



Efecto de diferentes formulaciones de carga de fondo en flujos transitorios con lecho móvil

F.N. Cantero Chinchilla, O. Castro Orgaz

Departamento de Agronomía. Área de Ingeniería Hidráulica.

Universidad de Córdoba. Campus de Rabanales. Edificio Leonardo da Vinci. 14071 Córdoba

J.L. Ayuso Muñoz

Departamento de Ingeniería Rural. Área de Proyectos en Ingeniería.

Universidad de Córdoba. Campus de Rabanales. Edificio Leonardo da Vinci. 14071 Córdoba

1. Introducción

El transporte de sedimentos en un flujo de agua se da en forma de carga de fondo, carga suspendida y/o carga de superficie (wash load). La carga de partículas suspendidas comprende la mayoría del transporte de sedimentos ([van Rijn, 1984](#); [Mateos and Giraldez, 2005](#)). Sin embargo, la evolución dinámica del lecho está determinada por la carga de fondo ([Engelund y Fredsøe, 1976](#); [Bose y Dey, 2009](#)), que a su vez supone la mayor fracción de la carga de sedimentos transportada ([Vannoni y Brooks, 1957](#)).

Durante el desarrollo de las formas del lecho (por ejemplo, dunas y antidunas), el flujo se ve notablemente afectado. Los flujos de entrada y depósito de sedimentos desde el fondo al flujo condicionan los términos fuente de las ecuaciones de Saint-Venant ([Wu y Wang, 2007](#)), induciendo aceleraciones y deceleraciones locales que modifican las características del flujo. Como consecuencia, tanto el fondo como la superficie libre se ven alteradas ([Cao et al., 2004](#); [Wu and Wang, 2008](#)), modificando importantemente las predicciones con respecto a modelos simplificados de flujo de agua. Por lo tanto, es necesario introducir el lecho móvil en modelos transitorios de transporte de sedimentos.

Las formulaciones clásicas de carga de fondo han sido ampliamente utilizadas en ríos y canales artificiales con resultados aceptables ([Schmocker y Hager, 2009](#)). Sin embargo, la mayoría de ellas fueron desarrolladas en condiciones ideales o de flujo uniforme y estacionario ([Meyer-Peter y Müller, 1948](#); [Engelund y Fredsoe 1982](#)), lo que las hace no válidas bajo circunstancias de flujo transitorio (por ejemplo, el flujo en la rotura de presa). En estos casos, la concentración de sedimentos en las capas inferiores puede ser importante ([Fraccarollo y Capart, 2002](#)), por lo que fórmulas como las propuestas por [Yalin \(1963\)](#), [Wilson \(1966\)](#) y [Cheng \(2002\)](#), desarrolladas bajo condiciones transporte de sedimentos intensas, tienen un especial interés de estudio.

En la literatura existen trabajos que han tratado de aproximar los de la carga de fondo en el flujo transitorio usando ecuaciones empíricas clásicas. Por ejemplo, [Wu y Wang \(2007\)](#)

proponen incluir un factor de escala en el efecto de cizalla sobre el fondo reflejado en la formulación de transporte de fondo dada por van Rijn (1984), aplicable a bajas tasas de transporte de sedimentos. Este factor es ajustado empíricamente para conseguir resultados aceptables en dos experimentos singulares de rotura de presa (tests de Taipei y Louvain-la-Neuve) (Capart y Young, 1998; Fraccarollo y Capart, 2002; Wu y Wang, 2007). Sin embargo, no existe certeza sobre la idoneidad de elección de las fórmulas de transporte de fondo, pudiendo ser otras mejor acertadas en la reproducción de las formas de lecho y/o la superficie libre del flujo.

