} C^{\beta} C^{\alpha} \Gamma_m^{\gamma}(n) - 2i\phi_m^{\gamma}(n) (A^{\beta} C^{\alpha} + A^{\alpha} C^{\beta})] \\
& \quad + i\varepsilon^2 D \sum_{m=0}^n (A^{\alpha Z^{\alpha} M^{\beta} + A^{\beta Z^{\beta} M^{\alpha}}) \\
& \quad \quad \times [A^{\alpha Z^{\alpha}} \phi_m^{\gamma}(n) + A^{\gamma Z^{\gamma}} \phi_m^{\alpha}(n) \\
& \quad \quad \quad + 2i(A^{\gamma} C^{\alpha} z^{\alpha} \Gamma_m^{\gamma}(n) + A^{\alpha} C^{\gamma} z^{\gamma} \Gamma_m^{\alpha}(n)) \\
& \quad \quad \quad - i(A^{\alpha} \phi_m^{\gamma}(n) \Gamma_m^{\alpha}(n) + A^{\gamma} \phi_m^{\alpha}(n) \Gamma_m^{\gamma}(n))] \\
& \quad + i\varepsilon^2 D \sum_{m=0}^n (A^{\alpha Z^{\alpha} M^{\gamma} + A^{\gamma Z^{\gamma} M^{\alpha}}) \\
& \quad \quad \times [A^{\alpha Z^{\alpha}} \phi_m^{\beta}(n) + A^{\beta Z^{\beta}} \phi_m^{\alpha}(n) \\
& \quad \quad \quad + 2i(A^{\beta} C^{\alpha} z^{\alpha} \Gamma_m^{\beta}(n) + A^{\alpha} C^{\beta} z^{\beta} \Gamma_m^{\alpha}(n)) \\
& \quad \quad \quad - i(A^{\alpha} \phi_m^{\beta}(n) \Gamma_m^{\alpha}(n) + A^{\beta} \phi_m^{\alpha}(n) \Gamma_m^{\beta}(n))] \\
& \quad \quad \left. - \varepsilon D [A^{\alpha Z^{\alpha}} (z^{\beta} M^{\beta} + z^{\gamma} M^{\gamma}) + (A^{\beta Z^{\beta}} z^{\beta} + A^{\gamma Z^{\gamma}} z^{\gamma}) M^{\alpha}] \right\} \\
\Gamma_k^{\alpha}(n+1) & = (1 - \delta_{k, n+1}) \\
& \times \left\{ \Gamma_k^{\alpha}(n) + \varepsilon [A^{\beta Z^{\beta}} (M^{\gamma} + DN^{\gamma} + \varepsilon D G^{\gamma}) + A^{\gamma Z^{\gamma}} (M^{\beta} + DN^{\beta} + \varepsilon D G^{\beta})] \right\} \\
& + iz^{\alpha} \delta_{k, n+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M^\alpha &= -2C^\alpha z^\alpha - i\varepsilon \sum_{m=0}^n A^\alpha \phi_m^\beta(n) \phi_m^\gamma(n) \\
&\quad + 2\varepsilon \sum_{m=0}^n C^\alpha \left(A^\gamma \phi_m^\beta(n) \Gamma_m^\gamma(n) + A^\beta \phi_m^\gamma(n) \Gamma_m^\beta(n) \right) \\
N^\alpha &= -i\varepsilon \sum_{m=0}^n A^\alpha \Gamma_m^\alpha(n) - iz^\beta z^\gamma \\
&\quad + i\varepsilon \sum_{m=0}^n \left(A^\alpha z^\gamma \phi_m^\gamma(n) \Gamma_m^\alpha(n) + A^\gamma z^\gamma \phi_m^\alpha(n) \Gamma_m^\gamma(n) \right. \\
&\quad \quad \left. + A^\beta z^\beta \phi_m^\alpha(n) \Gamma_m^\beta(n) + A^\alpha z^\beta \phi_m^\beta(n) \Gamma_m^\alpha(n) \right) \\
F^\alpha &= \varepsilon \sum_{m=0}^n A^\alpha - \varepsilon \sum_{m=0}^n \left[A^\alpha \left(z^\beta \phi_m^\beta(n) + z^\gamma \phi_m^\gamma(n) \right) \right. \\
&\quad \quad \left. + 2iC^\alpha \left(A^\beta z^\beta \Gamma_m^\beta(n) + A^\gamma z^\gamma \Gamma_m^\gamma(n) \right) \right] \\
G^\alpha &= -i\varepsilon \sum_{m=0}^n \left(A^\gamma \phi_k^\alpha(n) \Gamma_k^\gamma(n) + A^\alpha \phi_k^\gamma(n) \Gamma_k^\alpha(n) \right) \\
&\quad \times \left(A^\beta \phi_k^\alpha(n) \Gamma_k^\beta(n) + A^\alpha \phi_k^\beta(n) \Gamma_k^\alpha(n) \right) \\
\alpha, \beta, \gamma &= 1, 2, 3: \text{cyclic}
\end{aligned} \tag{2.3.26}$$

さて、この漸化式を REDUCE を用いて解き I_{N-1} を求めれば良いのだが、このままでは、計算に時間がかかりすぎ充分大きな N に対する解を得ることが出来ない。よって、さらに以下の近似を考える。

まず、時間 t を充分多くの N 個の大きな区間に分割し、さらに、その区間の一つ一つを数個の小さな区間に分割する。さて、ここで(2.3.26)式を用いて初期関数(2.3.17)から出発して、小さな区間を時間発展させ、大きな区間の一つ分を進ませたとすると、その時点では z^α に関して $(z^\alpha)^2, z^1 z^2 z^3$ 以外の項も数多く出てくる。しかし、 $(z^\alpha)^2, z^1 z^2 z^3$ 以外の項は全て省くことにすると、(2.3.17)式と同じ関数形で、この終状態を表すことになる。次の大きな区間では、この $(z^\alpha)^2, z^1 z^2 z^3$ 以外を省略した関数を出発点として、同様な操作を行なう。以下これを続ける。このようにすると、大きな区間の始点と終点は常に(2.3.17)式と同じ関数形で表される。それを

$$e^{-\sum_{\alpha} C^\alpha(n) (z^\alpha)^2 - iD(n) z^1 z^2 z^3} \quad (n=0, 1, \dots, N-1) \tag{2.3.27}$$

と書くと、上述の操作で一つの大きな区間を時間発展させることで、 $C^\alpha(n)$ と $D(n)$ に関する漸化式が得られる。よって、これを解いてやれば I_{N-1} が求まることになる。実際に各々の大きな区間を3つの小さな区間に分割した場合に $C^\alpha(n)$ と $D(n)$ の満たす漸化式は

$$A^1 = A^2 = 1, A^3 = -2 \tag{2.3.28}$$

の場合

$$\begin{aligned}C1(n+1) &= C1(n) \\ &\quad -128*EP**5*C1(n)*C2(n)**2 \\ &\quad +128*EP**5*C1(n)*C2(n)*C3(n) \\ &\quad -32*EP**5*C1(n)*C3(n)**2 \\ &\quad +64*EP**5*C2(n)**2*C3(n) \\ &\quad -32*EP**5*C2(n)*C3(n)**2 \\ &\quad +32*EP**3*D(n)*C2(n) \\ &\quad -16*EP**3*D(n)*C3(n) \\ &\quad +24*EP**2*C1(n)*C2(n) \\ &\quad -12*EP**2*C1(n)*C3(n) \\ &\quad -12*EP**2*C2(n)*C3(n) \\ &\quad -3*EP*D(n)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C2(n+1) &= C2(n) \\ &\quad -128*EP**5*C1(n)**2*C2(n) \\ &\quad +64*EP**5*C1(n)**2*C3(n) \\ &\quad +128*EP**5*C1(n)*C2(n)*C3(n) \\ &\quad -32*EP**5*C1(n)*C3(n)**2 \\ &\quad -32*EP**5*C2(n)*C3(n)**2 \\ &\quad +32*EP**3*D(n)*C1(n) \\ &\quad -16*EP**3*D(n)*C3(n) \\ &\quad +24*EP**2*C1(n)*C2(n) \\ &\quad -12*EP**2*C1(n)*C3(n) \\ &\quad -12*EP**2*C2(n)*C3(n) \\ &\quad -3*EP*D(n)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C3(n+1) &= C3(n) \\ &\quad +256*EP**5*C1(n)**2*C2(n)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -128*EP^{**5}*C1(n)^{**2}*C3(n) \\
& +256*EP^{**5}*C1(n)*C2(n)^{**2} \\
& -256*EP^{**5}*C1(n)*C2(n)*C3(n) \\
& -128*EP^{**5}*C2(n)^{**2}*C3(n) \\
& -64*EP^{**3}*D(n)*C1(n) \\
& -64*EP^{**3}*D(n)*C2(n) \\
& -48*EP^{**2}*C1(n)*C2(n) \\
& +24*EP^{**2}*C1(n)*C3(n) \\
& +24*EP^{**2}*C2(n)*C3(n) \\
& +6*EP*D(n)
\end{aligned}$$

$$D(n+1)=D(n)$$

$$\begin{aligned}
& +1024*EP^{**9}*C1(n)^{**3}*C2(n)^{**2} \\
& -1024*EP^{**9}*C1(n)^{**3}*C2(n)*C3(n) \\
& +256*EP^{**9}*C1(n)^{**3}*C3(n)^{**2} \\
& +1024*EP^{**9}*C1(n)^{**2}*C2(n)^{**3} \\
& -2560*EP^{**9}*C1(n)^{**2}*C2(n)^{**2}*C3(n) \\
& +1280*EP^{**9}*C1(n)^{**2}*C2(n)*C3(n)^{**2} \\
& -128*EP^{**9}*C1(n)^{**2}*C3(n)^{**3} \\
& -1024*EP^{**9}*C1(n)*C2(n)^{**3}*C3(n) \\
& +1280*EP^{**9}*C1(n)*C2(n)^{**2}*C3(n)^{**2} \\
& -256*EP^{**9}*C1(n)*C2(n)*C3(n)^{**3} \\
& +256*EP^{**9}*C2(n)^{**3}*C3(n)^{**2} \\
& -128*EP^{**9}*C2(n)^{**2}*C3(n)^{**3} \\
& -1024*EP^{**7}*D(n)*C1(n)^{**2}*C2(n) \\
& +512*EP^{**7}*D(n)*C1(n)^{**2}*C3(n) \\
& -1024*EP^{**7}*D(n)*C1(n)*C2(n)^{**2} \\
& +1536*EP^{**7}*D(n)*C1(n)*C2(n)*C3(n) \\
& -256*EP^{**7}*D(n)*C1(n)*C3(n)^{**2} \\
& +512*EP^{**7}*D(n)*C2(n)^{**2}*C3(n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -256*EP^{**7}*D(n)*C2(n)*C3(n)**2 \\
& -256*EP^{**6}*C1(n)**3*C2(n) \\
& +128*EP^{**6}*C1(n)**3*C3(n) \\
& -768*EP^{**6}*C1(n)**2*C2(n)**2 \\
& +896*EP^{**6}*C1(n)**2*C2(n)*C3(n) \\
& -192*EP^{**6}*C1(n)**2*C3(n)**2 \\
& -256*EP^{**6}*C1(n)*C2(n)**3 \\
& +896*EP^{**6}*C1(n)*C2(n)**2*C3(n) \\
& -448*EP^{**6}*C1(n)*C2(n)*C3(n)**2 \\
& +32*EP^{**6}*C1(n)*C3(n)**3 \\
& +128*EP^{**6}*C2(n)**3*C3(n) \\
& -192*EP^{**6}*C2(n)**2*C3(n)**2 \\
& +32*EP^{**6}*C2(n)*C3(n)**3 \\
& +352*EP^{**5}*D(n)**2*C1(n) \\
& +352*EP^{**5}*D(n)**2*C2(n) \\
& -176*EP^{**5}*D(n)**2*C3(n) \\
& +768*EP^{**5}*D(n)*C1(n)*C2(n) \\
& -384*EP^{**5}*D(n)*C1(n)*C3(n) \\
& -384*EP^{**5}*D(n)*C2(n)*C3(n) \\
& +672*EP^{**4}*D(n)*C1(n)**2 \\
& +1696*EP^{**4}*D(n)*C1(n)*C2(n) \\
& -848*EP^{**4}*D(n)*C1(n)*C3(n) \\
& +672*EP^{**4}*D(n)*C2(n)**2 \\
& -848*EP^{**4}*D(n)*C2(n)*C3(n) \\
& +168*EP^{**4}*D(n)*C3(n)**2 \\
& -186*EP^{**3}*D(n)**2 \\
& +416*EP^{**3}*C1(n)**2*C2(n) \\
& -208*EP^{**3}*C1(n)**2*C3(n) \\
& +416*EP^{**3}*C1(n)*C2(n)**2
\end{aligned}$$

$$-768*EP**3*C1(n)*C2(n)*C3(n)$$

$$+104*EP**3*C1(n)*C3(n)**2$$

$$-208*EP**3*C2(n)**2*C3(n)$$

$$+104*EP**3*C2(n)*C3(n)**2$$

$$-120*EP**2*D(n)*C1(n)$$

$$-120*EP**2*D(n)*C2(n)$$

$$+60*EP**2*D(n)*C3(n)$$

$$-24*EP*C1(n)*C2(n)$$

$$+12*EP*C1(n)*C3(n)$$

$$+12*EP*C2(n)*C3(n)$$

(2.3.29)

(但し、 C_1, C_2, C_3 は各々 C^1, C^2, C^3 を表す； $EP=\epsilon/3$ ； $0 \leq n \leq N-1$) となる。以下、(2.3.29)式を用いて具体的な場合に対して行なった計算結果を見ていく。図28は、 $C^1(0)=1, C^2(0)=0.25, C^3(0)=0.25, D(0)=0$ の場合の C^α, D の時間依存性をしめしたものである。図29は、 $C^1(0)=0.7, C^2(0)=0.3, C^3(0)=0.5, D(0)=0$ の場合のもの、図30は、 $C^1(0)=0.605, C^2(0)=0.405, C^3(0)=0.5, D(0)=0.03$ の場合のものである。以上、3つの図においては全て $EP=0.001$ としている。さらに、比較の目的で、初期条件や区間数など同じ条件にして、Weiner-Hermite展開を用いて作ったものが、図31, 32, 33で、各々図28, 29, 30に対応している。^{19)G} これら6つの図を見る限りでは、ここで開発した方法論は少なくともWiener-Hermite展開と同程度の近似を与えるように思われる。

結 語

第1章で示したように、EHMは乱流中の2粒子相対拡散における重要な特徴を殆ど説明できる。さらに、EHMは数学的な取り扱い易さとか、その近似の適用限界が明確であるとかいった実用上における優れた点も持っているので、^B ここで扱った相対拡散に対してだけではなく、他の乱流現象の統計的取り扱いに対しても有効であるのではないかと考えられる。さらに、EHM自体は変分法的方法論であるが、その与える結果が数値的なものだけではなく、その現象の機構をも表し得たことは大変興味深く、また、意義のあることだと考えられる。今日、コンピュータの性能やアルゴリズムの向上などにより、乱流現象をかなりの部分まで数値的に表し得るが、理論的な裏付けなしに、ただ単に数値的なものだけで現象を解明することはかなり難しいだけでなく危険も伴うので、やはり、解析的なアプローチも必要である。EHMの成功例が示すように、その一つの方法として変分法的方法論は有効かつ有望なものと考えられる。

次に、第2章で示した新たな汎関数積分の近似法は、そこで示したように、1次元調和振動子や3-mode modelの場合には確かに有効であるので、Hopfの汎関数方程式への適用が期待されるが、今のところ解決しなければならない問題点があり、残念ながら、その試みは成功していない。

謝 辞

本学の今村教授ならびに小西教授には、本学での学部生の時より現在に至るまで、研究の御指導を戴きました、特に今村教授はご多忙にも関わらず、この論文の原稿をお読み下さり色々と有益なご指摘をして下さいました、ここに謹んで感謝致します。

寺内教授は、この論文を執筆するにあたり、様々なご支援を戴きました、ここに心より感謝致します。

東京工業大学の日野教授ならびに東京大学の鈴木教授は、ご多忙にも関わらず参考文献をお送り下さいました、ここに心より感謝致します。

最後になりましたが、この論文の数値計算及び数式処理は、その一部を本学の情報処理研究センタと理学部情報処理システムのコンピュータで行ないました、本論文上梓にあたり、関係各氏にこの場を借りまして感謝の意を表します。

