

5. Resolución de ejercicios tipo en las pruebas de acceso a la universidad

En aquellas Comunidades en que la teoría de la probabilidad forma parte del curriculum de las pruebas de acceso a la Universidad, los ejercicios de esta temática suelen ser de tres tipos:

- La aplicación de las fórmulas básicas (probabilidad de la unión de dos sucesos, probabilidad del suceso contrario,.....) ya sea a partir de conocer directamente la probabilidad de algunos de los sucesos implicados, ya sea a partir de su cálculo mediante la noción de probabilidad de Laplace (casos favorables entre casos posibles).
- Aplicar el Teorema de la Probabilidad Total.
- Probabilidad condicionada: Teorema de Bayes.

La siguiente lista de ejercicios es un compendio de problemas en los que se trabajan estos aspectos básicos de la teoría de la probabilidad.



Ejercicios

Ejercicio 1 (Junio 2013, Comunidad Valenciana). Un tarro contiene 25 caramelos de naranja, 12 de limón y 8 de café. Se extraen dos caramelos al azar. Calcula:

- La probabilidad de que ambos sean de naranja.
- La probabilidad de que ambos sean del mismo sabor.
- La probabilidad de que ninguno sea de café.

Solución:

a) El tarro contiene un total de 45 caramelos. Por tanto, la probabilidad de sacar un caramelo de naranja es $\frac{25}{45}$. Al extraer el segundo caramelo, el tarro contiene 44 caramelos. Si el primero que hemos extraído es de naranja, la probabilidad de que lo sea el segundo es $\frac{24}{44}$. Con estos datos, la probabilidad pedida es

$$P(\text{ambos caramelos sean de naranja}) = \frac{25}{45} \frac{24}{44} = \frac{10}{33} = 0.3030$$

- Razonando como en el apartado anterior, se tiene que

$$P(\text{ambos caramelos sean de limón}) = \frac{12}{45} \frac{11}{44}$$

y que

$$P(\text{ambos caramelos sean de café}) = \frac{8}{45} \frac{7}{44}.$$

Con esta información, se tiene

$$P(\text{ambos sean del mismo sabor}) = \frac{25}{45} \frac{24}{44} + \frac{12}{45} \frac{11}{44} + \frac{8}{45} \frac{7}{44} = \frac{788}{1980} = \frac{197}{495} = 0.3980.$$

c) $P(\text{ninguno sea de café}) = P(\text{ambos sean de naranja}) + P(\text{el primero sea de naranja y el segundo de limón}) + P(\text{el primero sea de limón y el segundo de naranja}) + P(\text{ambos sean de limón})$.

$$P(\text{ninguno sea de café}) = \frac{25}{45} \frac{24}{44} + \frac{25}{45} \frac{12}{44} + \frac{12}{45} \frac{25}{44} + \frac{12}{45} \frac{11}{44} = \frac{1332}{1980} = \frac{333}{495} = 0,6727.$$

Ejercicio 2 (Junio 2013, Comunidad Valenciana). Sabiendo que $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.4$ y $P(A/B) = 0.2$, contesta las siguientes cuestiones:

- Calcula $P(\bar{A} \cup B)$.
- Calcula $P(B/A)$.
- Calcula $P(\bar{A} \cap \bar{B})$.
- ¿Son independientes los sucesos A y B ? ¿Por qué?

Solución:

Teniendo en cuenta que $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0.2$, se obtiene

$$P(A \cap B) = 0.2 \cdot P(B) = 0.2 \cdot 0.4 = 0.08.$$

$$\text{a) } P(\bar{A} \cup B) = P(\bar{A}) + P(B) - P(\bar{A} \cap B).$$

Necesitamos calcular $P(\bar{A})$ y $P(\bar{A} \cap B)$.

La primera es inmediata ya que $P(\bar{A})$ es el suceso contrario del suceso A :

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.3 = 0.7.$$

Para calcular $P(\bar{A} \cap B)$ tenemos en cuenta que

$$B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$$

de donde se deduce que $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$, es decir

$$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0.3 - 0.08 = 0.32.$$

Con los datos anteriores obtenemos

$$P(\bar{A} \cup B) = 0.7 + 0.4 - 0.32 = 0.78.$$

$$\text{b) } P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0.08}{0.3} = 0.2667.$$

c) Aplicando las leyes de DeMorgan obtenemos

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B).$$

Hemos de calcular $P(A \cup B)$:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.3 + 0.4 - 0.08 = 0.62.$$

El resultado final es

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.62 = 0.38.$$

d) Para que los sucesos A y B sean independientes ha de cumplirse la igualdad $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

$$P(A \cap B) = 0.08 \neq P(A)P(B) = 0.3 \cdot 0.4 = 0.12.$$

Por lo tanto, los sucesos A y B no son independientes.

