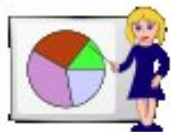


6. Ampliación: combinatoria y probabilidad



Definición

Si la cantidad de resultados de un experimento es pequeña es fácil contarlos, pero si es grande necesitaremos introducir determinadas fórmulas. Estas fórmulas son conocidas como **fórmulas combinatorias**. A continuación veremos las más utilizadas.

Fórmula de la multiplicación. Si hay m formas de hacer una cosa y n formas de hacer otra, entonces hay $m \times n$ formas de hacer ambas cosas.



Ejemplo

Un concesionario de automóviles dispone de tres modelos diferentes de una misma marca, León, Ibiza y Toledo. Cada uno de ellos se presenta en dos terminaciones diferentes, tres o cinco puertas. Un posible comprador, ¿entre cuántos acabados diferentes podrá elegir?

Tendremos:

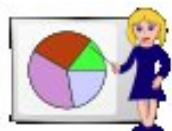
L2, L4, I2, I4, T2, T4 es decir $3 \times 2 = 6$ posibles elecciones diferentes.

Supongamos ahora que cada modelo se presenta con 3 colores diferentes, Rojo, Azul y Negro. Entre cuantos modelos diferentes podríamos ahora elegir? Fijemonos que cada una de las opciones anteriores generaría ahora 3 elecciones diferentes, o sea $6 \times 3 = 18$,

- L2R, L2A, L2N
- L4R, L4A, L4N
- I2R, I2A, I2N
- I4R, I4A, I4N

- T2R, T2A, T2N
- T4R, T4A, T4N

Podemos complicar el problema indefinidamente suponiendo por ejemplo que cada modelo se puede elegir con 5 tapicerías diferentes, etc ...



Definición

Necesitamos definir unos *nuevos números* que nos ayuden a simplificar la expresión de las fórmulas, a estos nuevos números los llamaremos **Números Factoriales**:

- $0! = 1.$
- $1! = 1.$
- $2! = 2 \times 1.$
- $3! = 3 \times 2 \times 1.$
- $m! = m \times (m - 1) \times (m - 2) \cdots 3 \times 2 \times 1.$



Observación

Fíjate que es fácil simplificar:

$$\frac{5!}{4!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 5.$$



Ejemplos

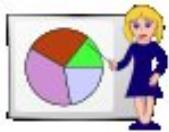
Simplifica las siguientes expresiones:

- $\frac{23!}{22!} = \frac{23 \cdot 22!}{22!} = 23.$
- $\frac{30!}{26!} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26!}{26!} = 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 = 6577720.$
- $\frac{100!}{98!} = \frac{100 \cdot 99 \cdot 98!}{98!} = 100 \cdot 99 = 9900.$



Observaciones

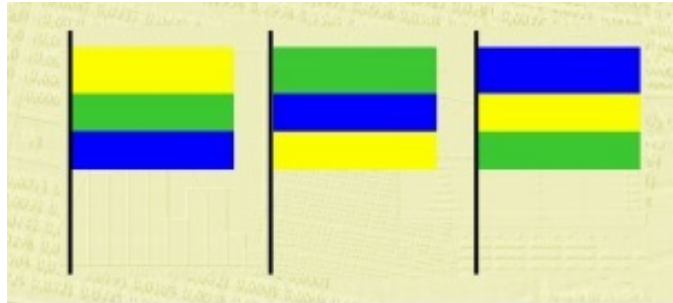
- Si queremos hacer el cálculo directamente sin simplificar, puede ser que el número $100!$ sea demasiado grande para una calculadora convencional y no nos permita realizar el cálculo. Prueba a realizar la operación $100!$ en tu calculadora.
- En la calculadora viene en la tecla $x!$.



Definición

Supongamos que tenemos telas de 4 colores diferentes: Rojo, Amarillo, Verde y Negro. Queremos saber el número de banderas tricolores diferentes, en franjas horizontales, que podemos formar sin repetir colores. Por ejemplo RAV será distinto de RVA y de RAN. Es decir si cambiamos el orden de los colores la bandera resultante será diferente y si introducimos un nuevo color también. Diremos que en este caso **influye el orden y la naturaleza del color**.

En principio podremos formar, por ser diferentes colores, 4 banderas, RAV, RAN, RVN y AVN. Ahora bien en cada una de ellas podremos permutar los colores obteniendo banderas diferentes. Veamos:



- RAV me genera RVA, ARV, AVR, VAR, VRA en total 6
- RAN me genera RNA, ARN, ANR, NRA, NAR en total 6
- RVN me generara en total 6
- AVN me generara en total 6

Si sumamos obtendremos 24 banderas diferentes, bien por la naturaleza de sus colores, bien por el orden de los mismos.

Ahora queremos extender este procedimiento al caso general.

