

事業体の区間効率値を評価するための DEA モデル

瀬 見 博

I 序

多数のインプットを消費することで多数のアウトプットを産出している、同一の生産活動を営む複数の事業体間の相対的効率性を評価するために、1978年、Charnes, Cooper, Rhodes によって DEA (Data Envelopment Analysis) と呼ばれるノンパラメトリックな分析方法が提案された¹⁾。その後、DEA は、理論面で一層の精緻化が図られるとともに、応用面でもさまざまな分野に適用され、その有用性が認められてきた²⁾。

ところで、分析の対象になっている事業体の活動成果(相対的効率性)は、基本的に、相異なる2つの観点に基づいて評価できることが知られている。1つは、DEA 本来の考え方に則り、その事業体にとって最も有利な立場から効率性を測定しようとするものであり、他の1つは、逆に最も不利な立場からそれを計測しようとするものである³⁾。しかし、前者の楽観的立場から

1) Charnes, A., Cooper, W. W., Rhodes, E. (1978), Measuring the efficiency of decision making units, *European Journal of Operational Research*, 2, pp. 429-444.

2) Cook, W. D., Seiford, L. M. (2009), Data envelopment analysis (DEA)-Thirty years on, *European Journal of Operational Research*, 192, pp. 1-17., Seiford, L. M. (1996), Data envelopment analysis: The evolution of the state of the art (1978-1995), *The Journal of Productivity Analysis*, 7, pp. 99-137. などを参照されたい。

3) 不利な立場から効率性を評価するための方法については、例えば、Wang, Y. M., Chin, K. S., Yang, J. B. (2007), Measuring the performances of decision-making units using geometric average efficiency, *Journal of the Operational Research Society*, 58, pp. 929-937. を参照されたい。

求められた最善の効率値（楽観的効率値）と後者の悲観的立場から得られた最悪の効率値（悲観的効率値）は、異なるモデルから算定された値であり、その関係が明確でないので比較することはあまり意味がない。さらに、どちらの観点から各事業体の活動成果を評価するかの判断はかなり恣意的であると考えられる。

こうした問題点を解決するために、効率性を区間値として捉え、同じ目的関数と制約条件の下で、上限を楽観的効率値、下限を悲観的効率値によって定めることを意図したモデルが数多く提唱されてきた。その代表的なものとして、Entani, Maeda, Tanaka の区間効率値モデル⁴⁾、Wang, Yang の限定 DEA モデル⁵⁾、Wang, Yi, Wang の区間 DEA モデル⁶⁾、などを挙げることができる。

そこで本稿において、主にこの3つのモデルを取り上げ、それらがどのような手法であるのかを概観するとともに、数値例を用いて比較・検討してみることとする。

II 相対的効率性を測定するための基本的 DEA モデル

同じ活動を行っている事業体（Decision Making Unit）の数が n 個あり、それを DMU_j ($j=1, \dots, n$) で表すことにする。また、各 DMU_j は m 種類のインプット i ($i=1, \dots, m$) をそれぞれ x_{ij} 単位投入することによって、 s 種類のアウトプット r ($r=1, \dots, s$) をそれぞれ y_{rj} 単位産出しているものとする。このとき、測定されるインプット項目とアウトプット項目はともに、すべての DMU_j で共通していることが必要である。しかし、各項目の測定

4) Entani, T., Maeda, Y., Tanaka, H. (2002), Dual models of interval DEA and its extension to interval data, *European Journal of Operational Research*, 136, pp. 32-45., 田中英夫・円谷友英・杉原一臣・井上勝雄 (2011), 『区間分析による評価と決定』, 海文堂出版, 69-104頁。

5) Wang, Y. M., Yang, J. B. (2007), Measuring the performances of decision-making units using interval efficiencies, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 198, pp. 253-267.

6) Wang, N. S., Yi, R. H., Wang, W. (2008), Evaluating the performances of decision-making units based on interval efficiencies, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 216, pp. 328-343.