El objetivo de este trabajo es realizar un estudio comparativo entre diferentes formulaciones de carga de fondo (García, 2008), y su efecto en transitorios con lecho móvil, tomando como caso de estudio la rotura de presa, a través de la modificación empírica propuesta por Wu y Wang (2007). Para ello se emplean las ecuaciones de Saint-Venant para lecho móvil desarrolladas por Wu y Wang (2007), las cuales se resuelven mediante el uso de un esquema de volúmenes finitos.

2. Modelo hidráulico con lecho móvil

2.1 Ecuaciones de gobierno

El modelo unidimensional promediado verticalmente que aplica en este trabajo se puede encontrar en el trabajo de Wu y Wang (2007). Se trata de un modelo hidráulico de transporte de sedimentos, donde la carga de fondo es modelada a través de una ecuación de continuidad. La ecuación general de continuidad del flujo es

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{1-p'_m} \left[B(E-D) + \frac{1}{L} (Q_{b^*} - Q_b) \right], \quad [1]$$

donde A es el área transversal del canal, Q es el caudal del flujo de agua, p'_m es la porosidad del sedimento de fondo, B es la anchura del canal, E y D son, respectivamente, los flujos de entrada y depósito del sedimento del fondo al fluido, L es la longitud de equilibrio del transporte de sedimentos, Q_{b^*} es el caudal de la carga de fondo de equilibrio, Q_b es el caudal de la carga de fondo actual, t es la variable temporal y x la espacial. La ecuación de cantidad de movimiento es dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) = & -gA \frac{\partial z_s}{\partial x} - \frac{1}{2} gh^2 \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} - g \frac{n^2 Q |Q|}{AR^{4/3}}, \\ & - \frac{\rho_s - \rho_w}{\rho} U \left(1 - \frac{C_t}{1-p'_m} \right) \left[B(D-E) + \frac{1}{L} (Q_b - Q_{b^*}) \right], \end{aligned} \quad [2]$$

donde z_s es la altura total de la superficie libre, h es la altura relativa de la lámina de libre, ρ es la densidad del fluido, n es el factor de rugosidad de fondo de Manning, R es el radio

hidráulico, ρ_s y ρ_w son, respectivamente, la densidad de las partículas sólidas y la densidad del agua, U es la velocidad del flujo y C_t es la concentración total de sedimentos. La densidad del fluido se ve afectada por la mezcla de sedimentos en suspensión, por lo que se aproxima por $\rho_s C_t + \rho_w (1 - p'_m)$. La conservación de la masa de sedimento suspendido viene dada por la siguiente ecuación de continuidad

$$\frac{\partial AC}{\partial t} + \frac{\partial QC}{\partial x} = B(E - D), \quad [3]$$

donde C es la concentración de sedimentos en suspensión. La carga de sedimentos transportados en la capa del fondo es aproximada por una ecuación de continuidad tal que

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Q_b}{u_b} \right) + \frac{\partial Q_b}{\partial x} = \frac{1}{L} (Q_{*b} - Q_b), \quad [4]$$

donde u_b es la velocidad a la que se mueve la carga de fondo. Esta variable, por simplicidad, se puede aproximar a la velocidad del flujo (Wu y Wang, 2007).

Por último, la actualización de la capa de sedimentos de fondo se rige por la siguiente ecuación

$$(1 - p'_m) \frac{\partial A_b}{\partial t} = B(D - E) + \frac{1}{L} (Q_b - Q_{*b}), \quad [5]$$

donde A_b es el área de la capa de sedimentos que se puede movilizar.

2.2 Interacción de fondo

Los modelos hidráulicos de lecho móvil, por lo general, requieren de relaciones empíricas para la definición de los términos de interacción con la capa móvil de sedimento. En la literatura se pueden encontrar distintas propuestas de aproximación de estos términos, que en su mayoría involucran la velocidad de sedimentación de las partículas y la concentración actual y de equilibrio cerca del fondo.