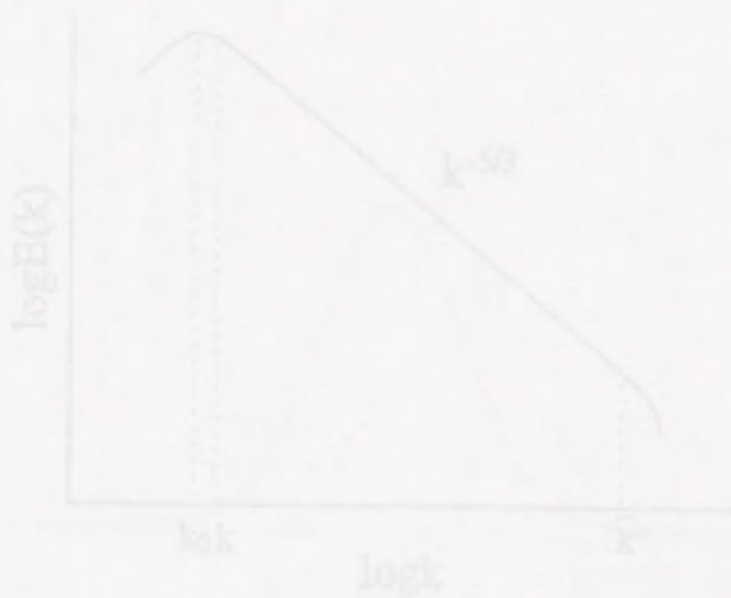


図1 エネルギースペクトルの関係図。

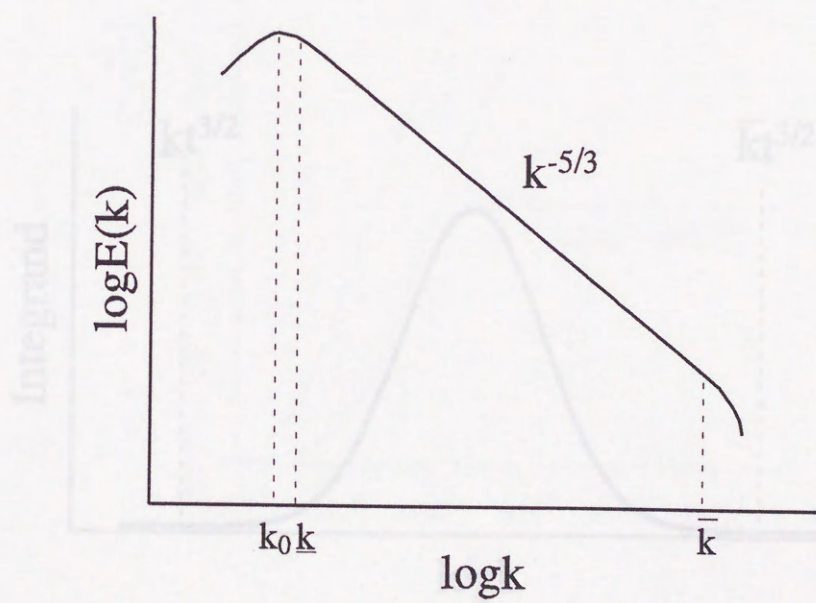


図1 エネルギースペクトルの概念図.

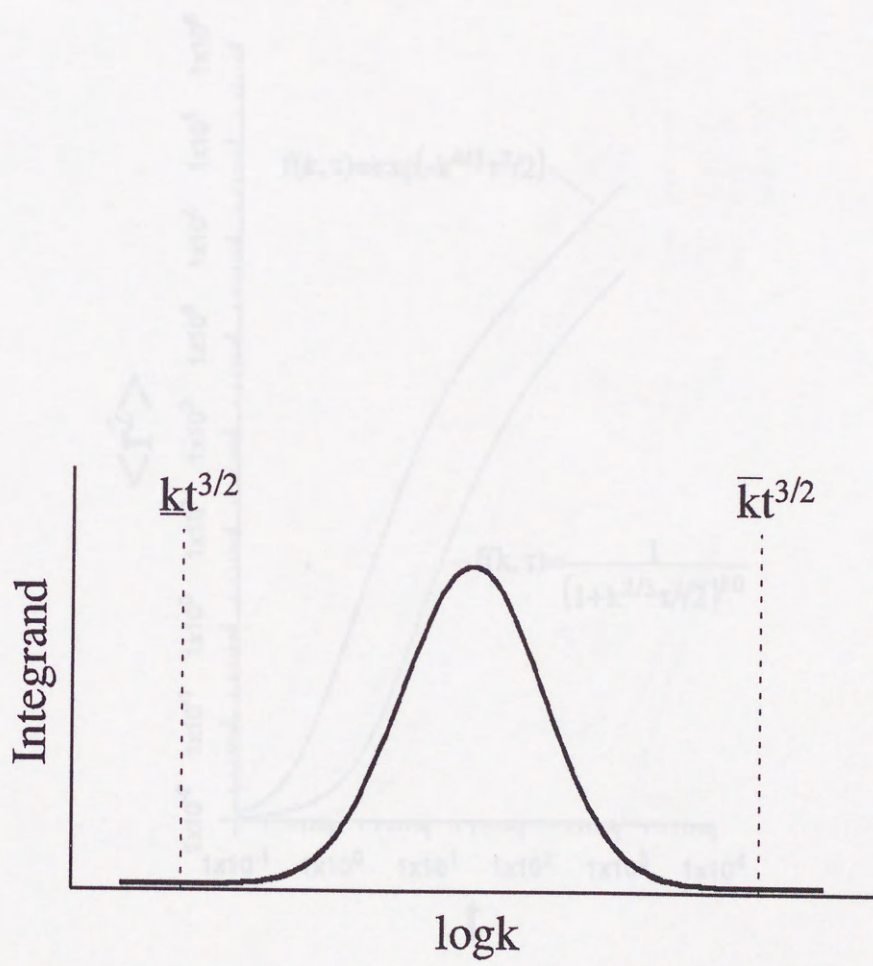


図2 積分核の概念図. $f(k, \omega) = \exp[-k^2(1+\sqrt{2})]$ とした場合の $f(k)$ の時間依存性. $L=10, n=0.1, \omega^2=1$ としている.

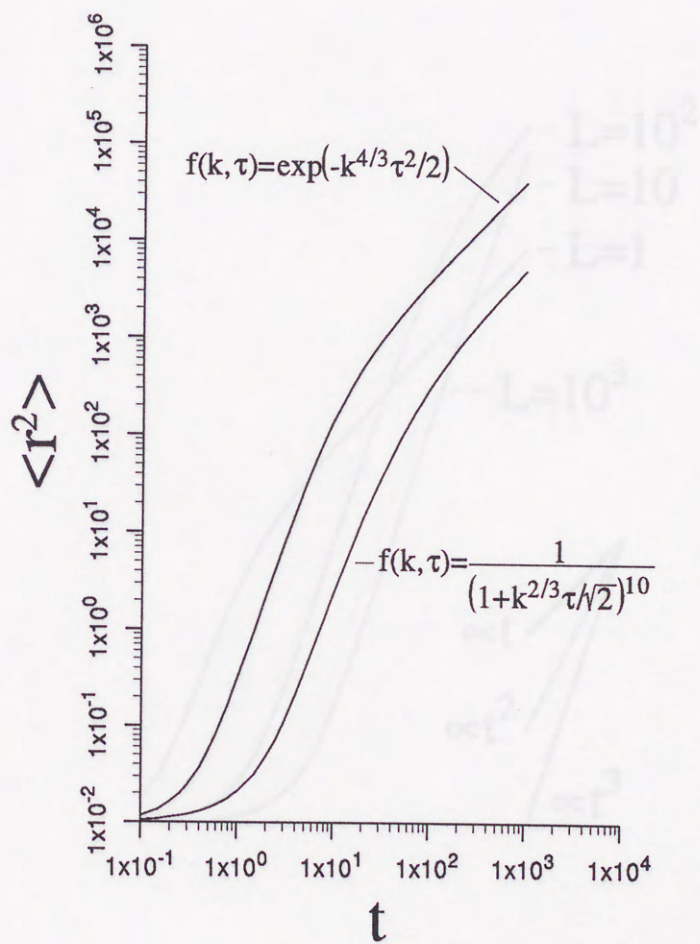


図3 減衰因子を $f(k^{2/3}\tau) = \exp(-k^{4/3}\tau^2/2)$ と $f(k^{2/3}\tau) = (1 + k^{2/3}\tau/\sqrt{2})^{-10}$ とした場合の $\langle r^2 \rangle$ の時間依存性. 但し, $L=10, r_0=0.1, \langle u^2 \rangle=1$ としている.

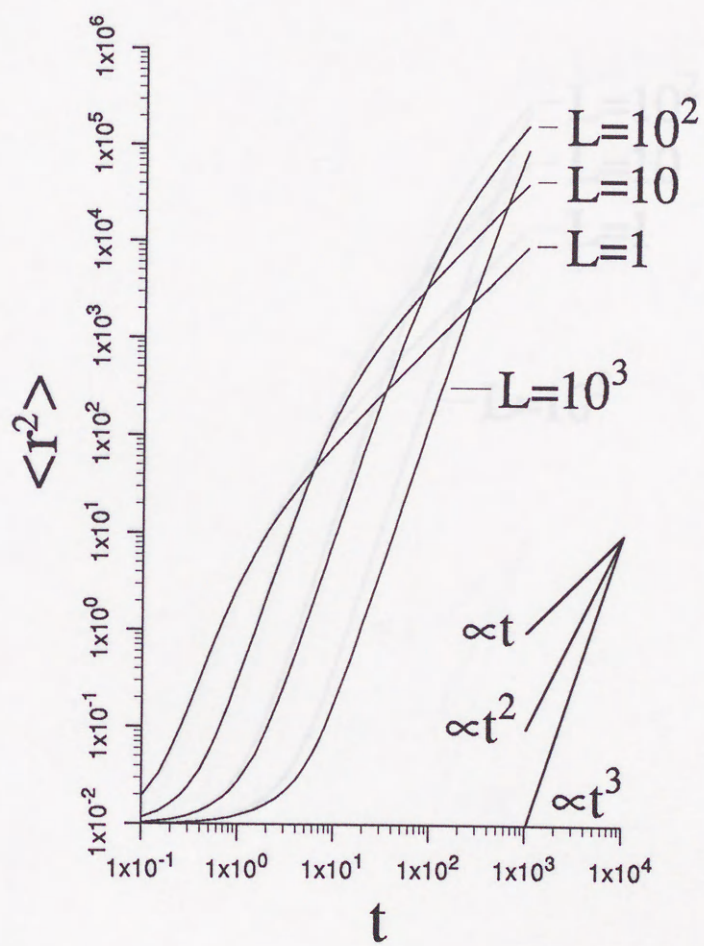


図4 $L=1, 10, 10^2, 10^3$ の場合の $\langle r^2 \rangle$ の時間依存性. 但し, $\alpha=2/3, \gamma=2, r_0=0.1, \langle u^2 \rangle=1$ としている.

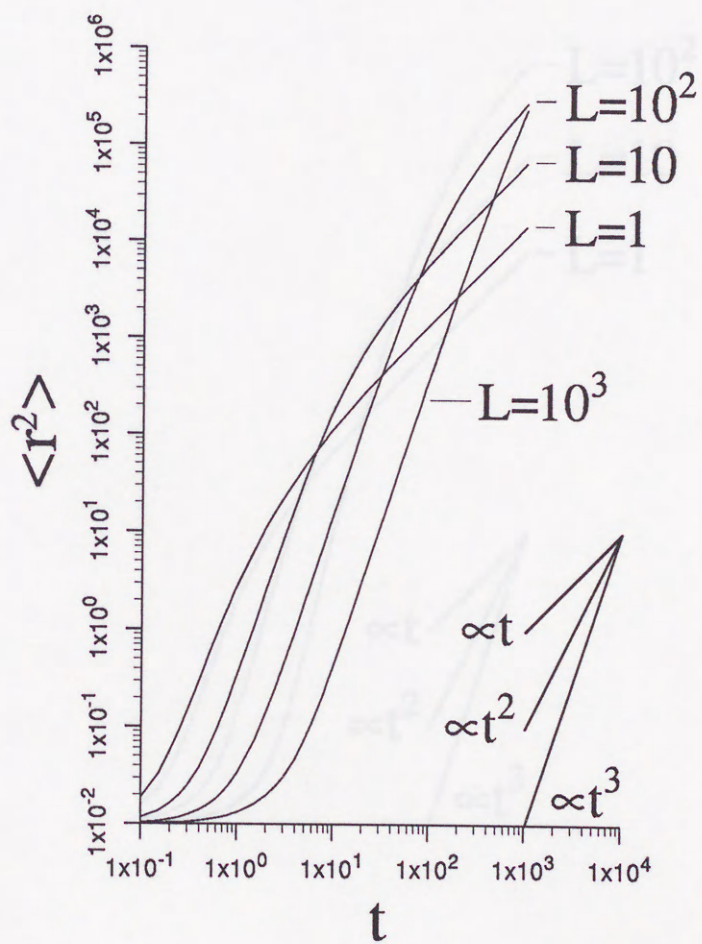


図5 $L=1, 10, 10^2, 10^3$ の場合の $\langle r^2 \rangle$ の時間依存性. 但し, $\alpha=2/3, \gamma=1, r_0=0.1, \langle u^2 \rangle=1$ としている.

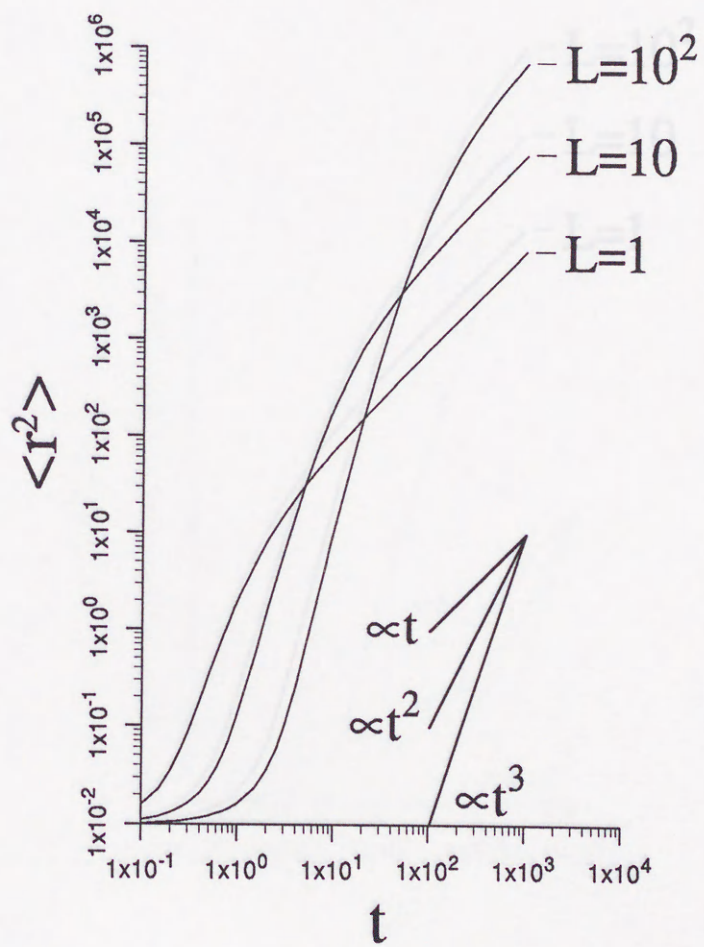


図6 $L=1, 10, 10^2$ の場合の $\langle r^2 \rangle$ の時間依存性. 但し, $\alpha=1, \gamma=2, r_0=0.1, \langle u^2 \rangle=1$ としている.