単位は異なってもよい。さらに、 x_{ij} と y_{rj} の値は観測可能で、正の値をとると仮定する。

さて、Charnes, Cooper, Rhodes は、このような状況下で、各事業体にとって最善の相対的効率値 θ_o を、 $\theta_o \leq 1$ の範囲内で評価するために、

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \theta_o = \sum_{r=1}^s u_r y_{ro} / \sum_{i=1}^m v_i x_{io} \\ \text{s.t.} \quad & \theta_j = \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} / \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 1, \quad j=1, \dots, n \\ & u_r, v_i \geq 0, \quad r=1, \dots, s; i=1, \dots, m \end{aligned} \quad (1)$$

によって定式化される CCR モデルを提案している。ここに、目的関数の下付添字 o は事業体 DMU_o が分析の対象になっていることを意味する。また、モデルの決定変数 u_r と v_i はそれぞれ r 番目のアウトプットと i 番目のインプットに付与される加重値である。

ところで、分数計画モデル(1)は、それと同値の LP モデル(2)に変換できることがわかっている⁷⁾。

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \theta_o = \sum_{r=1}^s u_r y_{ro} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0, \quad j=1, \dots, n \\ & \sum_{i=1}^m v_i x_{io} = 1 \\ & u_r, v_i \geq 0, \quad r=1, \dots, s; i=1, \dots, m \end{aligned} \quad (2)$$

なお、上記モデル(2)の最適な目的関数値 θ_o^* を $\theta_o^* = 1$ にする正の加重値の集合が存在しているとき、 DMU_o は DEA 効率的であると呼び、そうでない場合、DEA 効率的でないという。ただし、DEA 効率的でないことが必ずしも DEA 非効率的であることを意味しない点に注意する必要がある。また、DEA 効率的な DMU_j によって効率的フロンティアが形成される。

一方、効率性は観点の違いによって、さまざまな範囲内で測定することが可能である。例えば、事業体の相対的効率値 θ_o を $\theta_o \geq 1$ の範囲で測定することを考えると、以下のような分数計画モデルを定式化することができる。

7) Charnes, A., Cooper, W. W. (1962), Programming with linear fractional functionals, *Naval Research Logistics Quarterly*, 9, pp. 181-186.

$$\begin{aligned}
\text{Min} \quad & \theta_o = \sum_{r=1}^s u_r y_{ro} / \sum_{i=1}^m v_i x_{io} \\
\text{s.t.} \quad & \theta_j = \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} / \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \geq 1, \quad j=1, \dots, n \\
& u_r, v_i \geq 0, \quad r=1, \dots, s; i=1, \dots, m
\end{aligned} \tag{3}$$

さらに、上記モデル(3)は同値の LP モデル(4)に変換することが可能である。

$$\begin{aligned}
\text{Min} \quad & \theta_o = \sum_{r=1}^s u_r y_{ro} \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \geq 0, \quad j=1, \dots, n \\
& \sum_{i=1}^m v_i x_{io} = 1 \\
& u_r, v_i \geq 0, \quad r=1, \dots, s; i=1, \dots, m
\end{aligned} \tag{4}$$

ここに、目的関数の最適値 θ_o^* は DMU_o にとって最悪の相対的効率値を表しており、 $\theta_o^* = 1$ のとき、 DMU_o は DEA 非効率的であると呼ばれ、そうでない場合、DEA 非効率的でないといわれる。なお、DEA 非効率的でないことが必ずしも DEA 効率的事であることを意味しない。また、DEA 非効率的な DMU_j によって非効率的フロンティアが形成される。

III Entani, Maeda, Tanaka の区間効率値モデル

前節の最善の立場と最悪の立場から求められた相対的効率値は、異なった範囲内で計測された別々の効率値であるため、その意味が違い比較することはできない。

そこで、Entani, Maeda, Tanaka は、効率性を1つの区間として捉え、同じ制約条件の下で、同じ目的関数を最大化、最小化することにより得られる最適値を上限と下限にもつ区間効率値モデルを提案している。その際、上限は DMU_o にとって最も有利な楽観的（最善の）観点に、下限は最も不利な悲観的（最悪の）観点に基づいて決定される。

まず、 DMU_o に関する区間効率値の上限を以下のように定式化する。

$$\begin{aligned}
\text{Max} \quad & \theta_o^U = \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{ro} / \sum_{i=1}^m v_i x_{io}}{\max_{1 \leq j \leq n} \{ \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} / \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \}} \\
\text{s.t.} \quad & u_r, v_i \geq 0, \quad r=1, \dots, s; i=1, \dots, m
\end{aligned} \tag{5}$$

ここで、目的関数の分母を1とおき、それを制約条件に加えると、モデル(5)