Llamaremos **Variaciones** de n elementos tomados de m en m ($n > m$), al número de subconjuntos de orden m elementos que se puede formar con los n elementos (sin que ninguno de los n elementos pueda aparecer más de una vez). Dos subconjuntos serán diferentes si se diferencian en algún elemento o en el orden de colocación.

$$V_{n,m} = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)(n-2) \cdots (n-m+1).$$



Observación

Fíjate que en el caso de las banderas tendremos:

$$V_{4,3} = \frac{4!}{(4-3)!} = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \text{ banderas.}$$

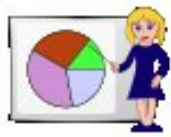


Ejemplos

En una empresa hay 12 empleados. ¿De cuántas formas se pueden elegir director y subdirector?

- En primer lugar nos preguntamos siempre **¿Influye o no influye el orden?**
- ¿Es lo mismo el empleado A de director y el B de subdirector, que el empleado B de director y el A de subdirector?. Evidentemente no. Luego influye claramente el orden y por tanto se trata de variaciones. Ahora solo nos queda aplicar la fórmula.

$$V_{12,2} = \frac{12!}{(12-2)!} = 12 \cdot 11 = 132 \text{ formas.}$$



Definición

Supongamos que tenemos ahora 4 licores diferentes: Ron, Ginebra, Whisky y Vodka. Queremos saber el número de combinados diferentes, que podemos formar utilizando 3 de ellos en cada combinado.

Fíjate que ahora un combinado de RGW será igual que RWG. Es decir ahora no influye el orden, únicamente dos combinados serán diferentes si los licores que lo componen son diferentes también. Luego es evidente que el número será menor que en el caso de variaciones. Por ejemplo RGW será distinto de RGV. Diremos que en este caso **no influye el orden**.

En principio podremos formar únicamente 4 combinados diferentes, RGW, RGV, RWV y GWV.

Ahora queremos extender este procedimiento al caso general.

Llamaremos **combinaciones** de n elementos tomados de m en m ($n > m$), al número de subconjuntos (sin ordenar) de m elementos que se puedan formar con los n elementos. Dos subconjuntos serán diferentes únicamente si se diferencian en algún elemento.

$$C_{n,m} = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}.$$

En el ejemplo de los licores tendremos

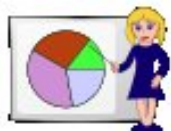
$$C_{4,3} = \binom{4}{3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{4!}{3!} = 4 \text{ licores.}$$



Ejemplo

Una empresa textil vende sus telas en lotes de 3 rollos. Sabemos que dispone de 11 tipos de estampados diferentes, ¿cuántos posibles lotes puede ofrecer?

$$C_{11,3} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{3!} = 165 \text{ lotes.}$$



Definición

Un caso particular de las variaciones es cuando los elementos se pueden repetir. Supongamos que en el caso de las banderas pudiéramos formar el RRR, RRA, RAR, ...

Llamaremos **variaciones con repetición** de n elementos tomados de m en m ($n > m$), al número de subconjuntos de orden m elementos que se pueden formar con los n elementos, pudiendo cada uno de ellos aparecer repetido una o varias veces.

$$RV_{n,m} = n^m.$$

En el caso de las banderas tendríamos ahora 4 elementos tomados de 3 en 3 donde se pueden repetir los colores.

$$RV_{4,3} = 4^3 = 64.$$

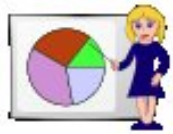


Ejemplos

¿De cuántas formas se puede cumplimentar una quiniela de 15 resultados?

Tenemos tres símbolos 1, X, 2, para ir colocando 1,1,1,1,1,1,...,1,1,1 otra diferente será X,1,1,...,1,1,1 y así sucesivamente. Luego se trata de variaciones con repetición de 3 elementos tomados de 15 en 15.

$$RV_{3,15} = 3^{15} = 14348907 \text{ formas.}$$



Definición

Otro caso particular de las variaciones es cuando entran todos los elementos (la naturaleza de los elementos no cambia). Por ejemplo, ¿de cuántas formas se pueden colocar 7 personas en una fila?

Llamaremos **permutaciones** de orden n a las distintas ordenaciones que se pueden tomar con n elementos distintos.

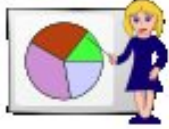
$$P_n = n!$$

En el caso de la cola tendríamos $P_7 = 7! = 5040$ formas.



Observación

Fíjate que coincide con las variaciones $V_{7,7} = 7!$



Definición

Supongamos ahora que tenemos 10 libros diferentes y los queremos colocar en una estantería. ¿De cuántas formas diferentes se podrían colocar? Evidentemente se trataría de permutaciones de 10 elementos $10! = 3628800$. Pero supongamos ahora que un libro se repite 3 veces y otro libro se repite 2 veces. ¿Que pasaría ahora? Evidentemente parece que saldrán menos formas diferentes de ordenarlos ya que no voy a poder diferenciar las permutaciones de los libros que están repetidos. Supongamos que tenemos los libros A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, ahora bien si se repiten 2 libros, el primero 3 veces y el segundo 2 veces tendremos, A, A, A, B, B, C, D, E, F, G.