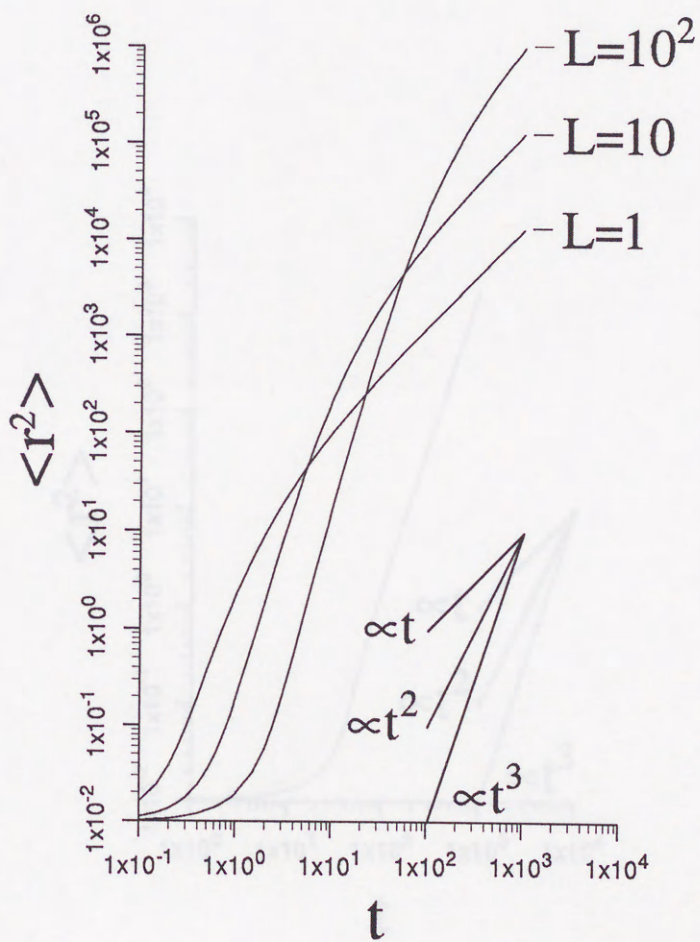


図7 $L=1, 10, 10^2$ の場合の $\langle r^2 \rangle$ の時間依存性. 但し, $\alpha=1, \gamma=1, r_0=0.1, \langle u^2 \rangle=1$ としている.

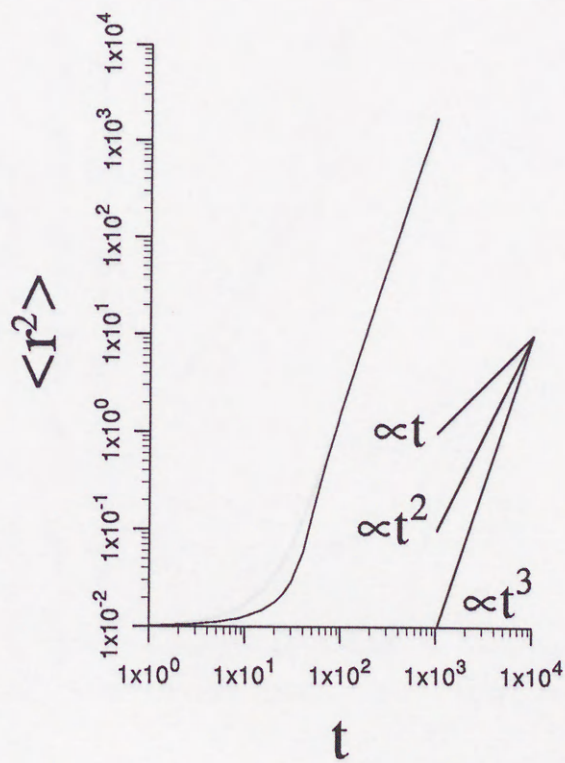


図8 k に関する積分範囲が $[0, 10]$ の場合の $\langle r^2 \rangle$ の時間依存性. 但し, $\alpha=2/3, \gamma=2, L=10^4, r_0=0.1, \langle u^2 \rangle=1$ としている.

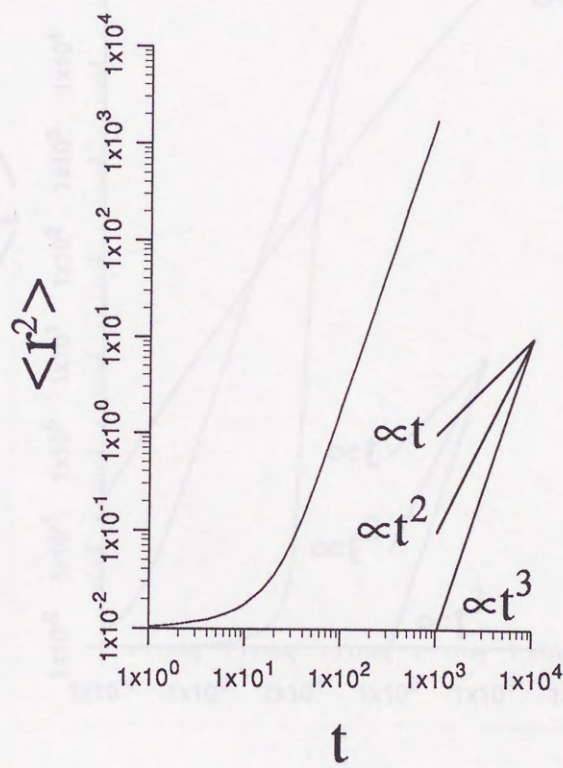


図9 k に関する積分範囲が $[0, 10^2]$ の場合の $\langle r^2 \rangle$ の時間依存性. 但し, $\alpha=2/3, \gamma=2, L=10^4, r_0=0.1, \langle u^2 \rangle=1$ としている.

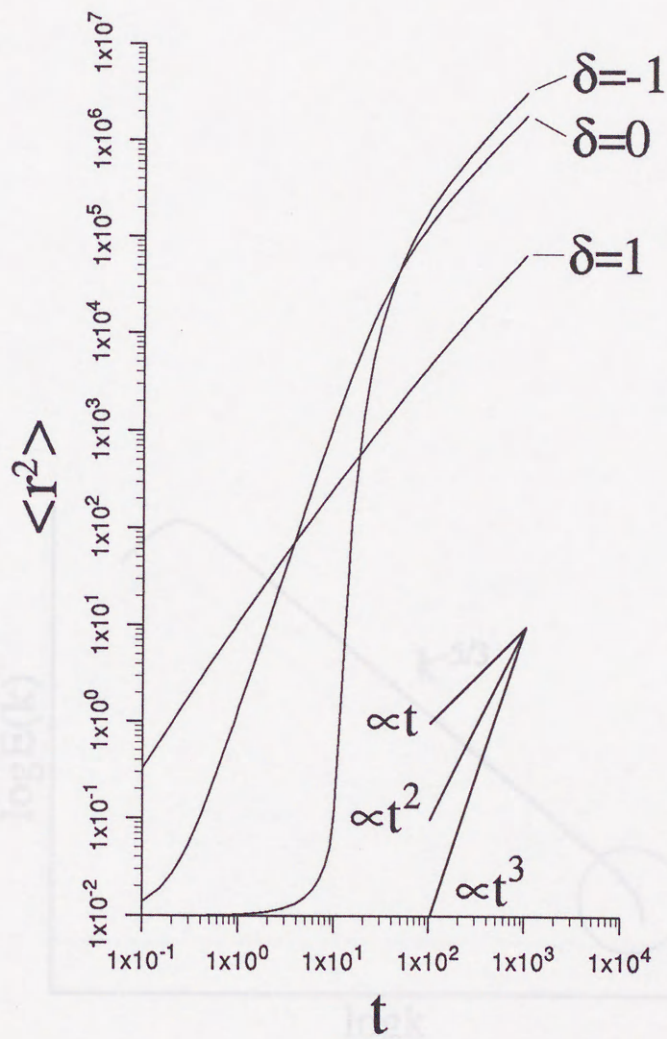
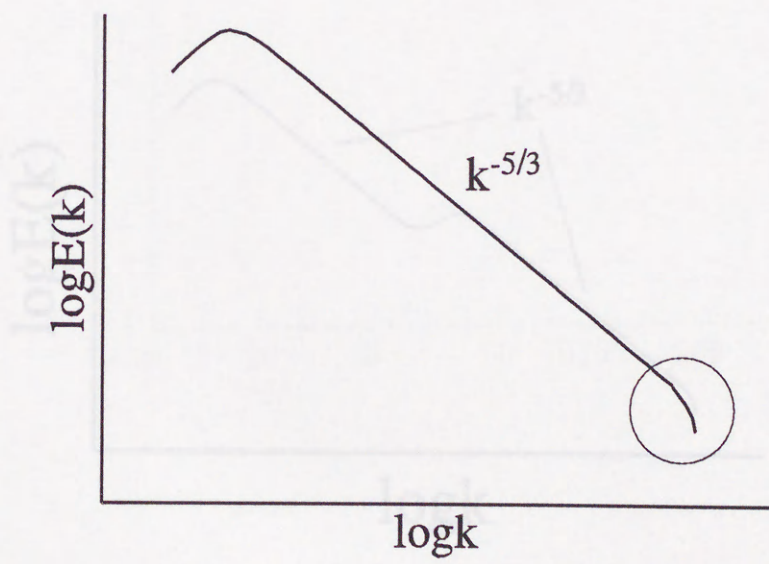


図 1 0 $\delta = -1, 0, 1$ の場合の $\langle r^2 \rangle$ の時間依存性. 但し, $L = 10^2, r_0 = 0.1, \langle u^2 \rangle = 10$ としている.



■ 図 1 1 ■ 問題の現象の原因となる部分 (円で囲んだ部分) .

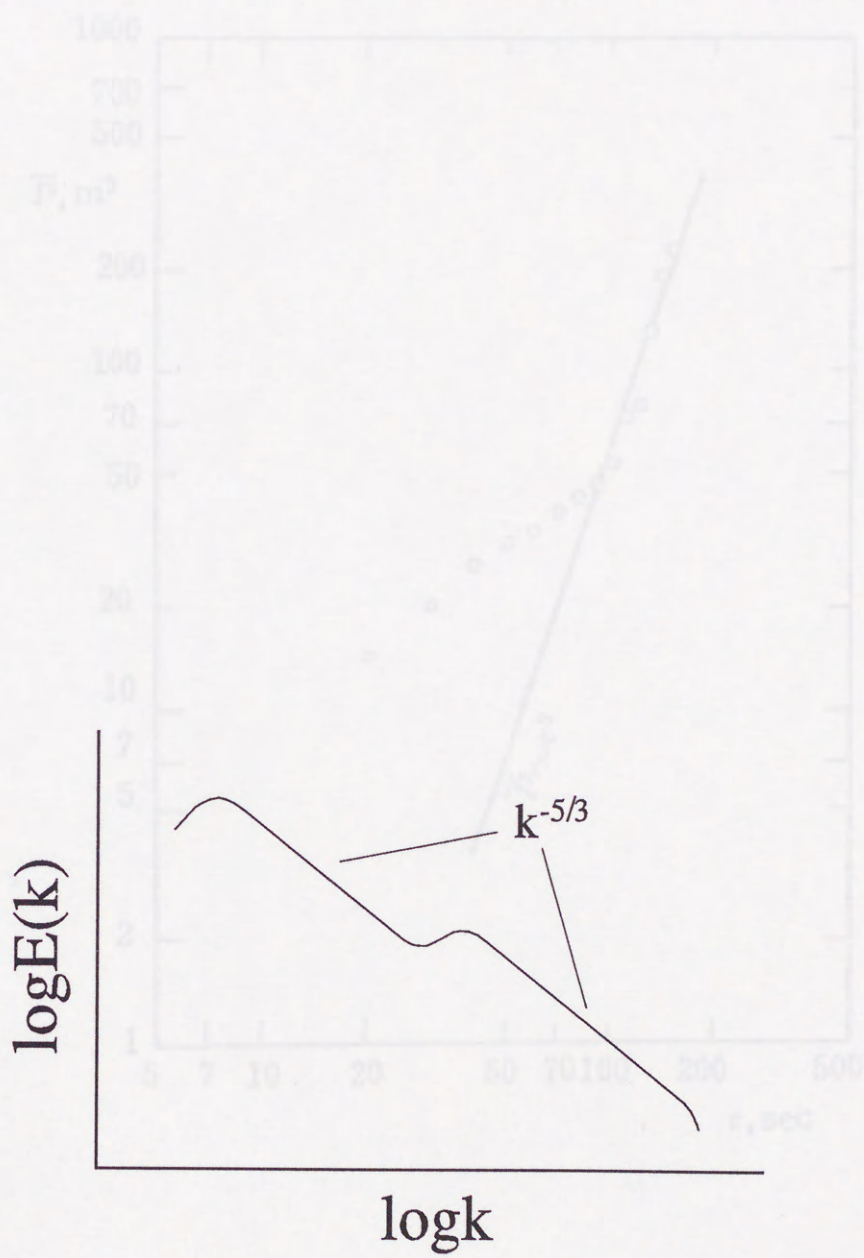


図 1.2 Ozmidov(1956)が提唱したマルチスケール構造の概念図.

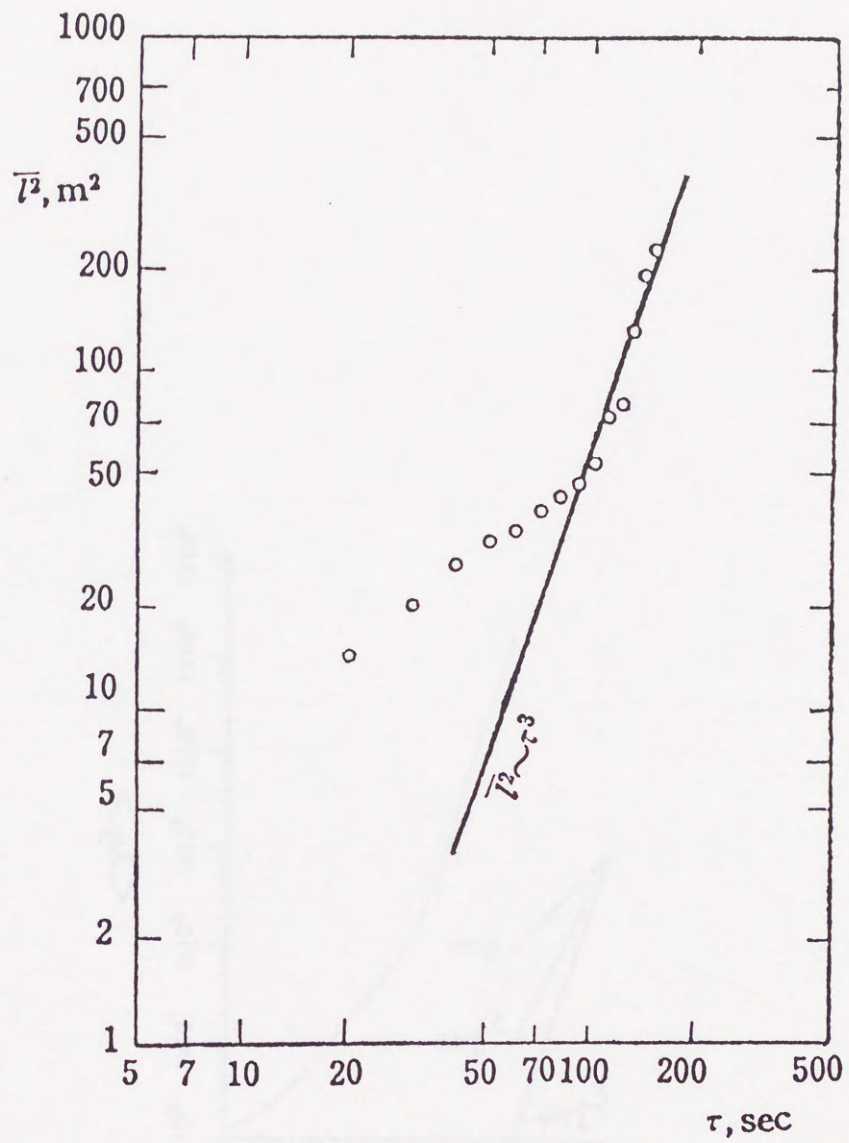


図 1.3 Kellogg(1956)の観測データ. \bar{l}^2 と τ は各々 cloudの有効半径と時間を表す.

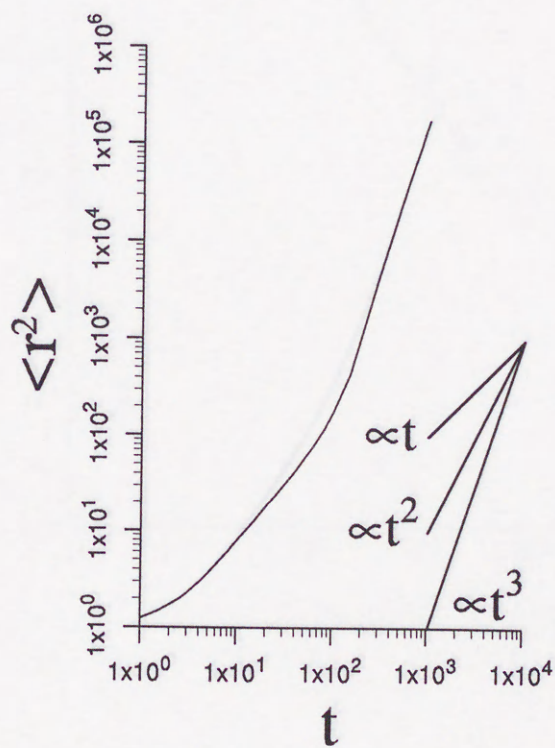


図 1 4 大きい方のスケールにおけるスペクトルの k に関する範囲が $[0, 0.1]$ の場合の $\langle r^2 \rangle$ の時間依存性. 但し, $L_1=10, L_2=10^4, \langle u_1^2 \rangle=0.1, \langle u_2^2 \rangle=5, r_0=1$ としている.