はモデル(6)に変換することができる。

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \theta_o^U = \sum_{r=1}^s u_r y_{ro} / \sum_{i=1}^m v_i x_{io} \\ \text{s.t.} \quad & \max_{1 \leq j \leq n} \{ \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} / \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \} = 1 \\ & u_r, v_i \geq 0, \quad r=1, \dots, s; i=1, \dots, m \end{aligned} \quad (6)$$

上記モデル(6)は CCR モデル(1)と同値であり、上限は(2)の LP モデルを解くことによって求められる⁸⁾。

次に、DMU_o に関する区間効率値の下限は次のように定義することができる。

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \theta_o^L = \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{ro} / \sum_{i=1}^m v_i x_{io}}{\max_{1 \leq j \leq n} \{ \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} / \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \}} \\ \text{s.t.} \quad & u_r, v_i \geq 0, \quad r=1, \dots, s; i=1, \dots, m \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、目的関数の分母を 1 とおくことによって、モデル(7)は、

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \theta_o^L = \sum_{r=1}^s u_r y_{ro} / \sum_{i=1}^m v_i x_{io} \\ \text{s.t.} \quad & \max_{1 \leq j \leq n} \{ \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} / \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \} = 1 \\ & u_r, v_i \geq 0, \quad r=1, \dots, s; i=1, \dots, m \end{aligned} \quad (8)$$

に変換できる。しかし、モデル(8)は同値の LP 問題に置き換えることができないので、DEA 効率的な各 DMU_j については、 $\sum_{r=1}^s u_r y_{rj} / \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} = 1$ が成り立つことを想定して、モデル(8)を以下の n_1 個の最適化問題に分割する。ここに、 n_1 は DEA 効率的な DMU_j の数を表す。

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \theta_{oj}^L = \sum_{r=1}^s u_r y_{ro} / \sum_{i=1}^m v_i x_{io} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} / \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} = 1 \\ & u_r, v_i \geq 0, \quad r=1, \dots, s; i=1, \dots, m \end{aligned} \quad (9)$$

さらに、 $\sum_{i=1}^m v_i x_{io} = 1$ とおくことにより、(9)は同値の LP モデルに単純化することができる。

$$\text{Min} \quad \theta_{oj}^L = \sum_{r=1}^s u_r y_{ro}$$

8) Entani, Maeda, Tanaka, *op.cit.*, p. 35.

$$\begin{aligned}
 \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^m v_i x_{io} = 1 \\
 & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} = 0 \\
 & u_r, v_i \geq 0, \quad r=1, \dots, s; i=1, \dots, m
 \end{aligned} \tag{10}$$

いま、LP モデル(10)の目的関数の最適値を θ_{oj}^{L*} で表すことにすれば、 $j=o$ のときには明らかに $\theta_{oj}^{L*}=1$ が成り立つため、DMU_o の効率性の下限は、最終的に、

$$\theta_o^{L*} = 1 \wedge \min_{j \neq o} \{ \theta_{oj}^{L*} \} \tag{11}$$

によって決定されることになる。ここに、 $a \wedge b = \min \{ a, b \}$ である。また、上限を求めるモデル(6)の目的関数の最適値を θ_o^{U*} で表せば、DMU_o の効率性区間は、 $[\theta_o^{L*}, \theta_o^{U*}]$ と記することができる。

IV 限定 DEA モデルと区間 DEA モデル

Wang, Yang は、Entani, Maeda, Tanaka のモデルに関して、(i)モデル(10)は、制約条件が2つしかないので1つの u_r と1つの v_i だけが非零で他はすべて零となり、その結果、DMU_o の下限を計算する際に1つのインプットデータと1つのアウトプットデータだけしか用いられず、その他の多くのデータは無視されることになる、(ii)すべての DEA 非効率的な DMU_j を識別することができない、などの問題点があることを指摘し⁹⁾、それらを克服するために、反理想的 DMU_j (anti-ideal DMU_j; 以下 ADMU と呼ぶ) の概念を導入することによって、限定 DEA モデル (Bounded DEA model) を提案している。ADMU とは、生産可能集合内で最大のインプットを消費して最小のアウトプットを生産する仮想的な事業体であり、そのインプットとアウトプットは、

$$x_i^{\max} = \max_{1 \leq j \leq n} \{ x_{ij} \}, \quad i=1, \dots, m \tag{12}$$

$$y_r^{\min} = \min_{1 \leq j \leq n} \{ y_{rj} \}, \quad r=1, \dots, s \tag{13}$$

9) Wang, Yang, *op.cit.*, pp. 257-258.