Ejercicio 3 (Julio 2013, Comunidad Valenciana). Una empresa de telefonía móvil ofrece 3 tipos diferentes de tarifas, A , B y C , cifrándose en un 45 %, 30 % y 25 % el porcentaje de clientes abonados a cada una ellas, respectivamente. Se ha detectado que el 3 %, 5 % y 1 % de los abonados a la tarifa A , B y C , respectivamente, cancelan su contrato una vez transcurrido el periodo de permanencia. Se pide:

- Si un cliente elegido al azar cancela su contrato una vez transcurrido el periodo de permanencia ¿cuál es la probabilidad de que estuviera abonado a la tarifa C ?
- ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente elegido al azar no cancele su contrato una vez transcurrido el periodo de permanencia?
- Si se selecciona un cliente al azar, ¿cuál es la probabilidad de que esté abonado a la tarifa A y decida cancelar su contrato una vez transcurrido el periodo de permanencia?
- Si se selecciona un cliente al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no esté abonado a la tarifa B y decida cancelar su contrato una vez transcurrido el periodo de permanencia?

Solución:

Denotamos por A el suceso “estar abonado a la tarifa A ”, por B el suceso “estar abonado a la tarifa B ”, por C el suceso “estar abonado a la tarifa C ” y por D el suceso “cancelar el contrato una vez transcurrido el periodo de permanencia”.

a) Hemos de calcular $P(C/D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)}$.

$P(D)$ la calculamos aplicando el teorema de la probabilidad total:

$$\begin{aligned} P(D) &= P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B) + P(C)P(D/C) = \\ &= 0.45 \cdot 0.03 + 0.30 \cdot 0.05 + 0.25 \cdot 0.01 = 0.031. \end{aligned}$$

Entonces

$$P(C/D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{P(C)P(D/C)}{P(D)} = \frac{0.25 \cdot 0.01}{0.031} \approx 0.0806.$$

b) Hemos de calcular $P(\bar{D}) = 1 - P(D) = 1 - 0.031 = 0.969$.

c) Hemos de calcular $P(A \cap D) = P(A)P(D/A) = 0.45 \cdot 0.03 = 0.0135$.

d) Se tiene la igualdad $D = (D \cap B) + (D \cap \bar{B})$, de donde se deduce que

$$P(D) = P(D \cap B) + P(D \cap \bar{B})$$

es decir,

$$\begin{aligned} P(D \cap \bar{B}) &= P(D) - P(D \cap B) = P(D) - P(B)P(D/B) = \\ &= 0.031 - 0.30 \cdot 0.05 = 0.031 - 0.015 = 0.016. \end{aligned}$$

Ejercicio 4 (Julio 2013, Comunidad Valenciana). El 50% de los jóvenes de cierta población afirma practicar el deporte A y el 40% afirma practicar el deporte B . Además, se sabe que el 70% de los jóvenes de dicha población practica el deporte A o el B . Si seleccionamos un joven al azar, se pide:

- La probabilidad de que no practique ninguno de los dos deportes.
- La probabilidad de que practique el deporte A y no practique el B .
- Si practica el deporte B , ¿cuál es la probabilidad de que practique el deporte A ?
- ¿Son independientes los sucesos “Practicar el deporte A ” y “Practicar el deporte B ”? ¿Por qué?

Solución:

Denotemos por A el suceso “practicar el deporte A ” y por “ B practicar el deporte B ”. A partir de los datos del problema, sabemos que $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.4$ y $P(A \cup B) = 0.7$.

a) Nos piden la probabilidad del suceso $\overline{A \cup B}$:

$$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.7 = 0.3.$$

b) Hemos de calcular $P(A \cap \overline{B})$. De la igualdad $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$, deducimos que

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B).$$

Necesitamos, por tanto, calcular $P(A \cap B)$. Para ello aplicamos la fórmula de la probabilidad de la unión:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

de la que deducimos que

$$P(A \cap B) = P(A \cup B) - P(A) - P(B) = 0.5 + 0.4 - 0.7 = 0.2.$$

Por tanto,

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0.5 - 0.2 = 0.3.$$

c) Hemos de calcular $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.2}{0.4} = 0.5$.

d) Para que los sucesos A y B sean independientes, ha de verificarse la igualdad

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Por el apartado anterior, sabemos que $P(A \cap B) = 0.2$. Por otra parte,

$$P(A)P(B) = 0.5 \cdot 0.4 = 0.2.$$

Por lo tanto, los sucesos A y B son independientes.

Ejercicio 5 (Junio 2013, Comunidad de Madrid). Al analizar las actividades de ocio de un grupo de trabajadores fueron clasificados como deportistas o no deportistas y como lectores o no lectores. Se sabe que el 55 % de los trabajadores se clasificaron como deportistas o lectores, el 40 % como deportistas y el 30 % lectores. Se elige un trabajador al azar:

a) Calcúlese la probabilidad de que sea deportista y no lector.

b) Sabiendo que el trabajador elegido es lector, calcúlese la probabilidad de que sea deportista.