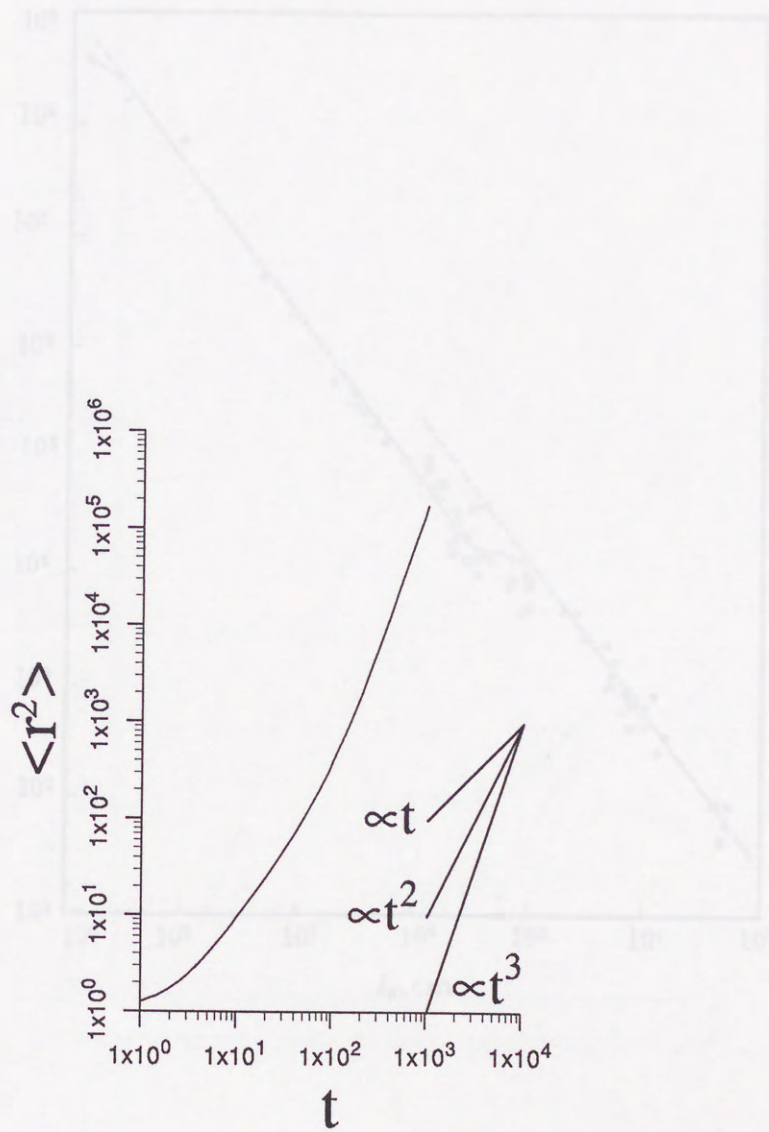


図15 大きい方のスケールにおけるスペクトルの k に関する範囲が $[0, 1]$ の場合の $\langle r^2 \rangle$ の時間依存性. 但し, $L_1=10, L_2=10^4, \langle u_1^2 \rangle=0.1, \langle u_2^2 \rangle=5, r_0=1$ としている.

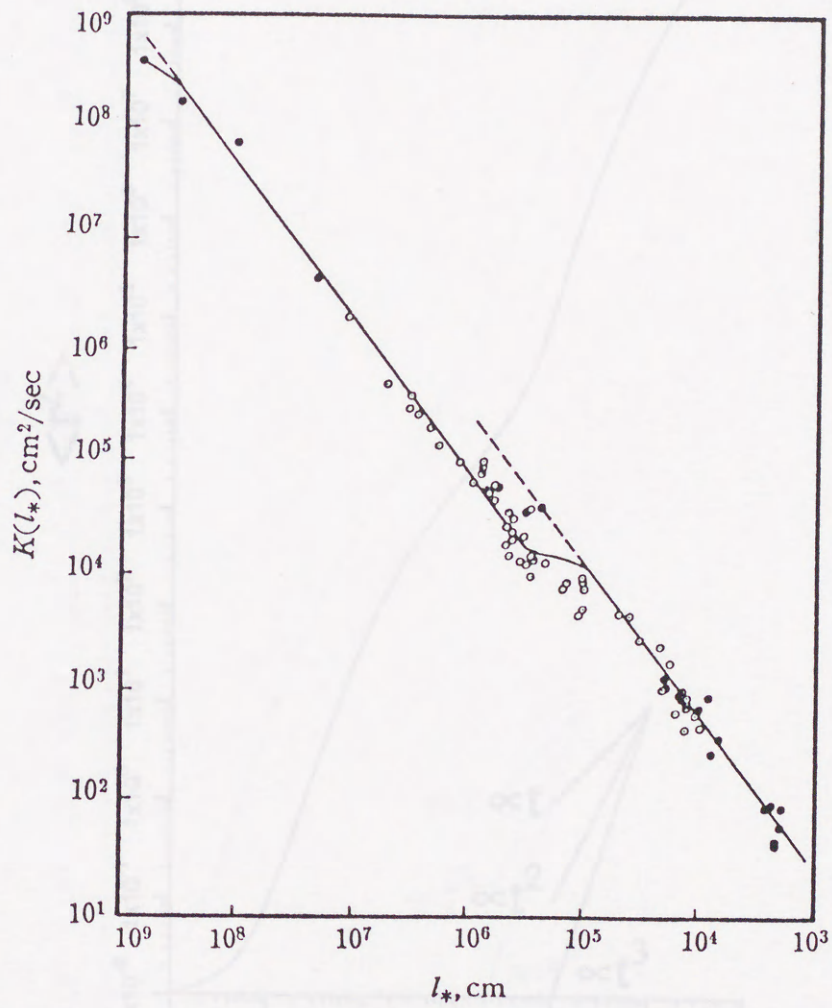


図 1 6 OkuboとOzmidovによる拡散係数 K の長さ尺度 l_* への依存性。異なった記号は異なった実験データに対応する。

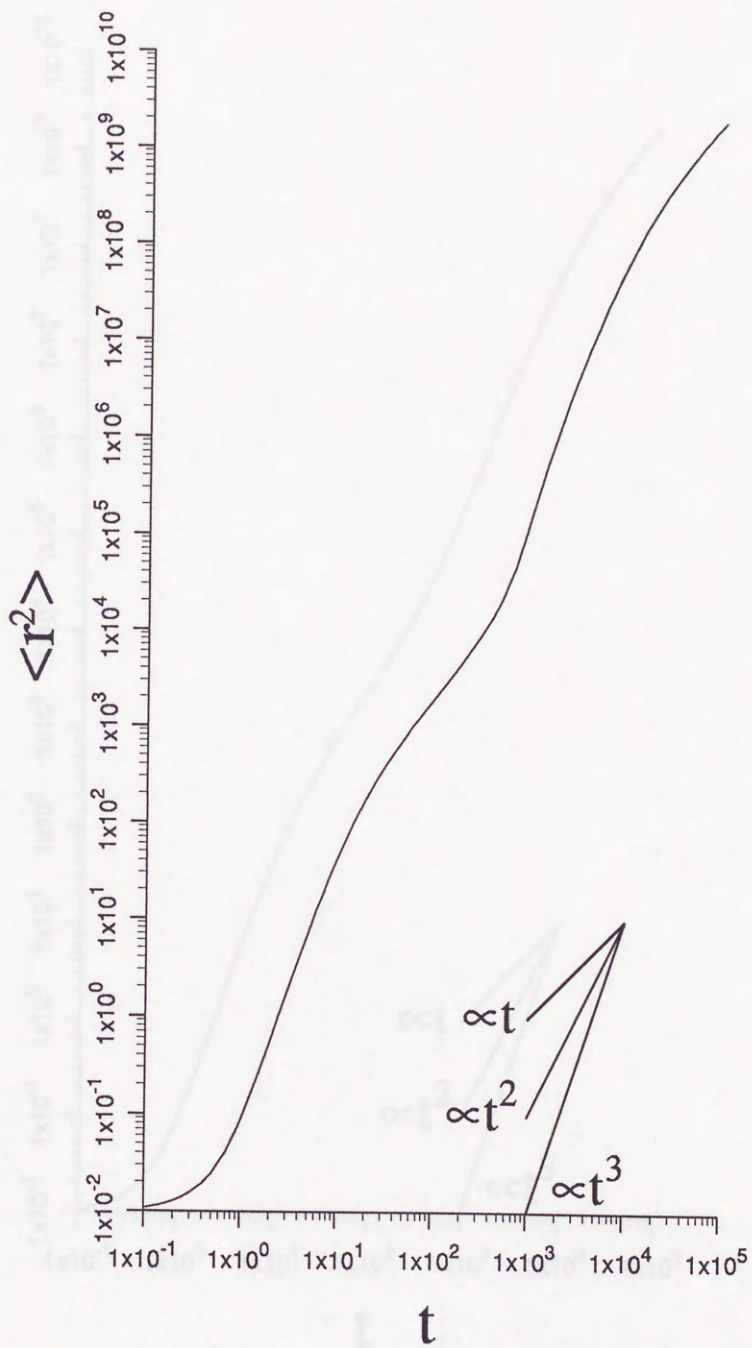


図 1 7 大きい方のスケールにおけるスペクトルの k に関する範囲が $[10^{-5}, 10^{-2}]$ の場合の $\langle r^2 \rangle$ の時間依存性. 但し, $L_1=10, L_2=10^4, \langle u_1^2 \rangle=0.5, \langle u_2^2 \rangle=5, r_0=0.1$ としている.

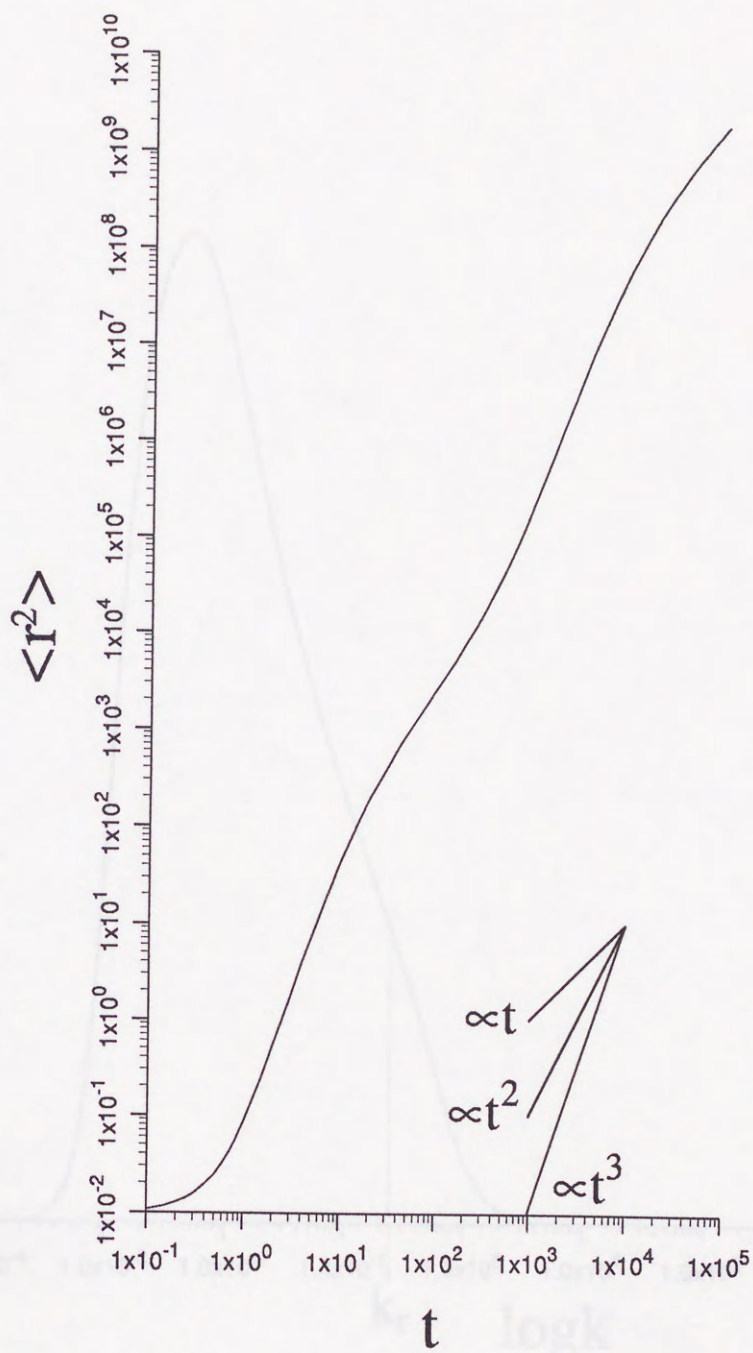


図 1 8 大きい方のスケールにおけるスペクトルの k に関する範囲が $[10^{-5}, 10^{-1}]$ の場合の $\langle r^2 \rangle$ の時間依存性. 但し, $L_1=10, L_2=10^4, \langle u_1^2 \rangle=0.5, \langle u_2^2 \rangle=5, r_0=0.1$ としている.

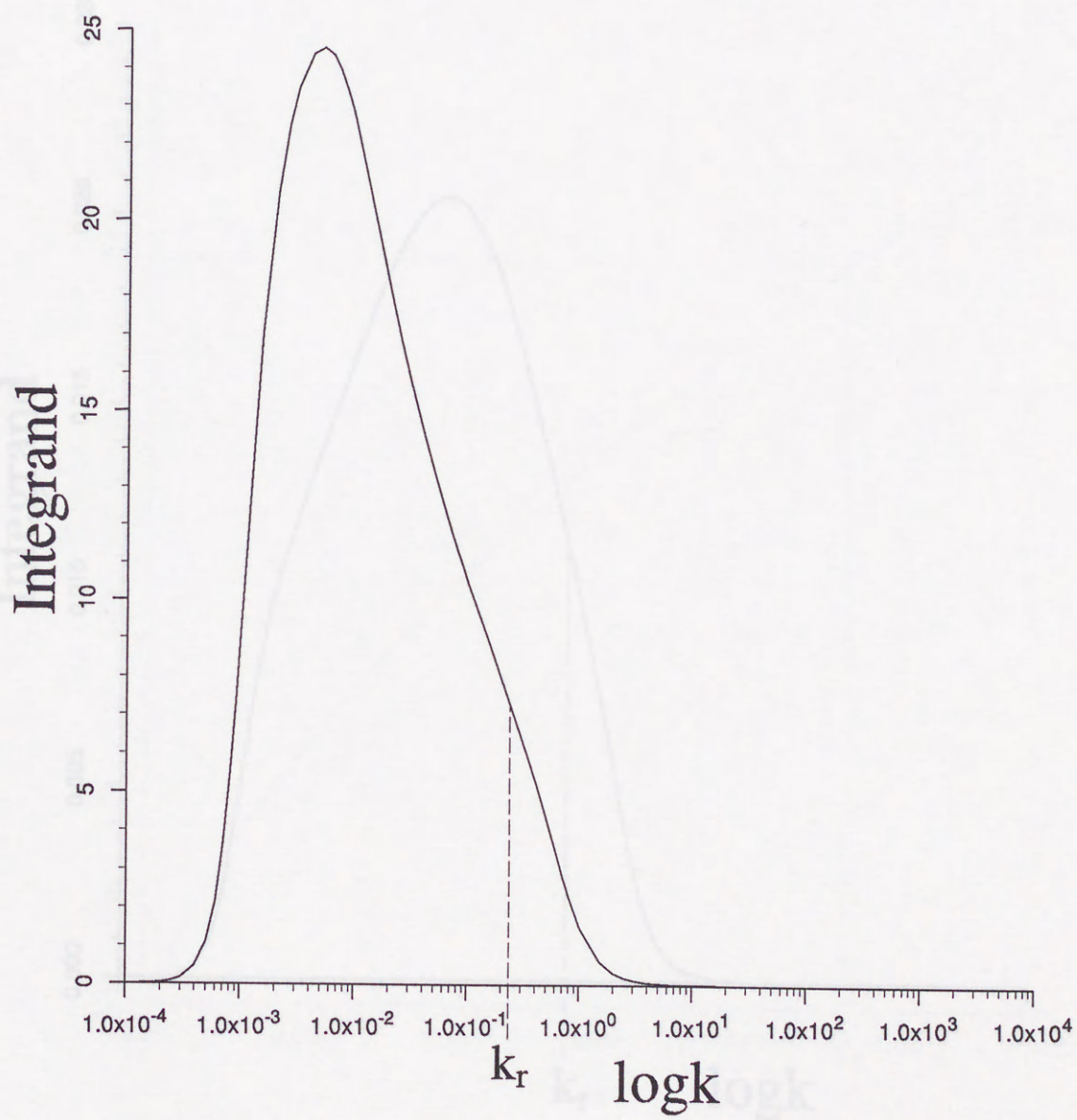


図 1 9 積分核の k 依存性. 但し, $L=10^3$, $t=50$, $\gamma=2$, $\langle u^2 \rangle=1$ としている.