により定義される。ここに、 x_i^{\max} は i 番目のインプットの最大値を、 y_r^{\min} は r 番目のアウトプットの最小値を表す。ADMU の活動成果はすべての DMU _{j} 内で最悪であるため、その効率値はどのような状況下においても最小になることがわかる。

いま、ADMU の最善の相対的効率値を θ_{ADMU}^* とすると、 θ_{ADMU}^* は分数計画モデル、

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \theta_{\text{ADMU}} = \sum_{r=1}^s u_r y_r^{\min} / \sum_{i=1}^m v_i x_i^{\max} \\ \text{s.t.} \quad & \theta_j = \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} / \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 1, \quad j=1, \dots, n \\ & u_r, v_i \geq 0, \quad r=1, \dots, s; i=1, \dots, m \end{aligned} \quad (14)$$

により決定することができる。これは、同値の LP モデル、

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \theta_{\text{ADMU}} = \sum_{r=1}^s u_r y_r^{\min} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0, \quad j=1, \dots, n \\ & \sum_{i=1}^m v_i x_i^{\max} = 1 \\ & u_r, v_i \geq 0, \quad r=1, \dots, s; i=1, \dots, m \end{aligned} \quad (15)$$

に変換可能であるため、通常、 θ_{ADMU}^* の値は(15)を用いて求められる。

ところで、ADMU を除く他の DMU _{j} の効率値は、 θ_{ADMU}^* より小さくなることはないので、 $[\theta_{\text{ADMU}}^*, 1]$ の範囲内ですべての DMU _{j} に関する効率値の区間を測定することができる。すなわち、効率値の区間は、次の一組の分数計画モデル、

$$\begin{aligned} \text{Max/Min} \quad & \theta_o = \sum_{r=1}^s u_r y_{ro} / \sum_{i=1}^m v_i x_{io} \\ \text{s.t.} \quad & \theta_{\text{ADMU}}^* \leq \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} / \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 1, \quad j=1, \dots, n \\ & u_r, v_i \geq 0, \quad r=1, \dots, s; i=1, \dots, m \end{aligned} \quad (16)$$

により与えられることになる。さらに、モデル(16)は同値の LP モデル、

$$\begin{aligned} \text{Max/Min} \quad & \theta_o = \sum_{r=1}^s u_r y_{ro} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0, \quad j=1, \dots, n \\ & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - (\theta_{\text{ADMU}}^*) \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \geq 0, \quad j=1, \dots, n \\ & \sum_{i=1}^m v_i x_{io} = 1 \end{aligned} \quad (17)$$

$$u_r, v_i \geq 0, \quad r=1, \dots, s; i=1, \dots, m$$

に変換可能である。したがって、(16)または(17)の目的関数の最大値 θ_o^{U*} (最善の相対的効率値) と最小値 θ_o^{L*} (最悪の相対的効率値) を用いて、DMU_o の効率性区間 $[\theta_o^{L*}, \theta_o^{U*}]$ を表すことができる。なお、DMU_o は、(i) $\theta_o^{U*}=1$ のとき、DEA 効率的、(ii) $\theta_o^{L*}=\theta_{ADMU}^*$ のとき、DEA 非効率的、(iii) DEA 効率的でも DEA 非効率的でもないとき、DEA 不特定、であるといわれる。

DEA 効率的な DMU_j によって効率的フロンティアが、DEA 非効率的な DMU_j によって非効率的フロンティアがそれぞれ決定され、DEA 不特定な DMU_j はこの2つのフロンティアに包絡される。また、最大幅の効率性区間 $[\theta_{ADMU}^*, 1]$ をもつ DMU_j は DEA 効率的かつ DEA 非効率的な DMU_j である。

一方、Wang, Yi, Wang は、生産可能集合内で最小のインプットを消費して最大のアウトプットを生産する理想的な DMU_j (ideal DMU_j; 以下 IDMU と呼ぶ) の概念と出力指向型 CCR モデルを結びつけることによって区間 DEA モデル (Interval DEA model) を展開している¹⁰⁾。IDMU は架空の事業体であり、そのインプットとアウトプットは、

$$x_i^{\min} = \min_{1 \leq j \leq n} \{x_{ij}\}, \quad i=1, \dots, m \quad (18)$$

$$y_r^{\max} = \max_{1 \leq j \leq n} \{y_{rj}\}, \quad r=1, \dots, s \quad (19)$$