Según Wu y Wang (2007) los flujos de entrada E y depósito D de sedimentos en la interacción de la capa de fondo y el flujo son $D = w_s c_a$ y $E = w_s c_{a^*}$ respectivamente, donde w_s es la velocidad de las partículas en el seno del fluido, c_a es la concentración actual cerca del fondo y c_{a^*} la concentración de equilibrio cerca del fondo. En el seno del fluido, la concentración de sedimentos ejerce un efecto notable sobre la densidad de la mezcla, alterando indirectamente otras características del flujo, por ejemplo w_s . Así, según Richardson y Zaki (1954), w_s es

$$w_s = w_{s0} (1 - C_t)^m, \quad [6]$$

donde w_{s0} es la velocidad de sedimentación de las partículas en agua clara y m es un factor empírico, aproximadamente 4. A falta de datos experimentales, w_{s0} se calcula utilizando la expresión de Zhang y Xie (1993)

$$w_{s0} = \left[(13.95 \nu / d)^2 + 1.09 (\rho_s / \rho - 1) g d \right]^{0.5} - 13.95 \nu / d, \quad [7]$$

donde ν es la viscosidad cinemática del fluido, g es la aceleración de la gravedad y d el diámetro de las partículas.

El término c_a se puede relacionar directamente con la concentración del sedimento en suspensión, de forma que $c_a = \alpha C$, donde α es el ratio entre la concentración de sedimentos cerca del fondo y la media de los sedimentos en suspensión. Según Cao et al. (2004)

$$\alpha = \min \left[\alpha_0, (1 - p'_m) / C \right], \quad [8]$$

donde la restricción física introducida por Wu y Wang (2007), por la que c_a no puede ser superior a la concentración del sedimento de fondo, es considerada.

El término L es aproximado por la mayor de las longitudes de equilibrio entre la de la carga de fondo L_b y la del transporte suspendido (Wu y col., 2004), siendo $L = \max[L_b, Q / (B \alpha w_s)]$.

2.3 Esquema numérico

En este trabajo se utiliza el esquema numérico propuesto por Wu y Wang (2007). El sistema de ecuaciones se resuelve en la malla unidimensional mediante el uso de volúmenes finitos, siguiendo un esquema de Godunov para la solución general del problema de Riemann (Toro, 2001). Los flujos se calculan usando el esquema 'upwind' de primer orden propuesto por Ying et al. (2004).

3. Relaciones empíricas

La carga de fondo y la concentración de equilibrio cerca del fondo son frecuentemente aproximadas por formulaciones derivadas de experimentos en laboratorio u observaciones a escala natural. Wu y Wang (2007) evalúan el uso de las ecuaciones de van Rijn (1984). Sin embargo, en este trabajo se presenta un análisis general, considerando una amplia gama de formulaciones clásicas.

3.1 Formula de van Rijn

Las formulaciones que propone van Rijn (1984) fueron estimadas partiendo de datos experimentales con el uso de partícula de sedimento de 0.2 mm a 2 mm de diámetro. c_{a*} es aproximada por

$$c_{a*} = \min \left(0.015 \frac{dT^{1.5}}{k_s D_*^{0.3}}, 1 - p'_m \right), \quad [9]$$

donde T es un parámetro que cuantifica el transporte de sedimentos, k_s es la rugosidad de fondo ($=\max[2d, 0.005h]$) y D_* es el diámetro adimensional de las partículas ($=d[(\rho_s/\rho-1)g/v^2]^{1/3}$). La restricción física introducida por Wu y Wang (2007) es también considerada. T se define como $\tau_b/\tau_c - 1$, donde τ_b y τ_c son, respectivamente, la tensión de fondo ejercida por el fluido y la tensión crítica o umbral de fondo por la que los sedimentos comienzan a movilizarse. Ambas expresiones son calculadas como

$$\tau_c = \Theta_c (\rho_s - \rho) g d, \tau_b = \rho g R, \quad [10]$$

donde Θ_c es el parámetro de Shields, calculado en este trabajo según Wu y Wang (1999) en función de D_* .