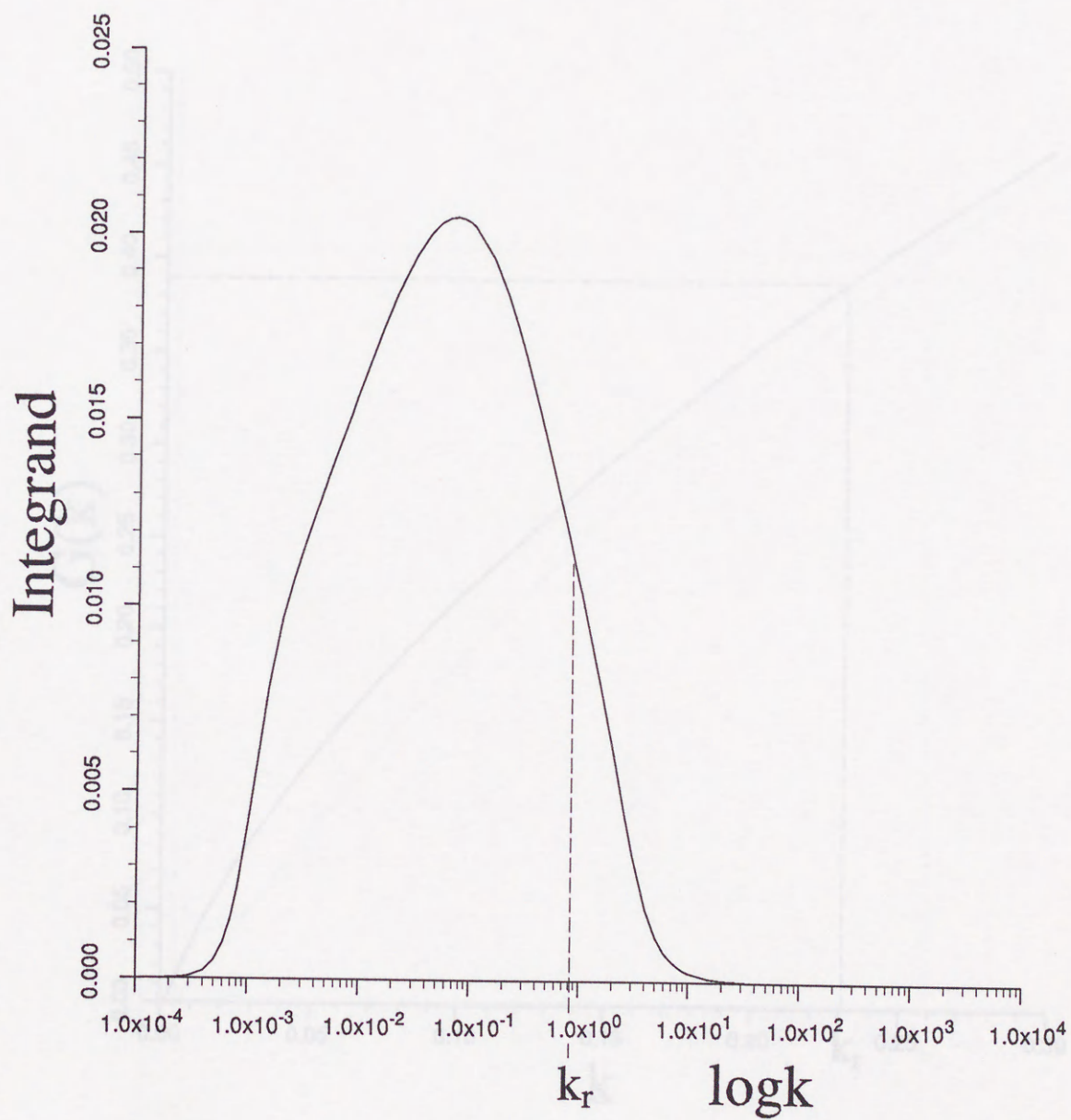


図 2 0 積分核の k 依存性. 但し, $L=10^3$, $t=15$, $\gamma=1$, $\langle u^2 \rangle=1$ としている.

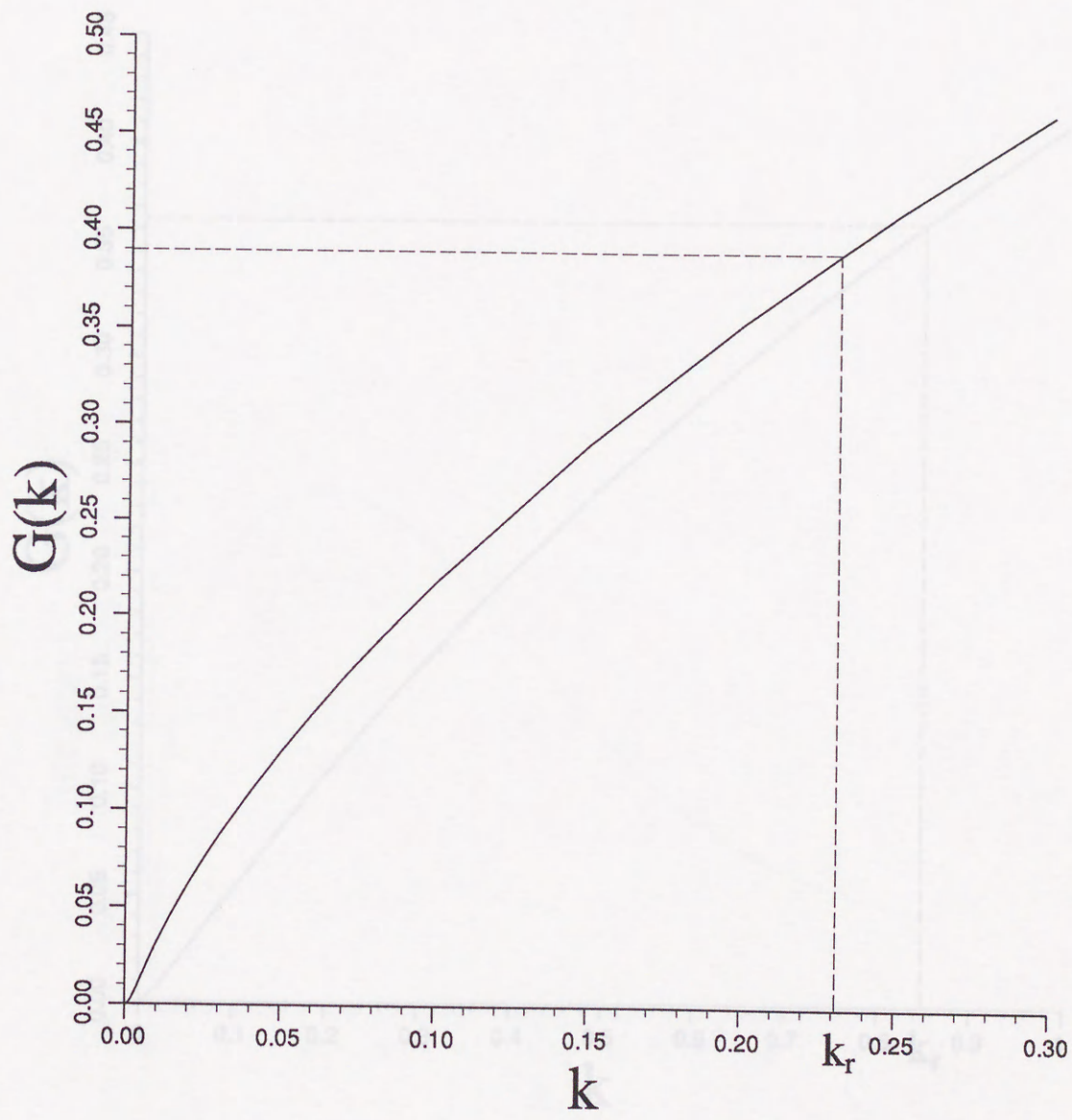


図 2 1 $G(k)$ の k 依存性. 図 1 9 に対応する.

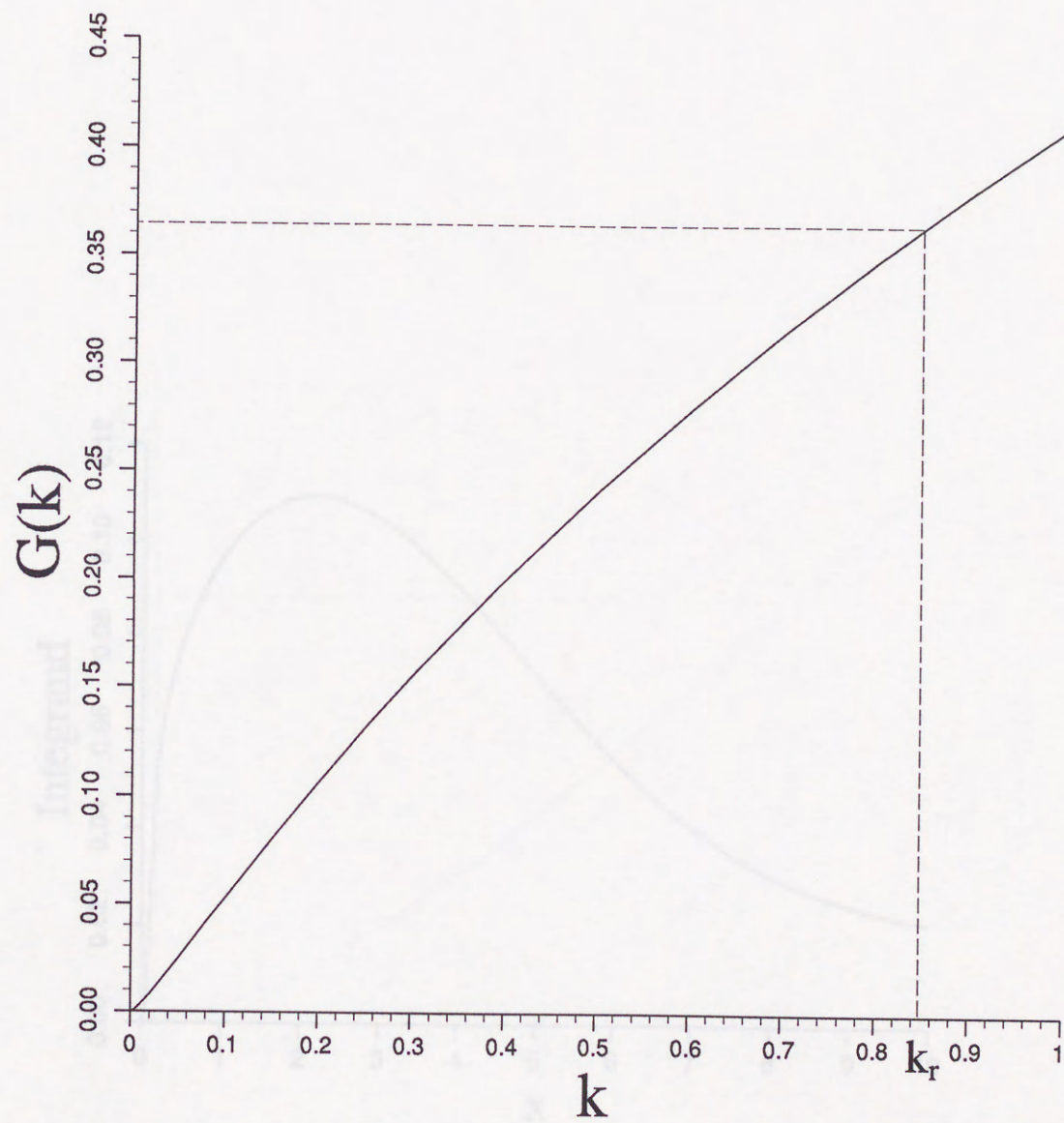


図 2 2 $G(k)$ の k 依存性. 図 2 0 に対応する.

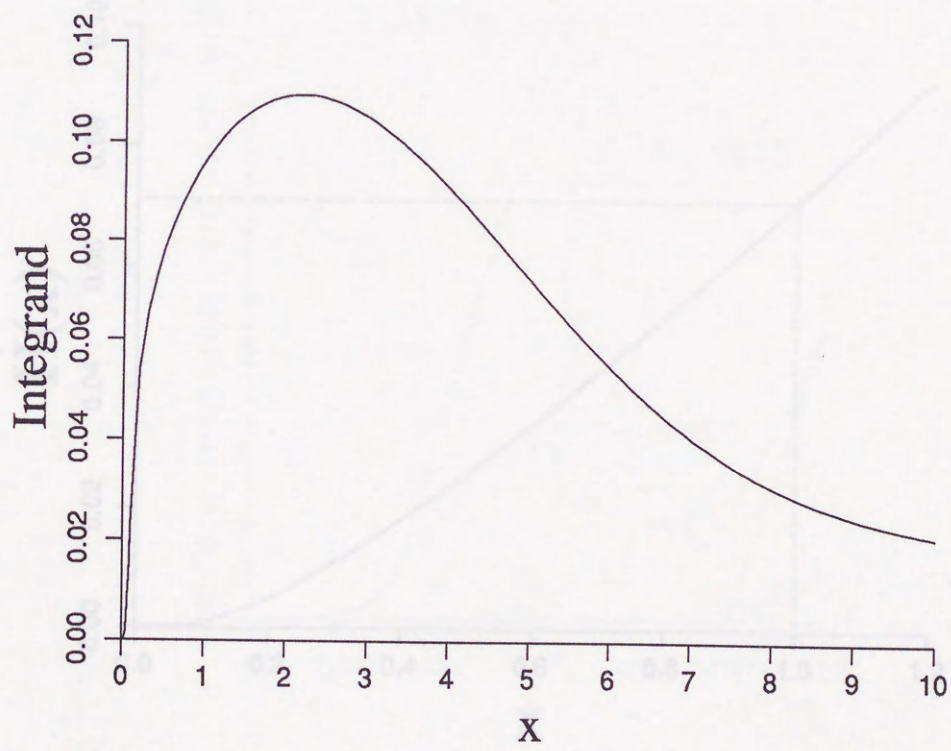


図 2 3 $\xi=0.1$ の場合の積分核の x 依存性.

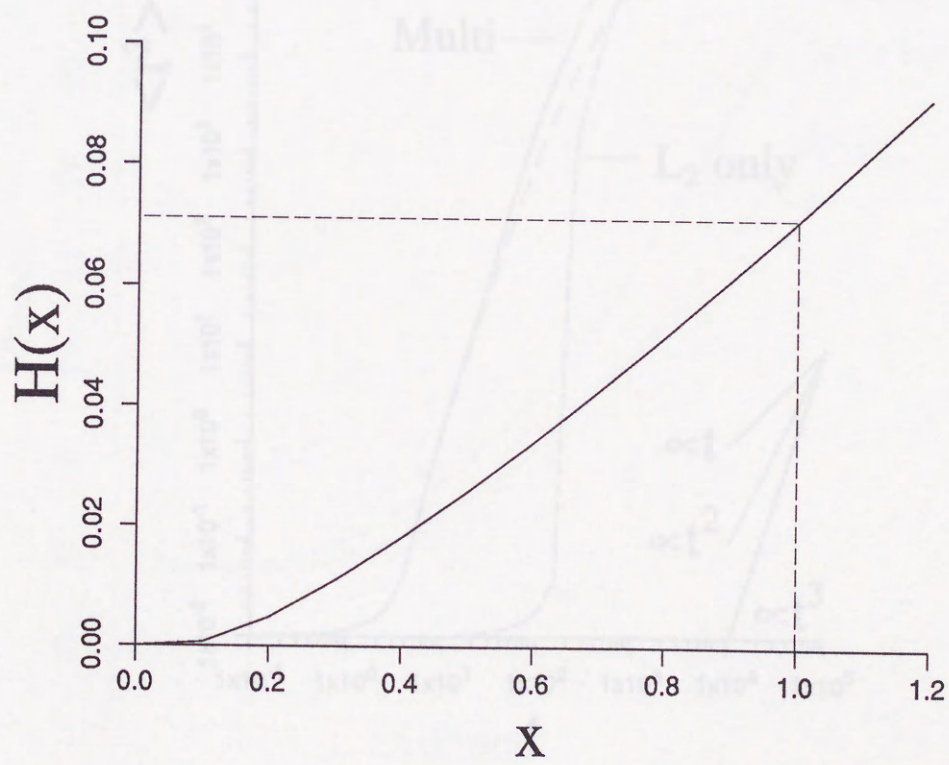


図 2.4 $H(x)$ の x 依存性. 図 2.3 に対応する.