Llamaremos **permutaciones con repetición** de orden n a las distintas ordenaciones que se pueden obtener con n elementos de los cuales uno se repite n_1 veces, otro se repite n_2, \dots, n_k .

$$P_n^{n_1, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdots n_k!}.$$

En el caso de los libros tendremos:

$$P_{10}^{3,2} = \frac{10!}{3! \cdot 2!} = 302400 \text{ formas.}$$



Ejercicios

Ejercicio 1. Un determinado modelo de automóvil se fabrica con dos tipos de motores: diésel y gasolina. En cinco colores: blanco, rojo, azul, verde y negro, y con tres terminaciones: básica, semilujo y lujo. ¿Cuántos modelos diferentes se fabrican?

Solución:

Serán en total: $2 \cdot 5 \cdot 3 = 30$ modelos diferentes.

Ejercicio 2. Un partido político tiene 18 candidatos para formar las listas de unas elecciones. ¿De cuántas formas diferentes se pueden ordenar a los 4 primeros de las listas?

Solución:

Se trata de obtener las variaciones sin repetición de 18 elementos tomados de 4 en 4:

$$V_{18,4} = \frac{18!}{(18-4)!} = 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 = 73440 \text{ formas.}$$

Ejercicio 3. En una clase con 30 alumnos, se van a elegir el delegado, el subdelegado y el secretario. ¿De cuántas formas se pueden asignar los tres cargos?

Solución:

Se trata de obtener las variaciones sin repetición de 30 elementos tomados de 3 en 3:

$$V_{30,3} = \frac{30!}{(30-3)!} = 30 \cdot 29 \cdot 28 = 24360 \text{ formas.}$$

Ejercicio 4. ¿Cuántos números de tres cifras se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5?

Solución:

Se trata de obtener las variaciones con repetición de 5 elementos tomados de 3 en 3:

$$VR_{5,3} = 5^3 = 125 \text{ números.}$$

Ejercicio 5. ¿Cuántos números de tres cifras se pueden formar con los dígitos del 0 al 9?

Solución:

Como ha de ser un número de tres dígitos, el primer dígito tiene que ser distinto de 0. Así que el primer dígito puede ser cualquier cifra del 1 al 9, y el segundo y el tercer dígito pueden ser cualquier cifra del 0 al 9.

Luego habrá $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ números.

Ejercicio 6. En España, las matrículas de los coches están representadas por 4 números, repetidos o no, seguidos de tres letras consonantes repetidas o no, exceptuando la ñ, q, ll y ch. ¿Cuántos coches se podrán matricular con este sistema?

Solución:

1. Formaciones diferentes de los 4 números: $VR_{10,4} = 10^4$.
2. Formaciones diferentes de las 26 letras: $VR_{26,3} = 26^3$.
3. Matrículas diferentes que se pueden formar $= 10^4 \cdot 26^3 = 175760000$.

Ejercicio 7. Pedro tiene que colocar en una estantería 24 libros y un diccionario. a) ¿De cuántas formas diferentes los puede colocar? b) ¿De cuántas maneras distintas los puede ordenar si quiere que el diccionario quede siempre el primero por la izquierda?

Solución:

1. a) Se trata de hallar las diferentes maneras de ordenar 25 elementos; por tanto, $P_{25} = 25! = 1,55 \cdot 10^{25}$ formas.
2. b) Se coloca el diccionario a la izquierda, y se trata de hallar las diferentes maneras de ordenar 24 elementos; por tanto, $P_{24} = 24! = 6,2 \cdot 10^{23}$ formas.

Ejercicio 8. ¿Cuántos números diferentes se pueden obtener si permutamos de todas las formas posibles las cifras del número 2323? Escríbelos.

Solución:

Se trata de obtener el número de permutaciones con repetición de 4 elementos que se repiten 2 veces cada uno:

$$P_4^{2,2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6 \text{ formas.}$$

Los números son los siguientes: 2233, 2323, 2332, 3223, 3232 y 3322.

Ejercicio 9. ¿De cuántas formas distintas se puede alinear ocho signos más y seis signos menos?

Solución:

Se trata de obtener el número de permutaciones con repetición de 14 elementos que se repiten 8 y 6 veces:

$$P_{14}^{6,8} = \frac{14!}{6! \cdot 8!} = 3003 \text{ formas.}$$

Los números son los siguientes: 2233, 2323, 2332, 3223, 3232 y 3322.

Ejercicio 10. Escribe el enunciado de un problema que se resuelva calculando las $P_6^{1,2,3}$.

Solución:

¿Cuántos números diferentes se pueden obtener al permutar de todas las formas posibles las cifras del número 888776? Para resolver el problema es necesario obtener el número de permutaciones con repetición de 6 elementos que se repite un elemento tres veces, otro elemento dos veces y un elemento una vez.

$$P_6^{3,2,1} = \frac{6!}{3! \cdot 2! \cdot 1!} = 35 \text{ resultados distintos.}$$