により定義される。IDMU はすべての DMU_j 内で最善の活動成果を達成していることから、出力指向型 CCR モデルを適用した場合、その効率値は最小になる。

いま、IDMU の最悪の相対的効率値を λ_{IDMU}^* とすると、それは、

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \lambda_{IDMU} = \sum_{i=1}^m v_i x_i^{\min} / \sum_{r=1}^s u_r y_r^{\max} \\ \text{s.t.} \quad & \lambda_j = \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} / \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} \leq 1, \quad j=1, \dots, n \\ & u_r, v_i \geq 0, \quad r=1, \dots, s; i=1, \dots, m \end{aligned} \quad (20)$$

により決定される。さらに、この分数計画モデルは同値の LP モデル、

10) 出力指向型 CCR モデルでは、アウトプットの加重和に対するインプットの加重和の比率として効率性が定義される。

$$\begin{aligned}
\text{Max} \quad & \lambda_{\text{IDMU}} = \sum_{i=1}^m v_i x_i^{\min} \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \geq 0, \quad j=1, \dots, n \\
& \sum_{r=1}^s u_r y_r^{\max} = 1 \\
& u_r, v_i \geq 0, \quad r=1, \dots, s; i=1, \dots, m
\end{aligned} \tag{21}$$

に変換できる。

ところで、各 DMU_j の最悪の相対的効率値は明らかに λ_{IDMU}^* より大きいので、 $[\lambda_{\text{IDMU}}^*, 1]$ の範囲内ですべての DMU_j に関する効率性の区間を評価することができる。すなわち、DMU_o の効率性区間は、以下の一組の分数計画モデル、

$$\begin{aligned}
\text{Max/Min} \quad & \lambda_o = \sum_{i=1}^m v_i x_{io} / \sum_{r=1}^s u_r y_{ro} \\
\text{s.t.} \quad & \lambda_{\text{IDMU}}^* \leq \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} / \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} \leq 1, \quad j=1, \dots, n \\
& u_r, v_i \geq 0, \quad r=1, \dots, s; i=1, \dots, m
\end{aligned} \tag{22}$$

を解くことにより求められる。なお、モデル(22)は、同値の LP モデル、

$$\begin{aligned}
\text{Max/Min} \quad & \lambda_o = \sum_{i=1}^m v_i x_{io} \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \geq 0, \quad j=1, \dots, n \\
& (\lambda_{\text{IDMU}}^*) \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0, \quad j=1, \dots, n \\
& \sum_{r=1}^s u_r y_{ro} = 1 \\
& u_r, v_i \geq 0, \quad r=1, \dots, s; i=1, \dots, m
\end{aligned} \tag{23}$$

に変換できる。それ故、モデル(22)または(23)の目的関数の最大値を λ_o^{U*} 、最小値を λ_o^{L*} とすれば、DMU_o の効率性区間は $[\lambda_o^{L*}, \lambda_o^{U*}]$ で与えられることになる。なお、DMU_o は、(i) $\lambda_o^{U*} = 1$ のとき、DEA 非効率的、(ii) $\lambda_o^{L*} = \lambda_{\text{IDMU}}^*$ のとき、DEA 効率的、(iii) DEA 効率的でも DEA 非効率的でもないとき、DEA 不特定、であるといわれる。また、 $[\lambda_{\text{IDMU}}^*, 1]$ で表される最大幅の効率性区間をもつ DMU_j は DEA 効率的かつ DEA 非効率的な DMU_j である。

V 数値例

いま、1つのインプットと2つのアウトプットをもつ A から H の8個の

DMU_j についてその効率性を測定する問題を考える。表 1 は用いられるデータである。ただし、インプットは単純化のために 1 に規準化されている。また、ADMU と IDMU に関するデータも表 1 の下の 2 行に記されている。さらに、表 1 のデータが、横軸にアウトプット 1 / インプットを、縦軸にアウトプット 2 / インプットをとった図 1 に示されている。