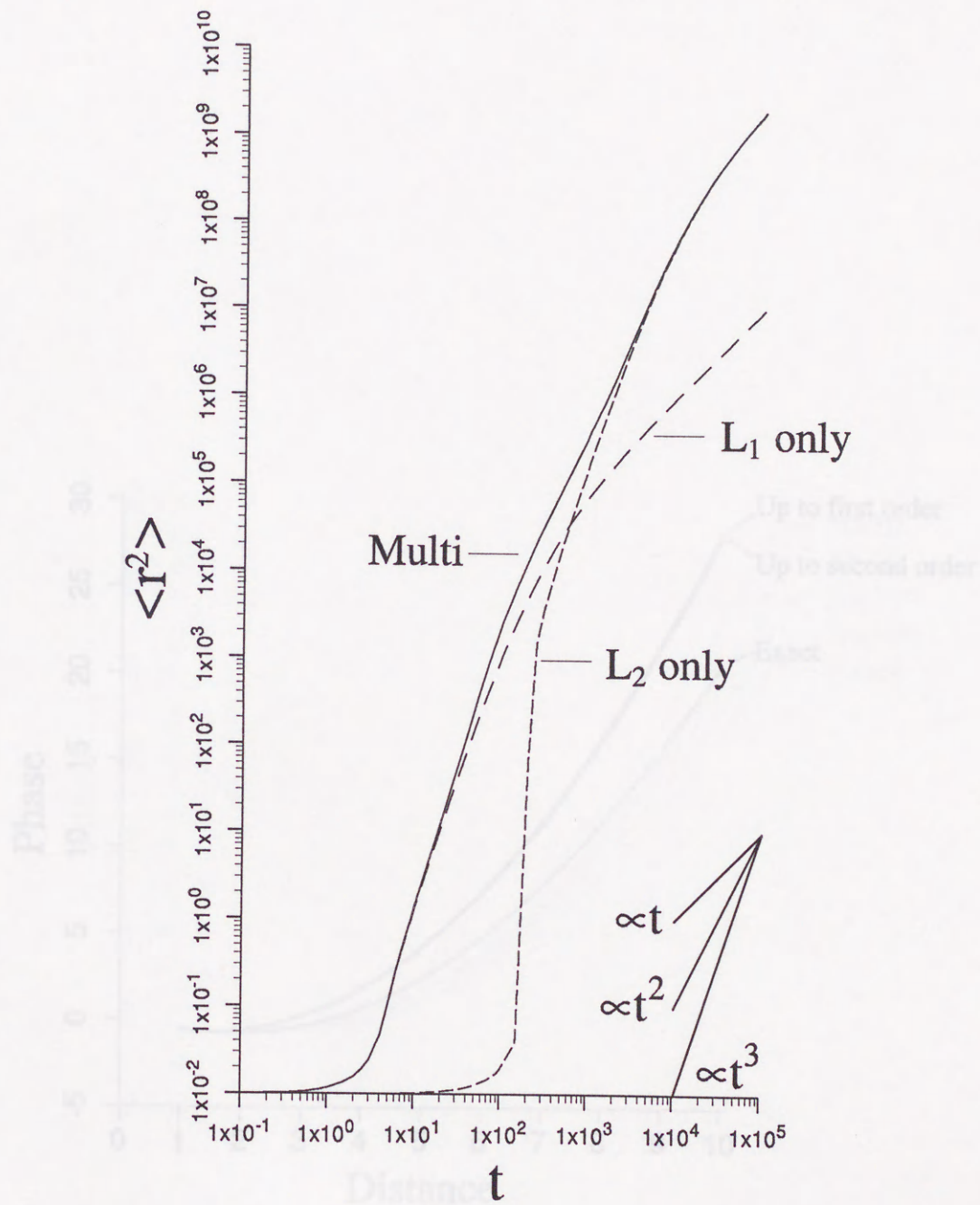


図 2 5 $\langle r^2 \rangle$ の時間依存性. 但し, 実線はマルチスペクトル構造の場合を, 破線は単一領域のスペクトルの場合を各々表す.

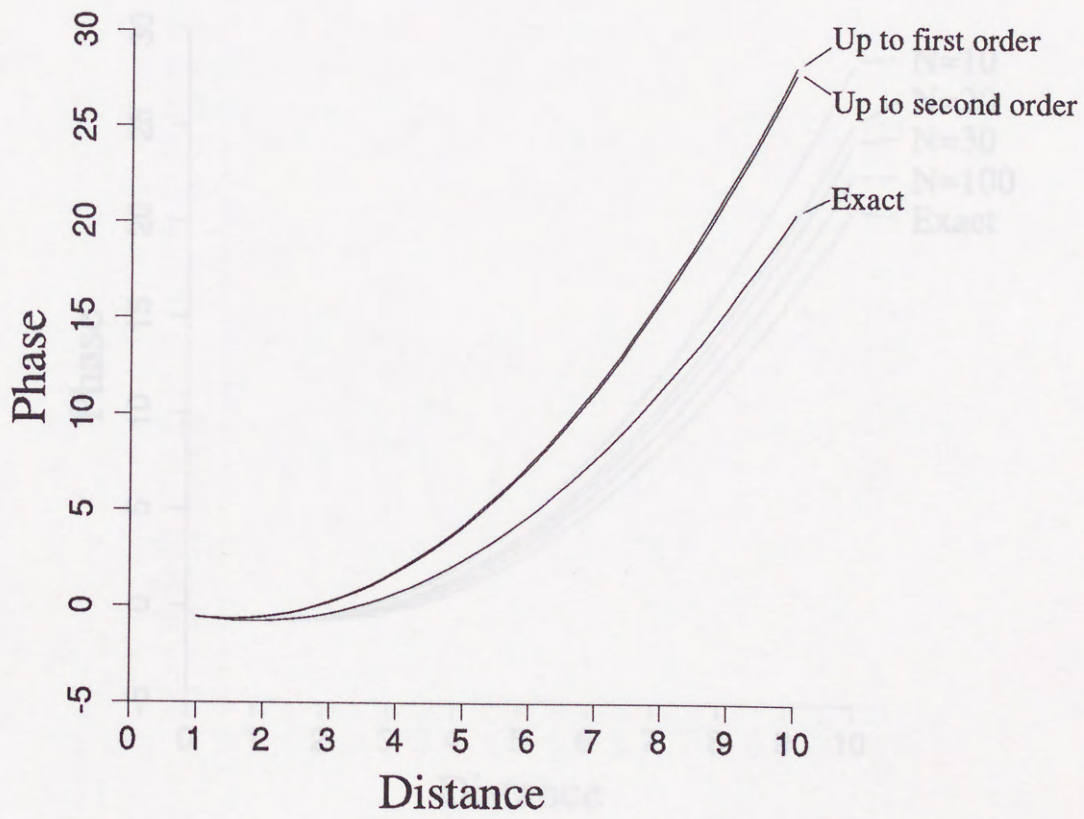


図 2.6 S_j 1 次まで, S_j 2 次まで, 厳密解各々の場合の位相の距離依存性. 但し, $N=10$ としている.

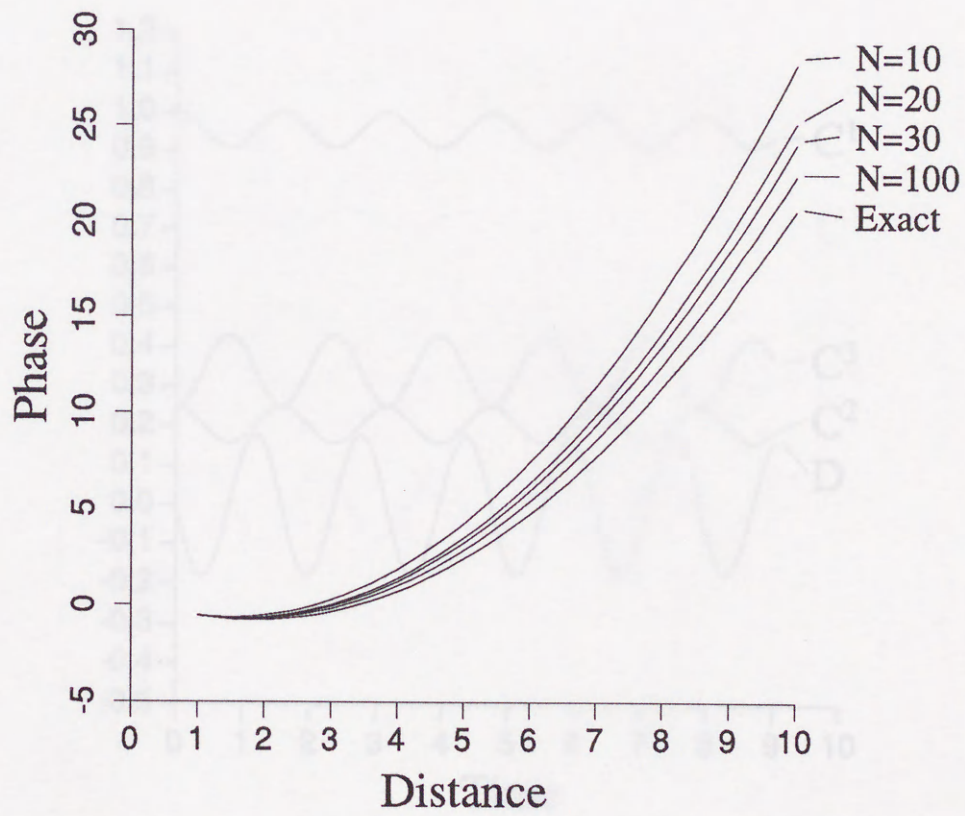


図 2 7 S_j 1 次までで, $N=10, 20, 30, 100$ の場合と厳密解の位相の距離依存性.

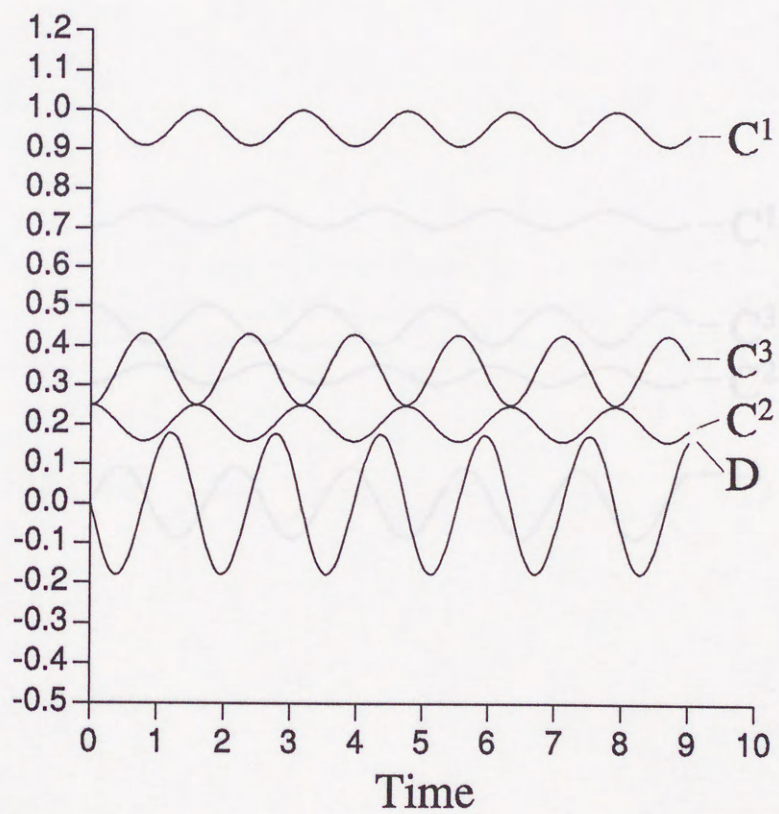


図 2 8 $C^1(0)=1, C^2(0)=0.25, C^3(0)=0.25, D(0)=0$ の場合の C^α, D の時間依存性.

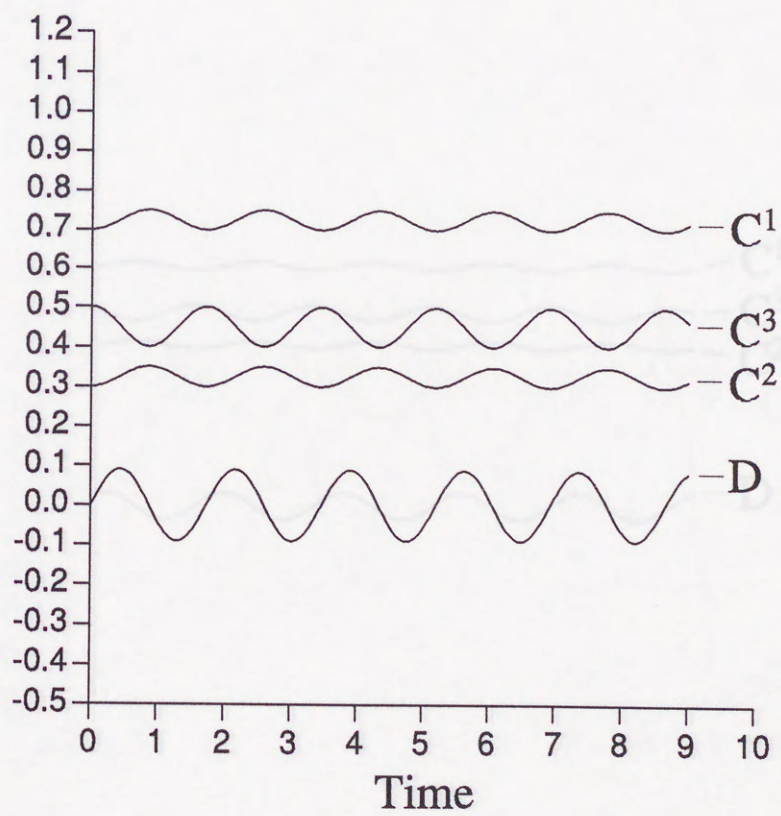


図 2 9 $C^1(0)=0.7, C^2(0)=0.3, C^3(0)=0.5, D(0)=0$ の場合の C^α, D の時間依存性.

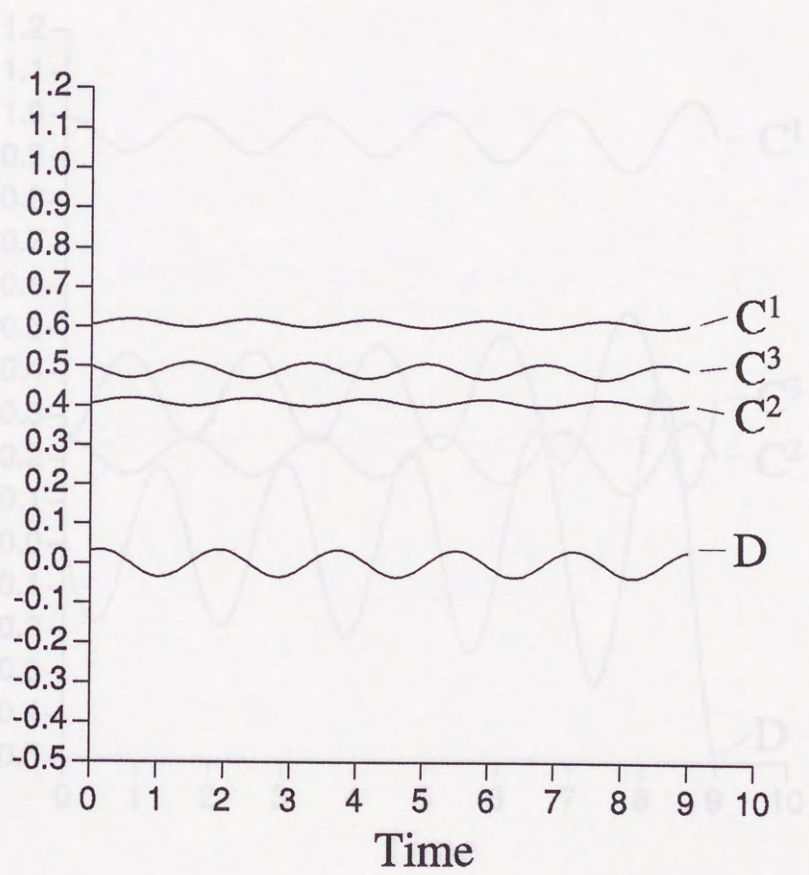


図 3 0 $C^1(0)=0.605, C^2(0)=0.405, C^3(0)=0.5, D(0)=0.03$ の場合の C^α, D の時間依存性.