Solución:

Denotamos por D el suceso “ser deportista” y por L el suceso “ser lector”. Del enunciado del problema obtenemos la siguiente información:

$$P(D \cup L) = 0.55, \quad P(D) = 0.4, \quad P(L) = 0.3.$$

a) Hemos de calcular $P(D \cap L)$.

De la expresión $P(D \cup L) = P(D) + P(L) - P(D \cap L)$ se deduce

$$P(D \cap L) = P(D) + P(L) - P(D \cup L) = 0.4 + 0.3 - 0.55 = 0.15.$$

b) Nos piden calcular la probabilidad del suceso D/L :

$$P(D/L) = \frac{P(D \cap L)}{P(L)} = \frac{0.15}{0.3} = 0.5.$$

Ejercicio 6 (Junio 2013, Comunidad de Madrid). Una tienda de trajes de caballero trabaja con tres sastres. Un 5% de los clientes atendidos por el sastre A no queda satisfecho, tampoco el 8% de los atendidos por el sastre B ni el 10% de los atendidos por el sastre C . El 55% de los arreglos se encargan al sastre A , el 30% al B y el 15% restante al C . Calcúlese la probabilidad de que:

- a) Un cliente no quede satisfecho con el arreglo.
- b) Si un cliente no ha quedado satisfecho, le haya hecho el arreglo el sastre A .

Solución:

Denotamos por NS el suceso “no quedar satisfecho” y por A el suceso “el arreglo lo ha hecho el sastre A ”.

a) Por el Teorema de la Probabilidad Total:

$$P(NS) = 0.55 \cdot 0.05 + 0.3 \cdot 0.08 + 0.15 \cdot 0.1 = 0.0665.$$

b) Nos piden calcular la probabilidad $P(A/NS)$:

$$P(A/NS) = \frac{P(NS/A)}{P(NS)} = \frac{0.05 \cdot 0.55}{0.0665} = 0.4135.$$

Ejercicio 7 (Junio 2013, Comunidad de Andalucía). El 55 % de los alumnos de un centro docente utiliza en su desplazamiento transporte público, el 30 % usa vehículo propio y el resto va andando. El 65 % de los que utilizan transporte público son mujeres, el 70 % de los que usan vehículo propio son hombres y el 52 % de los que van andando son mujeres.

- Elegido al azar un alumno de ese centro, calcule la probabilidad de que sea hombre.
- Elegido al azar un hombre, alumno de ese centro, ¿cuál es la probabilidad de que vaya andando?

Solución:

Denotaremos por A , B , C , H y M los sucesos “utiliza transporte público”, “utiliza su vehículo”, “va andando”, “es hombre” y “es mujer”, respectivamente.

Del enunciado del problema se deducen las siguientes probabilidades:

$$P(A) = 0.55, P(B) = 0.3, P(M/A) = 0.65, P(H/B) = 0.7 \text{ y } P(M/C) = 0.52.$$

- Los datos anteriores nos permiten aplicar el teorema de la probabilidad total:

$$\begin{aligned} P(H) &= P(A) \cdot P(H/A) + P(B) \cdot P(H/B) + P(C) \cdot P(H/C) = \\ &= 0.55 \cdot 0.35 + 0.3 \cdot 0.7 + 0.15 \cdot 0.48 = 0.4745. \end{aligned}$$

- Hemos de calcular la probabilidad $P(C/H)$:

$$P(C/H) = \frac{P(C \cap H)}{P(H)} = \frac{P(C) \cdot P(H/C)}{P(H)} = \frac{0.15 \cdot 0.48}{0.4745} = \frac{144}{949} \approx 0.15174.$$

Ejercicio 8 (Junio 2013, Comunidad de Andalucía). De los sucesos aleatorios independientes A y B se sabe que $P(A) = 0.3$ y que $P(\bar{B}) = 0.25$. Calcule las siguientes probabilidades.

- $P(A \cup B)$.
- $P(\bar{A} \cap \bar{B})$.
- $P(A/\bar{B})$.

Solución:

- Sabemos que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Necesitamos, por tanto, calcular $P(B)$ y $P(A \cap B)$:

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - 0.25 = 0.75,$$

y, al ser los sucesos A y B independientes, se tiene

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0.3 \cdot 0.75 = 0.225.$$

Con los datos anteriores obtenemos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.3 + 0.75 - 0.225 = 0.825.$$

b) Por las leyes de DeMorgan, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. Por tanto

$$P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.225 = 0.775.$$

c) Sabemos que

$$P(A/\overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})}.$$

De la igualdad $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$, obtenemos que $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$. Por tanto,

$$P(A/\overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(\overline{B})} = \frac{0.3 - 0.225}{0.25} = 0.3.$$