表 1 数値例のデータ

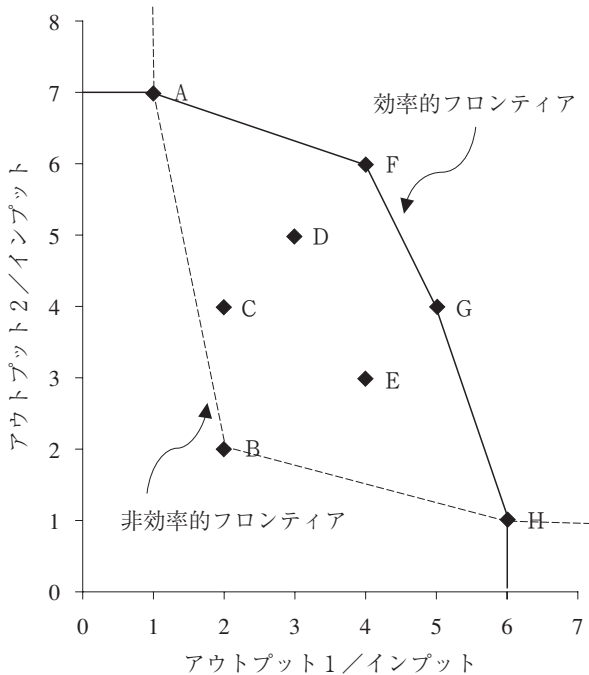
事業体	インプット (x_{1j})	アウトプット 1 (y_{1j})	アウトプット 2 (y_{2j})
A	1	1	7
B	1	2	2
C	1	2	4
D	1	3	5
E	1	4	3
F	1	4	6
G	1	5	4
H	1	6	1
ADMU	1	1	1
IDMU	1	6	7

さて、表 1 のデータを、モデル(2)と(4)に適用することによって、各 DMU_j の最善の相対的効率値と最悪の相対的効率値を求めることができる。その結果は、表 2 の第 2 列と第 3 列に記されている。ここで、最善の相対的効率性という観点から各事業体を評価すると、A, F, G, H が DEA 効率的であり、図 1 に示されているように効率的フロンティアを構成すること、また、DEA 効率的でない事業体の成果は、D > E > C > B の順になっていること、がわかる。ここに、記号 $a > b$ は a が b より優れていることを表す。一方、最悪の相対的効率性という観点に立てば、A, B, H が DEA 非効率的な事業体であり、それらによって非効率的フロンティアが形成されること、また、DEA 非効率的でない事業体の成果は、F > G > D > E > C の順になっていること、がわかる。なお、事業体 A と H は DEA 効率的であると同時に DEA 非効率

表 2 数値例の相対的効率値と効率性区間

事業体	最善の 効率値	最悪の 効率値	Entani 等の モデル	限定 DEA モデル	区間 DEA モデル
A	1.0000	1.0000	[0.1667,1.0000]	[0.2143,1.0000]	[0.3243,1.0000]
B	0.4286	1.0000	[0.2857,0.4286]	[0.2143,0.4286]	[0.7568,1.0000]
C	0.6364	1.1667	[0.3333,0.6364]	[0.2500,0.6364]	[0.5097,0.8571]
D	0.8182	1.6667	[0.5000,0.8182]	[0.3571,0.8182]	[0.3964,0.6000]
E	0.7895	1.6000	[0.4286,0.7895]	[0.3429,0.7895]	[0.4108,0.6250]
F	1.0000	2.1667	[0.6667,1.0000]	[0.4643,1.0000]	[0.3243,0.4615]
G	1.0000	2.1000	[0.5714,1.0000]	[0.4500,1.0000]	[0.3243,0.4762]
H	1.0000	1.0000	[0.1429,1.0000]	[0.2143,1.0000]	[0.3243,1.0000]

図 1 表 1 のデータ



的であると評価されているが、このような正反対の結果がもたらされるのは評価モデルの生産可能集合が異なっていることによる。

次に、Entani, Maeda, Tanaka のモデル(6)と(10)を用いて区間効率値を計算してみることにする。それらは表2の第4列に記されている。各DMU_jの区間効率値の上限は、モデル(2)の最適解と同じになるが、下限は、4つの事業体A, F, G, HがDEA効率的であることから、(10)に関する4つのLPモデルを各事業体ごとに解く必要がある。例えば、事業体Cの下限 θ_{c}^{l*} は、以下の4つのLPモデル(LP1)~(LP4)の最適解を求め、それらの最小値によって与えられる。