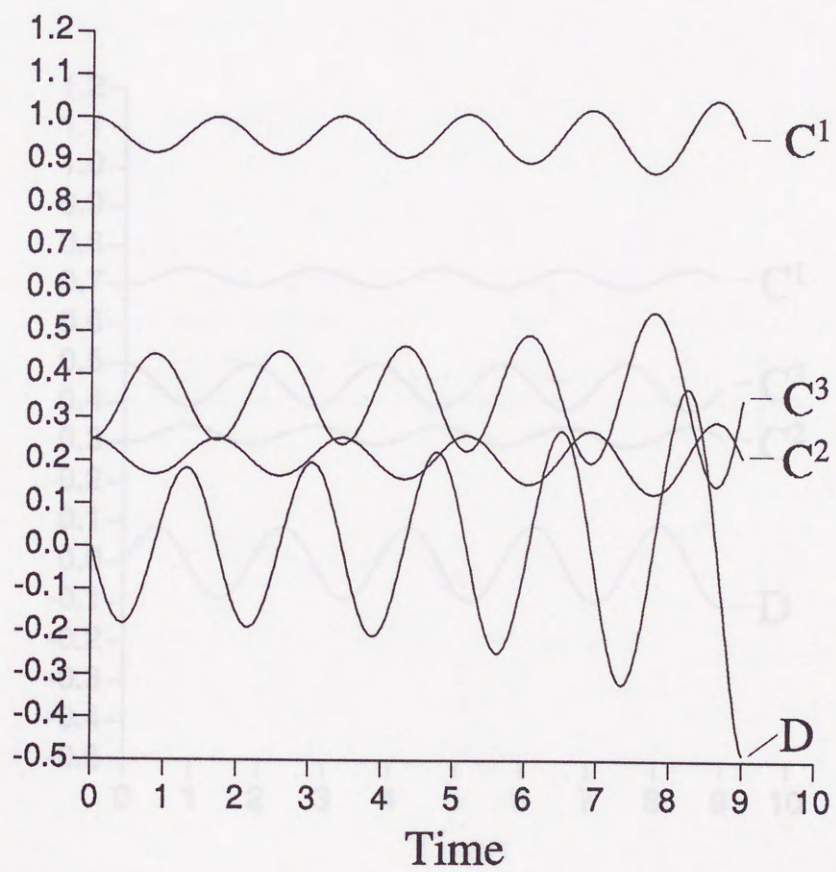


図 3 1 Wiener-Hermite展開による $C^1(0)=1, C^2(0)=0.25, C^3(0)=0.25, D(0)=0$ の場合の C^α, D の時間依存性.

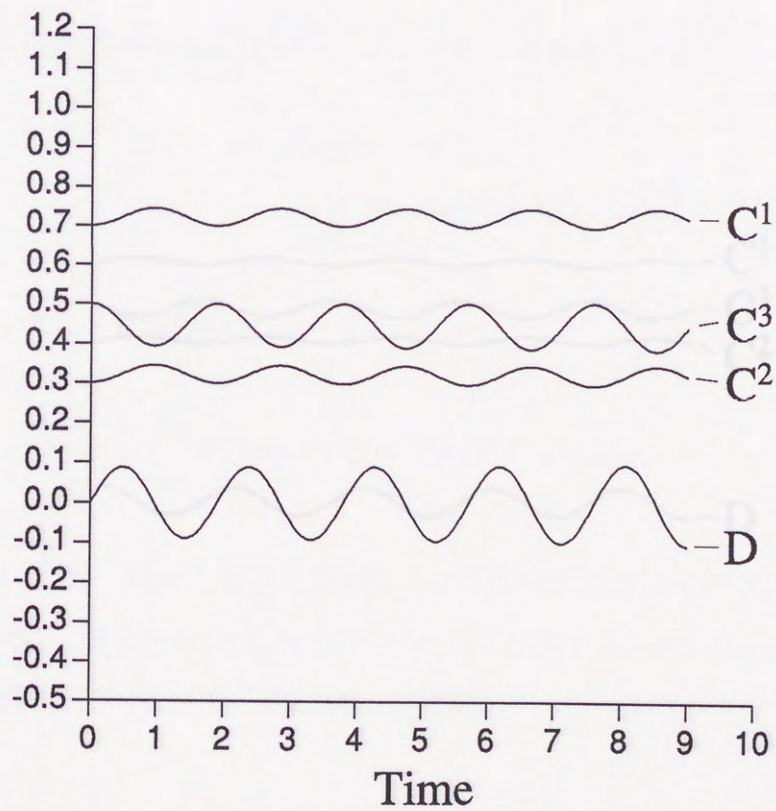


図 3 2 Wiener-Hermite展開による $C^1(0)=0.7$, $C^2(0)=0.3$, $C^3(0)=0.5$, $D(0)=0$ の場合の C^α , D の時間依存性.

3

A. Richardsonの v^2 展開について

1) まず簡単にして、Richardsonの6つのグループの観測データを整理した結果を見せた
 図で、拡散係数が2粒子の平均相対距離の v^2 項に比例するというもの²⁾。拡散係数と
 2粒子の相対距離の2乗平均の間には(1.7.1)式の関係があるので、この図は2粒子の
 相対距離の2乗平均が時間の2乗に比例するともいえる。

B. (1.2.1)式と(1.2.2)式の導出

(1.2.1)式と(1.2.2)式はF. Sakai, M. Del and T. Imamura(1984)により、以下のようになら
 れている。³⁾

2粒子の位置 $x^{(1)}, x^{(2)}$ は以下の式で与えられる

$$x^{(i)}(t) = x^{(i)}(0) + \int_0^t v^{(i)}(x^{(i)}(s), t-s) ds \quad (B.1)$$

ここで、 $v^{(i)}$

$$v^{(i)}(x, t) = \left(\frac{dx^{(i)}}{dt} \right)_{x^{(i)}=x, t=t} \quad (B.2)$$

を意味する。ここで、 $v^{(i)}$ は初期時刻 $t=0$ において位置 x に存在した粒子 i の時刻 t
 での速度； $v^{(i)}$ の速度場； $v^{(i)}$ は $x^{(i)}$ に関する vector operator； (\cdot) は Euler の速
 度場に関する

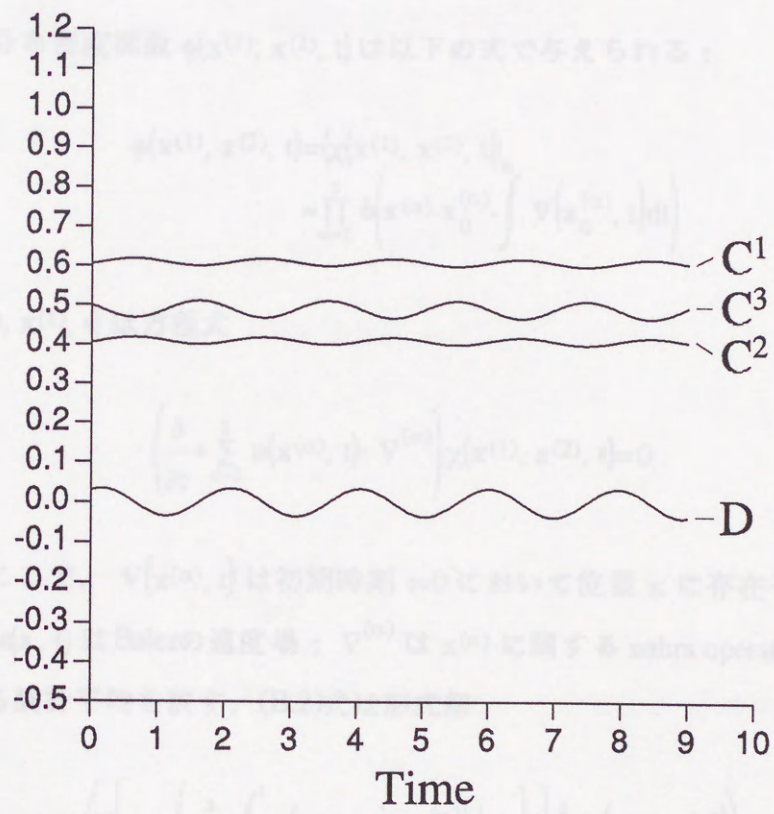


図 3.3 Wiener-Hermite展開による $C^1(0)=0.605, C^2(0)=0.405, C^3(0)=0.5, D(0)=0.03$ の場合
 の C^α, D の時間依存性.

補 遺

A. Richardsonの4/3乗則について

1926年にL. F. Richardsonが5つのグループの観測データを整理した結果発見した法則で、拡散係数が2粒子の平均相対距離の4/3乗に比例するというもの。²⁾ 拡散係数と2粒子の相対距離の2乗平均の間には(1.7.1)式の関係があるので、この法則は2粒子の相対距離の2乗平均が時間の3乗に比例するともいえる。

B. (1.2.1)式と(1.2.2)式の導出

(1.2.1)式と(1.2.2)式はY. Sakurai, M. Doi and T. Imamura(1984)により、以下のように導かれている。⁹⁾

2粒子の分布密度関数 $\phi(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, t)$ は以下の式で与えられる:

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, t) &= \langle \chi(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, t) \rangle_{\mathbf{u}} \\ &= \prod_{\alpha=1}^2 \delta(\mathbf{x}^{(\alpha)} - \mathbf{x}_0^{(\alpha)}) \int \mathbf{V}(\mathbf{x}_0^{(\alpha)}, t) dt \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

但し、 $\phi(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, t)$ は方程式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}^{(\alpha)}, t) \cdot \nabla^{(\alpha)} \right) \chi(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, t) = 0 \quad (\text{B.2})$$

を満たす。ここで、 $\mathbf{V}(\mathbf{x}^{(\alpha)}, t)$ は初期時刻 $t=0$ において位置 \mathbf{x} に存在した粒子 α の時刻 t での速度； $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ はEulerの速度場； $\nabla^{(\alpha)}$ は $\mathbf{x}^{(\alpha)}$ に関する nabla operator； $\langle \rangle_{\mathbf{u}}$ はEulerの速度場に関する統計平均を表す。(B.2)式は形式解

$$\phi = \left\langle T \left[\exp \left\{ - \sum_{\alpha=1}^2 \int_0^t \mathbf{u}(\mathbf{x}^{(\alpha)}, t') \cdot \nabla^{(\alpha)} dt' \right\} \right] \prod_{\alpha=1}^2 \delta(\mathbf{x}^{(\alpha)} - \mathbf{x}_0^{(\alpha)}) \right\rangle_{\mathbf{u}} \quad (\text{B.3})$$

(但し、 T はtime ordered operatorで $\nabla(t)$ が $t' < t$ である $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t')$ にのみ演算することを表す。また、 $\nabla(t)$ の (t) はこの意味で用いられており、 ∇ が t の関数であることを意味しない)をもつ。ここで、実効ハミルトニアン $H = H(\mathbf{k}^{\alpha}, t)$ を導入して、(B.3)を書き換えると

$$\phi = \int \frac{d\mathbf{k}^{(1)}d\mathbf{k}^{(2)}}{(2\pi)^6} T(\mathbf{x}^{(\alpha)}, \mathbf{k}^{(\alpha)}, t) \exp\left[-I(\mathbf{k}^{(\alpha)}, t) + i \sum_{\alpha=1}^2 \mathbf{k}^{(\alpha)} \cdot (\mathbf{x}^{(\alpha)} - \mathbf{x}_0^{(\alpha)})\right] \quad (\text{B.4})$$

$$I = \int_0^t H(\mathbf{k}^{(\alpha)}, t') dt' \quad (\text{B.5})$$

$$T = \left\langle T \left[\exp \left\{ - \sum_{\alpha=1}^2 \int_0^t \mathbf{u}(\mathbf{x}^{(\alpha)}, t') \cdot \nabla^{(\alpha)} \langle t' \rangle dt' + I(\mathbf{k}^{(\alpha)}, t) \right\} \right] \right\rangle_{\mathbf{u}} \quad (\text{B.6})$$

となる。 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ が統計的に定常かつ等方で結合 Gauss 分布をしていると仮定すると (B.6) 式は

$$T = T \left[\exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \sum_{\beta=1}^2 \sum_{a, b=1}^3 \int_0^t S_{ab}(\mathbf{x}^{(\alpha)} \langle t' \rangle - \mathbf{x}^{(\beta)} \langle t'' \rangle, t' - t'') \nabla_a^{(\alpha)} \langle t' \rangle \nabla_b^{(\beta)} \langle t'' \rangle dt' dt'' + I(\mathbf{k}^{(\alpha)}, t) \right\} \right] \quad (\text{B.7})$$

$$S_{ab} = \langle u_a(\mathbf{x}^{(\alpha)}, t') u_b(\mathbf{x}^{(\beta)}, t'') \rangle_{\mathbf{u}} \\ = \int d\hat{S}(l, t' - t'') \left(\delta_{ab} - \frac{l_a l_b}{l^2} \right) \exp\{i \mathbf{l} \cdot (\mathbf{x}^{(\alpha)} \langle t' \rangle - \mathbf{x}^{(\beta)} \langle t'' \rangle)\} \quad (\text{B.8})$$

となる。ここで、

$$I = \frac{\alpha(t) K^2}{2} + \frac{\beta(t) k^2}{2} \quad (\text{B.9})$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{k}^{(1)} + \mathbf{k}^{(2)}, \quad \mathbf{k} = \frac{\mathbf{k}^{(1)} - \mathbf{k}^{(2)}}{2} \quad (\text{B.10})$$

とにおいて

$$\phi^{(e)}(\mathbf{x}^{(\alpha)}, t) \equiv \int \frac{d\mathbf{k}^{(1)}d\mathbf{k}^{(2)}}{(2\pi)^6} \exp\left[-I(\mathbf{k}^{(\alpha)}, t) + i \sum_{\alpha=1}^2 \mathbf{k}^{(\alpha)} \cdot (\mathbf{x}^{(\alpha)} - \mathbf{x}_0^{(\alpha)})\right] \quad (\text{B.11})$$

なる近似的な分布密度関数 $\phi^{(e)}(\mathbf{k}^{(\alpha)}, t)$ を考えると、これによる r^2 の平均値 $\langle r^2 \rangle^{(e)}$ は

$$\langle r^2 \rangle^{(e)} = \int d\mathbf{r} d\mathbf{R} r^2 \phi^{(e)} \\ = r_0^2 + 3\beta(t) \quad (\text{B.12})$$

$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{x}^{(2)}}{2}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(2)} \quad (\text{B.13})$$

と与えられる。

さて、 $\langle r^2 \rangle^{(e)}$ と本来の分布密度関数 ϕ を用いた r^2 の平均値 $\langle r^2 \rangle$ を結び付ける方法だが

$$\langle r^2 \rangle - \langle r^2 \rangle^{(e)} = \int_{=0} \frac{d\mathbf{k}^{(1)} d\mathbf{k}^{(2)} d\mathbf{r} d\mathbf{R}}{(2\pi)^6} r^2 \exp[-I(\mathbf{k}^{(\alpha)}, t)] \{ T(\mathbf{k}^{(\alpha)}, \mathbf{x}^{(\alpha)}, t) - 1 \} \exp\left[i \sum_{\alpha=1}^2 \mathbf{k}^{(\alpha)} \cdot (\mathbf{x}^{(\alpha)} - \mathbf{x}_0^{(\alpha)}) \right] \quad (\text{B.14})$$