El caudal de la carga de fondo es dado por (van Rijn, 1984)

$$q_{b*} = 0.053 \left(g \frac{\rho_s - \rho_w}{\rho_w} \right)^{0.5} \frac{d^{1.5} T^{2.1}}{D_*^{0.3}}, \quad [11]$$

donde $q_{b*} = Q_{b*}/B$. Sin embargo, ya que estas fórmulas fueron calibradas en situaciones experimentales de bajas tasas de transporte de sedimentos, Wu y Wang (2007) proponen una modificación empírica. A través de la modificación de la densidad del fluido en el término τ_c , los autores consiguen extender su aplicación a casos con altas tasas de transporte. Según las observaciones de Fraccarollo y Capart (2002), la concentración de sedimentos cerca del fondo alcanzan valores cercanos a $C=0.6$. Introduciendo esta modificación en la densidad del fluido, el parámetro T queda como

$$T = k_t \frac{\tau_b}{\tau_c} - 1, \quad [12]$$

donde $k_t = 1 + 1.5\rho_s/\rho_w$. Este parámetro empírico eleva el ratio entre la tensión en el fondo y la tensión crítica, por lo que se aumentan los valores de transporte de sedimento. Esta modificación empírica, con base física, es utilizada en adelante para evaluar las demás formulaciones clásicas de carga de fondo consideradas en este trabajo.

3.2 Formula de Meller-Peter-Müller

Bajo condiciones uniformes de flujo en lechos de arena gruesa y grava, Meyer-Peter y Müller (1948) proponen la siguiente formulación para la carga de fondo

$$q_{b*} = 8 \left(g \frac{\rho_s - \rho_w}{\rho_w} \right)^{0.5} (\tau_b - \tau_c)^{3/2}. \quad [13]$$

A pesar de ser una fórmula muy extendida en la predicción del transporte de sedimentos fluvial y costero, las condiciones bajo las que se derivaron los experimentos hacen que su uso sea cuestionable. Para hacerla extensible al caso de la rotura de presa introducimos el factor empírico k_t (Wu y Wang, 2007) tal que

$$q_{b*} = 8 \left(g \frac{\rho_s - \rho_w}{\rho_w} \right)^{0.5} \tau_c^{3/2} \left(k_t \frac{\tau_b}{\tau_c} - 1 \right)^{3/2} \quad [14]$$

3.3 Formula de Yalin

Tomando adicionalmente los datos experimentales de Einstein (1950) para diámetros de sedimento entre 0.8 mm y 28.6 mm, Yalin (1963) propone evaluar la carga de fondo usando la siguiente ecuación

$$q_{b*} = 0.635 \left(g \frac{\rho_s - \rho_w}{\rho_w} \right)^{0.5} \tau_b^{3/2} \left(1 - \frac{\ln(1 + aT)}{aT} \right)^{3/2} T \quad [15]$$

donde $a = 2.45(\rho_s/\rho_w)^{0.4} \tau_c^{0.5}$ y T es definido por la ecuación (12).

3.4 Formula de Wilson

Wilson (1966) modifica la fórmula aportada por Meyer-Peter y Müller (1948) evaluando casos experimentales con altas tasas de transporte de sedimentos. Así, la ecuación (17) es modificada por un factor de escala, tal que

$$q_{b*} = 12 \left(g \frac{\rho_s - \rho_w}{\rho_w} \right)^{0.5} \tau_c^{3/2} \left(k_t \frac{\tau_b}{\tau_c} - 1 \right)^{3/2} \quad [16]$$

3.5 Formula de Engelund y Fredsøe

La fórmula clásica propuesta por Engelund y Fredsøe (1976) es modificada aquí introduciendo el factor k_t , siendo

$$q_{b*} = 18.74 \left(g \frac{\rho_s - \rho_w}{\rho_w} \right)^{0.5} \tau_c^{3/2} \left(k_t \frac{\tau_b}{\tau_c} - 1 \right) \left[\left(k_t \frac{\tau_b}{\tau_c} \right)^{1/2} - 0.7 \right] \quad [17]$$