$$\begin{array}{ll}
 \text{(LP1)} & \text{Min } \theta_{cA}^l = 2u_1 + 4u_2 \\
 & \text{s.t. } v_1 = 1 \\
 & \quad u_1 + 7u_2 - v_1 = 0 \\
 & \quad u_1, u_2, v_1 \geq 0 \\
 \text{(LP2)} & \text{Min } \theta_{cF}^l = 2u_1 + 4u_2 \\
 & \text{s.t. } v_1 = 1 \\
 & \quad 4u_1 + 6u_2 - v_1 = 0 \\
 & \quad u_1, u_2, v_1 \geq 0 \\
 \text{(LP3)} & \text{Min } \theta_{cG}^l = 2u_1 + 4u_2 \\
 & \text{s.t. } v_1 = 1 \\
 & \quad 5u_1 + 4u_2 - v_1 = 0 \\
 & \quad u_1, u_2, v_1 \geq 0 \\
 \text{(LP4)} & \text{Min } \theta_{cH}^l = 2u_1 + 4u_2 \\
 & \text{s.t. } v_1 = 1 \\
 & \quad 6u_1 + u_2 - v_1 = 0 \\
 & \quad u_1, u_2, v_1 \geq 0
 \end{array}$$

すなわち、上記モデルのそれぞれの最適解は、 $\theta_{cA}^{l*} = 4/7 (u_1^* = 0, u_2^* = 1/7, v_1^* = 1)$, $\theta_{cF}^{l*} = 1/2 (u_1^* = 1/4, u_2^* = 0, v_1^* = 1)$, $\theta_{cG}^{l*} = 2/5 (u_1^* = 1/5, u_2^* = 0, v_1^* = 1)$, $\theta_{cH}^{l*} = 1/3 (u_1^* = 1/6, u_2^* = 0, v_1^* = 1)$ であるため、 θ_c^{l*} は $\theta_c^{l*} = \min \{4/7, 1/2, 2/5, 1/3\} \cong 0.3333$ となる。なお、Entani, Maeda, Tanaka のモデルでは、モデル(4)において見いだされたDEA非効率的な3つの事業体A, B, Hのうち、最小の下限をもつHだけをDEA非効率的であると判定しており、A, Bを同様に識別できていないこと、したがって、非効率的フロンティアを決定できないこと、また、下限を計算する際にただ1つのアウトプットとインプットしか使用していないこと、がわかる。

最後に、表1のデータを、Wang, Yangの限定DEAモデル(15), (17)とWang,

Yi, Wang の区間 DEA モデル(21), (23)に適用した場合の区間効率値を求めてみることにする。それらの結果は、表 2 の第 5 列と第 6 列に示されている。

限定 DEA モデルでは、まず、(15)を用いて架空の反理想的事業体 ADMU の最善の効率値 θ_{ADMU}^* を決定する必要がある。それは、以下の LP モデル、

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \theta_{ADMU} = u_1 + u_2 \\ \text{s.t.} \quad & u_1 + 7u_2 - v_1 \leq 0, & 2u_1 + 2u_2 - v_1 \leq 0, \\ & 2u_1 + 4u_2 - v_1 \leq 0, & 3u_1 + 5u_2 - v_1 \leq 0, \\ & 4u_1 + 3u_2 - v_1 \leq 0, & 4u_1 + 6u_2 - v_1 \leq 0, \\ & 5u_1 + 4u_2 - v_1 \leq 0, & 6u_1 + u_2 - v_1 \leq 0, \\ & v_1 = 1, & u_1, u_2, v_1 \geq 0 \end{aligned}$$

から得ることができ、 $\theta_{ADMU}^* = 3/14 \cong 0.2143$ となることがわかる。次に、この値を(17)に代入することによって、すべての事業体の区間効率値が算定される。例えば、事業体 A の区間効率値の上限と下限は、それぞれ、下記 LP モデルの最大問題と最小問題の解として与えられる。