を用いる。ここで、さらに $T(\mathbf{k}^{(\alpha)}, \mathbf{x}^{(\alpha)}, t)$ を展開し、その1次までで近似すると(B.14)式は

$$\int \frac{d\mathbf{k}^{(1)} d\mathbf{k}^{(2)} d\mathbf{r} d\mathbf{R}}{(2\pi)^6} r^2 \left[- \int_0^t d\tau (t-\tau) \int d\mathbf{l} \hat{S}(\mathbf{l}, \tau) \left\{ \frac{2}{3} (\mathbf{k}^{(1)2} + \mathbf{x}^{(2)2}) + 2 \left(\mathbf{k}^{(1)} \cdot \mathbf{k}^{(2)} - \frac{(\mathbf{k}^{(1)} \cdot \mathbf{l})(\mathbf{k}^{(2)} \cdot \mathbf{l})}{l^2} \right) \exp(i\mathbf{l} \cdot \mathbf{r}) \right\} \right. \\ \left. + I(\mathbf{k}, \mathbf{K}, t) \right] \exp\{-I(\mathbf{k}, \mathbf{K}, t) + i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + i\mathbf{K} \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{R}_0)\} = 0 \quad (\text{B.15})$$

となる。これより $\beta(t)$ の決定方程式

$$\beta(t) = \frac{8}{3} \int_0^t d\tau (t-\tau) \int d\mathbf{l} \hat{S}(\mathbf{l}, \tau) \{ 1 - \exp[-\beta(t)l^2/2 - i\mathbf{l} \cdot \mathbf{r}_0] \} \quad (\text{B.16})$$

が得られる。

C. Kolmogorovの-5/3乗則について

乱流場において、Reynolds数が十分に大きい場合のエネルギースペクトル構造について考える。この場合、エネルギー流入口である低波数領域から粘性によるエネルギー散逸が主である高波数のエネルギー散逸領域へ向けてのエネルギーの流れが存在する（エネルギーカスケードという）。よって、ある波数領域においてはエネルギースペクトルは散逸平衡状態にあると考えられる（この領域を慣性領域という）。ここでは、より低波数成分からのエネルギー供給と、より高波数成分へのエネルギー伝達と、粘性によるエネルギー散逸とが釣合っていると考えられるので、この普遍状態は、外部からのエネルギー供給を表すエネルギー散逸率 ε と粘性散逸を支配する粘性率 ν の二つの独立パラメータのみに依存すると考えられる（Kolmogorovの第1仮設）。この場合、エネルギースペクトル $E(k)$ は次元解析により

$$E(k) = \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} F(k/k_d) \quad (\text{C.1})$$

$$k_d = (\nu^3/\varepsilon)^{-1/4} \quad (\text{C.2})$$

のようになることが判る。但し、 F は無次元関数、 k_d はこの波数領域を代表する波数でKolmogorov波数という。さらに、慣性領域の下端には粘性の影響を受けない領域（慣性小領域という）が存在し、そこではエネルギースペクトル $E(k)$ がエネルギー散逸率 ε のみに依存すると考えられる（kolmogorovの第2仮設）。よって、この場合次元解析により

$$E(k) = C\varepsilon^{2/3}k^{-5/3} \quad (C.3)$$

（但し、 C は無次元定数である）となる。このエネルギースペクトルをKolmogorovの慣性小領域スペクトル、あるいはこのことをKolmogorovの-5/3乗則という。¹⁾ この論文では、現実のエネルギースペクトルが慣性領域で(C.3)式のようにになっていることが多いので、それも含めてKolmogorovの-5/3乗則と呼んでいる。

D. スケーリング則について

一般に、2つの量 Q_1, Q_2 に対して関数 F が存在し、ある範囲の Q_1, Q_2 に対して良い近似で $F(Q_2/Q_1)$ と表すことが出来る場合に、 F はスケーリング則を満たすという。

2量として $\beta(t), t^\alpha$ ($\alpha = \text{const}$) を F として(1.2.2)式を考えると、ある範囲のに対して(1.2.2)式が $\beta(t)/t^\alpha$ のみで表すことが出来れば、(1.2.2)式はスケーリング則を満たすといえるが、このようになるには、 $\alpha = 2/3$ である必要があることが判る。

E. モーメント及びキュムラントについて

モーメントは次式のように、特性汎関数 $\phi[z(k), t]$ のTaylor展開の係数 $M^{(n)}$ ($n=1, 2, \dots$) によって定義される:¹⁾

$$\phi[z(k), t] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int \dots \int M_{1, \dots, 1_n}^{(n)}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n; t) \delta(\mathbf{k}_1 + \dots + \mathbf{k}_n) z_{1_1}(\mathbf{k}_1) \dots z_{1_n}(\mathbf{k}_n) d\mathbf{k}_1 \dots d\mathbf{k}_n \quad (D.1)$$

$$M_{1, \dots, 1_n}^{(n)}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n; t) \delta(\mathbf{k}_1 + \dots + \mathbf{k}_n) = i^{-n} \left[\frac{\delta^n \phi}{\delta z_{1_1}(\mathbf{k}_1) \dots \delta z_{1_n}(\mathbf{k}_n)} \right]_{z=0}. \quad (D.2)$$

同様に、キュムラントは次式のように特性汎関数の対数のTaylor展開の係数として定義される:

$$\phi[z(k), t] = \exp \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int \cdots \int C_{1_r \dots 1_n}^{(n)}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n; t) \delta(\mathbf{k}_1 + \dots + \mathbf{k}_n) z_{1_r}(\mathbf{k}_1) \cdots z_{1_n}(\mathbf{k}_n) d\mathbf{k}_1 \cdots d\mathbf{k}_n \right] \quad (D.3)$$

$$C_{1_r \dots 1_n}^{(n)}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n; t) \delta(\mathbf{k}_1 + \dots + \mathbf{k}_n) = i^{-n} \left[\frac{\delta^n \log \phi}{\delta z_{1_r}(\mathbf{k}_1) \cdots \delta z_{1_n}(\mathbf{k}_n)} \right]_{z=0} \quad (D.4)$$

ここで特性汎関数は元々

$$\phi[z, t] = \left\langle \exp \left[i \int \mathbf{z}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{v}^*(\mathbf{k}, t) d\mathbf{k} \right] \right\rangle \quad (D.4)$$

(但し, $\langle \rangle$ は統計平均; $\mathbf{v}(\mathbf{k}, t)$ は速度振幅を表す) で定義されるから, この式と(D.2)式よりモーメントは平均速度積 $\langle v_{1_r}(\mathbf{k}_1, t) \cdots v_{1_n}(\mathbf{k}_n, t) \rangle$ と以下の関係があることが判る:

$$\langle v_{1_r}(\mathbf{k}_1, t) \cdots v_{1_n}(\mathbf{k}_n, t) \rangle = M_{1_r \dots 1_n}^{(n)*}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n; t) \delta(\mathbf{k}_1 + \dots + \mathbf{k}_n) \quad (D.5)$$

さらに, (D.2)式と(D.4)式からキュムラントも平均速度積と関係付けられることが判る.

F. (2.2.1)式について

一般的には, ハミルトニアンの中の q_j を $\frac{(q_{j+1} + q_j)}{2}$ と置いて

$$K(r, t, r_0, 0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \left(\prod_{j=1}^{N-1} dq_j \right) \left(\prod_{j=0}^{N-1} \frac{dp_j}{2\pi} \right) e^{i \sum_{j=0}^{N-1} p_j (q_{j+1} - q_j) - \frac{i\epsilon}{2} \sum_{j=0}^{N-1} \left[p_j^2 + \frac{\omega^2}{4} (q_{j+1} + q_j)^2 \right]} \quad (E.1)$$

と書かれるが, (2.2.1)式と(E.1)式は解析的に厳密解が求められ一致するので, ここでは(2.2.1)式を用いる. 尚, これらの厳密解は

$$K(r, t, r_0, 0) = \left(\frac{\omega}{2\pi i \sin \omega t} \right)^{1/2} \exp \left\{ \frac{i\omega}{2 \sin \omega t} \left[(r^2 + r_0^2) \cos \omega t - 2rr_0 \right] \right\} \quad (E.2)$$

である.¹⁷⁾

G. 係数 C^α, D と Wiener-Hermite 展開の関係について

Wiener-Hermite 展開では, 確率変数 x^α ($\alpha=1, 2, 3$) は, 独立な理想確率変数 a^α ($\alpha=1, 2, 3$) により

$$x^\alpha = P^\alpha a^\alpha + Q^\alpha a^\beta a^\gamma \quad (\alpha, \beta, \gamma=1, 2, 3: \text{cyclic}) \quad (\text{G.1})$$

$$\langle a^\alpha \rangle = 0 \quad (\text{G.2})$$

$$\langle (a^\alpha)^2 \rangle = 1 \quad (\text{G.3})$$

と書ける¹⁹⁾. これより

$$\langle (x^\alpha)^2 \rangle = (P^\alpha)^2 + (Q^\alpha)^2 \quad (\text{G.4})$$

$$\langle x^1 x^2 x^3 \rangle = P^1 P^2 Q^3 + P^1 Q^2 P^3 + Q^1 P^2 P^3 + Q^1 Q^2 Q^3 \quad (\text{G.5})$$

となる. 一方, (2.3.27) 式の特性関数を用いると

$$\begin{aligned} \langle (x^\alpha)^2 \rangle &= \left. \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial z^\alpha} \right)^2 \phi(z, t) \right|_{z^\alpha=0} \\ &= 2(C^\alpha)^2 \end{aligned} \quad (\text{G.6})$$

$$\begin{aligned} \langle x^1 x^2 x^3 \rangle &= \left. \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial z^1} \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial z^2} \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial z^3} \phi(z, t) \right|_{z^\alpha=0} \\ &= D \end{aligned} \quad (\text{G.7})$$

となる. 以上より C^α, D と P^α, Q^α の間には

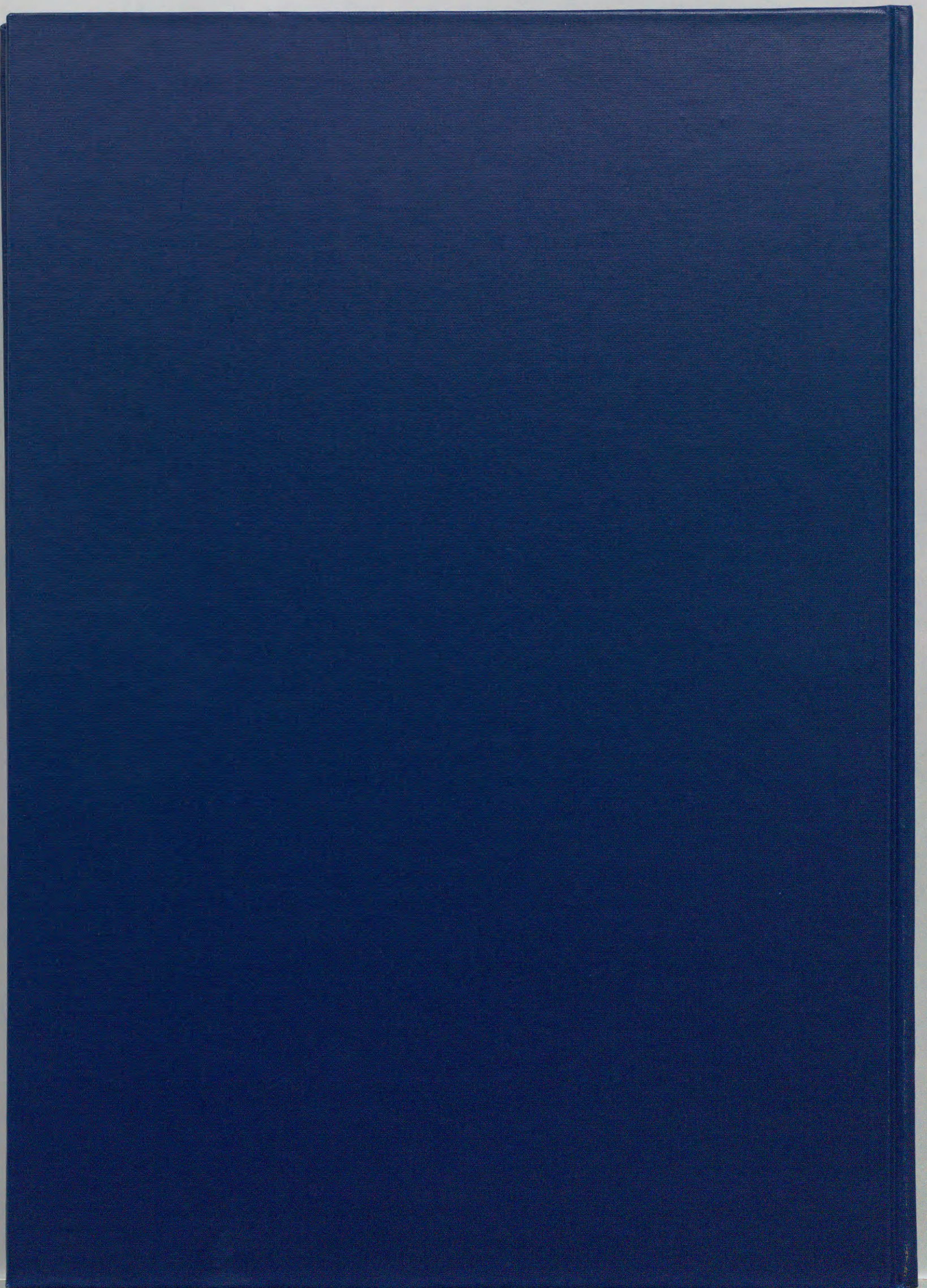
$$C^\alpha = \frac{1}{2} [(P^\alpha)^2 + (Q^\alpha)^2] \quad (\text{G.8})$$

$$D = P^1 P^2 Q^3 + P^1 Q^2 P^3 + Q^1 P^2 P^3 + Q^1 Q^2 Q^3 \quad (\text{G.9})$$

という関係があることが判る.

文 献

- 1) 巽 友正 その他: 乱流現象の科学 その解明と制御, 文部省科学研究費補助金
特定研究「乱流現象の解明と制御」成果報告書 (1985).
- 2) L. F. Richardson: *Press. R. Soc. London*, A110, (1926) No.756, 709.
- 3) A. S. Monin and A. M. Yaglom: 統計流体力学 (文一総合出版, 1979) 第4巻.
- 4) G. K. Batchelor: *Austr. J. Sci. Res.*, A2, 437 (1950).
- 5) G. K. Batchelor: *Press. Cambr. Phil. Soc.*, 47, 359 (1952).
- 6) P. H. Roberts: *J. Fluid Mech.*, 11, 257 (1961).
- 7) Y. Inaba and M. Suzuki: *Prog. Theor. Phys.*, 74, 997 (1985).
- 8) K. Takayoshi and H. Mori: *Prog. Theor. Phys.*, 68, 439 (1982).
- 9) Y. Sakurai, M. Doi and T. Imamura: *J. Phys. Soc. Jpn.*, 53, 1995 (1984).
- 10) H. Nakao and T. Imamura: *J. Phys. Soc. Jpn.*, 58, 4253 (1989).
- 11) H. Nakao: *J. Phys. Soc. Jpn.*, 60, 2942 (1991).
- 12) H. Nakao and T. Imamura: submitted to *J. Phys. Soc. Jpn.*
- 13) K. Nagasawa, T. Imamura and T. Taniuti: *J. Phys. Soc. Jpn.*, 48, 2119 (1980).
- 14) M. Doi, R. Kambe and T. Imamura: *J. Phys. Soc. Jpn.*, 46, 1016 (1979).
- 15) W. W. Kellogg: *J. Meteor.*, 13, 241 (1956) No. 3.
- 16) A. Okubo and R. V. Ozmidov: *Izv. Akad. Nauk SSSR, Fiz. Atmosf. i Okeana*, 6, 534
(1970) No. 5.
- 17) 崎田文二, 吉川圭二: 経路積分による多自由度の量子力学 (岩波書店, 1986) .
- 18) 今村 勤: 確率場の数学 (岩波書店, 1976) .
- 19) S. Tanaka and T. Imamura: *Prog. Theor. Phys.*, 45, 1098 (1971).



Inches 1 2 3 4 5 6 7 8
cm 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19

Kodak Color Control Patches

© Kodak, 2007 TM; Kodak



Kodak Gray Scale



© Kodak, 2007 TM; Kodak

A 1 2 3 4 5 6 **M** 8 9 10 11 12 13 14 15 **B** 17 18 19