3.6 Formula de Cheng

Mediante el uso de la función exponencial en la evaluación de datos experimentales derivados en condiciones similares a aquellos anteriormente aportados por Meyer-Peter y Müller (1948) y Einstein (1950), Cheng (2002) propone la siguiente fórmula para la carga de fondo

$$q_{b*} = 13 \left(g \frac{\rho_s - \rho_w}{\rho_w} \right)^{0.5} \tau_c^{3/2} \left(k_t \frac{\tau_b}{\tau_c} \right)^{3/2} \exp \left(- \frac{0.05}{\tau_b^{3/2}} \right) \quad [18]$$

donde el factor k_t es introducido.

3.7 Formula de Lajeunesse

Lajeunesse (2010) presenta un estudio de flujo uniforme turbulento sobre lecho móvil llegando a un resultado similar al propuesto por Engelund y Fredsøe (1976). La fórmula es

$$q_{b*} = 10.6 \left(g \frac{\rho_s - \rho_w}{\rho_w} \right)^{0.5} \tau_c^{3/2} \left(k_t \frac{\tau_b}{\tau_c} - 1 \right) \left[\left(k_t \frac{\tau_b}{\tau_c} \right)^{1/2} - 1 + \frac{0.025}{\tau_c^{1/2}} \right]. \quad [19]$$

4. Análisis de las formulaciones

4.1 Caso de estudio

En este trabajo consideramos los datos experimentales obtenidos en la Universidad de Taiwan (Capart y Young, 1998; Fraccarollo y Capart, 2002; Wu y Wang, 2007). El dispositivo experimental tiene 1.2 m de longitud, 0.2 m de anchura y 0.7 m de altura. La cerrada de la presa se sitúa en el centro de dispositivo, con una altura de agua de 10 cm aguas arriba y suelo seco aguas abajo. El suelo seco aguas abajo se modela tomando un valor ínfimo de altura de agua, evitando las singularidades en el modelo (Wu y Wang, 2007). Las características del sedimento son: $d=6.1$ mm, $\rho_s=1.048$ kg/m³ y $w_s=7.6$ cm/s. El tiempo de simulación es medido con respecto al tiempo de referencia $t_0=(h_0g)^{-0.5}$ donde h_0 es la altura de agua inicial aguas arriba. El paso de malla es 0.005 m y el incremento temporal 0.001 s.

4.2 Resultados

La figura 1 presenta los resultados del modelo hidráulico con las diferentes ecuaciones de carga de fondo consideradas en este trabajo, para un tiempo de rotura de $t=3t_0$. El modelo empleado por Wu y Wang (2007) se está considerado en la figura 1(a) usando las ecuaciones de van Rijn (1984). El uso de esta formulación da lugar a una sobreestimación mayor de la erosión del fondo en comparación a la obtenida usando otras fórmulas de carga de fondo. La ecuación de Meyer-Peter y Müller (1948) representa la mayor subestimación del perfil de erosión. Las fórmulas de Wilson (1966), Yalin (1963) y Engelund y Fredsøe (1976) arrojan el mejor resultado, ajustándose correctamente a la parte más baja del perfil de erosión en las figuras 1(a)-(b). Por el contrario, las formulaciones de Cheng (2002) y Lajeunesse (2010) muestran peores resultados (figura 1(c)).