$$\begin{aligned} \text{Max/Min} \quad & \theta_A = u_1 + 7u_2 \\ \text{s.t.} \quad & u_1 + 7u_2 - v_1 \leq 0, & 2u_1 + 2u_2 - v_1 \leq 0, \\ & 2u_1 + 4u_2 - v_1 \leq 0, & 3u_1 + 5u_2 - v_1 \leq 0, \\ & 4u_1 + 3u_2 - v_1 \leq 0, & 4u_1 + 6u_2 - v_1 \leq 0, \\ & 5u_1 + 4u_2 - v_1 \leq 0, & 6u_1 + u_2 - v_1 \leq 0, \\ & u_1 + 7u_2 - (3/14)v_1 \geq 0, & 2u_1 + 2u_2 - (3/14)v_1 \geq 0, \\ & 2u_1 + 4u_2 - (3/14)v_1 \geq 0, & 3u_1 + 5u_2 - (3/14)v_1 \geq 0, \\ & 4u_1 + 3u_2 - (3/14)v_1 \geq 0, & 4u_1 + 6u_2 - (3/14)v_1 \geq 0, \\ & 5u_1 + 4u_2 - (3/14)v_1 \geq 0, & 6u_1 + u_2 - (3/14)v_1 \geq 0, \\ & v_1 = 1, & u_1, u_2, v_1 \geq 0 \end{aligned}$$

ところで、限定 DEA モデルでは、Entani, Maeda, Tanaka のモデルによる結果と異なり、新たに A, B を DEA 非効率的な事業体であると評価している。すなわち、効率性区間の上限値から A, F, G, H が DEA 効率的な事業体

であると同時に、その下限値から A, B, H が DEA 非効率的な事業体であると判定しており、モデル(2), (4)の結果と完全に一致していることがわかる。また、DEA 効率的な事業体 A, F, G, H の活動成果は、下限効率値の違いによって、 $F > G > A \sim H$ の順になっていること、同様に、DEA 非効率的な事業体 A, B, H の成果は、上限値の違いによって、 $A \sim H > B$ の順になっていること、がわかる。ここに、記号 $a \sim b$ は a と b が同等であることを表す。

区間 DEA モデルにおいても、まず、架空の理想的な事業体 IDMU の最悪の効率値 λ_{IDMU}^* を②により求め、次に、それを③に代入して各事業体の区間効率値が決定される。なお、 λ_{IDMU}^* の値は、 $\lambda_{IDMU}^* = 12/37 \cong 0.3243$ となる。

ところで、表2の第6列の結果を見れば、A, F, G, H が DEA 効率的な事業体であり、それらの活動成果は区間効率値の上限の違いにより $F > G > A \sim H$ の順になっていること、また、A, B, H が DEA 非効率的な事業体であり、それらの成果は下限の違いにより $A \sim H > B$ の順になっていること、さらに、これらの結果は限定 DEA モデルの場合と全く同じであること、がわかる。

VI 結

既述したように、また数値例からもわかるように、Entani, Maeda, Tanaka のモデルには、Wang, Yang が指摘するいくつかの問題点が存在している。すなわち、区間効率値の下限を算定する場合に、事業体のインプットやアウトプットの数に関わりなく、ただ1つのインプットとアウトプットしか利用されず、ほとんどの制約条件が無視されていること、また、DEA 非効率的な事業体をすべて完全に識別することができず、非効率的のフロンティアを決定できないこと、などである。

一方、そうした不都合な点を改良するために考案された2つのモデル(Wang, Yang の限定 DEA モデルや Wang, Yi, Wang の区間 DEA モデル)にもさらに考慮ないし工夫すべき点があるように思われる。例えば、いくつかの事業体は DEA 効率的であると同時に DEA 非効率的であると判定される

が、それをどのように理解すればよいかが問題となる。勿論、DEA 効率的な事業体のすべてが最善の成果を達成しているわけではないし、DEA 非効率的な事業体の成果がすべて最悪であるとは限らないので、それらは最善でも最悪でもない成果を上げている事業体であると解釈することはできるが、もう少しその取り扱いについて深く考察する必要がある。さらに、架空の反理想的な事業体 ADMU や理想的な事業体 IDMU のアウトプット値やインプット値を所与のデータから決定する場合に、それらの値がすべて零となり各事業体の区間効率値が算出できない状況が考えられる。特に、多くのインプットやアウトプットが存在する現実問題にモデルを適用する際には、そのような事態が頻繁に起きる可能性がある。したがって、そうしたケースにも対応できるようにモデルを改良することが求められる。なお、この点を解決するために、Azizi, Jahed によって Wang, Yi, Wang の区間 DEA モデルを修正した新たなモデルが提示されていることを付記しておく¹¹⁾。

(筆者は関西学院大学商学部教授)

11) Azizi, H., Jahed, R. (2011), Improved data envelopment analysis models for evaluating interval efficiencies of decision-making units, *Computers & Industrial Engineering*, 61, pp. 897-901.