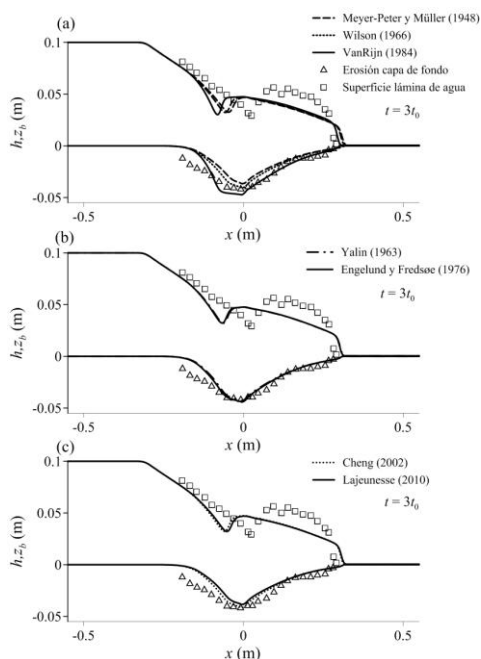


Figura 1. Efecto de las formulaciones de carga de fondo para $t=3t_0$.

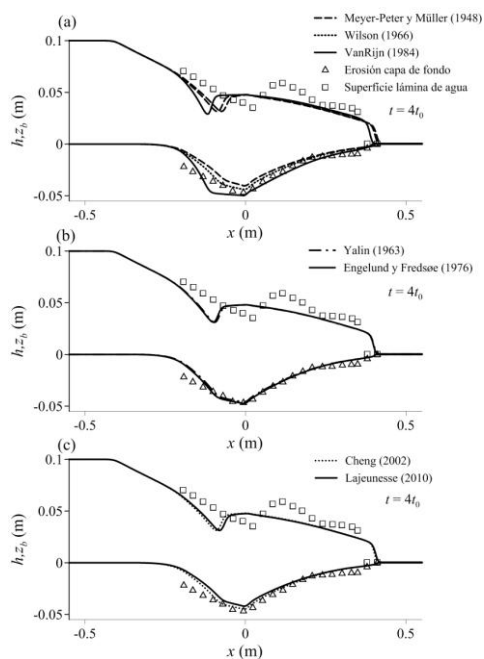


Figura 2. Efecto de las formulaciones de carga de fondo para $t=4t_0$.

En la figura 2 se recogen los resultados de las simulaciones numéricas para el caso de la rotura de presa transcurrido un tiempo $t=4t_0$. Al igual que en la figura 1, las tendencias en la predicción del lecho móvil se mantienen usando cada una de las formulaciones de carga de fondo. La sobreestimación del lecho con las ecuaciones de van Rijn (1984) se hace más evidente en la figura 2(a). Las formulaciones de Yalin (1963) y Engelund y Fredsøe (1976) siguen produciendo mejores resultados sobre el resto de fórmulas estudiadas [figura 2(b)].

5. Conclusiones

En este trabajo se han evaluado varias formulaciones clásicas de carga de fondo usando un modelo hidráulico de lecho móvil, aplicándolo a el caso de la rotura de presa (Wu y Wang, 2007). Los efectos dinámicos se han considerado en las formulaciones de carga de fondo mediante la introducción del factor empírico k_t propuesto por Wu y Wang (2007). Los resultados obtenidos demuestran que existen otras ecuaciones de carga de fondo que reproducen mejor el perfil de erosión que la ecuación de van Rijn (1984), originariamente propuesta por Wu y Wang (2007). Las formulaciones de Yalin (1963) y Engelund y Fredsøe (1976) muestran un mejor grado de ajuste de la solución del perfil de erosión simulado al ser comparado con datos experimentales. Sin embargo, la ecuación de carga de fondo

propuesta por Meyer-Peter y Müller (1948) presenta la mayor subestimación del perfil, quedando lejos de la solución final en los dos estados de tiempo simulados.

Finalmente se puede concluir que las formulaciones de carga de fondo derivadas del análisis de experimentos con altas tasas de erosión (Yalin, 1963; Engelund y Fredsøe, 1976), en consideración de factor empírico k_t , son potencialmente utilizables en este tipo de modelos. La formulación de Meyer-Peter y Müller (1948), a pesar de estar muy extendida en la comunidad científica, presenta resultados poco adecuados.

Agradecimientos

Este trabajo se integra en el proyecto CTM2013-45666-R, financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad, España. El primer autor ha sido financiado por la beca de doctorado FPU12/04795.

Referencias

[Bose, S. K., y Dey, S. 2009. Reynolds averaged theory of turbulent shear flows over undulating beds and formation of sand waves. Physical review E, 80\(3\), 036304.](#)

[Cao, Z., Pender, G., Wallis, S., y Carling, P. 2004. Computational dam-break hydraulics over erodible sediment bed. Journal of hydraulic engineering, 130\(7\), 689-703.](#)

[Capart, H., y Young, D. L. 1998. Formation of jump by the dambreak wave over a granular bed. J. Fluid Mech., 372, 165–187.](#)

[Cheng, N. S. 2002. Exponential formula for bedload transport. Journal of Hydraulic Engineering, 128\(10\), 942-946.](#)

[Einstein, H. A. 1950. The bed-load function for sediment transportation in open channel flows \(No. 1026\). US Department of Agriculture.](#)

[Engelund, F., y Fredsoe, J. 1976. A sediment transport model for straight alluvial channels. Nordic Hydrology, 7\(5\), 293-306.](#)

[Engelund, F., y Fredsoe, J. 1982. Sediment ripples and dunes. Annual Review of Fluid Mechanics, 14\(1\), 13-37.](#)

[Fraccarollo, L., y Capart, H. 2002. Riemann wave description of erosional dam-break flows. Journal of Fluid Mechanics, 461, 183-228.](#)

[García, M. H. 2008. Sedimentation engineering: processes, measurements, modeling, and practice \(No. 110\). ASCE Publications.](#)

Mateos, L., y Giráldez, J. V. 2005. Suspended load and bed load in irrigation furrows. Catena, 64(2), 232-246.

Meyer-Peter, E., y Müller, R. 1948. Formulas for bed-load transport. IAHR.

Richardson, J. F., y Zaki, W. N. 1954. The sedimentation of a suspension of uniform spheres under conditions of viscous flow. Chemical Engineering Science, 3(2), 65-73.

Schmocker, L., y Hager, W.H. 2009. Modelling dike breaching due to overtopping. Journal of Hydraulic Research, 47(5), 585-597.

Toro, E. F. 2001. Shock-capturing methods for free-surface shallow flows. Wiley.

Van Rijn, L. C. 1984. Sediment transport, part I: bed load transport. Journal of hydraulic engineering, 110(10), 1431-1456.

Vanoni, V. A., y Brooks, N. H. 1957. Laboratory studies of the roughness and suspended load of alluvial streams. California Institute of Technology Sedimentation Laboratory.

Wilson, K. C. 1966. Bed-load transport at high shear stress. Journal of the Hydraulics Division, 92(6), 49-59.

Wu, W., y Wang, S. S. 1999. Movable bed roughness in alluvial rivers. Journal of Hydraulic Engineering, 125(12), 1309-1312.

Wu, W., Vieira, D. A., y Wang, S. S. 2004. One-dimensional numerical model for nonuniform sediment transport under unsteady flows in channel networks. Journal of Hydraulic Engineering, 130(9), 914-923.

Wu, W., y Wang, S. S. 2007. One-dimensional modeling of dam-break flow over movable beds. Journal of hydraulic engineering, 133(1), 48-58.

Wu, W., y Wang, S. S. 2008. One-dimensional explicit finite-volume model for sediment transport. Journal of Hydraulic research, 46(1), 87-98.

Yalin, M. S. 1963. An expression for bed-load transportation. Journal of the Hydraulics Division, 89(3), 221-250.

Ying, X., Khan, A. A., y Wang, S. S. Y. 2004. Upwind conservative scheme for the Saint Venant equations. J. Hydraul. Eng., 130_10, 977-987.

Zhang, R., y Xie, J. 1993. Sedimentation research in China: Systematic selections. China and Power Press.